

## **РАЗДЕЛ II. ТЕОРИЯ ПОВЕДЕНИЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЯ**

### **глава 5.**

## **Производственная функция.**

### **§1. Производство.**

**Производство** – это процесс использования рабочей силы и оборудования в сочетании с природными ресурсами и материалами для изготовления необходимых товаров и выполнения услуг. Производственные услуги труда, капитала и природных ресурсов – это факторы процесса производства. Товары и услуги – это продукты процесса производства. Например, труд, используемый в производстве автомобилей, включает время, затраченное станочниками, мастерами, дизайнерами, менеджерами и всеми другими работниками. В вещественном выражении затраты капитала включают использование зданий, станков, оборудования и инструментов, применяемых работниками. Материалы – это сталь, пластик, стекло, провода, топливо и другие предметы, которые применяются работниками и используются в работе оборудования для создания конечного продукта фирмы – автомобиля. Иногда в качестве факторов производства рассматривают также предпринимательскую способность и информацию.

**Фирма** – это институциональное образование рыночной экономики, предназначенное для координации решений владельцев производственных ресурсов. В противоположность рынку, фирма представляет собой плановую и иерархическую систему, где все ключевые вопросы решаются собственником. Существуют государственные и частные фирмы. **Предпринимательская фирма** – фирма, находящаяся в собственности предпринимателя, который покупает на рынке все необходимые факторы производства. Естественно, целью такой фирмы является максимизация прибыли собственника, – остаточного дохода после осуществления всех

платежей владельцам факторов. Основные формы организации бизнеса в современной рыночной экономике – это корпорация (акционерное общество), индивидуальная фирма и товарищество. Корпорация – наиболее экономически значимая форма – находится во владении акционеров, которые приобрели доли собственности в корпорации. Эти доли называются **акциями**. Акционеры имеют право на долю доходов корпорации. Часть прибыли, выплачиваемая владельцу одной акции, называется **дивидендом**. Часть прибыли, не выплачиваемая в качестве дивидендов, называется нераспределённой прибылью. Владение и управление корпорацией явно отделены друг от друга. Служащие, директора, менеджеры корпорации нанимаются от имени акционеров.

Любая фирма в ходе своей деятельности должна решать ряд задач. Что и в каком количестве производить? Как производить свою продукцию? По какой цене продавать продукцию? Ответы на эти и другие вопросы находятся в микроэкономике, исходя из предположения, что целью фирмы является максимизация её прибыли. В реальной жизни существуют и другие цели фирмы: максимизация темпов роста фирмы, максимизация выручки и т.д. Но предположение о том, что фирма максимизирует свою прибыль, даёт основу для развития теории фирмы.

Изучение производства – первый шаг в формировании теории поведения производителя. Решения фирмы относительно предложения того или иного количества продукции на рынке, а также спроса на факторы производства зависят от технологии, используемой фирмой.

**Технология** – это определённый способ соединения (комбинации) факторов производства в едином производственном процессе, который определяет результирующий уровень выпуска при эффективном использовании факторов производства.

Здесь предполагается, что производственные решения делают использование факторов производства наиболее эффективным. Конечно, не все комбинации факторов являются эффективными. Однако если набор факторов производства используется эффективно, тогда увеличение выпуска возможно только при увеличении используемых факторов производства или за счёт изменения технологии.

Состояние уровня знаний в каждый данный момент времени налагает на производство любого товара технологическое ограничение. Делая свой выбор, фирма сталкивается со многими ограничениями. Это, например, могут быть финансовые ограничения. Природа налагает на фирмы технологические ограничения: лишь

некоторые комбинации вводимых ресурсов представляют собой практически осуществимые способы производства данного объёма выпуска, и фирма должна ограничить свой выбор технологически выполнимыми производственными программами. Конечно, технология улучшается, по мере того как новые и другие достижения применяются для усовершенствования производственных процессов. Улучшенная технология приводит к новым методам производства, использующим новые машины, более квалифицированный труд, различные новые процессы, что позволяет осуществить выпуск большего объёма продукции из данного количества ресурсов. Улучшенные технологии также позволяют создавать новые виды продукции.

Применение новой технологии помогает потребителям справляться с проблемой дефицита путём повышения производительности работников, оборудования, земельных участков. В последние годы развитие новых технологий привело к появлению компьютеров, которые дают возможность справляться со своими обязанностями. Повышая таким образом производительность работников, компьютеры заключающие в себе новую технологию, способствуют производству большего объёма продукции при использовании данного количества труда и оборудования.

Самым простым и наиболее общим способом описания технологии фирмы является производственная функция, которая определяет максимально возможный уровень выпуска при данном количестве факторов производства и данной технологии:

$$(5.1) \quad y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ где}$$

$y$  – количество продукции, выпускаемое фирмой за определённый период времени;

$x_1$  – количество затрат первого фактора производства за тот же период времени;

$x_2$  – количество затрат второго фактора производства за тот же период времени;

$x_n$  – количество  $n$  – го фактора производства за тот же период времени;

$n$  – количество факторов (ресурсов), используемых в производственном процессе за данный период времени.

В реальной жизни многие фирмы производят не один товар, а широкий ассортимент различных товаров. Однако в микроэкономическом анализе предполагается, что фирма выпускает однородную продукцию, т.е. один единственный вид товара. Кроме того, в хозяйственной практике каждый из факторов производства не является однородным. Так, например, работники могут иметь различную квалификацию, а оборудование различаться по степени эффективности. однако мы в

наших моделях будем абстрагироваться от этого факта, предполагая что каждый из используемых факторов производства является однородным по своему составу. Абстрагирование от качественных различий позволит нам осуществить количественный анализ производственного процесса на фирме.

Выражение (5.1) показывает, что объём выпуска продукции зависит от затрат производственных факторов. Например, производственная функция позволяет определить максимальное число персональных компьютеров, которое может быть произведено при существующей технологии на заводе определённых размеров и при определённом объёме трудовых ресурсов, занятых на сборочном конвейере. Следовательно, производственная функция отражает разнообразные способы соединения производственных факторов для производства определённого объёма продукции. Например, вино можно произвести трудоёмким ручным способом или капиталоемким способом с применением машинного оборудования для выжимки винограда. Отметим, что уравнение (5.1) применимо к определённой технологии (т.е. к определённому состоянию знаний о различных способах, которые могут использоваться для соединения производственных факторов в процессе выпуска продукции). Так как технология становится всё более прогрессивной, фирма может увеличить объём производства продукции при фиксированном наборе производственных факторов.

Термин «максимальный выпуск продукции» является очень важным с точки зрения производственной функции. Производственные функции не допускают расточительных или нерентабельных производственных процессов – они предполагают, что фирмы могут использовать каждое сочетание производственных факторов с максимальной эффективностью. Данное предположение о том, что производство всегда экономически эффективно, не всегда справедливо, но есть все основания ожидать, что стремящиеся к максимальной прибыли фирмы не будут расходовать ресурсы.

Введём в наш анализ ещё несколько предпосылок, или припишем производственной функции дополнительные свойства.

$$(5.2) \quad \begin{aligned} f(0, x_2, \dots, x_n) &= f(x_1, 0, x_3, \dots, x_n) = \dots = \\ &= f(x_1, \dots, x_{n-2}, 0, x_n) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0 \end{aligned}$$

Это свойство означает, что без наличия хотя бы одного из факторов производства нет выпуска.

$$(5.3) \quad \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

т.е. производственная функция является монотонно возрастающей по каждому из аргументов. Эта предпосылка означает, что увеличение затрат хотя бы одного из факторов производства приводит к росту количества выпускаемой продукции. Допустим также, что  $f(x_1, \dots, x_n)$  – непрерывная и дифференцируемая во всех точках функция. Предположим, наконец, что производственная функция является строго квазивогнутой.

Функция  $f$ , определенная на выпуклом множестве  $S$ , является квазивогнутой, если  $f(\vec{x}) \geq t$  и  $f(\vec{x}^*) \geq t$  подразумевает, что

$$(5.4) \quad \begin{aligned} f(\alpha \cdot \vec{x} + (1-\alpha) \cdot \vec{x}^*) &\geq t \quad \forall t \in R, \\ \vec{x}, \vec{x}^* \in S \text{ и } \alpha &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

$$(5.5) \quad \text{Если } f(\alpha \cdot \vec{x} + (1-\alpha) \cdot \vec{x}^*) > t, \text{ когда } \vec{x} \neq \vec{x}^* \text{ и } \alpha \in (0, 1), \text{ то мы}$$

скажем, что функция является строго квазивогнутой.

Заметим сразу, что производственная функция Кобба-Дугласа отвечает всем перечисленным выше предпосылкам, поэтому именно она наиболее часто используется в экономическом анализе. Для линейной производственной функции и функции Леонтьева некоторые из сделанных допущений не выполняются. Поэтому последние функции мы рассмотрим отдельно в §3 данной главы и обсудим их особенности. В целом же анализ процесса производства, издержек и предложения фирмы будет базироваться на свойствах производственной функции, указанных выше, поэтому знание данных предпосылок необходимо для понимания всего дальнейшего курса микроэкономики.

В теории производства фирмы принято выделять три производственных периода, которые отличаются друг от друга не с точки зрения их протяжённости во времени (это следует подчеркнуть особо), а с точки зрения того, как изменяется количество используемых фирмой факторов производства за тот или иной промежуток времени.

Как известно, в производственном процессе используется несколько видов факторов производства: труд, земля, капитал и др. Количество одних факторов производства (например, земли) может оставаться неизменным в течение достаточно длительного периода времени. Так, фермер не покупает новые земельные участки каждый месяц. Зато он может нанимать ежемесячно по одному дополнительному

рабочему для обработки имеющегося у него участка земли. Таким образом, количество трудозатрат будет изменяться в продолжение данного периода времени.

**Постоянные факторы производства** – это такие факторы, которые используются фирмой в одном и том же количестве в течение определённого периода времени, т.е. их количество не меняется с изменением объёма выпуска.

**Переменные факторы производства** – это такие факторы, которые используются фирмой в различных количествах в течение определённого периода времени, т.е. их количество изменяется и в силу этого изменяется объём выпускаемой фирмой продукции.

**Кратчайшим (мгновенным) периодом** производства называется такой период времени, в течение которого все факторы производства остаются постоянными по объёму. Однако данный период не представляет интереса ни для теоретического анализа, ни для хозяйственной практики, поэтому упоминание о нём крайне редко встречается в учебниках по экономике. Действительно, если не изменяется количество используемых факторов производства, значит, не изменяется и объём выпуска фирмы, так как последний зависит от количества отработанных человеко-часов, машино-часов и т.д. А раз ничего не изменяется, то и анализировать нечего. Иное дело, краткосрочный и долгосрочный периоды.

**Краткосрочным периодом** производства называется такой период времени, в течение которого несколько (или хотя бы один) из факторов производства являются постоянными, тогда как другие (или хотя бы один) факторы являются переменными. Таким образом, в краткосрочном периоде существуют как постоянные, так и переменные факторы производства.

**Долгосрочным периодом** производства называется такой период времени, в течение которого изменяется количество всех используемых в производственном процессе факторов производства. Таким образом, в долгосрочном периоде нет постоянных факторов производства; все факторы производства являются переменными.

Из этих определений видно, что долгосрочным периодом может быть и один месяц, если фирма за это время способна изменить затраты всех факторов производства. С другой стороны, год может рассматриваться как краткосрочный период, если в течение года хотя бы один из факторов производства остался неизменным по объёму.

## §2. Производственный процесс в краткосрочном периоде.

В действительности за короткий период времени одни виды затрат изменяются больше, чем другие. От степени, в которой изменяются различные виды затрат в течение короткого периода времени, зависит увеличение объёма выпуска. Например, в любой момент времени на фабрике есть определённая площадь производственных помещений и данное количество станков. В течение короткого времени производство может быть увеличено, если фабрика будет работать круглые сутки. Большее количество рабочих можно привлечь для работы в две или три смены каждый день. Так можно работать все семь дней в неделю, если необходимо, и существует большой спрос на производимую продукцию. В этом случае соотношение применяемого труда к капиталу увеличится.

Для простоты анализа предположим, что в течение некоторого периода времени фирма изменяет затраты только одного фактора производства – труда ( $L$ ). Затраты всех остальных факторов остаются неизменными. Тогда объём выпуска ( $y$ ) становится функцией от одной переменной – количества трудозатрат ( $L$ ):

$$(5.6) \quad y = f(L)$$

В теории краткосрочного периода объём выпускаемой фирмой продукции часто называют совокупным (общим) продуктом переменного фактора производства (в нашем случае – труда) и обозначают  $TP_L$ . Однако в микроэкономическом анализе важны не столько общие показатели, сколько средние и предельные величины.

**Средний переменный продукт фактора производства** – это отношение совокупного продукта переменного фактора к использованному количеству этого фактора. Например, средний продукт труда  $AP_L$  – это совокупный продукт, делённый на количество часов труда ( $L$ ):

$$(5.7) \quad AP_L = \frac{y}{L}, \text{ или } AP_L = \frac{TP_L}{L}.$$

Приведённая величина представляет собой **производительность труда** в форме объёма выпуска за каждый час труда.

**Пример: отслеживание производительности труда.** Отслеживание среднего продукта работников и сравнение его с аналогичным показателем на конкурирующих

предприятиях – жизненно важная задача руководителей. Автомобильная промышленность – наглядный пример этого. «Большая тройка» лучших американских автомобильных компаний уступила значительную часть рынка японским конкурентам в 70–е – 80–е годы. В 90–е годы наметились признаки того, что они возвращают назад утраченные позиции.

Ранние сигналы, указывающие на то, что потеря может произойти, поступали уже в начале 60–х годов. К 1965 г. «Тойота» достигла уровня производительности в изготовлении транспортных средств (количество автомобилей на одного работника) на 50% выше, чем у «большой тройки». А к 1975 г. её уровень производительности превысил американский на 160%.

Только в 90–х годах американские и европейские автомобильные компании стали догонять Японию по производительности труда. Всё это повторилось и в отраслях, производящих мотоциклы.

Английские производители мотоциклов «Нортон–Виллерс–Триумф» в конце 60–х начале 70–х годов обнаружили, что теряют свои некогда высокие позиции (по продажам, прибыли и высокой доле на рынке) перед лицом сильной конкуренции японских производителей – «Кавасаки», «Ямахи» и «Хонды». После того, как британское правительство инвестировало крупные суммы денег в отрасль без ощутимого результата, министр промышленности Эрик Варли пригласил консультационную фирму «Бостон консалтинг групп» для анализа проблемы. Исследование было заказано в апреле 1972 г. и завершено в течение 4-х месяцев.

Консультанты установили, что на каждого работника «Хонды» приходилась продукция, эквивалентная 200 мотоциклам в год. Норма выработки британского работника варьировала от 10 до 16 мотоциклов в год. Таким образом, каждый британский работник добавлял 9 тыс. долл. к используемым им материалам, а работник «Хонды» – около 40 тыс. долл. Уровень оплаты труда в Японии был выше, чем в Великобритании (13 долл. в час в сравнении с 11 долл. в час), однако затраты на единицу продукции оказались ниже, поскольку преимущества «Хонды» в производительности гораздо выше, чем повышенные затраты на заработную плату.

**Таблица 5–1**

<b>Показатели</b>	<b>Япония</b>	<b>Великобритания</b>
Добавленная стоимость за год одним работником	40 тыс. долл.	9 тыс. долл.



Затраты на оплату труда 1 работника в год	25 тыс. долл.	21 тыс. долл.
Соотношение данных показателей	1,6	0,43

Следовательно, японские работники создавали добавленную стоимость в 1,6 раза больше своей заработной платы. Британские работники создавали добавленную стоимость, составлявшую менее половины того, что им платили. Неудивительно, что британские фирмы, занимавшие половину американского рынка средних и крупных мотоциклов в 1969 г., к 1973 г. скатились до 9% рынка для средних моделей и 19% – для крупных моделей.

**Предельный продукт переменного фактора** (предельная производительность) оказывается очень важным для понимания производственного процесса.

Предположим, на фирме уже работают 6 человек. Допустим также, что эти 6 человек, все вместе, производят в день 90 единиц продукции. В данном примере 6 человек, работающие в течение 8-часового рабочего дня, – это общее количество труда, используемого фирмой за день. Обозначим его буквой  $L$ . 90 единиц продукции – это общий, или совокупный продукт труда, выпускаемый при заданном общем количестве трудозатрат. Обозначим общий продукт труда символом  $y$ . Предположим далее, что владелец фирмы нанял на работу ещё одного человека (седьмого рабочего). В результате дневной выпуск продукции –  $y$  – стал равен 98 единицам. Очевидно, что вследствие найма одного дополнительного работника общий продукт труда увеличится на 8 единиц ( $98 - 90 = 8$ ). В нашем примере 8 единиц – это и есть предельный продукт труда, т.е. продукт труда дополнительно нанятого работника, произведённый им за один рабочий день.

Предельный продукт труда ( $MP_L$ ) показывает, как изменится общий продукт труда при изменении трудозатрат на одну единицу и при прочих равных условиях. Он может быть легко подсчитан по следующей формуле:

$$(5.8) \quad MP_L = \frac{\Delta y}{\Delta L},$$

где  $\Delta y$  – изменение в общем продукте (в объёме выпуска продукции);  $\Delta L$  – изменение в затратах труда. В нашем примере

$$\Delta y = 98 - 90 = 8 \text{ и } \Delta L = 7 - 6 = 1.$$

Следовательно,  $MP_L = \frac{8}{1} = 8$ . Можно также сказать, что предельный продукт труда показывает производительность последнего нанятого работника. Отсюда его другое название – предельная производительность труда.

Если на предприятии работает не 8, а 800 или 1500 человек, тогда прирост трудозатрат на 1 единицу будет бесконечно малой величиной, и предельный продукт переменного фактора можно представить как первую производную производственной функции:

$$(5.9) \quad MP_L = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta y(L)}{\Delta L} = \frac{dy(L)}{dL}$$

**Закон убывающей предельной производительности переменного фактора производства** (во многих учебниках он именуется также законом убывающей отдачи переменного фактора). Этот закон был сформулирован ещё в XIX веке, и его смысл можно передать следующим образом. Если некоторые или хотя бы один из факторов производства, которые используются в производственном процессе, являются фиксированными в течение некоторого промежутка времени (например, количество станков предприятия может не изменяться в течение года), тогда предельная производительность переменных факторов производства либо сразу, либо начиная с определённого момента, непременно начнёт снижаться. В нашем случае переменным фактором производства является труд, так как мы изменяем количество затрачиваемого труда, нанимая дополнительных работников. Последовательное привлечение дополнительных работников при фиксированном количестве станков хотя и будет увеличивать выпуск продукции фирмы, однако этот прирост продукции от работы каждого следующего нанимаемого работника окажется меньше по сравнению с тем приростом продукции, который был получен фирмой от работы предыдущего нанятого ею работника. Это означает, что предельная производительность, т.е. продукт последнего нанятого работника (предельный продукт труда) убывает по мере увеличения числа работников на фирме.

Закон убывающей отдачи, к сожалению, не может быть доказан строго математически. Но в этом и нет большой нужды, поскольку понятие убывающей отдачи является частью повседневного опыта и языка. Когда говорят, что «у семи нянек дитя без глаза», то имеют в виду именно уменьшение пользы от каждой следующей няньки: все они имеют собственное мнение по поводу того, как воспитывать ребёнка, и

в конечном счёте только мешают друг другу. Действие закона убывающей предельной производительности можно проиллюстрировать на следующем примере.

Представьте себе, что у кого-либо из вас есть небольшой участок земли (например, 6 соток) и вы решили вырастить на нём картофель. Картошка выросла большая-пребольшая, и пришло время её выкапывать. Вы начали выкапывать, но заметили, что одному управиться с таким огородом довольно сложно. Вы зовёте на помощь своего друга Колю. Используя принцип специализации (вы копаете, а Коля собирает картошку, просушивает её на солнышке и складывает в мешки), вам, очевидно, удастся значительно повысить среднюю производительность труда, т.е. выпуск продукции в единицу времени, приходящийся на каждого работника. Это означает, что предельная производительность второго работника – Коли – возрастёт по сравнению с вашей предельной производительностью (ситуация, когда вы работаете в одиночку).

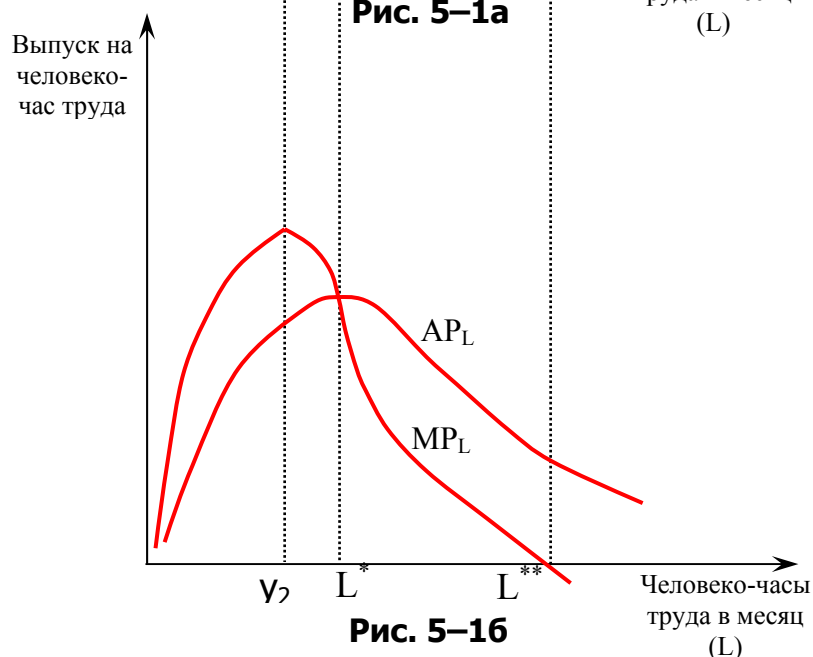
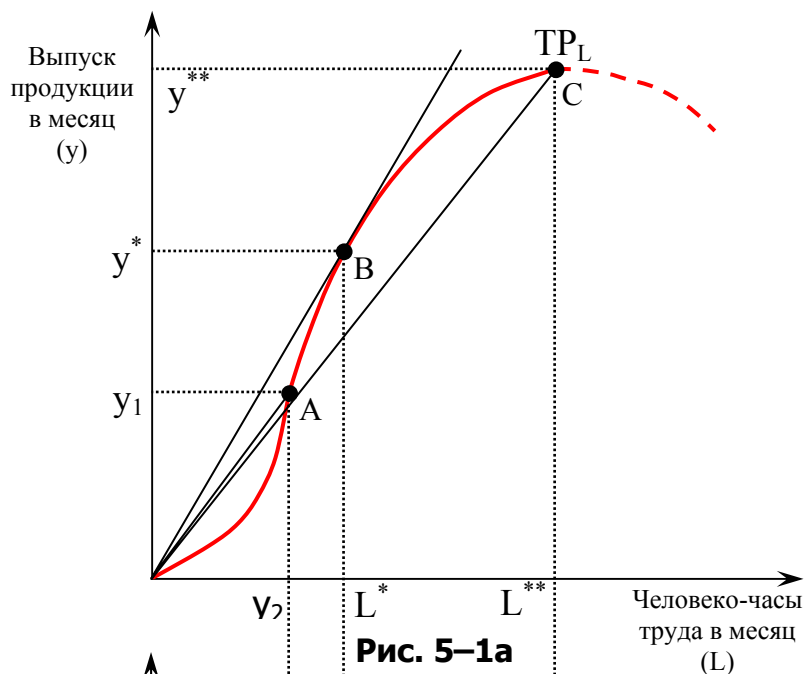
Увидев, что дело идёт быстрее, вы приглашает на свой огород друга Мишу, а затем ещё подругу Миши – Машу, потом Олю, Сашу, Витю, Виту и всех остальных приятелей. Вполне возможно, что предельный продукт труда Миши, а затем и Маши все ещё будет возрастать с учётом дальнейшей специализации и кооперации труда. Однако совершенно очевидно, что приезд на огород Оли, Саши, Вити, Виты и других ребят приведёт к снижению предельного продукта труда. Во-первых, у вас может не найтись такого количества лопат, и ребята будут простаивать без дела. Во-вторых, чем больше компания, тем больше разговоров. Начнутся бесконечные перерывы и анекдоты – тут уже не до работы! Если бы у вас было не 6, а 60 соток земли, ребята могли бы рассредоточиться и не общаться друг с другом. Но в том-то и дело, что количество земли у вас в данный момент времени фиксировано, а количество работников возрастает. Наконец, если на ваши фиксированные 6 соток вы пригласите 50 друзей, то велика вероятность того, что уменьшится не только предельный продукт труда, но и совокупный продукт, т.е. всё количество собранного картофеля, потому, что теснясь на шести сотках, 50 человек часть выкопанного урожая просто затопчут в землю.

Здесь нужно обратить особое внимание на два обстоятельства. Во-первых, закон убывающей предельной производительности действует только в том случае, если несколько или хотя бы один из используемых фирмой факторов производства (например, земля или капитал) остаются фиксированными в течение определённого периода времени. Если же все факторы производства являются переменными (т.е. их

количество изменяется), тогда этот закон перестаёт действовать. В самом деле, если бы в предыдущем примере мы могли изменить количество лопат, а затем и количество земли, засаженное картофелем, то всем пятидесяти ребятам нашлось бы дело и их производительность возросла бы.

Во-вторых, этот закон относится не только к убыванию предельной производительности труда. Аналогичным образом он действует применительно к любому другому фактору производства, являющемуся переменным. Например, если у вас фиксированы затраты труда, но при этом вы наращиваете количество сырья и материалов, используемых в процессе производства продукта, то материалоотдача от каждой дополнительной единицы затрат сырья будет снижаться.

**Графический анализ общего, среднего и предельного продуктов.** Кривая совокупного продукта отражает, как изменяется выпуск продукции при изменении одного из факторов, когда другие остаются постоянными. На рис. 5–1а изображена кривая совокупного продукта, отражающего соотношение между количеством



применяемого труда и объёмом продукции. Обратите внимание: кривая показывает, что максимально возможный выпуск продукции при постоянном количестве всех других факторов, может быть достигнут в точке C, когда количество часов труда в месяц равно  $L^{**}$ . Если применить большее количество часов труда, в соответствии с той частью кривой, которая обозначена пунктиром, производство продукции уменьшится. Естественно, точки, принадлежащие этой части кривой, не включаются в

производственную функцию, так как объём продукции, соответствующий этим точкам, может быть произведён с меньшими затратами труда и при том же количестве других факторов производства.

Можно построить кривые среднего и предельного продуктов, используя кривую совокупного продукта. Средний продукт труда можно определить, измерив наклон луча, исходящего из начала координат и проходящего через точку на кривой общего продукта. Так, на рис. **5–1а** тангенс угла наклона луча, проведённого из начала координат через точку  $A$ , равен  $\frac{y_1}{L_1}$ , т.е. среднему продукту при трудозатратах  $L_1$ .

Средний продукт труда достигает максимума при использовании количества часов труда, соответствующего точке касания луча, выходящего из начала координат, к кривой совокупного продукта. Это точка  $B$  на графике **а** (рис. **5–1**), в которой используется  $L^*$  часов труда в месяц при неизменных других факторах, и объём выпуска равен  $y^*$ . В этой точке средний продукт труда равен  $y^*/L^*$ , чем измеряется наклон луча  $OB$ . Наклон любого луча, проведённого через кривую совокупного продукта, соответствующий большему или меньшему, чем  $L^*$  использованию труда, будет меньше, чем в точке  $B$ . В этой точке, поэтому, средний продукт труда будет меньше, чем в точке  $B$ . Аналогично можно заключить, что средний продукт труда в точке  $C$ , соответствующий  $L^{**}$  единицам труда, меньше, чем в точке  $B$ , так как наклон луча  $OC$ , меньше, чем наклон луча  $OB$ . Проведя различные лучи через кривую совокупного продукта, и определив их наклон, можно увидеть, что средний продукт труда увеличивается до точки  $B$ , которой соответствует применение  $L^*$  часов труда, и потом начинает снижаться по мере увеличения применяемого труда.

Кривая среднего продукта показана на рис. **5–1б**. По вертикальной оси откладывается величина среднего продукта труда, измеряемая в единицах произведённой продукции за час труда.

Поскольку предельный продукт есть первая производная функции совокупного продукта, то мы можем измерить  $MP_L$  как тангенс угла наклона касательной, проведённой к данной точке кривой совокупного продукта.

Наклон касательной к каждой точке кривой общего продукта определяет изменение объёма выпуска продукции для очень малых изменений в затратах труда:

$\frac{dy}{dL}$ . Эта величина показывает предельный продукт каждого часа труда. Точка  $A$  – это точка перегиба кривой совокупного продукта, в которой изменяется вогнутость кривой. Наклон кривой совокупного продукта, а следовательно, и предельный продукт труда, увеличиваются до точки  $A$ ; после прохождения точки  $A$  эти величины начинают уменьшаться. В точке перегиба вторая производная производственной функции по  $L$  равна нулю. В этой точке первая производная имеет максимальное значение.

На рис. **5–16** кривая предельного продукта труда построена в той же системе координат, которая используется для кривой среднего продукта. Обратите внимание, что предельный продукт труда достигает своего максимума раньше, чем средний продукт. Предельный продукт снижается до нуля в точке  $L^{**}$  часов труда, в которой тангенс наклона кривой совокупного продукта равен нулю. Если производство продолжать после достижения точки  $C$ , объём выпуска будет сокращаться. У предельного продукта дополнительных затрат труда после точки  $L^{**}$  будет отрицательное значение.

Методически удобно объяснять динамику среднего и предельного продуктов переменного фактора, основываясь на конфигурации кривой совокупного продукта. На самом же деле вид кривых совокупного и среднего продуктов определяется из динамики предельного продукта. Эта последняя, в свою очередь, объясняется действием в краткосрочном периоде закона убывающей предельной производительности переменного фактора, речь о котором шла выше. На основе этого закона строится кривая  $MP_L$ , а кривая общего продукта воспроизводится из неё как первообразная функции. Форма кривой совокупного продукта при изменяющихся затратах труда и постоянных затратах других факторов отражает закон убывания предельной производительности. Предельный продукт труда увеличивается до точки  $A$ , потом начинает уменьшаться. В точке  $C$  совокупный продукт достигает максимума, а предельный продукт труда равен нулю.

Правило взаимосвязи между средними и предельными величинами в микроэкономике является чрезвычайно важным, так как будет использоваться и в других темах этого курса. Поэтому в данной главе мы остановимся на нём подробно и сформулируем в общем виде. В последующих главах мы будем использовать его уже без доказательства.

Средние и предельные экономические показатели связаны следующим образом. До тех пор, пока значение предельного показателя больше значения среднего показателя, последний возрастает. С того момента, когда значение предельного показателя становится меньше значения среднего показателя, последний начинает убывать. Значение предельного показателя равно значению среднего показателя в той точке, где функция, описывающая средний показатель, достигает своего экстремума (максимума или минимума).

Покажем это строго формально. Пусть  $f(x)$  – функция любого общего экономического показателя. В данном случае это производственная функция, показывающая зависимость совокупного (общего) продукта от количества трудовых затрат:  $TP_L = f(L)$ . Тогда функция любого среднего показателя может быть представлена в виде:

$$(5.10) \quad \frac{f(x)}{x}$$

В нашем конкретном случае это функция, показывающая зависимость величины среднего продукта от количества трудовых затрат:

$$(5.11) \quad AP_L = \frac{TP_L}{L} = \frac{f(L)}{L}$$

Наконец, любой предельный показатель представляет собой первую производную функции общего показателя:

$$(5.12) \quad \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

Применительно к рассматриваемой ситуации это функция, отражающая зависимость предельного продукта от количества трудовых затрат:

$$(5.13) \quad MP_L = TP'_L(L) = \frac{df(L)}{dL}$$

Функция любого среднего экономического показателя достигает экстремального значения в точке, где её первая производная равна нулю. Легко показать, что именно в этой точке значения среднего и предельного показателей совпадают:

$$(5.14) \quad \left( \frac{f(x)}{x} \right)'_x = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = 0$$

$$(5.15) \quad x^2 > 0 \Rightarrow f'(x) \cdot x - f(x) = 0$$



**(5.16)**  $\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{x}$ , что и требовалось доказать.

Функция среднего показателя (в нашем случае функция среднего продукта  $AP_L$ ) возрастает, когда её первая производная больше нуля:

$$\mathbf{(5.17)} \quad \left( \frac{f(x)}{x} \right)'_x > 0$$

Легко доказать, что в этой ситуации предельный показатель  $\frac{df(x)}{dx}$  больше среднего  $\forall x$ .

$$\mathbf{(5.18)} \quad \left( \frac{f(x)}{x} \right)' = \frac{f'(x) \cdot x - f(x) \cdot 1}{x^2} > 0$$

$$\mathbf{(5.19)} \quad f'(x) \cdot x - f(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > \frac{f(x)}{x}$$

Аналогично можно показать, что если предельный показатель меньше среднего, то функция среднего показателя убывает:

$$\mathbf{(5.20)} \quad \left( \frac{f(x)}{x} \right)'_x < 0$$

$$\mathbf{(5.21)} \quad \Rightarrow \frac{f'(x) \cdot x - f(x) \cdot 1}{x^2} < 0$$

$$\mathbf{(5.22)} \quad f'(x) \cdot x - f(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < \frac{f(x)}{x}$$

Эта взаимосвязь между средними и предельными величинами отражена на графике среднего и предельного продуктов труда (см. рис. **5–16**).

### **§3. Производственный процесс в долгосрочном периоде.**

В долгосрочном периоде у фирмы нет постоянных факторов производства; все факторы становятся переменными. Поэтому объём выпуска  $y$  предстаёт как функция от нескольких переменных:  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ . Иногда в экономическом анализе бывает удобно ввести дополнительную предпосылку о том, что фирма использует не  $n$ , а только два фактора производства, оба из которых являются переменными. В частности,

эта предпосылка становится необходимой, если мы хотим провести графический анализ производства в долгосрочном периоде.

Мы рассмотрели производственную функцию как возможный способ представления технологии. Для случая с двумя переменными факторами производства мы можем также дать графическое представление технологии в виде карты изоквант, которая является проекцией линий уровня производственной функции на плоскость  $(x_1, x_2)$ . См. рис. 5–2.

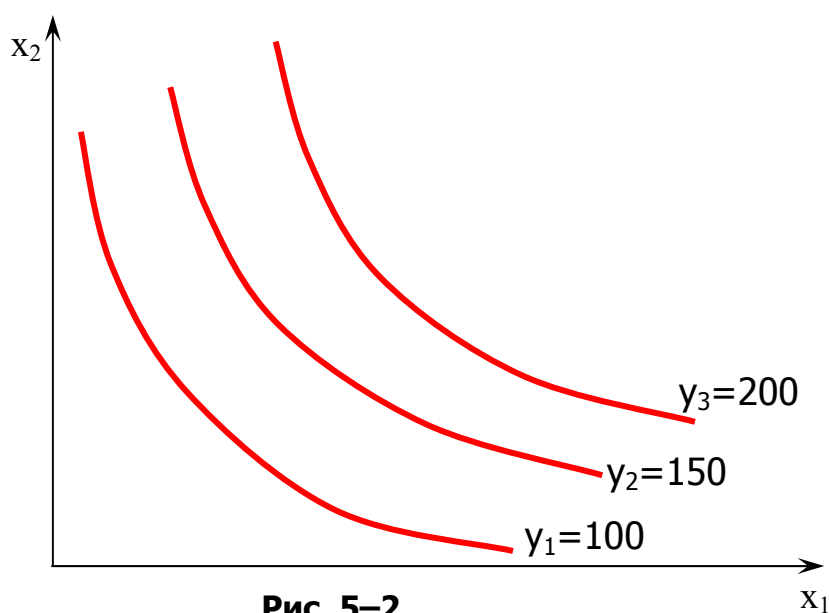


Рис. 5–2

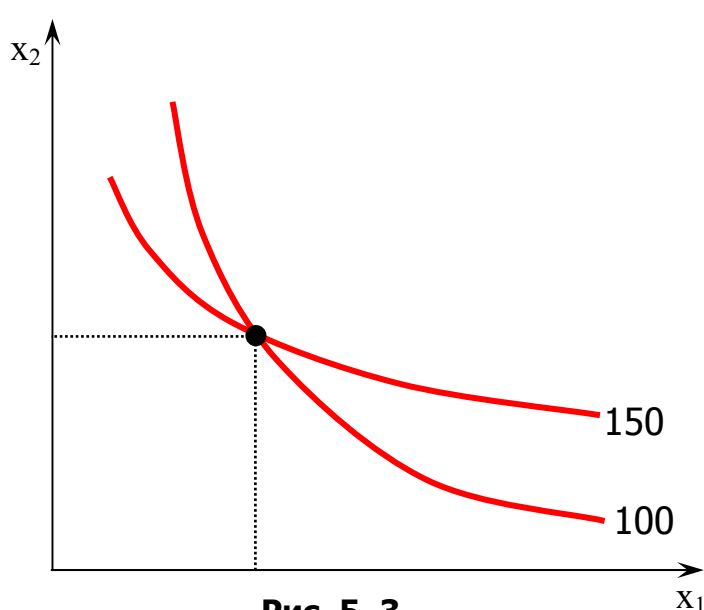
Изокванта показывает такие комбинации затрат двух факторов производства ( $x_1$  и  $x_2$ ), при которых производится одинаковый объём выпуска, например,  $y_1$ .

Математически:  $f(x_1, x_2) = y_1$ , где  $y_1$  – заданный объём выпуска, например,  $f(x_1, x_2) = 100$ .

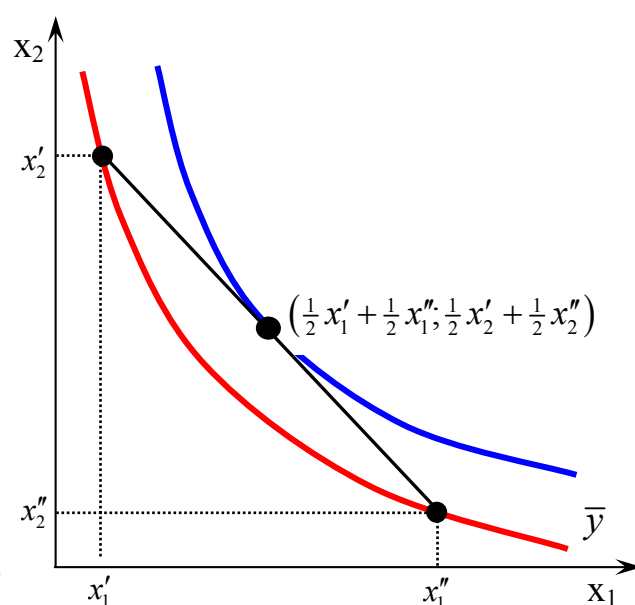
### Свойства изоквант.

1. Очевидно, что карта изоквант очень похожа на карту кривых безразличия. Однако в отличие от кривых безразличия каждая изокванта представляет **измеряемый и вполне определённый** уровень выпуска. В этом смысле теория производства является в большей степени кардиналистской, чем теория потребления. Поэтому мы гораздо в большей степени будем интересоваться формой изоквант и их взаимосвязью с производственной функцией, чем мы интересовались точной формой кривых безразличия.

2. Изокванты не пересекают друг друга. Предположим, что это не так и рассмотрим ситуацию, показанную на рисунке **5–3**. Из рисунка получается, что фирма может производить разное количество выпуска 100 ед. и 150 ед., используя одну и ту же комбинацию факторов производства. В реальной жизни это в принципе возможно, если производство не всегда осуществляется эффективно. Однако следует иметь в виду, что изокванты – это линии уровня производственной функции, а последняя, по определению, определяет максимально возможный уровень выпуска при данном количестве факторов производства. И не допускает неэффективного производственного процесса.



**Рис. 5–3**



**Рис. 5–4**

Следовательно, это свойство изоквант вытекает из определения производственной функции: если мы можем из данной комбинации факторов производства «выжать» 150 ед., то мы не станем производить всего 100 ед., так как это не максимально возможный выпуск и поэтому не описывается производственной функцией. Тот факт, что производственная функция является монотонно возрастающей, обеспечивает наличие у изоквант 3-го и 4-го свойства, а предположение о строгой квази-вогнутости производственной функции обеспечивает 5-е свойство (строгую выпуклость) изоквант.

3. Пусть производственная функция  $y = f(x_1, x_2)$  является монотонно возрастающей на всём интервале неотрицательных значений  $\vec{x}$ , тогда, чем дальше от начала координат (в северо-восточном направлении) расположена изокванта, тем более высокий уровень выпуска она представляет.

4. При монотонно возрастающей ПФ изокванты будут иметь отрицательный наклон.  $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_i} > 0$ , следовательно, если мы увеличим затраты первого фактора при фиксированных затратах 2-го фактора, то выпуск возрастет. А вдоль изокванты он постоянен. Значит, чтобы сохранить постоянный выпуск при увеличении затрат одного из факторов, затраты другого фактора нужно уменьшить.
5. Предположив строгую квази-вогнутость производственной функции, мы введём ещё одно свойство (самый частный случай) изоквант – их строгую выпуклость (см. рис **5–4**).

Строгая выпуклость изокванты означает, что если вы можете произвести  $\bar{y}$  единиц выпуска и при комбинации факторов  $(x'_1, x'_2)$  и при комбинации  $(x''_1, x''_2)$ , т.е. эти комбинации принадлежат одной изокванте  $\bar{y}$  (и это – разные комбинации:  $(x'_1, x'_2) \neq (x''_1, x''_2)$ ),

**(5.23)** тогда  $t \cdot x' + (1-t) \cdot x'' > \bar{y} \quad \forall t \in (0,1)$ .

Свойство строгой выпуклости называется также свойством уменьшающейся *MRTS* (при движении вправо по изокванте).

Пусть существует ПФ  $y = f(x_1, x_2)$ , тогда **норма технологического замещения** одного фактора производства другим показывает, на сколько единиц следует увеличить затраты второго фактора производства, если мы хотим уменьшить затраты первого фактора на 1 единицу, сохранив при этом неизменным объём выпуска.

$$(5.24) \quad RTS_{1,2} = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \bigg|_{y = y_{fix}}$$

При  $\Delta x_1 \rightarrow 0$  мы переходим к предельной норме технологического замещения

$$(5.25) \quad MRTS_{1,2} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \left( -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \right) = -\frac{dx_2}{dx_1} \bigg|_{y = y_{fix}}$$

***MRTS* и предельная производительность факторов производства.**

Предположим, что объём выпуска  $y$  является постоянной величиной, (т.е. все наборы затрачиваемых ресурсов расположены на одной изокванте). Тогда первый полный дифференциал функции  $y = f(x_1, x_2)$  тождественно равен нулю:

$$(5.26) \quad dy = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} dx_2 = 0.$$

Отсюда:

$$(5.27) \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 = -\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} dx_2$$

$$(5.28) \quad \frac{\partial f(x)/\partial x_1}{\partial f(x)/\partial x_2} = -\frac{dx_2}{dx_1} \Rightarrow MRTS = \frac{MP_1}{MP_2}$$

Определение  $MRTS$  через соотношение предельных продуктов факторов производства наполняет это понятие экономическим смыслом в отличие от первого определения (5.25), которое раскрывает нам геометрический смысл  $MRTS$  как тангенса угла наклона касательной к изокванте. Обратите внимание, что изокванта имеет отрицательный наклон и  $tg\alpha = \frac{dx_2}{dx_1}$  окажется отрицательной величиной. Но

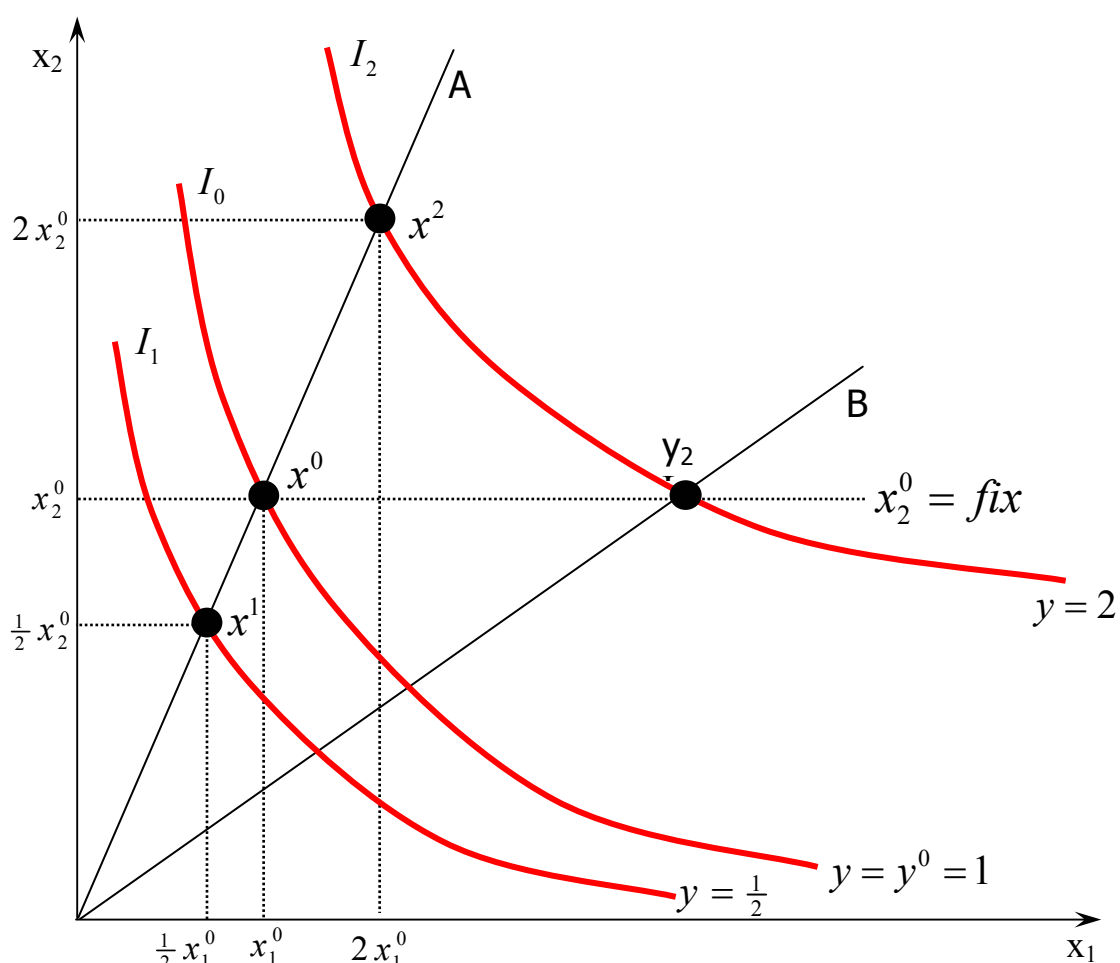
$MRTS$  – положительная величина, потому что  $\frac{MP_1}{MP_2} > 0$ , так как  $MP_i > 0$  из определения

производственной функции как строго возрастающей. Поэтому, выражая  $MRTS$  через тангенс угла наклона (производную), мы домножаем это выражение на  $(-1)$ :

$$(5.29) \quad MRTS = (-1) \cdot \frac{dx_2}{dx_1} > 0.$$

Строгая выпуклость изоквант тождественна тому, что значение  $MRTS$  уменьшается при движении вдоль изокванты слева направо. Это означает, что при более высоком соотношении  $\frac{x_2}{x_1}$   $MRTS$  является большим положительным числом. С другой стороны, когда в большом количестве используется фактор 1,  $MRTS$  принимает меньшие значения.

Математическое объяснение этого факта основывается на предпосылке о том, что производственная функция является строго квази-вогнутой. Гораздо больший интерес



**Рис. 5–5**

представляет экономическое значение убывания  $MRTS$  и реальность предпосылки о выпуклости изоквант. Выпуклость изоквант к началу координат демонстрирует тот факт, что факторы производства являются одновременно и взаимодополняющими и взаимозаменяемыми. Это важно, так как характеризует гибкость технологий.

Экономическая причина уменьшения  $MRTS$  состоит в том, что в большинстве отраслей факторы производства не являются абсолютно взаимозаменяемыми: они и дополняют друг друга в производственном процессе. Каждый фактор может делать то, что не может сделать или может сделать хуже другой фактор производства.

Кривизна изоквант отражает трудности, которые возникают при замене одного фактора другим в рамках данного объема выпуска. Они различны для разных отраслей. Например, на фабрике по производству стульев относительно просто заменить работу машин ручным трудом. Но это практически невозможно сделать в химической промышленности.

**Степень однородности производственной функции и отдача от масштаба.** Здесь мы хотим проанализировать, как изменится объём выпуска в результате изменения масштаба всех факторов производства в одинаковой пропорции. Это соответствует движению вдоль луча  $OA$  или  $OB$ , показанных на рис. **5–5**. Пусть сначала выпуск увеличивается и мы переходим с изокванты  $I_0$  на изокванту  $I_2$ . Первоначально мы находились в точке  $x^0$  на изокванте  $I_0$ , т.е. использовали  $x_1^0$  и  $x_2^0$  факторов производства. Для того, чтобы попасть на изокванту  $I_2$  есть два способа. Мы можем либо удвоить затраты обоих факторов и переместиться в точку  $x^2 = (2x_1^0, 2x_2^0)$  на изокванте  $I_2$ , либо изменить пропорции (соотношение) факторов производства и передвинуться в точку  $x^3$  на изокванте  $I_2$ , где соотношение  $\frac{x_2}{x_1}$  уменьшится. Важный случай изменения пропорций используемых факторов мы рассмотрели в предыдущем параграфе. А для анализа отдачи от масштаба, проанализируем первый случай – движение вдоль луча  $OA$ . Для того, чтобы увеличить (уменьшить) объём выпуска и сохранить при этом соотношение факторов, нужно умножить количество каждого фактора на параметр масштаба  $S > 0$ . Это эквивалентно движению из начала координат через точку  $x^0$ . Если  $S < 1$ , то масштаб производства уменьшится и движение будет происходить из точки  $x^0$  в точку  $x^1$ . Напротив, если  $S > 1$ , то масштаб производства увеличится, а движение идёт из точки  $x^0$  в точку  $x^2$ . На графике (**5–5**) в первом случае  $S = \frac{1}{2}$ , а во втором случае  $S = 2$ .

Когда мы исследуем эффекты изменения масштаба, начиная с некоторой первоначальной комбинации факторов производства  $x$ , мы можем записать производственную функцию, как

$$(5.30) \quad y = f(s \cdot \vec{x}) = y(s; \vec{x})$$

и рассмотреть как изменяется  $y$  с изменением масштаба производства при том, что соотношение факторов остаётся постоянным.

**Эластичность масштаба** есть мера реагирования выпуска на равное пропорциональное изменение всех факторов производства.

$$(5.31) \quad E = \frac{dy/y}{ds/s} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{s}{y} > 0$$

Эластичность масштаба ( $E$ ) измеряет (приблизенно) процентное изменение в выпуске продукции в результате однопроцентного изменения количества всех факторов производства, т.е. в результате изменения масштаба операций. Увеличивается выпуск в большей или меньшей степени, чем масштаб производства, зависит от того, является ли коэффициент эластичности  $E$  больше или меньше 1:

если  $E > 1$ , то возрастающая отдача от масштаба;

если  $E = 1$ , то наблюдается постоянная отдача;

если  $E < 1$ , то имеет место убывающая отдача от масштаба.

**Понятие отдачи от масштаба, или эффект масштаба производства**, настолько важное понятие, что на его экономическом содержании необходимо остановится особо.

В долгосрочном периоде фирма может увеличить количество все используемых в производственном процессе факторов. Она даже может построить новые заводы. Это и есть процесс расширения масштаба производства, который результируется в дополнительном приросте выпускаемой продукции. Предположим теперь, что предприятие, имеющее один цех по производству обуви, решило расширить масштабы своей деятельности и построило ещё один точно такой же цех. Оно установило на нём такое же количество оборудования, как в старом цехе, наняло столько же рабочих и закупило столько же сырья и комплектующих изделий. Нетрудно подсчитать, что в этом случае количество каждого используемых факторов возросло в два раза. При этом объём выпуска продукции может удвоиться, но может возрасти более или менее чем в два раза.

Если при увеличении затрат каждого из всех факторов производства в  $n$  раз объём выпуска продукции возрастёт более чем в  $n$  раз, то будет иметь место положительный (увеличивающийся) эффект масштаба производства. Если при увеличении затрат каждого из факторов производства в  $n$  раз объём выпуска возрастёт также в  $n$  раз, то будет иметь место постоянный эффект масштаба производства. Наконец, если при аналогичном увеличении затрат факторов объём выпуска повысится менее чем в  $n$  раз, то скажем, что наблюдается отрицательный, или уменьшающийся, эффект роста масштаба производства.



Предположим, что в нашем примере количество выпускаемой обуви возросло в 2,5 раза, т.е. выпуск растёт быстрее, чем затраты факторов. Это означает, что мы имеем дело с увеличивающейся отдачей от масштаба. Если бы количество обуви возросло только в полтора раза, то имела бы место убывающая отдача от масштаба. Увеличение же выпускаемой обуви ровно в два раза продемонстрировало бы постоянный эффект масштаба производства. Часто в литературе понятие «экономия на масштабе» используется как синоним понятия «увеличивающийся эффект (отдача от) масштаба производства». Тем не менее это не одно и то же. **Экономия на масштабе** означает рост производительности факторов производства вследствие увеличения фирмой масштаба производственных операций или уменьшение затрат на единицу продукции при увеличении объёма производства. При этом наращивание факторов производства может осуществляться в разных пропорциях. Более того, одни факторы производства могут замещаться другими. Понятие «эффект масштаба», или «отдача от масштаба», предполагает увеличение затрат используемых факторов производства в одинаковое число раз, т.е. предполагает рост объёма выпуска при сохранении неизменной пропорции между используемыми факторами. Таким образом, экономия на масштабе включает в себя и увеличивающийся эффект масштаба производства как частный случай, но в своём более общем виде допускает изменение всех комбинаций вводимых факторов по мере изменения объёма выпуска продукции.

Для однородных производственных функций характер отдачи от масштаба определяется степенью однородности функции. Как известно из курса математического анализа, функция  $f(x_1, \dots, x_n)$ , определённая для всех неотрицательных значений  $(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ , является однородной степени  $t$ , если для каждого  $s > 0$  мы имеем:

$$(5.32) \quad f(s \cdot x_1, \dots, s \cdot x_n) = s^t \cdot f(x_1, \dots, x_n)$$

Производственная функция является однородной степени  $t$ , если умножение количества всех факторов на параметр масштаба  $s$  приводит к увеличению выпуска в  $s^t$  раз. Когда  $t = 1$ , производственная функция называется линейно однородной. Многие модели предполагают, что  $f(x_1, x_2)$  – линейно однородная функция, потому что такая функция имеет много свойств, которые помогают анализу.

Подсчитаем эластичность масштаба для однородной степени  $t$  производственной функции:

$$\begin{aligned}
 (5.33) \quad E &= \frac{dy}{ds} \cdot \frac{s}{y} = \frac{df(s \cdot x_1, s \cdot x_2)}{ds} \cdot \frac{s}{f(s \cdot x_1, s \cdot x_2)} = \frac{ds^t f(x_1, x_2)}{ds} \cdot \frac{s}{s^t \cdot f(x_1, x_2)} = \\
 &= t \cdot s^{t-1} \cdot f(x_1, x_2) \cdot \frac{s}{s^t \cdot f(x_1, x_2)} = t
 \end{aligned}$$

Поскольку линейно однородная функция имеет  $t=1$ , то легко видеть, что линейно однородная производственная функция имеет постоянную отдачу от масштаба при всех комбинациях факторов производства. Если  $t > 1$ , то  $E > 1$  и производственная функция имеет возрастающую отдачу от масштаба. Если  $t < 1$ , то  $E < 1$  и производственная функция характеризуется убывающей отдачей от масштаба.

Наконец заметим, что различные виды отдачи от масштаба, определённые выше, являются, по сути, глобальными. Но может случиться так, что технология, характеризующаяся возрастающей отдачей от масштаба для некоторых значений  $(x_1, x_2)$ , характеризуется убывающей отдачей для их других значений. Таким образом, оказывается полезным во многих случаях локальное измерение отдачи от масштаба. В зависимости от значения коэффициента эластичности масштаба производства, мы скажем, что технология имеет локально убывающую, локально постоянную или локально возрастающую отдачу от масштаба.

**Виды производственных функций** могут различаться в зависимости от характера технологии, которая описывается той или иной функцией. Мы рассмотрим 3 вида производственных функций. Первая – функция Кобба-Дугласа – отвечает всем предпосылкам анализа производства введённым в §1 данной главы. Для двух других – линейной производственной функции и функции Леонтьева – некоторые из стандартных предпосылок не выполняются. Таким образом, мы частично выйдем за рамки нашей традиционной модели производства.

### **Производственная функция Кобба-Дугласа:**

$$(5.34) \quad y(x_1, x_2) = A \cdot x_1^\alpha \cdot x_2^\beta, \text{ где } A, \alpha, \beta > 0$$

Изокванты для этой функции имеют нормальную выпуклую форму.

Отдача от масштаба:

$$(5.35) \quad f(s \cdot x_1, s \cdot x_2) = A \cdot (s \cdot x_1)^\alpha \cdot (s \cdot x_2)^\beta = s^{\alpha+\beta} \cdot A \cdot x_1^\alpha \cdot x_2^\beta = s^{\alpha+\beta} \cdot f(x_1, x_2)$$

Следовательно, если  $\alpha + \beta < 1$ , то наблюдается убывающая отдача от масштаба; если  $\alpha + \beta = 1$ , то существует постоянная отдача от масштаба; если  $\alpha + \beta > 1$ , то

возрастающая отдача от масштаба характеризует данную технологию. Тем самым раскрывается экономический смысл степенных коэффициентов: в сумме степенные коэффициенты показывают степень однородности производственной функции Кобба-Дугласа, а значит, и характер отдачи от масштаба.

### **Линейная производственная функция:**

$$(5.36) \quad y(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2, \text{ где } a > 0 \text{ и } b > 0$$

Определим наклон изокванты:

$$(5.37) \quad ax_1 + bx_2 = \text{const}$$

$$(5.38) \quad bx_2 = \text{const} - ax_1$$

$$(5.39) \quad x_2 = \frac{\text{const}}{b} - \frac{a}{b} \cdot x_1$$

Изокванты представлены на рис 5–6. Легко показать, что данная ПФ имеет постоянную отдачу от масштаба:

$$(5.40) \quad \forall m > 0 \\ f(mx_1, mx_2) = a \cdot mx_1 + b \cdot mx_2 = m(ax_1 + bx_2) = m \cdot f(x_1, x_2)$$

Технология имеет постоянную отдачу от масштаба, так как производственная функция является однородной первой степени. Поскольку изокванты для ЛПФ представляют собой прямые линии, то

$$(5.41) \quad MRTS = \text{const} = \frac{a}{b}$$

и изменение  $MRTS$  равно 0 для любой точки изокванты. Отсюда очевиден экономический смысл ЛПФ: эта функция описывает технологию, характеризующуюся тем, что факторы производства, используемые в производственном процессе, являются абсолютно взаимозаменяемыми, т.е. менеджеру всё равно, использовать только труд или только капитал. Понятно, что в реальной жизни такая ситуация едва ли возможна, потому что машины всё равно управляются людьми.

Коэффициенты  $a$  и  $b$  показывают пропорции, в которых один фактор может быть заменён другим. Если, например,  $a = b = 1$ , то это значит, что 1 час труда может быть заменён 1 часом машинного времени. Если  $a = 2, b = 1$ , то

$$(5.42) \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{a}{b} \Rightarrow x_2 = \frac{a}{b} \cdot x_1 = 2x_1$$

и мы можем использовать либо 1 ед. первого фактора, либо 2 ед. второго фактора для того, чтобы произвести один и тот же объём выпуска. Это означает, что фирме нужно 2 ед. второго фактора производства, чтобы заменить 1 ед. первого фактора. Значит, 1-й фактор является в 2 раза более производительным, чем 2-й фактор.

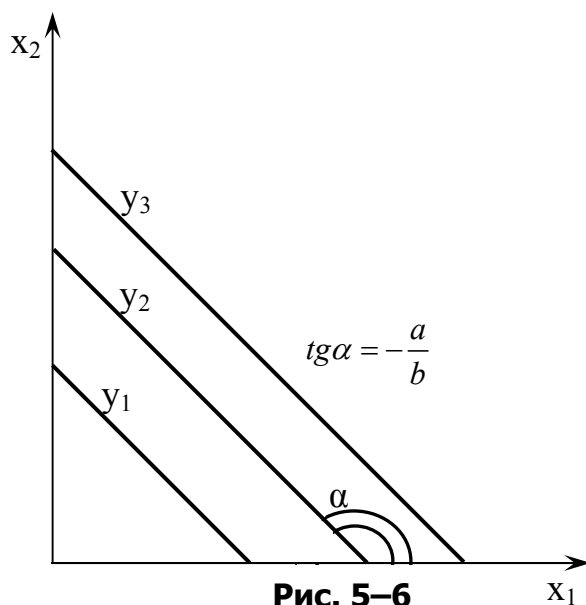


Рис. 5-6

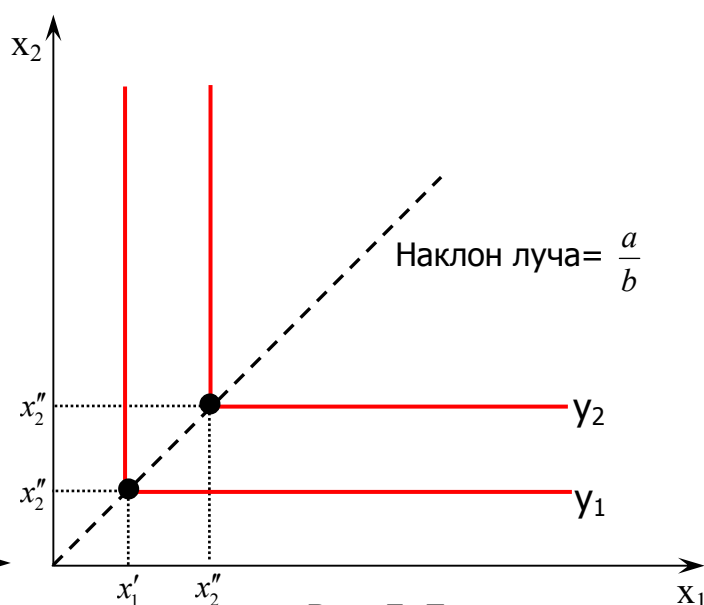


Рис. 5-7

**Производственная функция Василия Леонтьева** описывает технологию с жестко фиксированными пропорциями использования факторов производства:

**(5.43)**  $y = \min\{ax_1, bx_2\}$ , где  $a > 0, b > 0$ .

Экономический смысл коэффициентов: коэффициент при каждом факторе производства показывает производительность этого фактора.

**(5.44)**  $a = \frac{y}{x_1}$  – средняя производительность 1-го фактора

(например, капиталоотдача  $\frac{y}{K}$ );

**(5.45)**  $b = \frac{y}{x_2}$  – средняя производительность 2-го фактора

(например, производительность труда  $\frac{y}{L}$ ).

**(5.46)** Пусть  $ax_1 < bx_2$ , тогда  $y = ax_1 = \frac{y}{x_1} \cdot x_1$

В этом случае количество, используемого 2-го фактора, является избыточным.

**(5.47)** Пусть  $ax_1 > bx_2$ , тогда  $y = bx_2 = \frac{y}{x_2} \cdot x_2$

Здесь избыточно количество, используемого 1-го фактора.

Пусть  $ax_1 = bx_2$ , тогда  $y = ax_1 = bx_2$

В этом случае оба фактора используются полностью. Когда это

**(5.48)** происходит,

$\frac{x_2}{x_1} = \frac{a}{b}$ . Это и есть пропорции, в которых должны использоваться

факторы производства при данной технологии.

Если мы рассмотрим функция Леонтьева в приведённой выше записи **(5.43)**, то легко показать, что она имеет постоянную отдачу от масштаба:

**(5.49)**  $f(mx_1, mx_2) = \min\{a \cdot mx_1, b \cdot mx_2\} = m \cdot \min\{ax_1, bx_2\} = m \cdot f(x_1, x_2) \quad \forall m > 0$