П. В. Конюховский

МИКРОЭКОНОМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БАНКОВСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

ключевые вопросы

ПИТЕР®

Санкт-Петербург
Москва • Харьков • Минск
2001

Конюховский Павел Владимирович

Микроэкономическое моделирование банковской деятельности

Серия «Ключевые вопросы»

Рецензенты: д. э. н. проф. Ковалев В. В., д. ф.-м. н. проф. Нарбут М. А.

Главный редактор	*В. Усманов*
Заведующий редакцией	*Л. Волкова*
Редактор	*Е. Маслова*
Художественный редактор	*Н. Биржаков*
Выпускающий редактор	*В. Земских*
Верстка	*Е. Маслова*
Корректоры	*Ж. Захарова, М. Одинокова, С. Шевякова*

ББК 22.183я7 УДК 519.8(075)

Конюховский П. В.

К65 Микроэкономическое моделирование банковской деятельности. — СПб: Питер, 2001. — 224 с.: ил. — (Серия «Ключевые вопросы»).

ISBN 5-318-00289-7

В центре внимания данной книги находятся существующие на настоящий момент подходы к построению экономико-математических моделей, описывающих деятельность банков. Основное внимание уделено трем принципиальным направлениям банковской микроэкономики: моделям банков как институтов финансового посредничества, моделям, реализующим принципы производственно-организационного подхода, и моделям банка как совокупности стохастических финансовых потоков.

Настоящее издание может быть использовано в учебном процессе при организации спецкурсов и семинаров для студентов экономико-математических и финансово-экономических специальностей ВУЗов. Также оно может оказаться полезным для специалистов, чья профессиональная деятельность связана с применением экономико-математических методов в процессах управления банковскими и финансовыми учреждениями.

ISBN 5-318-00289-7

ЗАО «Питер Бук», 196105, Санкт-Петербург, Благодатная ул., д. 67.
Лицензия ИД № 01940 от 05.06.00.
Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, том 2; 95 3000 — книги и брошюры.

Подписано к печати 23.04.01. Формат 60 × 90/16. Усл. п. л. 14. Тираж 5000. Заказ 1807.
Отпечатано с готовых диапозитивов в АООТ «Типография „Правда“».
191119, С.-Петербург, Социалистическая ул., 14.

Содержание

Предисловие

Уважаемый читатель! Перед вами книга, основной целью которой является изложение современных методов экономико-математического моделирования деятельности банков.

Книга делится на четыре главы. Первая из них носит вводный характер. Перед ней поставлена задача раскрытия общей проблематики, образующей фундамент микроэкономической теории банковской деятельности. Среди главных тем первой главы могут быть названы обзор основных подходов к определению понятия банк, основные функции, выполняемые банками, и их историческая эволюция, как соотносятся модели работы банков и теория общего экономического равновесия. Ответ на последний вопрос является ключевым с точки зрения обоснования необходимости существования банковской микроэкономики как самостоятельной отрасли экономической науки. Отдельное внимание уделено задачам привлечения средств со стороны банков и конкретным формам их решения.

Вторая глава посвящена экономико-математическим моделям банков, трактующим их деятельность с точки зрения выполнения функций *финансового посредничества* между двумя группами экономических агентов: предпринимателями и домохозяйствами. Первые предлагают на рынке капитала некоторые проекты, способные приносить прибыль, но требующие первоначальных вложений. Вторые — обладают определенными денежными средствами и поэтому являются потенциальными вкладчиками. Особое место при таком подходе к процессам работы банков приобретает учет фактора информационной асимметрии и необходимости существования в экономической системе объектов, выполняющих функции мониторинга за деятельностью заемщиков.

В третьей главе описывается система моделей и методов, основанных на представлении банка (финансовой компании) как некоторого абстрактного объекта, характеризующегося входными и выходными параметрами, а также функцией, которая их связывает. Такой подход (он получил наименование *производственно-организационного*) в определенном смысле приближает математические модели банков к моделям классической теории производственной фирмы. В качестве примеров задач, решаемых на базе моделей этого типа, прежде всего могут быть названы задачи определения условий равновесия на рынках кредитов и депозитов при различных формах институциональной организации банков. Также в третьей главе рассмотрены проблемы построения производственных функций финансовой фирмы.

Наконец, в четвертой главе рассмотрены модели, позволяющие исследовать закономерности динамики различных финансовых ресурсов, которыми оперирует банк в процессе своего жизненного цикла. Их объединяет то, что они базируются на его представлении как *совокупности стохастических финансовых потоков*.

Материал, помещенный во вторую, третью и четвертую главы, в целом соответствуют основным направлениям, по которым идет развитие современной микроэкономической теории банковской деятельности. Однако он, безусловно, не исчерпывает их полностью. Поэтому о тех направлениях, которые не попали в основную часть книги, обзорно упоминается в заключении.

В свете того внимания, которое уделяется проблемам работы банков в современной литературе финансово-экономического профиля (как профессиональной. так и популярной), какие-то дополнительные доводы в пользу актуальности тем, связанных с экономико-математическим моделированием их деятельности, представляются излишними. Единственно хотелось бы подчеркнуть следующий момент. Даже те из приводимых ниже моделей, которые имеют изначально теоретический характер и потому не могут быть непосредственно реализованы в рамках конкретных автоматизированных систем, оказываются несомненно полезными с точки зрения качественного объяснения процессов развития финансово-банковского сектора экономики, которые мы наблюдаем в течение последних лет.

Необходимо сказать несколько слов об обозначениях переменных, используемых при описании экономико-математических моделей. Платой за поддержание сквозной системы обозначений на протяжении всей книги явилась бы ее чрезвычайная громоздкость, поэтому преемственность обозначений обеспечивается на уровне отдельно взятой темы. По возможности они следуют сложившимся в научной литературе традициям. Соответственно читателя не должно смущать то, что, например, переменная π используется как для обозначения вероятностей (в главе 2), так и для обозначения прибыли банка (в главе 3).

Каждая из глав завершается основными выводами, кратко суммирующими сказанное в ней, а также списком литературы. Структурно каждая глава делится на параграфы, отдельные параграфы разбиваются на пункты (там, где этого требует логика изложения). Для нумерации параграфов используется двухуровневая нумерация (например, 2.1), а для нумерации пунктов — трехуровневая (например, 2.2.1).

Несколько замечаний по используемым условным обозначениям:

- важные (базовые) понятия при первом появлении в тексте выделяются *курсивом*, а наиболее важные из них — **жирным шрифтом**;
- перед фундаментальными определениями стоит символ ☞;
- описание доказательства теоремы завершается символом ✌.

Очевидно, что чтение любой книги или статьи научного плана подразумевает наличие определенной предварительной подготовки у читающего. В данном случае от читателя потребуется:

- во-первых, владение базовыми знаниями в области классической микроэкономической теории (а в случае неуверенности в них несомненно будет полезным обратиться к соответствующим учебным пособиям[1]);
- во-вторых, наличие подготовки в пределах стандартного вузовского курса математического анализа и теории вероятностей;
- наконец, для более глубокого понимания моделей, излагаемых в параграфе 4.4, желательна элементарная подготовка в области теории массового обслуживания.

[1] См., например: *Вэриан Х.* Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход. М.: «ЮНИТИ», 1997.
Гальперин В. М., Игнатьев С. М., Моргунов В. И. Микроэкономика. В 2 т. Учебник. СПб: СПбГУЭФ, 1994, 1998.

Автор хочет выразить искреннюю благодарность за неоценимую помощь, оказанную ему в процессе написания данной книги, профессору кафедры экономической кибернетики СПбГУ д. ф.-м. н. Н. В. Хованову, заместителю председателя правления акционерного банка «Петровский» к. э. н. И. В. Вишнякову, а также студенткам экономического факультета СПбГУ Алине Назиповой и Марии Кальварской.

Глава 1

ОБЩИЕ ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ БАНКОВ

В этой главе в центре внимания находятся основополагающие вопросы, ответы на которые составляют своего рода теоретический фундамент банковской микроэкономики. Среди них такие проблемы, как основные функции, выполняемые банками, и их эволюция, специфика условий, в которых происходит реализация данных функций, причины существования микроэкономической теории банковской деятельности как самостоятельного раздела экономической науки.

1.1. Банки и их место в системе экономических отношений

Разговор о микроэкономических моделях банковской деятельности представляется разумным начать с определения понятия «банк». Сразу оговоримся, что в финансово-экономической литературе не существует единого, общепризнанного подхода к его формулировке. Очень часто **банк** определяется как *институт, текущая деятельность которого сводится к выдаче кредитов и привлечению в качестве депозитов денежных средств* (*как правило, от широких групп населения*).

Хочется обратить внимание читателя на ряд ключевых моментов.

Во-первых, важно подчеркнуть, что операции заимствования и кредитования совершаются самыми разнообразными коммерческими фирмами. Однако для банков они являются *текущими* (регулярно повторяющимися).

Во-вторых, следует отметить, что для подавляющего большинства учреждений, называемых банками, характерно, что операции по заимствованию и кредитованию *одновременно* присутствуют в их деятельности.[1]

---

[1] Вместе с тем необходимо отметить, что ряд экономистов указывают на возможность возрастания в будущем количества «узкоспециализированных» банков, ориентирующихся либо только на вложение средств, привлеченных на депозиты, в высокодоходные ценные бумаги, либо на выдачу кредитов из денежных средств, получаемых от выпуска собственных долговых обязательств.

В-третьих, услуги, предоставляемые банками, связанные с обеспечением сохранности финансовых ресурсов и проведением платежей, *затрагивают кардинальные интересы широких общественных слоев*, что придает данным институтам особую социальную значимость.

Специфическая роль, которую играют банки в экономической жизни общества, предопределяет и то, что они являются объектами, требующими особого внимания, контроля (а при необходимости — и вмешательства) со стороны органов государственного управления. Последний фактор подчеркивает практическую значимость проблемы ввода определения понятия «банк», так как оно становится критерием, в соответствии с которым принимается решение о том, должен или нет тот или иной экономический институт подпадать под меры государственного регулирования. В этой связи будет полезным кратко остановиться на том, как решается данный вопрос в действующем российском законодательстве, регламентирующем банковскую деятельность (см. [6]).[1] В нем введены понятия кредитной организации, банка, небанковской кредитной организации, а также иностранного банка.

☞**Кредитная организация** — юридическое лицо, которое для извлечения прибыли как основной цели своей деятельности на основании специального разрешения (лицензии) Центрального банка Российской Федерации (Банка России) имеет право осуществлять банковские операции, предусмотренные настоящим Федеральным законом. Кредитная организация образуется на основе любой формы собственности как хозяйственное общество.

Банк — кредитная организация, которая имеет исключительное право осуществлять в совокупности следующие банковские операции: привлечение во вклады денежных средств физических и юридических лиц, размещение указанных средств от своего имени и за свой счет на условиях возвратности, платности, срочности, открытие и ведение банковских счетов физических и юридических лиц.

Небанковская кредитная организация — кредитная организация, имеющая право осуществлять отдельные банковские опера-

[1] Федеральный закон «О банках и банковской деятельности» (в ред. федеральных законов от 03.02.96 № 17-ФЗ, от 31.07.98 № 151-ФЗ, от 05.07.99 № 126-ФЗ, от 08.07.99 № 136-ФЗ), статья 1.

ции, предусмотренные настоящим Федеральным законом. Допустимые сочетания банковских операций для небанковских кредитных организаций устанавливаются Банком России.

Иностранный банк — банк, признанный таковым по законодательству иностранного государства, на территории которого он зарегистрирован.

Более развернутый способ идентификации банков как субъектов экономических отношений основывается на перечислении выполняемых ими функций. В современной литературе, [1] как правило, они разбиваются на четыре группы:

1. Обеспечение расчетов и платежей.
2. Трансформация активов.
3. Управление рисками.
4. Обработка информационных потоков, мониторинг заемщиков.

В то же время следует обратить внимание на то, что в последние десятилетия наметилась тенденция к активному изменению функций как банков, так и их основных конкурентов — финансовых институтов, занимающихся операциями с ценными бумагами, брокерских фирм, страховых компаний. Эти финансовые компании в плане предоставляемых ими услуг все более пытаются приблизиться к банкам. Одновременно и банки предлагают брокерские услуги в операциях с недвижимостью и ценными бумагами, услуги по страхованию, вкладывают средства во взаимные фонды. Так, в экономике США в 80-х годах с приходом на рынок банковских услуг нескольких фирм («Меррилл Линч», «Дрейфус корпорейшн» и др.), занимавшихся до этого торговлей ценными бумагами и брокерскими операциями, возникло понятие *небанковских банков*. Объективной основой для возникновения подобных финансовых структур является стремление фирм, выполняя в той или иной мере банковские функции, уйти из-под жесткого законодательного регулирования, в рамках которого действуют обычные банки, что, естественно, вызывает ответное противодействие государства. Так, в Соединенных Штатах в течение 80-х годов шел постоянный процесс расширения круга признаков, подводящих компании под общие регулятивные нормы, в частности, Конгресс США определил как банк любую организацию, являющуюся членом *Федеральной корпорации страхования депозитов* (FDIC).

[1] См., например, [10].

Знаковым явлением в финансовом секторе экономики США стало возникновение в 50-х годах нового типа предприятий — *банковских холдинговых компаний* — корпораций, получивших чартер на владение акциями (долями в акционерном капитале) по меньшей мере одного банка. В соответствии с законом о банковских холдинговых компаниях от 1956 г. (и последующими поправками 1970 г.) контроль считается установленным, если холдинговая компания приобретает не менее 25% акционерного капитала по крайней мере одного банка или же она имеет право выбора по меньшей мере двух директоров хотя бы в одном банке. В 70-х и 80-х годах наблюдался бурный рост холдинговых компаний, что объясняется их дополнительными возможностями по сравнению с традиционными банками по более свободному доступу на рынки капитала, по мобилизации средств (за счет допущения более высокого *левереджа*, т. е. повышенной доли заемного капитала относительно собственного), а также возможностями по получению налоговых льгот за счет компенсации потерь одного предприятия прибылью, полученной другим, наконец, по созданию филиалов.

Процесс стирания границ между банковскими, парабанковскими (данный термин иногда используется для обозначения институтов, частично выполняющих традиционные банковские функции) и небанковскими учреждениями, возникновение новых типов учреждений предопределяет как общность задач, решаемых в данных институтах, так и общность методов, которые могут применяться для их решения. Объект, обобщающий в функциональном плане перечисленные институты, в научной литературе последних лет получил название финансовой фирмы (финансовой компании). Достаточно емкое определение данного понятия приводится в работе Д. Хэнкок:

☞ **Финансовая фирма** — это объект, имеющий своей целью максимизацию прибыли в процессе оказания посреднических услуг между заемщиками и заимодателями. Эти услуги прямо или косвенно связаны с финансовыми активами и пассивами, принадлежащими фирме, такими как кредиты и депозиты. Финансовая фирма выпускает свои собственные обязательства, обычно, в виде разного рода депозитов. ...Понятие финансовой фирмы включает в себя коммерческие и сберегательные банки, сберегательные и кредитные ассоциации. Также для описания данных фирм используется термин «депозитные институты», см. [11, с. 1].

Разумеется, реально существующие финансовые организации не являются финансовыми фирмами в чистом виде, строго соответствующими приведенному определению. Действительно, наряду с перечисленными операциями они параллельно выполняют и много других функций. Это оказание трастовых услуг, финансовое консультирование, лизинг оборудования, продажа страховых услуг, продажа пенсионных планов, брокерские услуги, предоставление сейфов для хранения ценностей и др. Однако использование понятия финансовой компании (фирмы) целесообразно (и поэтому оправданно) с методологической точки зрения. Выделение из множества задач, стоящих перед реальным экономическим объектом, той их группы, которая относится к области деятельности финансовой фирмы, обусловлено логической взаимосвязанностью и целостностью методов, применяемых для их решения.

В следующих пунктах мы более подробно остановимся на особенностях выполнения банками их «традиционных» функций.

1.1.1. Денежный обмен, обеспечение расчетов и платежей

Эволюция банков как экономических субъектов, обеспечивающих расчеты и платежи, происходила параллельно с развитием соответствующей функции денег. По мере того как деньги в процессе своей эволюции утрачивали свойства непосредственного носителя товарной стоимости и приобретали формы, более подходящие для выполнения роли платежного инструмента, возрастало и значение институтов, гарантирующих их «ценность» участникам обменных сделок. Исторически деятельность банков по управлению деньгами как общественно и законодательно признанным средством расчетов, не имеющим конкретной товарной природы, проявилась, во-первых, в предоставлении услуг по *денежному обмену*, а во-вторых, в обеспечении *платежного сервиса*.

Оказание услуг по обмену различных денежных единиц стало исторически первой функцией банков. Практически во всех учебниках по банковскому делу можно найти упоминание о том, что само понятие «банк» произошло от итальянского слова «*banco*», означавшего «скамейка». Имелась в виду скамейка, на которой менялы раскладывали обмениваемые монеты. Аналогичную природу имеет и этимология греческого слова, используемого для наименования банка, — *trapeza*. Оно означает прилавок (стол), на котором размещались весы, предназначавшиеся для проверки содержания драгоценного метала в получаемых и выдаваемых монетах. Необходимо обратить внимание на то, что операции по обмену денег, проводимые банками на ранних стадиях их становления, имели не только техническое, но и глубокое экономическое содержание. Это объясняется в первую очередь тем, что выставляемые на обмен монеты (например, местные и иностранные) обладали с точки зрения рынка различной ликвидностью.

Развитие и углубление обменных функций банков дало импульс к появлению новых форм их деятельности, а именно, к предложению услуг по хранению ценностей, что, в свою очередь, явилось основой для будущих депозитных операций. В общем-то, появление такого рода деятельности как в историческом, так и в экономическом плане выглядело вполне естественным: менялы, ювелиры и другие экономические субъекты, так или иначе сталкивавшиеся с задачей хранения собственных ценностей, также обретали возможность оказывать подобные услуги другим. Так, в качестве классического примера, иллюстрирующего процесс возникновения первых депозитных банков, обычно приводится деятельность цехов английских ювелиров в XVII веке. Безусловно, на начальных этапах депозитные услуги были весьма примитивными. Это выражалось, в частности, в их платности для депозиторов. Последнее объяснялось тем, что первоочередной целью лица, отдававшего деньги в банк, было именно обеспечение их сохранности. Соответственно, в этой ситуации основными задачами, решаемыми банком, становились, во-первых, стимулирование доверия потенциальных клиентов, а во-вторых, и обеспечение наилучшей отдачи от факторов экономии на масштабах и концентрации, возникающих в результате применения дополнительных ресурсов и возможностей. Поскольку надежность (безрисковость) хранения депозитов была главным критерием оценки качества банка со стороны вкладчиков, то и первые банки, как правило, воздерживались от того, чтобы предоставлять займы с использованием привлеченных средств, рассматривая в качестве более существенного источника дохода именно плату за хранение.

Дополнительным обстоятельством, обусловливавшим заинтересованность клиентов банков периодов Средневековья и Нового Времени в депозитных услугах, являлась разнородность (несопоставимость) качества циркулировавших монет.[1] В то же время банки как учрежде-

[1] Как известно, «порча монеты» была одной из наиболее острых проблем эпохи феодализма и раннего Нового Времени, достаточно вспомнить знаменитый «медный бунт» в России.

ния, обычно доступные в той или иной мере государственному и общественному контролю и заинтересованные в поддержании своей репутации, были вынуждены рассчитываться с вкладчиками в «хорошей» монете, страхуя их таким образом от возможных потерь. Обратной стороной этого фактора, очевидно, была возможность взимания со стороны банков платы за предоставление подобных гарантий. Заметим, что размер такой платы в зависимости от степени доверия к банку мог колебаться от нуля до 9–10%. Соответственно, когда в результате совершенствования технологий денежной эмиссии проблема неоднородности и некачественности денежных носителей стала менее острой, то одновременно исчез и интерес к такой форме ее решения. В общем-то, это и стало важным толчком, открывшим новый этап эволюционного развития форм депозитных услуг, сделавшим их в конечном счете платными со стороны банков.

В плане обеспечения платежного сервиса (поддержания системы платежей) банки предоставляют своим клиентам услуги по управлению их расчетными счетами. Более того, они гарантируют то, что долг плательщика за полученные им продукты или услуги будет погашен посредством перевода другому участнику сделки причитающейся ему денежной суммы.

Как известно, с точки зрения отдельно рассматриваемых экономических субъектов необходимость проведения расчетов, связанных с перемещением значительных денежных средств на большие расстояния, является неоправданно рискованным действием, а значит, и достаточной причиной для отказа от совершения соответствующей хозяйственной операции. В этой связи чрезвычайна важен банковский сервис по обеспечению безналичных и клиринговых расчетов.[1] Данная функция банков стала активно развиваться начиная со второй половины XIX века, хотя ее исторические корни восходят еще к одному из видов операций, совершаемых ломбардскими банкирскими компаниями в эпоху Средневековья. В настоящее время деятельность по проведению расчетов и платежей не только переросла рамки отдельного банка, но и приобрела интернациональный характер. Подтверждением этому служат темпы развития *систем международных расчетов*, таких как S.W.I.F.T. или Western Union. Возрастание влияния данного вида банковских услуг на состояние экономики в целом, стабильность и безопасность ее развития одновременно обусловливают

[1] Напомним, что *клиринговыми* называются операции, которые не связаны с физическим перемещением учитываемых денежных масс.

необходимость усиления внимания к нему со стороны органов государственного регулирования (правительства, центрального банка и т. п.).

1.1.2. Трансформация активов

Можно выделить три типа трансформации активов, которые реализуют банки в процессе своей деятельности: количественная, качественная и временная.

Количественная трансформация состоит в согласованных изменениях объемных характеристик оказываемых банками услуг (как по депозитам, так и по кредитам) соответственно тем требованиям, которые к ним предъявляют клиенты. Ее классическим примером является преобразование относительно небольших по размеру депозитов, внесенных частными вкладчиками, в значительные суммы, требующиеся для кредитования серьезных инвестиционных проектов. В частности, необходимость количественной трансформации является одним из главных аргументов в пользу существования института финансовых посредников.

Качественная трансформация активов прежде всего сводится к снижению их рисковых характеристик. Выпуская собственные обязательства либо заключая депозитные договора с клиентами, банк, как правило, обеспечивает по ним существенно большую надежность (меньший риск потерь) по сравнению со случаем прямого вложения средств в какие-либо инвестиционные проекты. Это объясняется, во-первых, возможностями банка за счет концентрации значительных денежных ресурсов осуществлять диверсификацию портфеля своих активов, что недоступно отдельному вкладчику (особенно в случае финансовой неделимости проектов). Во-вторых, банки за счет преимуществ доступа к информационным ресурсам обладают дополнительными возможностями по контролю за поведением своих заемщиков.

Примером *временнóй трансформации* активов служит тот факт, что, с одной стороны, банки принимают от вкладчиков относительно краткосрочные депозиты, а с другой — могут выдавать заемщикам кредиты, по которым предусмотрены длительные сроки возврата. Проблема осуществления временнóй трансформации тесно связана с риском неплатежей по депозитам из-за низкой ликвидности долгосрочных активов. Отчасти этот риск может быть снижен за счет использования краткосрочных межбанковских кредитов и производных инструментов финансового рынка (свопов, фьючерсов и т. п.).

Подчеркивая важность перечисленных выше функций, особо отметим то, что они присутствуют в деятельности банка независимо от того, сопряжена ли она с риском или нет.

1.1.3. Управление рисками

Управление рисками представляет собой одно из главных направлений в работе любого банка. В ходе своей деятельности банки должны решать задачи оценки, контроля, принятия или непринятия рисков, связанных с привлечением депозитов, формированием портфеля выданных кредитов, проведению так называемых внебалансовых операций.

Существуют различные подходы к *классификации рисков*. С точки зрения общеэкономических подходов риски могут быть разделены на микроэкономические и макроэкономические. *Микроэкономическими* (*идиосинкратическими*) называют такие риски, которые могут быть устранены или ограничены за счет применения диверсификационных стратегий. Иначе говоря, это риски, возникающие в ситуациях, для которых справедливы вероятностные законы больших чисел. В противном случае риски относятся к *макроэкономическим*. Хочется отдельно подчеркнуть то, что в ходе выполнения своих функций *банки по существу сталкиваются с рисками обоих типов*.

Согласно другой классификации в деятельности банков присутствуют риск ликвидности, кредитный риск, процентный риск, риск внебалансовых операций.

Безусловно, риски самого разного плана окружали процесс работы банков буквально с момента их возникновения. Эволюция характера отношений банковских учреждений к проблемам принятия или неприятия риска представляют отдельную и крайне интересную тему для научных исследований. В этой связи можно вспомнить и то, что на определенном этапе становления банков ведущим источником их доходов было финансирование военных действий. Очевидно, что подобный род деятельности характеризовался немалым уровнем риска, что, в свою очередь, давало толчок для развития форм защиты от возможных потерь. Исторически первыми из них явились создание совместных страховых фондов, получение акцизных льгот, откупных прав на сбор налогов и т. п. Важный рубеж в эволюции банковского дела приходится приблизительно на середину XIX века. Именно в этот период банки ряда европейских стран (прежде всего Франции и Бельгии) переходят от неприятия риска к активному кредитованию промышленных и торговых предприятий, включая приобретение их акций.

Фундаментальной проблемой для фирм любого типа является *риск ликвидности*, который означает невозможность осуществить выплаты кредиторам в срок. В качестве его «крайней» формы может быть рассмотрен *риск платежеспособности*, который означает фактическую несостоятельность экономического субъекта из-за превышения размера его обязательств над имеющимися активами. Риск ликвидности, возникающий в случаях, когда нужно произвести непредвиденные выплаты, в некотором смысле органически присущ банковской деятельности. Поскольку одной из сторон данной деятельности является трансформация «краткосрочных» депозитов в «долгосрочные» кредиты, то в ней будет постоянно существовать угроза невыполнения обязательств перед вкладчиками в ситуации массового закрытия ими своих счетов (особенно депозитов «до востребования»). Меры, используемые при управлении риском ликвидности, традиционно связаны с теми или иными механизмами формирования резервов, в том числе обязательных, создаваемых в соответствии с законодательными требованиями.

Также банкам в процессе своей работы приходится сталкиваться с *кредитным риском* (*риском дефолта*). Он соответствует ситуации невозможности выплаты заемщиком процентов по кредитам, а в крайней своей форме — принципиальной невозможности возврата кредита. В качестве одной из фундаментальных задач, с которыми сталкивается банк в процессе управления кредитным риском, может быть названа задача его оценки, или, другими словами, оценки того, как фактор присутствия кредитного риска влияет на рыночную стоимость кредитов.

Развитие банковской системы в 1980-х годах ознаменовалось возрастанием интереса экономических субъектов к нетрадиционным, но техничным, высокодоходным и высоколиквидным инструментам финансового рынка. Начиная с этого времени банки стали предоставлять своим клиентам такие формы услуг, как связанные кредиты, кредитные линии, гарантии и т. п. Одновременно получили широкое распространение операции со свопами, хеджированием, перестраховкой доходов по ценным бумагам. С учетной точки зрения данные операции не могут быть отнесены к традиционным банковским функциям, поэтому они обычно классифицируются как «*внебалансовые банковские операции*». Причины, стимулирующие интерес банков к операциям данного рода, вообще говоря, различны по своей природе.

Среди них могут быть названы естественное стремление банков к увеличению своего дохода, возможность более гибко влиять на структуру капитала (допустим, уменьшить левередж), а также возможности снижения налогового пресса и ухода от регулирующих мер.

Оперирование современными высокотехничными финансовыми инструментами значительно расширяет возможности банка в области управления его рисками. Оперативно продавая или покупая рисковые активы, он может в зависимости от поставленных целей либо страховать (хеджировать) свой риск, либо, наоборот, принимать на себя дополнительный риск (ожидания получить за это дополнительный доход). При этом, безусловно, справедливо и то, что активная деятельность того или иного банка по внебалансовым операциям является достаточным резоном для проявления внимания к нему со стороны регулирующих органов.

Отметим также, что в случае с банками ввиду той особой роли, которую они играют в экономической жизни общества, последствия реализации рассмотренных рисков могут быть особенно драматичными. В частности, негативное развитие положения дел в одном банке нередко вызывает цепную реакцию, нанося ущерб значительному количеству экономических объектов,[1] что еще раз свидетельствует об исключительной важности технологий и методов управления рисками.

1.1.4. Мониторинг и управление информационными процессами

В многочисленных современных исследованиях, учитывающих роль и значение информационных ресурсов в экономике, отмечается особое положение, занимаемое банками. Так, имея эксклюзивный доступ к данным о своих клиентах, банки одновременно получают уникальные возможности по осуществлению контроля (мониторинга) за тем, как идет выполнение финансируемых ими проектов.

С этой точки зрения проявляется еще одна функция, присущая банкам в современном обществе. Это функция учреждения, осуществляющего управление потоками финансово-экономической информации, или, как еще говорят, *информационного процессора*.

Под управлением информацией подразумевается ее сбор, хранение, переработка, систематизация и анализ. Если еще несколько де-

[1] Для наименования данного явления используется термин «системный риск».

сятилетий тому назад на информацию, оказывающуюся в распоряжении банка можно было смотреть как на некоторый полезный, но побочный результат от основных видов деятельности, то теперь эффективное решение задач ее сбора и обработки представляется в качестве непременного условия успеха работы банка в целом. Дополнительно подчеркнем, что *информационный процессинг* на настоящем этапе в условиях непрозрачности информации и возможности «эгоистического» поведения заемщиков представляет собой последовательность принципиально необходимых действий и мер, обеспечивающих получение банком объективно обоснованной прибыли.

1.1.5. Процессы размещения капитала

Еще одна существенная функция банков связана с той кардинальной ролью, которую они играют в организации процессов размещения и циркуляции капитала. В историческом аспекте не вызывает сомнений тезис о глубоком влиянии, оказываемом уровнем развития финансовых институтов и рынков на уровень и темпы развития экономики в целом. Замечено, что экономические системы со слаборазвитыми институтами финансового посредничества и узкими финансовыми рынками не могут обеспечить эффективных каналов привлечения сбережений домохозяйств, что, в свою очередь, порождает дефицит инвестиционных ресурсов. Более того, в такой ситуации «крупные» проекты, которые носят принципиальное значение для экономического роста в целом, будут не находить источников кредитования из-за связанного с ними высокого риска, управление которым опять-таки не может быть организовано по причине отсутствия соответствующих финансовых инструментов.

Многие экономисты (см., например, [7]) также пытаются на примере стран, в которых уровень развития банковского сектора традиционно высок, допустим таких, как Германия и Япония, обосновать тезис о позитивном воздействии данного фактора на темпы роста экономики. В его защиту приводятся аргументы, отмечающие тот факт, что сильная система финансового посредничества способствует сглаживанию негативных последствий от возможных потрясений рынка. В частности, признается, что банковская система Германии успешно справляется с решением задачи снижения неустойчивости уровня дохода вкладчиков от сделанных ими вложений. Наконец, в случае спадов и провалов на финансовых рынках деятельность банков, владеющих значительными пакетами акций и выполняющих функции мониторинга фирм, оказавшихся в трудном положении, обычно способствует стабилизации положения дел и быстрому выходу из кризиса.

Кратко суммировать сказанное в данном параграфе можно в виде следующего заключения:

☞ банки играют важнейшую роль в рыночной экономике, обеспечивая существование в ней финансовых ресурсов двух типов: с одной стороны, делимых, низкорисковых, краткосрочных пассивов, а с другой — неделимых, рисковых, долгосрочных активов, являющихся основой для кредитования проектов, функции мониторинга которых также могут выполняться банками.

1.2. Банки и общая теория равновесия

Текущий параграф будет посвящен специфике микроэкономической теории банковской деятельности, ее отличиям от положений «традиционной» микроэкономики фирмы. В частности, будет показано, что в рамках классических моделей экономического равновесия при совершенной конкуренции (типа модели Эрроу—Дебре) невозможно объяснить как причины, так и необходимость существования банков.

Рассмотрим модель некоторой абстрактной (простейшей) экономической системы, в рамках которой действуют агенты трех видов:

- «домохозяйства» (или потребители), обладающие сбережениями в денежной форме S, которые они готовы временно вложить в активы, приносящие доход;
- «фирмы» (или предприниматели), предлагающие некоторые проекты, приносящие доход, но требующие исходных инвестиций в объеме I. При этом финансирование проектов может осуществляться в двух формах: за счет кредитов и за счет выпуска ценных бумаг (прямых обязательств). Потребность фирм в кредитах будем обозначать через L^-, а выпускаемые ими обязательства как B_f;
- «банки» — финансовые посредники, занимающиеся привлечением денежных ресурсов как с помощью выпуска ценных бумаг (обязательств), так и за счет приема на депозиты сбережений домохозяйств с целью их последующего инвестирования в проекты, предлагаемые фирмами. Через L^+ обозначим объем кредитов, предлагаемых банками фирмам, через D^- — спрос банков на де-

позиты домохозяйств (соответственно через D^+ — их предложение домохозяйствами), наконец, через B_b — объем обязательств, выпущенных банками.

Для простоты будем считать, что банки и фирмы только выпускают ценные бумаги, а их приобретением в количестве B_h занимаются исключительно домохозяйства, используя это как форму размещения своих сбережений альтернативную депозитам. Другими словами, для финансового рынка справедливо уравнение баланса

$$B_f + B_b = B_h.$$

Принципиальная схема связей между субъектами рассматриваемой экономики приведена на рис. 1.1.

Остановимся более подробно на тех задачах, которые в рамках описываемой ситуации будет решать каждый из субъектов. В целях лаконичности изложения сделаем допущение, что каждый тип может быть представлен единственным экземпляром: фирмы — некоторой обоб-

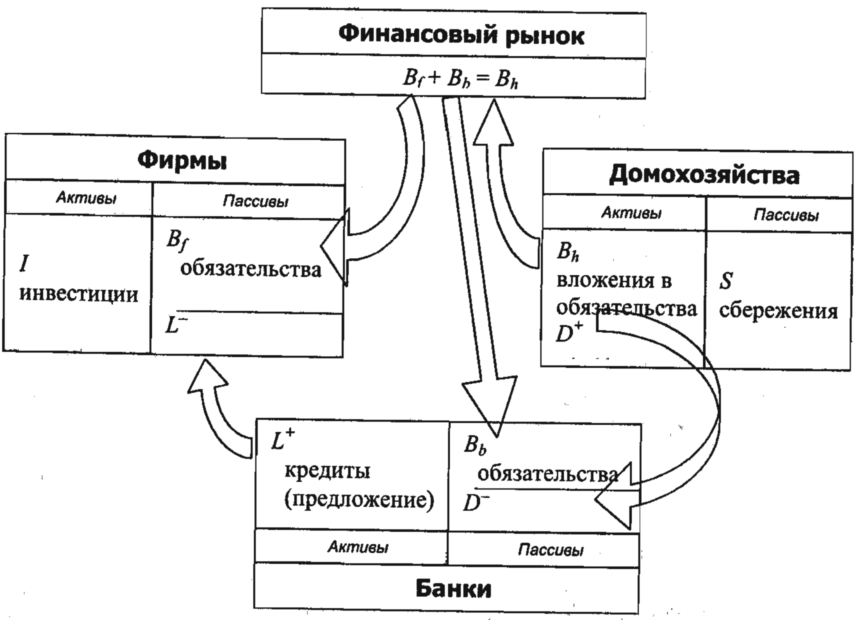

Рис. 1.1. Схема финансового взаимодействия между субъектами простейшей экономической системы

щенной фирмой, банки — банком и т. д. Также для большей наглядности ограничимся рассмотрением только двух этапов функционирования нашей условной экономической системы.

Пусть к началу первого этапа домохозяйство обладает некоторым денежным ресурсом в объеме W. Оно разбивает его на две части, одна из которых идет на его потребление, а другая превращается в активы, приносящие доход, во втором периоде: либо в виде банковского депозита, либо тратится на приобретение ценных бумаг (обязательств), выпускаемых банками и фирмами. Поведение домохозяйства описывается двумерным вектором (C_1, C_2), где C_t — объем его потребления в период $t = 1, 2$. Если предположить, что качество потребления домохозяйства может быть оценено с помощью некоторой функции полезности $u(C_1, C_2)$, то задача, решаемая им в рамках рассматриваемой модели, может быть сформулирована как выбор такого способа потребления (C_1, C_2), который максимизирует полезность с учетом бюджетных ограничений:

$$\max u(C_1, C_2), \tag{1.2.1}$$

$$C_1 + B_h + D^+ = W, \tag{1.2.2}$$

$$C_2 = \pi_f + \pi_b + (1+r)B_h + (1+r_D)D^+, \tag{1.2.3}$$

где

π_f и π_b — конечная прибыль фирм и банков, распределяемая среди домохозяйств на этапе $t = 2$;

r — норма процентных выплат по ценным бумагам (обязательствам);

r_D — норма процентных выплат по депозитам.

В данной вырожденной ситуации, очевидно, депозиты и ценные бумаги являются *совершенными субститутами*. Более того, нетрудно показать, что оптимальное решение задачи (1.2.1)–(1.2.3) достигается при условии

$$r = r_D. \tag{1.2.4}$$

Задача, стоящая перед фирмой, состоит в выборе значений объемов прямого и банковского финансирования (L^- и B_f), максимизирующих ее прибыль:

$$\max \pi_f, \tag{1.2.5}$$

$$\pi_f = f(I) - (1+r)B_f - (1+r_L)L^-, \tag{1.2.6}$$

$$I = B_f + L^-, \tag{1.2.7}$$

где

$f(I)$ — производственная функция фирмы, возвращающая объем ее валового выпуска в зависимости от объема инвестиций I;

r_L — норма процентных выплат по банковским кредитам.

По аналогии с предпосылками, касающимися поведения домохозяйства, для фирмы кредиты и ценные бумаги также представляют собой совершенные субституты, и решение задачи (1.2.5)–(1.2.7) достигается только тогда, когда

$$r = r_L. \tag{1.2.8}$$

Цель работы банка заключена в максимизации прибыли π_b за счет определения оптимальных значений объемов выданных фирмам кредитов L^+, собранных с домохозяйств депозитов D^- и выпущенных ценных бумаг B_b. Формально задача, решаемая банком, может быть записана в следующем виде:

$$\max\ \pi_b, \tag{1.2.9}$$

$$\pi_b = r_L L^+ - rB_b - r_D D^-, \tag{1.2.10}$$

$$L^+ = B_b + D^-. \tag{1.2.11}$$

Общее равновесие в данной экономической системе характеризуется:

- вектором процентных ставок (r, r_L, r_D);
- векторами, задающими выбор домохозяйства — (C_1, C_2, B_h, D^+), фирмы — (I, B_f, L^-) и банка — (L^+, B_b, D^-).

При этом должны выполняться условия:

- элементы упомянутых векторов соответствуют оптимальному выбору домохозяйства, фирмы и банка, т. е. являются решениями задач (1.2.1)–(1.2.3), (1.2.5)–(1.2.7) и (1.2.9)–(1.2.11);
- для всех рынков выполняются условия баланса, а именно, для рынка сбережений и инвестиций:

$$I = S,$$

для рынка депозитов:

$$D^+ = D^-,$$

для рынка кредитов:

$$L^+ = L^-,$$

для финансового рынка (рынка ценных бумаг):

$$B_h = B_f + B_b.$$

Учитывая (1.2.4) и (1.2.8), можем заключить, что условие равновесия в настоящей модели заключается во взаимном равенстве всех процентных ставок:

$$r = r_L = r_D. \tag{1.2.12}$$

Опираясь на условие (1.2.12), мы можем сформулировать следующий принципиальный вывод:

☞ в рамках описанной модели в ситуации равновесия банки получают нулевую прибыль, а структура их портфеля (соотношение привлеченных депозитов и выпущенных обязательств) не влияет на деятельность других агентов рынка (фирм и домохозяйств).

Как нетрудно заметить, данное заключение по сути аналогично утверждению фундаментальной теоремы Модильяни—Миллера о структуре капитала фирмы в условиях совершенной конкуренции. Дополнительно следует указать на то, что внесение в описанную модель учета фактора неопределенности при сохранении неизменными всех прочих предпосылок не сможет изменить данный парадоксальный (и явно идущий вразрез с опытом повседневной жизни) результат.

Таким образом, в рамках классической парадигмы Эрроу—Дебре невозможно объяснение причин существования и закономерностей функционирования банковских институтов. Решение данной проблемы так или иначе связано с построением моделей, учитывающих дополнительные аспекты финансово-экономической деятельности. Среди направлений развития микроэкономической теории в данной области, в частности, могут быть названы:

- модели, изучающие и обосновывающие деятельность банков как финансовых посредников, с позиции проблем неполноты информации и асимметричного доступа к ней. Их рассмотрению посвящена вторая глава настоящей книги;
- модели, применяющие так называемый производственно-организационный подход. В его рамках банки трактуются как фирмы, оказывающие финансовые услуги своим клиентам — вкладчикам и заемщикам. Модели этого типа описываются в третьей главе.

1.3. Управление процессами привлечения средств в современном банке

На весьма общем уровне комплекс задач управления балансом, решаемых в рамках банковского учреждения, может быть разбит на подсистемы задач управления активами и пассивами.

Напомним, что к *активам* банка относят находящиеся в его распоряжении средства, используемые (размещаемые, вкладываемые) с целью получения дохода. К основным видам активов относятся такие статьи баланса, как:

- денежные средства на счетах центрального банка;
- средства, вложенные в государственные долговые обязательства;
- средства, размещенные в других банках и кредитных организациях;
- вложения в ценные бумаги (долгосрочные и для перепродажи);
- выданные кредиты, средства, переданные в лизинг;
- основные средства, нематериальные активы, резервы и т. д.

В профессиональной финансовой литературе традиционно наблюдается существенный уклон в сторону задач и методов управления активами банков. В то же время проблемы, касающиеся пассивов, рассматриваются значительно реже.[1] В связи с этим в данном параграфе мы более подробно остановимся именно на вопросах, связанных с организацией (спецификой и конкретными формами) процессов привлечения средств в банк.

Управление процессами привлечения денежных ресурсов, обеспечивающее как минимизацию возможных издержек, так и достаточность имеющихся депозитов для финансирования кредитов, которые банк желает предоставлять своим клиентам, является важнейшей характеристикой качества его работы в целом. На рис. 1.2 приведена схема в общем виде, описывающая основные источники денежных средств.

Тенденции динамики соотношений собственных и привлеченных денежных средств в финансовых фирмах можно проследить с помощью данных Федеральной корпорации страхования депозитов США (Federal Deposit Insurance Corporation, FDIC), на основе которых построена диаграмма, приведенная на рис. 1.3.

[1] Такое положение дел отчасти может быть объяснено существовавшей на определенном этапе относительной недооценкой влияния на прибыль решений по пассивам.

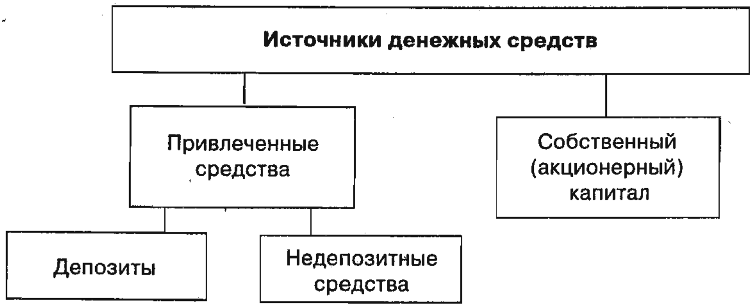

Рис. 1.2. Состав источников денежных средств банка

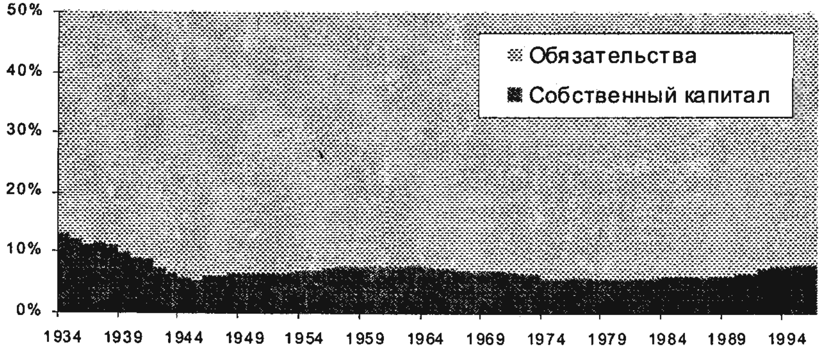

Рис. 1.3. Соотношение суммарного собственного и привлеченного капитала для банков — участников FDIC по годам

Из нее следует, что суммарная доля собственных средств за последние десятилетия была меньше 8,5%, хотя за последние годы (после 1988 г.) наблюдался ее незначительный рост.

Депозиты, и прежде всего вклады, занимают особое место среди указанных источников.

☞ «**Вклады** — это основа, за счет которой банки развиваются и преуспевают. Вклады являются особой статьей в балансе банка, что, очевидно, и отличает банковскую деятельность от других форм бизнеса. Способность руководства и сотрудников банка заинтересовать фирмы и потребителей в открытии чековых и сберегательных счетов является основным критерием признания банка публикой», см. [4].

В качестве типичного определения депозитов можно привести следующее:

☞ «**Депозиты** — сумма денег, которую клиент вносит на хранение в банк и может использовать для расчетов или изъять наличными», см. [1, с. 9].

Депозиты образуются двояким путем — за счет взноса денег как в наличной форме, так и в виде подлежащего оплате денежного документа (чека, облигационного купона и т. п.) или вследствие создания мнимого вклада в процессе кредитования клиентов. При идентификации понятия депозитов также следует учитывать тенденции к стиранию жестких граней между различными видами финансовых ресурсов, что проявляется в появлении так называемых *контокоррентных счетов*, отличающихся от обычных депозитных тем, что для них допускается наличие отрицательного остатка.

В классической литературе по банковскому менеджменту (см., например, [5]) выделяют две ключевые задачи, которые должны решаться в рамках управления депозитами в любом банке:

- определение источников получения депозитов с наименьшими затратами;
- определение способов гарантирования депозитов, достаточных для обеспечения желаемого объема кредитов и других финансовых услуг.

Количество и диапазон видов депозитных услуг, предлагаемых банковскими фирмами, постоянно растет. Поэтому имеет смысл лишь кратко остановиться на характеристике наиболее распространенных. Основные типы банковских депозитов представлены на рис. 1.4.

1.3.1. Трансакционные (платежные) депозиты

Трансакционные (платежные) депозиты являются одной из старейших услуг, предоставляемых банками. Прежде всего, они включают в себя *обычные беспроцентные депозиты до востребования*, которые, не принося доходов, облегчают для клиента проведение расчетов, обеспечивают сохранность средств и фиксируют любые операции по чекам. Важнейшей экономической характеристикой данного источника привлеченных средств является обязанность банка произвести их немедленный возврат по требованию клиента. Отсюда вытекает задача определения той доли от общей суммы депозитов до востребования, которыми может распоряжаться финансовая фирма для получения

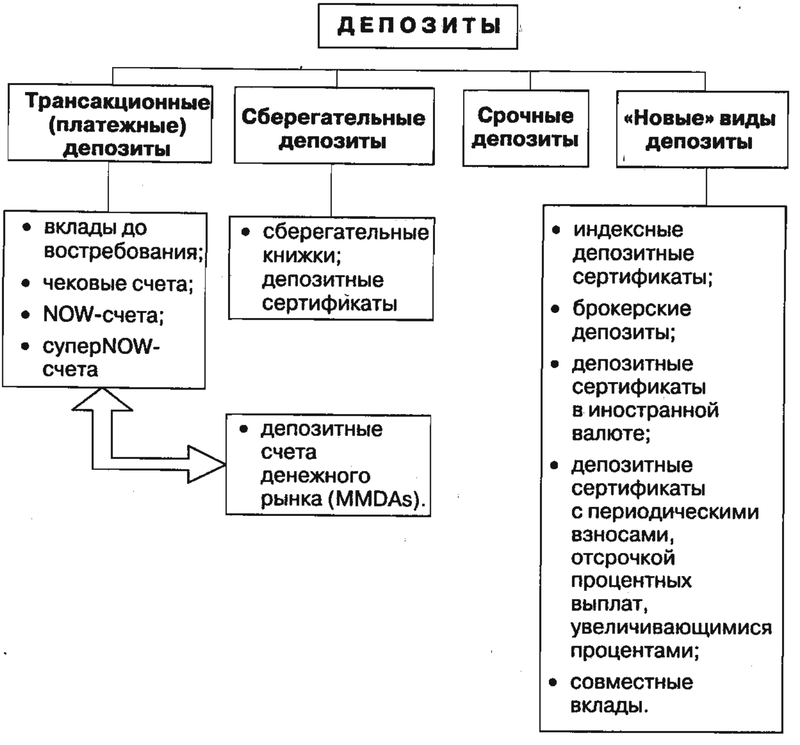

Рис. 1.4. Типы банковских депозитов

прибыли, или, иначе говоря, определения *коэффициента трансформации* краткосрочных ресурсов в долгосрочные. В частности, во французских банках он вычисляется по формуле

$$K = \frac{R - S}{S}, \qquad (1.3.1)$$

где:

K — коэффициент трансформации краткосрочных ресурсов в долгосрочные;

R — краткосрочные ресурсы;

S — краткосрочные ссуды и вложения капитала.

Для российских банков предлагается вариант

$$K = 1 - \frac{Д_{об}}{К_{об}}, \qquad (1.3.2)$$

где:

$Д_{об}$ — кредитовый оборот по поступлению средств на депозитные счета (сроком до одного года);

$К_{об}$ — дебетовый оборот по выданным краткосрочным ссудам и другим краткосрочным вложениям (сроком до одного года) см. [2].

Другая проблема, связанная с данным видом депозитов, — это возможность начисления процентов по ним. Так, в США законом Гласса—Стигалла в 1933 году были запрещены процентные выплаты по обычным чековым счетам. Данное решение, которое, кстати, не считается бесспорным, было нацелено на то, чтобы запретить банкам жертвовать своей надежностью в конкурентной борьбе за вкладчиков. Аргументом в его пользу является то, что вклады до востребования, безусловно, являются наиболее непостоянными и наименее предсказуемыми источниками средств. Следует также заметить, что многие банки практикуют так называемые *скрытые формы выплаты процентов*, к которым, например, может быть отнесен отказ взимания платы за обслуживание счета при превышении величины остатка на нем некоторого установленного уровня.

Другой формой разрешения банками данной проблемы явилось появление *NOW*-счетов (*NOW — negotiable order of withdrawal account*), представляющими из себя гибрид чекового и сберегательного депозитов. *NOW*-счет допускает начисление процентного дохода и одновременно может использоваться как чековый счет для оплаты покупок товаров и услуг клиентом при условии, что банк может требовать предварительного уведомления о снятии средств. Счета данного вида возникли в 1973 году в нескольких штатах Новой Англии (Массачусетс, Нью-Хэмпшир). По ним был установлен потолок дохода в 5%, позже увеличенный до 5,25%. С 1981 года (после принятия Закона о дерегулировании) *NOW*-счета были разрешены на всей территории США. Однако открываться они могли только для физических лиц и неприбыльных организаций. После Закона Гарна—Сен-Жермена 1982 года в США появились еще два важных вида счетов: *депозитные счета денежного рынка* (*MMDA*) и супер-*NOW* (*SNOW*), предлагающие плавающие процентные ставки на денежном рынке, с возможностью приема подписных чеков или перевода денег для оплаты.

Многие банки США предлагают своим клиентам так называемые *счета с автоматической очисткой* (*sweep accounts*), предусматривающие при достижении заранее оговоренного уровня перемещение сумм с трансакционного счета в финансовые инструменты, приносящие процентный доход.

Таким образом, анализируя процесс возникновения новых видов счетов, можно выделить методы, используемые в государственном регулировании деятельности банков для поддержания уровня их надежности при сохранении возможностей для конкуренции за вклады:

- ограничение предельной ставки процентного дохода;
- ограничение круга клиентов физическими лицами и неприбыльными организациями;
- введение условий на предварительное уведомление о снятии средств;
- ограничение на количество операций со счетом;
- ограничение на период существования счета.

1.3.2. Сберегательные и срочные депозиты

Следующий вид депозитов, **сберегательные счета**, ориентированы, как правило, на частных вкладчиков, и в определенных ситуациях по ним предусмотрены ограничения на нижний и верхний предел хранимой суммы. Они отличаются от чековых счетов способами выплаты и снятия средств, порядком расчета процентов. В различных странах, вообще говоря, депозиты данного класса имеют разные названия, а также несколько отличаются законодательные нормы, регулирующие порядок работы с ними. Во Франции и Бельгии по процентам, начисляемым на сберегательные счета, предусмотрены налоговые льготы. В Германии предусмотрено право банка на предварительное уведомление при снятии со сберегательного счета суммы, превышающей 2000 DM.

Исторически первый представитель депозитов данного вида — депозиты со сберегательными книжками. Они открываются начиная с небольших сумм, как для физических лиц, правительственных и неприбыльных организаций, так и для коммерческих фирм, для которых, как правило, предусматриваются ограничения на размер хранимой суммы.

Методы конкуренции на рынке сберегательных депозитов ведут к их модификации в двух направлениях:

- повышение уровня обслуживания — появление, к примеру, сберегательных депозитов с периодическими выписками о состоянии счета;
- повышение уровня процентного дохода — начиная с конца 70-х гг. широкое распространение получили сберегательные депозиты с плавающей процентной ставкой. Так, в 1978 г. в США возникли депозитные сертификаты денежного рынка, процентные ставки по которым увязывались с рыночным доходом по ценным бумагам правительства США. Однако на данном примере также хорошо просматриваются сдерживающие регулирующие воздействия государственных органов, выразившиеся во введении высокой минимальной суммы вкладов, больших пеней за снятие средств раньше сроков, регламентации максимальных процентных ставок.

В настоящий период четко просматривается тенденция на стирание граней между чековыми и сберегательными депозитами, возникновение депозитов, обладающих «гибридными» свойствами, которые не могут быть однозначно отнесены к тому или другому классу. Об этом свидетельствует тот факт, что на момент своего возникновения *NOW*-счета федеральными контролирующими агентствами относились к сберегательным и только после 1981 года стали рассматриваться как чековые. В то же время депозитные счета денежного рынка (*MMDA*), например, рассматриваются как сберегательные.

Срочные депозиты — предназначены для привлечения средств клиентов, которые отказываются от их непосредственного использования в течение определенного промежутка времени. При досрочном снятии денег предусмотрены штрафы. С точки зрения финансовой фирмы срочные депозиты характеризуются более высокими (по сравнению с трансакционными депозитами и сберегательными депозитами до востребования) расходами на выплату процентов, но меньшими затратами на обслуживание и управление. В исследованиях, посвященных срочным и несрочным сберегательным депозитам, отмечается их определенная экономическая тождественность (например, Питер Роуз объединяет сберегательные и срочные депозиты в единый класс, см. [4]), вызванная фактическим смыканием условий использования и выплаты доходов по тем и другим. Так, по сберегательным счетам может быть предусмотрено предуведомление о снятии средств, а штраф за досрочное закрытие срочного депозита обычно бывает не очень большим. В частности, в [3] отмечается, что в условиях французской налоговой системы существует проблема конкуренции срочных вкладов с обычными сберегательными из-за отсутствия у первых тех льгот, которые имеют вторые.

1.3.3. «Новые» виды депозитов

Завершая рассмотрение вопросов классификации депозитов, следует остановиться на так называемых **новых видах депозитов**, возникших во второй половине 80-х годов. К ним относятся:

- *индексные депозитные сертификаты* (впервые были предложены в 1987 г. Chase Manhattan Bank и First Chicago Corp.), выплаты по которым зависят от динамики цен на фондовых и товарных рынках, что позволяет клиентам получить высокий доход при росте цен на акции или товары при существующей возможности потерь при их падении;
- *брокерские депозиты* — средства клиентов, собранные брокерами и размещенные в банковских и сберегательных учреждениях, предлагающих максимально высокие процентные ставки;
- *депозитные сертификаты в иностранной валюте* — предоставляют клиентам возможность получать более высокий процентный доход за счет операций на тех внешних рынках, где складывается лучшая конъюнктура;
- депозитные сертификаты *с периодическими взносами*, позволяющие владельцу вносить их постепенно до накопления желаемой суммы; депозитные сертификаты *с отсрочкой процентных выплат*, целью которых является минимизация налогов с клиента; депозитные сертификаты *с увеличивающимися процентами*, процентный доход по которым возрастает в течение срока жизни вклада, и допускающие снятие средств в определенные даты;
- *совместные вклады*, предназначенные для относительно небольшой группы вкладчиков, объединенной по некоторому общему признаку.

Основными проблемами, связанными с нововведениями на рынке депозитных ресурсов, являются снижение надежности привлекающих учреждений из-за обязательств выплачивать более высокий доход и угроза потери уже сформировавшейся «дешевой» клиентуры, которая начинает переводить свои средства в более выгодные формы хранения.

Из анализа направлений развития большинства новых видов депозитных сертификатов естественным образом следует вывод о явном стремлении финансовых фирм создавать преимущественно такие формы привлечения средств, в которых процентные затраты как можно более тесно связаны с доходами от использования данных средств. Из этого вытекает актуальность задач усиления взаимосвязи и степени координации в управлении активами и пассивами.

1.3.4. Ценообразование на депозиты

Важнейшей задачей, решаемой любой финансовой фирмой при управлении депозитами, является *задача ценообразования*. В соответствии с постулатами классической экономической теории конечный уровень цен на депозиты устанавливается под влиянием рынка, а не отдельно взятой компании. В то же время ее ценовая политика во многом определяется текущими индивидуальными приоритетами: обеспечение роста, экспансия на новые рынки, стремление избавиться от нежелательных вкладчиков и т. п.

В литературе, посвященной проблемам управления в финансовой сфере, выделяются два основных метода образования цен на депозитные ресурсы:

- ценообразование по методу «издержки плюс прибыль»;
- установление процентных ставок на депозиты по предельным издержкам.

Ценообразование по методу «издержки плюс прибыль» основано на определении ставок расходов, включая затраты на содержание обязательных резервов и страховые взносы, для всех видов депозитных источников, ставок прибыли и последующего расчета средневзвешенного значения. Такой подход требует точного расчета стоимости каждого вида услуг по депозитам. Как пример решения данной проблемы следует отметить программу учета уровня издержек и доходов банковских депозитов, поддерживаемую Федеральным резервным банком США и известную под названием Функционально-стоимостной анализ (Functional Cost Analysis — *FCA*).[1] В соответствии с данными *FCA* наиболее дешевыми являются чековые депозиты населения, т. е. в данном случае экономия на выплате процентов компенсирует затраты по обслуживанию. Очевидно, что данный метод

[1] Подробную информацию о получении услуг FCA можно получить на Web-сервере html://www.frbfca.org.

ценообразования применим в ситуации, когда зависимость между объемом привлекаемых средств и затратами на привлечение близка линейной. В противном случае многие финансовые эксперты (см., например, [13]) рекомендуют использовать не средневзвешенные, а *предельные издержки*, т. е. дополнительные расходы, связанные с привлечением новых средств. Проблемы метода предельных издержек связаны с наличием (или отсутствием) возможностей определить их конкретное значение. Иначе говоря, с математической точки зрения необходимо определить форму функциональной зависимости объемов депозитов от затрат на их привлечение и найти для нее производную.

Нельзя обойти вниманием и такой важный теоретико-экономический вопрос, связанный с концепциями ценообразования на депозитные ресурсы, как эластичность реакции клиентов на изменение условий, предлагаемое финансовой компанией. В [9], к примеру, вклады относятся к *постоянным* или *квазипостоянным факторам производства*, что объясняется их меньшей чувствительностью (по сравнению с другими финансовыми источниками) к колебаниям уровня цен на услуги и процентных ставок. Это связано как с тем, что многие клиенты пользуются сразу несколькими видами услуг банка (в том числе и кредитными), так и с тем, что во многих случаях потери клиента при переводе счета в другой банк не компенсируются приобретаемыми выгодами. Также серьезную роль играют такие факторы, как местоположение, надежность, доверительность отношений и т. п. Из этого свойства депозитов следует вывод о том, что реакция на изменение затрат на привлечение средств во многом зависит от текущего состояния рынка, т. е. от того, является ли рынок только что открывшимся, растущим или уже устоявшимся.

1.3.5. Недепозитные средства

Другим источником привлеченных средств для финансовой фирмы являются **недепозитные средства** (см. рис. 1.2). Потребность в недепозитных источниках определяется в основном размером *разрыва* между суммой требуемых кредитов и суммой депозитов. Предназначение данных источников — избежать потерь от невозможности располагать активами в достаточном объеме в требуемый момент времени (например, отсутствие средств на кредит для стратегически значимого заемщика). Отсюда вытекает и методика определения необходимых размеров недепозитных средств, состоящая в вычислении разности между прогнозируемой с учетом текущих и ожидаемых условий суммы депозитов и прогнозным значением текущих и будущих кредитов (с учетом некоторого резерва).

Среди основных источников недепозитных средств могут быть названы следующие.

- *Рынок кредитных ресурсов центрального банка.* В подавляющем большинстве случаев на нем предоставляются краткосрочные (суточные) заимствования, хотя могут заключаться и договоры по срочным и бессрочным займам, которые продлеваются ежедневно до тех пор, пока одна из сторон не прервет контракт. Данный рынок выполняет роль проводника финансовой политики центрального банка и основным его недостатком с точки зрения банков-заемщиков является неустойчивость предлагаемой процентной ставки, колебания которой затрудняют планирование деятельности.
- *Рынок межбанковского кредита*, базирующийся на свободных средствах, которые одни банки могут предложить другим, как правило, на непродолжительный период времени.
- *Формально-депозитные источники: переводные депозитные сертификаты* — источник формирования банковских средств, формально называемый депозитами, практически представляет собой долговые расписки, выдаваемые на время с целью получения средств. Важной особенностью переводных депозитных сертификатов является их активное обращение на вторичном рынке. Схожий по природе источник средств представляют собой *банковские боны* — долговые обязательства, выпускаемые на определенный период (иногда продлеваемый) учреждениями банка для частных лиц и подлежащие возврату в установленный срок. Боны позволяют клиентам иметь отношения по вкладам с удобными для них учреждениями, не будучи привязанными к банку, но и не теряя с ним отношений. В то же время банковские боны не обращаются на вторичном рынке. К источникам данного типа также может быть отнесен рынок *евровалютных депозитов*, основанный на ликвидных фондах, создаваемых транснациональными финансовыми структурами для взаимообмена и предоставления кредита крупнейшим клиентам.
- *Соглашения об обратном выкупе ценных бумаг* — получение краткосрочных займов с относительно невысокими процентами под залог малорисковых активов (например, государственных ценных бумаг).

- *Учет банковских акцептов.* Банковский акцепт — срочная тратта (переводной вексель), выставленная экспортером или импортером на банк, согласившийся его принять, и предназначенная для финансирования внешнеторговой сделки.
- *Капитальные ноты и облигации.*
- *Выпуск коммерческих бумаг* (*векселей*) через филиал.
- *Долгосрочные источники* — ипотеки (залоги под недвижимость), долговые и залоговые обязательства долгосрочного капитала, срок погашения которых, как правило, изменяется в пределах от 7 до 12 лет.

В существующей литературе по банковскому менеджменту выделяются следующие факторы, характеризующие источник недепозитных средств:

- относительная стоимость;
- риск (неустойчивость и степень надежности);
- срок погашения;
- правила, ограничивающие использование альтернативных источников.

Диаграмма на рис. 1.5, построенная по данным FDIC, отражает динамику изменения структуры суммарных обязательств для банков-участников. Из нее следует, что общей тенденцией является рост доли недепозитных источников при сохранении преобладания по абсолютной величине депозитных (для наглядности в качестве нижней границы взят уровень 75%).

По аналогии диаграммы на рис. 1.6 и 1.7 показывают динамику внутренней структуры депозитных средств. Они, в частности, наглядно демонстрируют рост в общем объеме доли депозитов, приносящих процентный доход, и, соответственно, активное стремление банков использовать данный инструмент в конкурентной борьбе за потенциальные источники финансовых ресурсов.

Начиная с 60-х годов в банковском менеджменте получила развитие *доктрина отношений с клиентом*, утверждающая, что банк должен отдавать *приоритет* предоставлению займов всем клиентам, от которых рассчитывает получить чистую прибыль. Распространение данной доктрины вызвало повышенное внимание к развитию стратегий *управления пассивами*. Управление недепозитными пассивами дает финансовой фирме возможность самостоятельно манипулировать своей ресурсной базой, гибко реагируя на изменения конъюнктуры кре-

Рис. 1.5. Динамика структуры суммарных обязательств для банков-участников FDIC

Рис. 1.6. Динамика внутренней структуры (по типам) суммарных депозитов по банкам-участникам FDIC

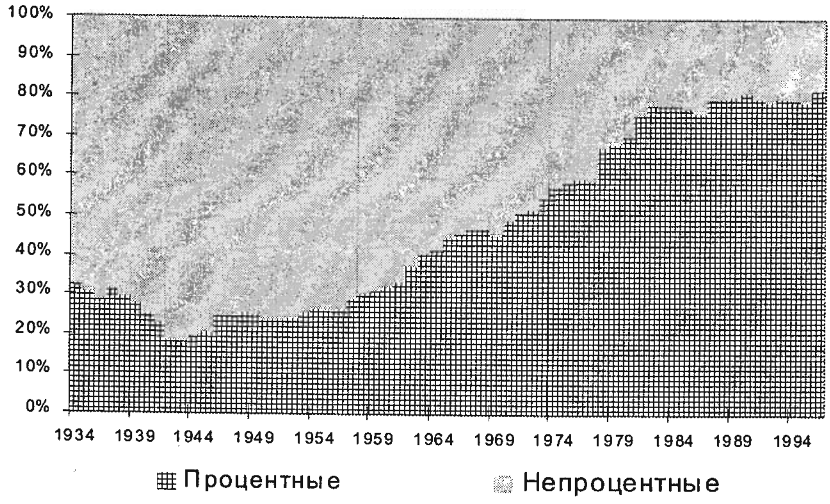

Рис. 1.7. Динамика внутренней структуры (по процентному доходу) суммарных депозитов по банкам-участникам FDIC

дитных потребностей клиентов, в то время как в случае с депозитами эта ресурсная база в значительной мере зависит от поведения вкладчиков. Обратной стороной данного процесса является его повышенная чувствительность к процентным колебаниям, из чего вытекает насущная необходимость комплексного сочетания в системе менеджмента финансовой компании методов управления и депозитными, и недепозитными ресурсами.

1.3.6. Регулирование процессов привлечения средств

Важное направление в исследованиях, посвященных деятельности финансовых фирм, связано с вопросами воздействий на них мер государственной регулирующей политики. Значительная часть литературы по данной теме связана с рассмотрением опыта США, а именно с анализом эффекта от изменений в экономической системе, происшедших после принятия в 1981 году закона о дерегулировании, по сравнению с ситуацией, существовавшей со времен «нового курса» Рузвельта и принятия в 1933 году закона Гласса—Стигалла.

Меры, принимаемые центральными банками, условно могут быть разделены на три типа:

- воздействия, носящие наблюдательный, контрольный или моральный характер, трудно поддающиеся количественному измерению;
- воздействия, влияющие на объем основного капитала: требования по структуре и размерам пакетов акций, количеству и размерам филиалов и т. п.;
- воздействия, непосредственно влияющие на стоимость ресурсов и услуг финансовой фирмы (задание норм по формированию обязательных резервов, размеров страховых выплат и предельных норм процентного дохода по депозитам).

Управляющие воздействия последнего типа наиболее часто оказываются в фокусе рассмотрения. Многие экономисты (см., например, работу [12]) предлагают трактовку обязательных резервных требований, устанавливаемых центральными банками, как своеобразный налог на финансовые институты и владельцев депозитов, так как наличие некоторой замороженной доли привлеченных средств, не приносящей никаких доходов, уменьшает их прибыль в целом. Одновременно формулируется и естественный ограничитель возможностей расширения обязательных резервов — чрезмерные затраты ведут к оттоку средств в другие формы хранения. Меры по заданию потолков на выплату процентов, как уже отмечалось выше, связаны с пресечением попыток банков к вложению средств в высокодоходные, но связанные с высоким риском активы. Учитывая эту особенность данного регулирующего воздействия, его полноценное изучение возможно только при комплексном анализе кредитных и депозитных ресурсов и сложившейся системы доходов и расходов по ним.

Основные выводы

Обобщим и приведем в сжатом виде основные положения настоящей главы. В концентрированной форме основной вопрос, рассмотренный в ней, может быть сформулирован так: «*Что такое банки и в чем обосновывается объективная необходимость их существования?*».

- Существует много различных подходов к определению понятия «банк». В частности, данный термин может быть определен как *институт, текущая деятельность которого сводится к выдаче кредитов и привлечению в качестве депозитов средств (как правило, от широких групп населения).*

- К «традиционным» функциям банков относятся: обеспечение расчетов и платежей, трансформация активов, управление рисками, обработка информационных потоков, мониторинг заемщиков.
- Банки играют важнейшую роль в рыночной экономике, обеспечивая существования в ней финансовых ресурсов двух типов: с одной стороны, делимых, низкорисковых, краткосрочных пассивов, а с другой, — неделимых, рисковых, долгосрочных активов, являющихся основой для кредитования проектов, функции мониторинга которых также могут выполняться банками.
- В рамках классической модели экономического равновесия невозможно объяснить причины существования банков как экономических институтов. Решение данной проблемы требует построения специальных типов экономико-математических моделей. Среди таковых могут быть выделены модели, трактующие деятельность банков как финансовое посредничество в условиях информационной асимметрии, а также модели, основанные на производственно-организационном подходе.
- Управление процессами привлечения средств является одной из важнейших составляющих в работе подавляющего большинства банков. С деятельностью данного рода связаны две принципиальные задачи: во-первых, обеспечение достаточности ресурсной базы банка и, во-вторых, определение таких источников заимствований, которые позволяют минимизировать издержки на их привлечение. На самом общем уровне источники привлеченных средств можно разделить на депозитные и недепозитные.
- Фундаментальная проблема развития рынка депозитных ресурсов заключена в потенциальном противоречии между стремлением финансовых учреждений с целью привлечения клиентуры выплачивать более высокие проценты и снижением их надежности, к которому подобные действия могут привести. Одним из способов разрешения данной проблемы является внедрение таких форм привлечения средств, в которых процентные затраты как можно более тесно связаны с доходами от использования сделанных заимствований.

- Деятельность банков, связана с движением огромных объемов финансовых ресурсов и затрагивает кардинальные интересы широких общественных слоев. Этот факт придает роли банковских институтов особую социальную значимость и одновременно делает их объектом для внешнего централизованного (государственного) регулирования.

Литература

1. *Казимагомедов А. А.* Банковские депозиты: зарубежный опыт. СПб, 1996.
2. *Масленченков Ю. С.* Финансовый менеджмент в коммерческом банке. М., 1997.
3. *Ривуар Ж.* Техника банковского дела. М., 1993.
4. *Роуз П.* Банковский менеджмент /Пер. с англ. М., 1995.
5. *Синки Дж.* Управление финансами в коммерческих банках /Пер. с англ. М., 1994.
6. ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЗАКОН РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ «О банках и банковской деятельности (в редакции, введенной в действие с 10 февраля 1996 года Федеральным законом от 3 февраля 1996 года № 17-ФЗ)». М., 1996.
7. *Allen F., Gale D.* A welfare comparison of intermediaries in Germany and the US // *European Economic Review*, vol. 39(2), pp. 179–109, 1995.
8. *Baltensperger E.* Alternative approaches to the theory of the banking firm // *Journal of Monetary Economics*, vol. 6, 1980.
9. *Flannery M.* Retail Bank Deposits as Quasi-Fixed Factors Production // *American Economic Review*, vol. 3, pp. 527–536, 1972.
10. *Freixas X., Rochet J.-Ch.* Microeconomics of banking. MIT Press, 1998.
11. *Hancock D.* A Theory of Production for the Financial Firm. Norwell (Mass.), Kluver Academic Publishers, 1991.
12. *Kane E.J.* Re-Regulation, Savings-and-Loan Diversification, and the Flow of Housing Finance // *In Savings and Loan Asset Management Under Deregulation, San Francisco: Federal Home Loan Bank*, pp. 80–109, 1981.
13. *McNulty J. E.* Do You Know the True Cost of Your Deposits? // *Review, Federal Home Loan Bank of Atlanta*, vol. 35(3), pp. 1–6, 1986.

Глава 2

МОДЕЛИ БАНКА КАК ФИНАНСОВОГО ПОСРЕДНИКА

Настоящая глава посвящена экономико-математическим моделям банков, в которых их деятельность трактуется с точки зрения выполнения функций финансового посредничества.

Для начала остановимся на определении самого понятия «финансовый посредник» (*financial intermediary*). В [9], в частности, приводится его следующая формулировка:

> ☞ **Финансовый посредник** — это экономический агент, специализирующийся на покупке и продаже (совершаемых, как правило, параллельно во времени) финансовых контрактов и ценных бумаг.

Заметим, что такое определение, с одной стороны, достаточно хорошо отражает сущность и задачи данного финансового института, но, с другой, — мало чем отличается от определения деятельности посредника, работающего в сфере промышленности или торговли.

Прежде всего, приведенное определение является весьма общим. Так, брокеры и дилеры, работающие на финансовом рынке, также являются посредниками. Возникает вопрос: что же отличает банки от них? *Специфические черты банков* в том, что они:

- во-первых, имеют дело с такими формами финансовых контрактов (размещение кредитов и депозитов), которые менее ликвидны, нежели ценные бумаги, которые могут, как правило, более свободно обращаться на рынке;
- во-вторых, характеристики депозитных контрактов, заключаемых банками с заимодателями, качественно отличаются от характеристик кредитных контрактов, заключаемых ими с заемщиками.

Перечисленные особенности являются своего рода базой для фундаментальной гипотезы, объясняющей причины существования банков. Согласно ей банки рассматриваются как *экономические институ-*

ты, осуществляющие трансформацию финансовых контрактов. Такой подход получил развитие в работах таких известных экономистов, как Бенстон, Смит, Фама (Benston, Smith, Fama), см. [2, 8].

В «идеальной» экономике, предполагающей наличие абсолютной конкуренции, возможность полной диверсификации и полную прозрачность рынка, для финансовых посредников места нет. Однако как только к описанию экономической системы добавляются предпосылки, учитывающие возможность качественных и концентрационных эффектов в процессах трансформации активов, одновременно возникает и объективная необходимость в тех, кто эти процессы будет осуществлять, то есть в финансовых посредниках.

В свете этого финансовые посредники могут рассматриваться как коалиции заемщиков и кредиторов, которые реализует трансакционные технологии, используя как эффект экономии на масштабах, так и эффект экономии за счет концентрации возможностей.

Другой, не менее важной, причиной существования института финансового посредничества является фактор информационной асимметрии, заключающийся в неравных возможностях по доступу к информационным ресурсам у различных субъектов экономических отношений, что является источником преимуществ для одних и потерь для других. Последнее ведет к возникновению специфической формы издержек, которые могут рассматриваться как частный случай трансакционных издержек.

В рамках моделей, развивающих микроэкономическую теорию банков как финансовых посредников, можно выделить три принципиальных направления.

К первому можно отнести модели, трактующие банки как пулы (емкости) ликвидности или коалиции депозиторов. Здесь упор делается на раскрытие роли банковских учреждений в качестве совокупных фондов, обеспечивающих защиту вкладов своих индивидуальных членов от случайных рыночных колебаний.

Второе направление базируется на концепции банков как коалиций владельцев информации. Очевидно, что оно особенно актуально в условиях информационной асимметрии. Действительно, если доступ к информации о характеристиках проекта, предполагающего инвестиционные вложения, имеют только отдельные заемщики, то конкурентное равновесие может оказаться неэффективным.

Наконец, третье направление связано с так называемой теорией делегированного мониторинга. В общем плане она предполагает, что в условиях, когда наблюдается эффект возрастания доходов от масштаба, индивидуальные заимодатели предпочитают делегировать функции контроля (мониторинга) за поведением предпринимателей, в проекты которых они сделали инвестиции, специальным посредническим фирмам, то есть банкам.

2.1. Трансакционные издержки, их место и роль в деятельности банков

Простейшее объяснение факта существования финансовых посредников вытекает из очевидных различий между природой потоков, наблюдающихся на входах и выходах банков. Действительно, достаточно распространено представление финансовых организаций как объектов, на вход которых поступают депозитные ресурсы, характеризующиеся отсутствием значимых ограничений на минимальный объем и относительно низким риском закрытия, а на выходе наблюдаются кредитные услуги, которые должны быть не ниже некоторой величины, иногда имеют длительный срок погашения, а также являются более рискованными. Таким образом, обоснование смысла существования финансовых посредников (банков) может быть сведено к раскрытию выполняемых ими функций *по количественной, временной и рисковой трансформации активов* их одних форм в другие.

В то же время необходимо отметить, что содержательное обоснование такой точки зрения возможно при удовлетворительном ответе на вопрос: **почему сами заемщики не могут осуществлять такую трансформацию?**

Традиционный путь решения данной проблемы связан с учетом факта *экономии за счет концентрации возможностей* (economies of scope) и *экономии на масштабах* (economies of scale), которые могут обеспечены только в ходе деятельности специализированных институтов — банков. В качестве фундаментальной причины их существования может быть названо наличие фиксированных *трансакционных издержек*. Они, в свою очередь, объясняют возрастание удельного дохода фирм, применяющих трансакционные технологии. Такой подход подразумевает объединение инвесторов и вкладчиков для разделения этих фиксированных затрат между собой. Данный пример является в определенном смысле классической иллюстрацией эффекта экономии на масштабах.

Дополнительно необходимо отметить, что часто встречающееся в литературе понятие трансакционных издержек является достаточно широким. В частности, оно включает в себя издержки на мониторинг, аудит, поиск и т. п.

Влияние и роль эффекта экономии за счет концентрации возможностей в деятельности банковских институтов были замечены и изучены достаточно давно. Так, начиная со времен итальянских банкирских домов периода Позднего Средневековья и Возрождения, банковские институты, решая задачи сохранения собственных денежных сбережений и ценностей, одновременно могут оказывать аналогичные услуги другим предпринимателям. Еще одним примером проявления данного эффекта являются сферы, связанные с операциями по обороту, перемещению, конвертированию денежных средств.

В то же время необходимо заметить, что примеры проявления эффекта экономии за счет возможностей, касающиеся исключительно платежных, сберегательных и депозитных услуг, являются явно недостаточными для объяснения причин существования универсальных банковских институтов. Более убедительными, видимо, будут случаи действия подобного эффекта, возникающие на стыке кредитной и депозитной сфер.

Одно из возможных объяснений источников возникновения эффекта экономии за счет концентрации возможностей связано с применением теории оптимального портфеля. В соответствии с ней, если существует некоторая категория инвесторов, более склонная к риску, чем другие, то в условиях равновесия она будет брать взаймы безрисковые активы и инвестировать их в рыночный портфель, обладающий как более высокой доходностью, так и более высоким риском. Предполагается, что такие инвесторы имеют относительное преимущество по владению рисковыми активами. Соответственно, они получают бо́льшую прибыль, хотя это увеличивает риск потери капитала и дохода.

Другое возможное объяснение базируется на использовании тех преимуществ, которые дает *диверсификация*. Согласно данной концепции финансовый институт (банк) рассматривается как экономический субъект, владеющий набором ресурсов, характеризующихся ожидаемыми доходами и рискованностью, которые различны для краткосрочной и долгосрочной перспектив. Соответственно, манипулируя ими, он может по меньшей мере обеспечить безубыточность своего существования.

2.2. Модели, обосновывающие причины существования финансовых посредников

Остановимся вначале на относительно простых, но содержательно важных моделях, которые применяются в теоретических исследованиях, объясняющих саму причину существования финансовых посредников в экономической системе. Иными словами, назначение таких моделей заключается в том, что они дают ответ на вопросы: нужны или нет финансовые посредники и как их отсутствие скажется на рыночной ситуации.

Достаточно естественной представляется концепция, в рамках которой банки рассматриваются как коалиции депозиторов или «пулы ликвидности»[1], концентрирующие средства некоторой группы экономических субъектов. Действительно, если предположить, что N таких субъектов (домохозяйств) объединили имеющиеся у них N денежных единиц и при этом события, вследствие которых тот или иной субъект должен будет востребовать свою долю, наступают неодновременно, то объем средств, который должен одномоментно содержаться в совокупном фонде, может быть меньше, чем N. Соответственно, появляется возможность использования временно «свободной» части этого фонда для вложения в некоторые прибыльные, но обладающие низкой текущей ликвидностью проекты. В то же время, из данной концепции проистекает и принципиальное объяснение относительной «хрупкости» банковских институтов: если в силу тех или иных причин у непредвиденно большого количества депозиторов возникает желание воспользоваться своими средствами, то наступает неизбежный крах банка.

2.2.1. Описание простейшей модели финансового посредничества

Простейшая модель, иллюстрирующая механизм работы пулов ликвидности, была предложена в работе Брайанта (Bryant) [3].

Она рассматривает некоторую абстрактную трехпериодную экономику ($t = 0, 1, 2$) с одним условным (обобщенным) продуктом, в рамках которой функционирует конечное множество агентов (экономических субъектов). Предполагается, что в момент времени $t = 0$ каждый из агентов владеет одной единицей продукта. Он обладает возможностью использовать его либо в момент времени $t = 1$ (т. н. раннее потребление), либо в момент времени $t = 2$ (т. н. позднее потребление).

Будем считать, что эффект от потребления продукта агентом может быть измерен с помощью некоторой функции полезности $u(C)$. При этом полезность при «раннем» потреблении C_1 единиц продукта будет $u(C_1)$, а при позднем потреблении C_2 единиц — $\rho \cdot u(C_2)$, где $\rho < 1$ — коэффициент дисконтирования (стандартный инструмент приведения к одному моменту доходов разных периодов).

---

[1] От англ. *pools of liquidity*.

Если считать, что выбор агентом типа потребления происходит под влиянием причин, имеющих случайную природу, то его можно смоделировать с помощью случайной величины, характеризующейся распределением вероятностей π_1, π_2 (π_t — вероятность потребить продукт в момент времени t, где $t = 1$ или 2). Тогда математическое ожидание[1] суммарной полезности потребления продукта агентом может быть выражено как

$$U = \pi_1 \cdot u(C_1) + \pi_2 \cdot \rho \cdot u(C_2). \qquad (2.2.1)$$

Относительно свойств функции полезности $u(C)$ вполне естественными представляются предположения, что она является вогнутой и возрастающей.

Наконец, будем считать, что в ситуации позднего потребления, соответствующей случаю инвестирования средств в проект с длительной технологией, агент получает доход $R > 1$ в момент $t = 2$. В случае же раннего потребления (досрочной ликвидации проекта) он получает в момент $t = 1$ доход $L < 1$.

В последующих пунктах мы на примере сформулированной модели рассмотрим особенности поведения агентов при различных способах институциональной организации экономики.

2.2.2. Ситуация автаркии

Для начала рассмотрим простейшую ситуацию, при которой отсутствуют торговые связи между агентами. Она также в литературе получила название *автаркии* (*autarky*).

В данном случае предполагается, что в момент времени $t = 0$ каждый агент независимо от других выбирает долю I от того количества продукта, которым он владеет, и инвестирует в некоторый проект (предприятие, не обладающее качеством текущей мгновенной ликвидности). Для простоты проект предполагается бесконечно делимым, т. е. не задается стартовой границы на объем вкладываемых в него средств.

Если агент вынужден досрочно отозвать свое вложение («раннее потребление»), то он ликвидирует проект в момент времени $t = 1$, получая доход

$$C_1 = 1 - I + LI = 1 - I(1 - L) \leq 1. \qquad (2.2.2)$$

[1] В дальнейшем, где это позволяет контекст, для краткости изложения мы вместо «математическое ожидание» будем говорить просто «ожидание» (или ожидаемое значение).

Позднее потребление означает получение агентом в момент $t = 2$ (по завершении проекта) дохода

$$C_2 = 1 - I + RI = 1 + I(R-1) \leq R. \tag{2.2.3}$$

Неравенства (2.2.2) и (2.2.3) задают ограничения сверху на доход, получаемый агентом в ситуациях, соответствующих различным типам его потребления. Очевидно, что максимально возможный доход в случае раннего потребления ($C_1 = 1$) достигается при $I = 0$ (не вкладывается ничего), а в случае позднего потребления ($C_1 = R$) — при $I = 1$ (вкладывается все).

В общем случае задача, решаемая каждым агентом в ситуации автаркии, выглядит как максимизация функции (2.2.1) при ограничениях (2.2.2) и (2.2.3).

2.2.3. Ситуация рыночной экономики

Очевидно, что ситуация автаркии очень далека от экономических реалий, поэтому усложним ее и сделаем допущение, что между агентами возможна торговля. Следовательно, агенты могут использовать торговлю для повышения собственного благосостояния.

Предположение о возможности торговли в рамках рассматриваемой модели означает, что в момент времени $t = 1$ открывается финансовый рынок, на котором агенты могут обменять имеющийся у них продукт на безрисковую облигацию. Соответственно в момент $t = 2$ по облигации можно получить некоторое количество продукта.

Обозначим через p цену облигации (в момент времени $t = 1$), которая принесет единицу продукта в момент $t = 2$. Будет разумным предполагать, что $p \leq 1$, так как в противном случае выпуск облигаций не имеет смысла.

Теперь доход агента с ранним потреблением примет вид

$$C_1 = 1 - I + pRI. \tag{2.2.4}$$

Выражение (2.2.4) означает, что в момент $t = 0$ агент инвестирует сумму I и, обменяв в момент $t = 1$ продукт на облигации, он в $t = 2$ получит за них pRI.

Если агент характеризуется поздним типом потребления, то он купит в момент $t = 1$ $(1-I)/p$ облигаций и к $t = 2$ получит доход

$$C_2 = \frac{1-I}{p} + RI = \frac{1}{p}(1 - I + pRI). \tag{2.2.5}$$

Поскольку сумма инвестиций I может выбираться каждым из агентов произвольно, в сконструированной ситуации установится равновесие (равенство спроса и предложения по облигациям) при цене

$$p = \frac{1}{R}. \tag{2.2.6}$$

Действительно, при $p > 1/R$ $(I = +\infty)$ будет наблюдаться избыточное предложение облигаций, а при $p < 1/R$ $(I = 0)$ — дефицит. Данное состояние равновесия (для краткости будем называть его рыночным) характеризуется параметрами

$$C_1^M = 1, \tag{2.2.7}$$

$$C_2^M = R, \tag{2.2.8}$$

также отметим, что ему соответствует уровень инвестиций

$$I^M = \pi_2. \tag{2.2.9}$$

Здесь при анализе полученной ситуации будет уместным обратиться к такому традиционно применяемому в микроэкономических исследованиях критерию, как эффективность по Парето. Напомним, что распределение продукта называется *оптимальным* (*эффективным*) *по Парето*, если невозможно улучшить благосостояние ни одного из участников (агентов), не ухудшая при этом благосостояния других участников. В противном случае, т. е. если можно улучшить чье-либо благосостояние, не ухудшая положение других, распределение является неэффективным по Парето.

Заметим, что рыночное распределение продукта Парето доминирует ситуацию автаркии, поскольку при существовании финансового рынка не предусмотрена возможность ликвидации проектов. Одновременно необходимо указать на то, что рыночное распределение, вообще говоря, не является Парето-оптимальным. Последний факт мы более подробно рассмотрим в следующем пункте.

2.2.4. Ситуация оптимального распределения

С точки зрения максимизации агентом полезности оптимальное распределение продукта может быть получено как решение задачи

$$\max\{\pi_1 \cdot u(C_1) + \pi_2 \cdot \rho \cdot u(C_2)\} \tag{2.2.10}$$

при условии

$$\pi_1 C_1 + \pi_2 \frac{C_2}{R} = 1. \tag{2.2.11}$$

Необходимое условие экстремума (C_1^*, C_2^*) для задач (2.2.10)–(2.2.11) может быть записано как

$$u'(C_1^*) = \rho \cdot R \cdot u'(C_2^*). \tag{2.2.12}$$

Из (2.2.12) получаем, что за исключением достаточно редкого случая, когда

$$u'(1) = \rho \cdot R \cdot u'(R), \tag{2.2.13}$$

рыночное распределение $(C_1^M = 1,\ C_2^M = R)$ не будет оптимальным по Парето.

В частном случае, рассмотренном в [7], в предположении, что функция полезности такова, что $C \cdot u'(C)$ возрастает по C, было сформулировано соотношение

$$\rho \cdot R \cdot u'(R) < \rho \cdot u'(1) < u'(1). \tag{2.2.14}$$

Из (2.2.14) вытекает, что рыночное распределение может быть «улучшено» за счет увеличения C_1^M и уменьшения C_2^M:

$$C_1^M = 1 < C_1^*,\ C_2^M = R > C_2^*, \tag{2.2.15}$$

что, собственно говоря, и означает его Парето-неэффективность.

2.2.5. Ситуация существования финансовых институтов

Решение сформулированной в предыдущем пункте проблемы неэффективности рыночного распределения и достижение оптимального состояния (C_1^*, C_2^*) могут быть получены за счет введения механизма финансового посредничества.

Предположим, что в рассматриваемой условной экономике существуют институты, которые могут в момент времени $t = 0$ принимать от агентов депозиты. Таким образом, если в момент времени $t = 1$ (при раннем потреблении) может быть востребовано C_1^* единиц депозита, а в момент $t = 2$, соответственно, C_2^* единиц, то на этапе $t = 1$ для выполнения своих обязательств финансовый посредник (банк) должен будет зарезервировать $\pi_1 C_1^*$ единиц аккумулированных средств. Оставшиеся средства могут быть помещены в некоторый длительный (завершающийся к моменту $t = 2$) проект. Описанная схема позволяет реализовать на практике оптимальное распределение продукта. Дополнительно необходимо подчеркнуть, что она может считаться реалистичной только в том случае, когда выбор раннего или позднего типа потребления агентами осуществляется независимо друг от друга.

Рассмотренная выше проблема неоптимальности рыночного распределения объясняется непрозрачностью рынков. Например, в нашей модели никто из участников экономической системы не обладает сведениями о полном списке агентов с ранним потреблением.

Устойчивость предложенного оптимального распределения базируется на том допущении, что депозиты без острой необходимости не будут отозваны в момент времени $t = 1$. Если считать, что $\rho R > 1$, то такое предположение представляется вполне естественным. Действительно, так как $\rho R > 1$, то из (2.2.12) следует, что $C_1^* < C_2^*$, то есть тип поведения, характеризующийся ранним потреблением, будет не в интересах агента.

Обратно, позднее потребление соответствует поведению в условиях равновесия по Нэшу. Напомним, что *равновесием по Нэшу* называется такая ситуация в игре N лиц, при которой каждому из игроков невыгодно менять выбранную стратегию при условии, что стратегии остальных игроков остаются неизменными.

Таким образом, можно сделать вывод, что оптимальное распределение продукта, которое к тому же является гарантированным, достигается с помощью финансовых институтов. Однако следует заметить, что в рамках рассматриваемой простейшей модели финансовые институты не могут сосуществовать одновременно с рынком облигаций. Действительно, когда допускается наличие такого рынка, то на момент $t = 1$ на нем установится равновесная цена $p = 1/R$. Тогда, основываясь на (2.2.15), получаем

$$RC_1^* > R > C_2^*,$$

что, в свою очередь, означает, что агенты с поздним типом потребления в момент $t = 1$ предпочтут отозвать депозиты и приобрести облигации. В результате оптимальное распределение (C_1^*, C_2^*) перестает быть равновесным по Нэшу. Последнее свойство, безусловно, является серьезным недостатком вышеприведенной модели, но оно отчасти может быть устранено в более сложных моделях, развивающих изложенные здесь идеи.

2.3. Финансовые посредники как информационные коалиции

В данном параграфе мы остановимся на классе экономико-математических моделей, которые рассматривают деятельность банковских институтов в разрезе проблемы *информационной асимметрии*.

Кратко ее суть может быть сведена к тому, что в подавляющем большинстве случаев предприниматели, предлагающие проекты, требующие финансовых вложений, лучше осведомлены о качестве и перспективах этих проектов, чем потенциальные инвесторы. Это порождает для последних ситуацию *неблагоприятного выбора*, конкретные формы проявления которой на финансовых рынках будут рассмотрены ниже.

Основное теоретическое положение настоящего параграфа состоит в том, что условия информационной асимметрии могут порождать эффект экономии за счет масштаба и создавать объективную необходимость в деятельности финансовых посредников. Последние могут быть интерпретированы как коалиции владельцев информации.

2.3.1. Базовая модель рынка капитала с учетом «неблагоприятного выбора»

В качестве отправной точки для изучения поведения экономических субъектов в условиях неблагоприятного выбора рассмотрим следующую несложную модель рынка капитала. Для удобства назовем ее *базовой*.

Пусть имеется некоторая экономическая система, характеризующаяся тем, что в ее рамках функционирует значительное количество предпринимателей[1], каждый из которых предлагает свой проект в качестве потенциального объекта для инвестиций. Предположим, что все выносимые на рынок проекты можно представить в нормализованном виде и, таким образом, полагать, что для финансирования каждого из них требуется единица инвестиционных вложений.

Значение чистого дохода от инвестиций в проект считается реализацией случайной величины $\tilde{R}(\theta)$, распределенной по нормальному закону со средним θ и дисперсией σ^2 ($R(\theta) \in N(\theta, \sigma^2)$). Предполагается, что различные проекты имеют разные значения θ, в то время как значение дисперсии σ^2 является одинаковым для всех проектов.

[1] Имеется в виду, что предприниматели присутствуют на рынке в таком количестве, что он может считаться конкурентым.

Относительно θ делается допущение, что его действительная величина известна только предпринимателю, предлагающему проект, а потенциальные инвесторы владеют только информацией о статистических характеристиках распределения значений θ по выборке предпринимателей.

Инвесторы считаются риск-нейтральными и могут хранить свои сбережения без дополнительных затрат. Предприниматели же рассматриваются как экономические субъекты, избегающие риска. Последнее выражается в том, что хотя они и обладают начальным капиталом $W_0 > 1$, достаточным для финансирования своего проекта, но предпочитают использовать для этого привлеченный капитал.

Если обозначить через w конечное благосостояние предпринимателя, то предполагается, что оно может быть оценено с помощью функции полезности типа функции Неймана—Моргенштерна:

$$u(w) = 1 - \exp(-\rho w), \qquad (2.3.1)$$

где постоянная $\rho > 0$ может быть интерпретирована как абсолютный *индекс неприятия риска*[1]. Вид функции полезности, задаваемой (2.3.1), для различных индексов $\rho_1 < \rho_2$ представлен на рис. 2.1.

Соответственно, если предприниматель продаст на рынке свой проект по цене

$$P(\theta) = \mathrm{E}\{\tilde{R}(\theta)\} = \theta, \qquad (2.3.2)$$

то это обеспечит ему полную защиту от риска, а его конечное благосостояние будет равно $W_0 + \theta$.

Основываясь на предпосылке от том, что величина θ является частной информацией, известной только лишь предпринимателю, и все проекты с точки зрения потенциальных инвесторов являются неразличимыми, можно прийти к заключению, что на рынке установится единая равновесная цена P для всех проектов.

Найдем выражение для ожидаемого значения конечного благосостояния предпринимателя в случае выбора им финансирования за счет собственных средств.

Заметим, что если случайная величина $\tilde{x}$ распределена по нормальному закону с параметрами (μ, σ^2), то математическое ожидание функции $-\exp(-\rho\tilde{x})$ примет вид:

[1] От англ. термина *absolute index of risk aversion.*

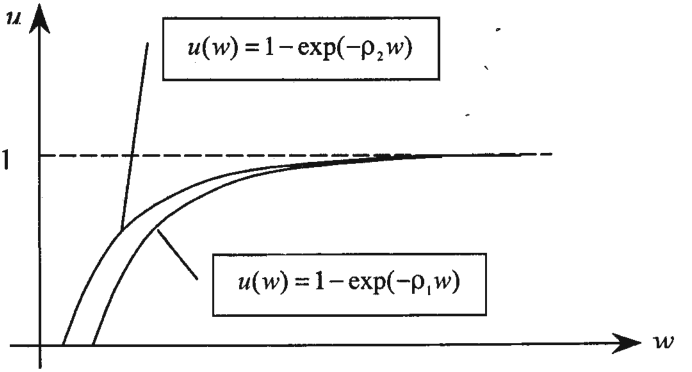

Рис. 2.1. Вид функции полезности для различных значений индексов неприятия риска $\rho_1 < \rho_2$

$$\mathrm{E}\{-\exp(-\rho\tilde{x})\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (-\exp(-\rho x)) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})\ dx =$$

$$= -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\rho x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})\ dx =$$

$$= -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\rho x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})\ dx =$$

$$= -\exp[\rho\mu - \frac{1}{2}\rho^2\sigma^2)],$$

или

$$\mathrm{E}\{-\exp(-\rho\tilde{x})\} = -\exp[\rho(\mu - \frac{1}{2}\rho\sigma^2)]. \tag{2.3.3}$$

Используя (2.3.3), получим

$$\mathrm{E}\{u[W_0 + \tilde{R}(\theta)]\} = \mathrm{E}\{1 - \exp[-\rho(W_0 + \tilde{R}(\theta)])\} =$$

$$= 1 - \mathrm{E}\{\exp[-\rho(W_0 + \tilde{R}(\theta)])\} =$$

$$= 1 - \exp[-\rho(\theta + W_0 - \frac{1}{2}\rho\sigma^2)],$$

или

$$E\{u[W_0 + \tilde{R}(\theta)]\} = u(W_0 + \theta - \frac{1}{2}\rho\sigma^2). \quad (2.3.4)$$

В то же время, в случае продажи проекта (выбора финансирования из внешних источников) предприниматель получит $u(W_0 + P)$. Таким образом, он будет выходить на рынок тогда и только тогда, когда ожидаемый доход будет удовлетворять условию:

$$\theta < P + \frac{1}{2}\rho\sigma^2. \quad (2.3.5)$$

Непосредственным результатом такого положения вещей станет то, что на продажу будут выставляться исключительно низкодоходные проекты, в то время как в случае ожидаемого высокого дохода предприниматель будет предпочитать самофинансирование. Пороговое значение $\hat{\theta}$, делящее проекты на низко- и высокодоходные, задается выражением

$$\hat{\theta} = P + \frac{1}{2}\rho\sigma^2. \quad (2.3.6)$$

Описанная ситуация является по существу классическим примером проблемы, известной в микроэкономической теории как проблема неблагоприятного выбора. На таком рынке капитала установится равновесие при цене

$$P = E\{\theta \mid \theta < \hat{\theta}\}. \quad (2.3.7)$$

Очевидно, что такое равновесие с точки зрения потребителей является неэффективным. Более наглядно данную ситуацию можно проиллюстрировать на следующем частном примере. Допустим, что θ являются реализациями некоторой случайной величины, распределенной по биномиальному закону, т. е. ожидаемый доход может принимать значения:

θ_1 с вероятностью π_1 (для проектов с низким доходом);

θ_2 с вероятностью π_2 (для проектов с высоким доходом).

Основываясь на (2.3.2), получаем в рассматриваемой ситуации, что на рынке установится равновесная цена

$$P = E\{\theta\} = \pi_1\theta_1 + \pi_2\theta_2. \quad (2.3.8)$$

Пороговый уровень дохода, выше которого предприниматели будут предпочитать собственное финансирование, очевидно определяется условием $\hat{\theta} \geq \theta_2$. Откуда, используя (2.3.6), получаем

$$\pi_1\theta_1 + \pi_2\theta_2 + \frac{1}{2}\rho\sigma^2 \geq \theta_2, \tag{2.3.9}$$

или, учитывая, что $\pi_1 + \pi_2 = 1$,

$$\pi_1(\theta_2 - \theta_1) \leq \frac{1}{2}\rho\sigma^2. \tag{2.3.10}$$

Условие (2.3.10) можно интерпретировать как требование того, что рисковая премия должна покрывать эффект неблагоприятного выбора. В противном случае предприниматель будет использовать самофинансирование, и результаты равновесия окажутся неэффективными.

2.3.2. Частичное самофинансирование проектов

Одним из традиционных путей решения проблемы неблагоприятного выбора, предлагаемых в современной микроэкономической теории, является применение так называемого сигнализирования. В данном контексте под *сигнализированием* мы будем понимать такие действия предпринимателя, которые позволяют донести до инвестора тот факт, что предлагаемый ему проект действительно является высокодоходным.

Как было установлено в предыдущем пункте, при нарушении условия (2.3.10) предприниматели будут предпочитать самофинансирование для осуществления своих проектов. Однако, приближая модель к действительности, будет более естественным предположить, что владелец высокодоходного проекта предпочтет лишь частично финансировать проект за счет собственных средств и захочет привлечь для обеспечения его оставшейся части средства сторонних инвесторов. При этом участие предпринимателя в финансировании собственного проекта является своеобразным сигналом, сообщающим инвесторам, что проект является «хорошим». Также очевидно, что данный сигнал будет убедительным только в том случае, если одновременно удастся доказать, что предприниматели, предлагающие низкодоходные проекты (с $\theta = \theta_1$), не смогут вести себя таким же образом, то есть не будут использовать самофинансирование для своих проектов.

Пусть некоторый предприниматель решает профинансировать свой высокодоходный проект в части α. Тогда для того, чтобы предприниматели с низким доходом не смогли сымитировать его поведение, значение α должно быть достаточно большим, а именно удовлетворять условию

$$u(W_0+\theta_1)\geq \mathrm{E}\{u(W_0+(1-\alpha)\theta_2+\alpha\tilde{R}(\theta_1))\}. \qquad (2.3.11)$$

Условие (2.3.11) иногда называют *условием неподражания* (от англ. *no mimicking condition*). Его смысл достаточно прозрачен. Левая часть неравенства (2.3.11) соответствует полезности (конечному эффекту), получаемой владельцем низкодоходного проекта при продаже им данного проекта на рынке по низкой цене, соответствующей его доходу, $P_1=\theta_1$. Правая часть равняется той полезности, которую такой предприниматель может получить, имитируя поведение владельца высокодоходного проекта. В этом случае он сможет продать по «завышенной» цене $P_2=\theta_2$ часть своего проекта в размере $1-\alpha$, но должен будет взять на себя риск, финансируя из собственных средств оставшуюся часть α.

Используя предпосылки о виде функции полезности предпринимателей (2.3.1), мы можем преобразовать (2.3.11) к виду

$$\theta_1\geq(1-\alpha)\theta_2+\alpha\theta_1-\frac{1}{2}\rho\sigma^2\alpha^2, \qquad (2.3.12)$$

что равносильно

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\geq\frac{2(\theta_2-\theta_1)}{\rho\sigma^2}. \qquad (2.3.13)$$

Из условия (2.3.13) следует вывод, впервые сформулированный в работе Лиланда и Пайла (Leland, Pyle) [13]:

☞ если потенциальные инвесторы располагают данными об уровне самофинансирования проектов, то на рынке капитала устанавливается равновесие, которое характеризуется «низкими» ценами $P_1=\theta_1$ для проектов предпринимателей, не использующих самофинансирование, и «высокими» ценами $P_2=\theta_2$ для проектов, которые финансируются их владельцами в части α. При этом уровень самофинансирования α определяется условием (2.3.13).

Остановимся на некоторых принципиальных особенностях рассмотренной экономической ситуации, характеризующейся наличием информационной асимметрии. Заметим, что в ней как инвесторы, так и предприниматели, предлагающие низкодоходные проекты, получают точно такой же доход, какой бы они имели в случае открытого доступа к информации.

Однако в случае предпринимателя, владеющего высокодоходным проектом, дела обстоят несколько иначе. При информационной асимметрии (конфиденциальности данных об истинных значениях доходов от проектов) получаемый им полезный эффект равен

$$u(W_0 + \theta_2 - \frac{1}{2}\rho\sigma^2\alpha^2).$$

В то же время, этот эффект в ситуации открытости информации по проектам составит

$$u(W_0 + \theta_2).$$

Используя терминологию потерянного дохода, можно заключить, что «информационная стоимость капитала» в данном случае составила

$$C = \frac{1}{2}\rho\sigma^2\alpha^2. \tag{2.3.14}$$

При этом она возрастает с ростом уровня самофинансирования α. Тогда из всех возможных вариантов «равновесия с сигнализирующим поведением предпринимателей через самофинансирование» доминирующим по Парето будет тот, который соответствует минимально возможному значению α. Последнее, в свою очередь, может быть найдено как решение уравнения

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{2(\theta_2 - \theta_1)}{\rho\sigma^2}, \tag{2.3.15}$$

получающегося за счет преобразования неравенства (2.3.13) в строгое равенство.

В результате получаем, что Парето-доминирующему равновесию соответствует минимальная информационная стоимость капитала

$$C(\sigma) = \frac{1}{2}\rho\sigma^2\alpha^2(\sigma), \tag{2.3.16}$$

где $\alpha(\sigma)$ неявно определяется условием (2.3.15).

2.3.3. Финансовые посредники как коалиции заемщиков

Перейдем теперь к рассмотрению основной идеи данного параграфа. Она заключается в том, что

☞в условиях неблагоприятного выбора коалиции заемщиков функционируют лучше, чем отдельные заемщики.

Предположим, что в исследуемой экономической системе действуют N предпринимателей, предлагающих проекты с ожидаемым доходом θ_2. Также предположим, что они договариваются и принимают решение о коллективном выпуске ценных бумаг для финансового обеспечения своих проектов.

Поскольку доходы по каждому из N проектов являются независимыми случайными величинами, то при равном распределении ценных бумаг и доходов между предпринимателями их ожидаемый доход останется равным θ_2. Однако возникнет и принципиальное отличие по сравнению с ситуацией бескоалиционного поведения, состоящее в том, что дисперсия (разброс) фактических значений дохода относительно ожидаемого среднего (в результате диверсификации) будет существенно меньше, а именно

$$\frac{\sigma^2}{N}.$$

Нетрудно доказать, что функция $C(\sigma)$, задаваемая формулой (2.3.16), является возрастающей. Действительно, поскольку

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha}$$

(при $0 \le \alpha \le 1$) возрастает на интервале [0,1], то из (2.3.15) получаем, что функция $\alpha(\sigma)$ является убывающей.

Из соотношения (2.3.15) также следует, что

$$\frac{1}{2}\rho\sigma^2\alpha^2(\sigma) = (\theta_2 - \theta_1)(1-\alpha(\sigma)),$$

или

$$C(\sigma) = (\theta_2 - \theta_1)(1-\alpha(\sigma)).$$

Откуда с учетом того, что $\theta_2 > \theta_1$, получаем, что $C(\sigma)$ возрастает.

На основе проведенных рассуждений мы приходим еще к одному фундаментальному выводу:

☞в рамках предпосылок, определяющих условия функционирования описанного рынка с асимметричной информацией[1], издерж-

[1] Они в основном соответствуют модели Лиланда—Пайла (1977), сформулированной в [13].

ки на единицу капитала убывают с увеличением размера коалиции заемщиков.

Соответственно, если мы рассматриваем коалицию заемщиков как посреднический финансовый институт (в частном случае — банк), то полученный вывод обосновывает причины эффективности его деятельности.

2.3.4. Обзор моделей финансового посредничества в условиях информационной асимметрии

Дадим краткую характеристику наиболее известных экономико-математических моделей, описывающих деятельность банков в разрезе проблемы информационной асимметрии.

Модель Лиланда—Пайла (см. [13]) дает объяснение причин функционирования финансовых посредников с точки зрения дополнительных доходов, получаемых заемщиками при объединении в коалиции. Заметим, что оно справедливо только при выполнении предпосылки о «честных» взаимоотношениях между членами коалиции. Однако существуют и другие подходы и модели, описывающие деятельность финансовых посредников как общественных объединений в условиях неблагоприятного выбора. Кратко остановимся на них.

Заметим, что любой агент рынка, обладающий некоторой частной информацией и желающий получить от этого доход, сталкивается с двумя принципиальными проблемами. Во-первых, если он пытается продать эту информацию, то покупатель не может быть уверен в ее достоверности. Во-вторых, доход, полученный от продажи информации, может оказаться незначительным по сравнению с издержками на ее получение. В крайней ситуации, если информация о ценах является открытой, доход может оказаться нулевым. Такое явление получило название парадокса Гроссмана—Штиглица (Grossman—Stiglitz, см. в [11]). Кэмпбелл и Кракоу (Campbell, Kracaw) в [4] и Allen в [1] изучали эту проблему и сформулировали методы ее решения в условиях существования финансовых посредников.

Рамакришнан и Такор (Ramakrishnan, Thakor) в [15] рассмотрели несколько другую форму экономии на масштабах, вызванную фактором асимметричной информации. В предложенной ими модели описывается ситуация существования «экспертов» по ценным бумагам, которые могут предоставлять информацию при соблюдении принципа риск-нейтральности инвесторов. В результате была построена оптимальная схема сочетания риск-нейтральности и деятельности «экспертов». Окончательный вывод при таком подходе заключается в том, что если «эксперты» могут договариваться и объединять свои вознаграждения, то они способны увеличить общий ожидаемый доход. Миллон и Такор (Millon, Thakor) в [14] рассмотрели вариант этой модели, добавив к ней два дополнительных предположения: возможность вторичного использования информации (имеющаяся информация по одному проекту позволяет судить о похожих проектах) и существование проблемы внутренних коммуникаций, решение которой приводит к нахождению оптимального количества финансовых посредников.

Гортон и Пеначи (Gorton, Pennachi) в [10] обратили внимание на некоторые особенности деятельности банков по трансформации активов, которая трактуется как финансирование рисковых проектов безрисковыми депозитами. В условиях неблагоприятного выбора, когда отдельные агенты имеют частную информацию по поводу рисковых проектов, безрисковые депозиты могут быть использованы некоторыми неинформированными агентами. В то же время, в рамках предложенной модели было показано, что в соответствующей экономической системе участие финансовых посредников необязательно и безрисковые облигации, напрямую выпускаемые фирмами, могут заменить депозиты.

2.4. Финансовые посредники как учреждения делегированного мониторинга

При работе в ситуации неблагоприятного выбора и информационной асимметрии перед инвесторами возникает проблема контроля за процессом выполнения того проекта, в который они вкладывают свои средства. Осуществление такого контроля или, как еще говорят, *мониторинга*, может существенно увеличить эффективность инвестирования.

Данные вопросы могут быть рассмотрены как частный случай проявления фундаментальной микроэкономической проблемы морального ущерба. Напомним, что под *моральным ущербом* (*moral hazard*) понимается такая ситуация, возникающая, как правило, в условиях договорных отношений между экономическими субъектами, при которой отдельные стороны не заинтересованы в «честном» соблюдении условий соглашения.

Так, в нашем случае, касающемся взаимоотношений инвесторов и предпринимателей, моральный ущерб инвестору может быть нанесен со стороны предпринимателя, осуществляющего управление своим проектом исключительно в своих целях (без учета интересов инвестора).

В широком смысле проведение мониторинга с данной точки зрения подразумевает:

- предварительный анализ состоятельности проектов с точки зрения вкладчиков;
- предотвращение «эгоистического» поведения предпринимателей (заемщиков) в процессе реализации проекта, недопущение их действий в целях, не соответствующих целям инвесторов;
- аудит и наказание заемщика, который не смог выполнить свои обязательства.

2.4.1. Общая схема моделей делегированного мониторинга

Очевидно, что деятельность по мониторингу заемщика может осуществляться как непосредственно инвестором, так и специальными фирмами, например, рейтинговыми агентствами, аналитическими или аудиторскими компаниями. В частности, в этой роли могут выступать и банки. Даймондом в [5] были предложены интересные теоретические модели, описывающие работу банка как учреждения делегированного мониторинга.

Для реализации соответствующих функций банком должен выполняться ряд условий, обеспечивающих ему ряд конкурентных преимуществ. Среди основных из них могут быть названы:

- процесс мониторинга, проводимый банком, должен обеспечивать экономию на масштабах, что, в свою очередь, подразумевает, что одновременно осуществляется мониторинг по нескольким проектам;
- ограниченность возможностей инвесторов по вложению средств в проекты относительно размеров этих проектов или, другими словами, необходимость объединения средств нескольких инвесторов для осуществления одного проекта;
- относительно низкие издержки, возникающие при делегировании мониторинга, а именно эти издержки по меньшей мере не должны превышать доход, получаемый вследствие экономии на масштабах за счет объединения контрольных функций в рамках одного банка.

Рассмотрим подробнее модель, предложенную Даймондом. Она основывается на следующих предпосылках.

- В некоторой экономической системе функционирует n идентичных фирм, которым необходимы средства для финансирования своих проектов. Потребности фирм в инвестициях для простоты дальнейшего изложения считаются нормализованными, т. е. каждой фирме необходима единица некоторого вложения. Доходы фирм распределены одинаково и независимо.

- Каждая фирма по результатам осуществления своего проекта получает некоторый доход, который рассматривается как реализация случайной величины $\tilde{y}$. Его истинное значение неизвестно инвестору, что и порождает для него проблему возможного морального ущерба в случае недобросовестного поведения заемщика. Предполагается, что данная проблема может быть решена двумя принципиальными способами. Во-первых, проведением мероприятий по мониторингу (контролю за поведением заемщика), что требует дополнительных затрат в размере K единиц. Во-вторых, путем заключения долговых контрактов с издержками штрафного (фискального) характера в размере C.
- Значение C предполагается задаваемым извне. Будем полагать, что $K < C$. Данное условие означает, что если у фирмы имеется единственный инвестор, то более эффективной будет технология мониторинга.
- Предполагается, что каждый инвестор обладает денежными средствами в размере $1/m$. Таким образом, для финансирования одного проекта требуется привлечение m инвесторов.
- В рассматриваемой экономической системе существуют по меньшей мере mn инвесторов, что обеспечивает возможность финансирования всех проектов.

Схема, показанная на рис. 2.2, соответствует ситуации непосредственного контроля инвесторов за своими заемщиками. Не трудно сосчитать, что общие издержки на контроль при этом будут равны nmK.

В том случае, если в системе существует финансовый посредник (банк), то функции мониторинга могут выполняться им (см. рис. 2.3). Банк может по своему усмотрению выбирать те формы, в которых осуществляется контроль:

- либо контролируется каждая фирма (общие издержки равны nK);
- либо с каждой фирмой заключается долговой контракт (общие издержки равны nC).

Поскольку $K < C$, то первый вариант поведения для банка будет более предпочтительным.

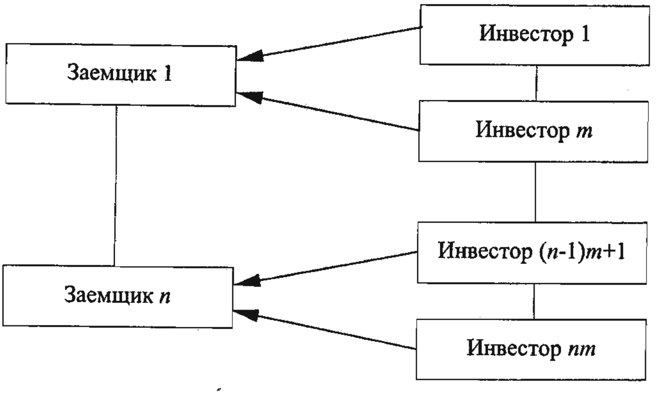

Рис. 2.2. Схема непосредственного мониторинга заемщиков со стороны инвесторов

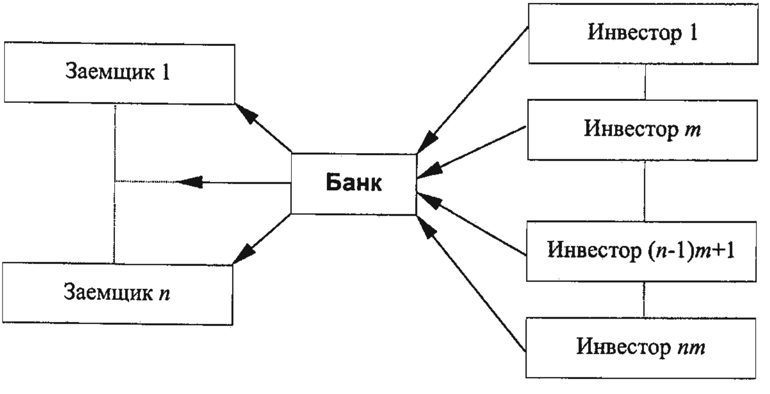

Рис. 2.3. Схема делегированного мониторинга через банк

В описанной схеме банк выступает как учреждение делегированного мониторинга, которое контролирует заемщиков с позиции интересов кредиторов. Однако параллельно возникает проблема контроля контролирующего учреждения. Очевидно, что допущение возможности прямого контроля за банком со стороны каждого кредитора в отдельности нереалистично.

В связи с этим будет более разумным предположить, что со стороны банка кредиторам (инвесторам) предлагаются долговые (точнее говоря, *депозитные*) контракты. По таким контрактам каждому инвестору в обмен на депозит размером $1/m$ гарантируется выплата суммы R_d / m. Денежный поток, получаемый банком как финансовым посредником, может быть представлен случайной величиной

$$\tilde{z} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i - nK, \tag{2.4.1}$$

где
$\sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i$ — сумма платежей, собираемых банком от заемщиков, а nK — затраты на осуществление мониторинга.

Считается, что банк ликвидируется, если денежный поток $\tilde{z} < nR_d$, т. е. поступающий денежный поток оказывается меньше общей суммы обязательств банка перед инвесторами. Наличие штрафов или иных мер фискального характера может стать приемлемым стимулом, побуждающим банки выполнять свои обязательства, и, таким образом, они оказываются заинтересованными в «честном» управлении финансами.

Если предположить, что инвесторы являются риск-нейтральными и могут осуществлять вложения в некоторые внешние проекты с доходностью R, то условие равновесия в рассматриваемой модели запишется в виде

$$\mathrm{E}\{\min(\sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i - nK,\ nR_d^*)\} = nR, \tag{2.4.2}$$

где R_d^* — равновесный уровень ставки по депозитным договорам, предлагаемым банками инвесторам. Необходимо отметить, что значение R_d^* зависит от n.

Можно показать, что общие издержки передачи полномочий (введем для них обозначение C_n, так как они имеют ту же природу, что и C) равны ожидаемым штрафным санкциям в случае банкротства:

$$C_n = \mathrm{E}\{\max(nR_d^* + nK - \sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i,\ 0)\}. \tag{2.4.3}$$

Сформулируем и докажем следующее утверждение:

☞ делегированный банку мониторинг будет эффективнее прямого контроля со стороны инвестора тогда и только тогда, когда

$$nK + C_n < nmK. \tag{2.4.4}$$

Доказательство.

Разделим доказываемое неравенство (2.4.4) на n и получим

$$K + \frac{C_n}{n} < mK.$$

Так как $m > 1$, то достаточно доказать, что

$$\frac{C_n}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Разделив (2.4.2) на n, получим

$$\mathrm{E}\{\min(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{y}_i - K,\ R_d^*)\} = R, \qquad (2.4.5)$$

а разделив (2.4.3) на n, имеем

$$\frac{C_n}{n} = \mathrm{E}\{\max(R_d^* + K - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{y}_i,\ 0)\}. \qquad (2.4.6)$$

В соответствии с законом больших чисел

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{y}_i$$

почти наверное сходится к $E(y)$, откуда получается, что $E(\tilde{y}) > K + R$.

Соотношение (2.4.5) показывает, что

$$\lim_{n\to\infty} R_d^* = R,$$

то есть доходы по депозитным договорам R_d^*, заключаемым при делегировании мониторинга, асимптотически стремятся к доходам по безрисковым депозитам R. Поэтому из (2.4.6) следует доказываемое утверждение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{n} = \max(R + K - E(\tilde{y}),\ 0) = 0.$$ ✌

Как окончательный результат можно сформулировать следующий вывод:

☞ если контроль эффективен $(K < C)$, возможности инвесторов ограничены $(m > 1)$, сам процесс инвестирования приносит доход

($E(\tilde{y}) > K + R$) и значение n достаточно велико (обеспечивает диверсификацию вложений), то ситуация, в которой присутствуют финансовые посредники, будет эффективнее, чем ситуация, основанная на использовании непосредственного контроля инвестора за заемщиком (прямое кредитование).

В заключение следует отметить, что в литературе существует достаточно серьезная критика модели Даймонда. В основном она сводится к тому, что на практике невозможно определить реальные штрафные санкции на основе денежных потоков, которые публикуются заемщиками. В то же время представляют интерес отдельные модификации данной модели, предполагающие, что штрафная сумма C рассчитывается на основе данных по проектам с худшей реализацией объемов денежных потоков.

2.4.2. Модели, предусматривающие выбор между прямым финансированием и посредническим кредитованием

Если в предыдущих случаях банковское кредитование и непосредственное финансирование рассматривались как альтернативные варианты денежного обеспечения проектов, осуществляемых предпринимателями, то здесь мы остановимся на более близкой к реальности ситуации. В ней допускается, что фирмы могут выбирать между способами организации финансового обеспечения своей деятельности, а именно, между прямыми займами и банковскими кредитами.

Объективное противоречие, лежащее в основе такого выбора, может быть кратко охарактеризовано следующим образом. С одной стороны, установлено, что рынок позитивно воспринимает деятельность того предприятия, которое пользуется банковскими кредитами, так как данный факт является своего рода индикатором доверия к нему. Однако, с другой стороны, прямые заимствования являются более дешевым источником инвестиций, чем банковский кредит. Поэтому в рассматриваемых ниже моделях предполагается, что к банкам обращаются те, у кого нет доступа к прямым инвестициям. Общим для изучаемых моделей является то, что в них фактор морального ущерба (риска) трактуется как основное препятствие для получения фирмами непосредственного финансирования. В свою очередь, основной причиной возможности возникновения морального ущерба является асимметричность информации о проектах и технологиях их реализации.

Отправной точкой для описания проблем функционирования рынка капитала в условиях возможного морального ущерба является следующая несложная модель.

Некоторая экономическая система характеризуется наличием фирм, предлагающих свои проекты потенциальным инвесторам. Объемы инвестиций во все проекты, как и в предыдущих случаях, предполагаются нормализованными, т. е. равными некоторой условной единице. Безрисковая процентная ставка также предполагается нормализованной (равна нулю).

Менеджмент фирм осуществляет выбор между «технологиями» реализации своих проектов. Для простоты предположим, что возможен выбор из двух вариантов:

- «хорошая» технология, приносящая доход G (good) с вероятностью π_G, или 0 — в противном случае;
- «плохая» технология, приносящая доход B (bad) с вероятностью π_B, или 0 — в противном случае.

Под «плохой» технологией выполнения проекта понимается прежде всего та технология, которая является более рискованной. Тогда будет естественным предположить, что

$$B > G, \tag{2.4.7}$$

поскольку иначе не было бы просто смысла в рассмотрении «плохих» технологий.

Предполагается, что только хорошие проекты имеют $NPV > 0$ [1], или

$$\pi_G G > 1 > \pi_B B, \tag{2.4.8}$$

откуда, используя условие (2.4.7), получаем неравенство $\pi_G > \pi_B$. Данное соотношение дополнительно иллюстрирует предпосылку того, что «хорошая» технология является менее рискованной, чем «плохая».

Пусть фирмы не обладают иными источниками дохода, кроме предлагаемых ими проектов, и поэтому могут обеспечить возвращение дохода инвестору в размере номинальной суммы обязательств R, только если проект оказывается успешным. В противном случае — выплаты равны нулю. Будем считать, что, в основном, успешность проекта зависит от внешних факторов (является предопределенной к моменту вынесения его на рынок капитала).

Ключевым положением данной модели является то, что

☞ R — величина дохода, выплачиваемого инвестору, предопределяет выбор фирмой технологии реализации ее проекта.

[1] NPV — Net Present Value — настоящая чистая стоимость, т. е. стоимость, приведенная на текущий момент времени с учетом некоторого коэффициента дисконтирования.

Действительно, в случае отсутствия контроля (мониторинга) за ее действиями фирма выберет «хорошую» технологию только тогда, когда она даст ей более высокий ожидаемый доход:

$$\pi_G(G-R) > \pi_B(B-R). \tag{2.4.9}$$

Так как $\pi_G > \pi_B$, то из (2.4.9) следует

$$R < \frac{\pi_G G - \pi_B B}{\pi_G - \pi_B} = R_C, \tag{2.4.10}$$

где через R_C обозначим критический уровень для значения номинального дохода, выше которого фирма будет выбирать «плохую» технологию. Заметим, что $R_C < G < B$.

С точки зрения инвесторов вероятность получения доходов по сделанным ими вложениям в зависимости от значения R примет вид:

$$p(R) = \begin{cases} \pi_G, \text{ если } R \le R_C, \\ \pi_B, \text{ если } R > R_C. \end{cases} \tag{2.4.11}$$

Тогда *условие конкурентного равновесия на рынке капитала в отсутствие мониторинга* может быть записано как

$$p(R)R = 1. \tag{2.4.12}$$

Из (2.4.12) может быть найдено значение дохода R^*, обеспечивающее равновесие.

Исходя из сделанных предположений получаем, что равновесие возможно только в том случае, когда

$$\pi_G R_C > 1. \tag{2.4.13}$$

Соотношение (2.4.13) отражает тот факт, что у фирм нет серьезных побуждений к тому, чтобы выбирать поведение, наносящее ущерб инвесторам. Если же $\pi_G R_C < 1$, то в силу отсутствия торговли фирмы будут выбирать «плохие технологии» реализации проектов, у которых $NPV < 0$, что в конечном счете приведет рассматриваемый рынок капитала к коллапсу.

Теперь несколько изменим модель, введя в нее предпосылку возможности мониторинга, осуществляемого финансовыми посредниками (банками). Другими словами, банки могут предотвратить использование «плохих» технологий предпринимателями, затрачивая на это некоторую сумму C. Предполагая наличие между банками совершенной конкуренции, условие равновесия приобретет вид:

$$\pi_G R_m = 1 + C, \tag{2.4.14}$$

где R_m — доход, получаемый банком от фирмы. Смысл уравнения (2.4.14) достаточно прозрачен: ожидаемый доход должен по меньшей мере компенсировать затраты на мониторинг. В противном случае происходит разорение банка.

Для существования равновесия при наличии банковского кредитования должны выполняться условия:

- Значение R_m должно быть меньше, чем доход, получаемый фирмой при применении «хорошей» технологии, из чего с учетом (2.4.14) следует неравенство

$$\pi_G G - 1 > C. \tag{2.4.15}$$

  Условие (2.4.15) выглядит вполне естественным. Фактически оно означает, что цена мониторинга C должна быть меньше, чем NPV «хорошего» проекта.

- Прямое кредитование, которое дешевле банковского, должно быть невозможно, то есть

$$\pi_G R_C > 1. \tag{2.4.16}$$

Таким образом, в рассматриваемой модели в условиях равновесия банковское кредитование возможно в том случае, если значение вероятности успешного завершения проекта, для которого используется «хорошая» технология, π_G находится в интервале

$$\left[\frac{1+C}{G}, \frac{1}{R_C}\right].$$

Завершая обсуждение свойств простой модели рынка капитала, заметим: если допустить, что цена мониторинга C настолько мала, что

$$\frac{1}{R_C} > \frac{1+C}{G}, \tag{2.4.17}$$

то существует три принципиальных режима существования рынка:

1. $\pi_G > \dfrac{1}{R_C}$

— вероятность успеха при осуществлении проекта по «хорошей» технологии достаточно высока, и фирмы будут использовать прямое финансирование, выпуская обязательства (облигации) со ставкой дохода

$$R_1 = \frac{1}{\pi_G}. \tag{2.4.18}$$

2. $\pi_G \in \left[\dfrac{1+C}{G}, \dfrac{1}{R_C}\right]$

— средняя вероятность успеха при реализации проекта, фирмы будут предпочитать брать банковские кредиты по ставке

$$R_2 = \frac{1+C}{\pi_G}. \tag{2.4.19}$$

3. $\pi_G < \dfrac{1+C}{G}$

— низкая вероятность успеха, соответственно, рынок капитала приходит к состоянию коллапса.

2.4.3. Мониторинг и репутация

Следующим этапом в развитии теории, трактующей поведение банковских институтов как учреждений делегированного мониторинга, являются динамические модели, предусматривающие возможности изменения форм финансирования проектов на различных периодах их существования.

В данном пункте мы ограничимся рассмотрением относительно несложной двухэтапной модели кредитного рынка, сформулированной Даймондом в [6]. Ключевым элементом такой модели является иллюстрация того факта, что в процессе своего функционирования успешная фирма может обеспечить себе «репутацию», позволяющую получать прямые кредиты.

Предполагается, что фирмы, выходящие на некоторый кредитный рынок, изначально являются неоднородными, и только часть из них в количестве f может осуществлять выбор между технологиями («хорошей» или «плохой»), а остальные вынуждены придерживаться некоторой фиксированной технологии (допустим, что это будет «плохая» технология).

С точки зрения результатов, получаемых на начальном периоде функционирования $t = 0$, все фирмы могут быть разделены на «успешные» (сумевшие реализовать свой проект и получить доход) и «неуспешные». Заметим, что вероятность успеха определяется как

$$P\{\text{ успех в } t=0\ \} = f\pi_G + (1-f)\pi_B, \tag{2.4.20}$$

а вероятность неудачи — как

$$P\{\text{ неудача в } t=0\ \} = f(1-\pi_G) + (1-f)(1-\pi_B). \tag{2.4.21}$$

Для начала рассмотрим поведение «успешных» фирм. Исходя из выводов, сформулированных в предыдущем разделе, можно сделать вывод, что прямое кредитование выгодно тогда и только тогда, когда

$$\pi_S > \frac{1}{R_C}, \tag{2.4.22}$$

где π_S — вероятность уплаты долга в момент времени $t = 1$ при условии успешной реализации проекта в момент $t = 0$ (предполагается, что в $t = 0$ все фирмы находятся под контролем). Согласно формуле Байеса можно записать, что

$$\pi_S = \frac{P\{\text{успех в } t=0 \text{ и в } t=1\ \}}{P\{\text{успех в } t=0\ \}} = \frac{f\pi_G^2 + (1-f)\pi_B^2}{f\pi_G + (1-f)\pi_B}. \tag{2.4.23}$$

Если выполняется (2.4.22), то «успешные» фирмы выпускают долговые обязательства со ставкой

$$R_S = 1/\pi_s. \tag{2.4.24}$$

Перейдем теперь к рассмотрению фирм, деятельность которых не была успешной на этапе $t = 0$. Вероятность их успеха в момент $t = 1$ задается как

$$\pi_U = \frac{P\{\text{ неудача в } t=0 \text{ и успех в } t=1\ \}}{P\{\text{ неудача в } t=0\ \}} =$$

$$= \frac{f\pi_G(1-\pi_G)+(1-f)\pi_B(1-\pi_B)}{f(1-\pi_G)+(1-f)(1-\pi_B)}. \qquad (2.4.25)$$

Применяя результаты предыдущего раздела, мы можем заключить, что если

$$\frac{1+C}{G} < \pi_U < \frac{1}{R_C}, \qquad (2.4.26)$$

то фирмы этого типа будут заимствовать у банков по ставке

$$R_U = \frac{1+C}{\pi_U}. \qquad (2.4.27)$$

Наконец, сделаем допущение, что в $t = 0$ все фирмы выбирают банковское кредитование.

Обозначим через π_0 безусловную вероятность успеха в момент $t = 0$ (когда фирмы, обладающие возможностью выбора, выбирают «хорошие» технологии), тогда

$$\pi_0 = f\pi_G + (1-f)\pi_B. \qquad (2.4.28)$$

Понятие построения репутации основывается на соотношении

$$\pi_U < \pi_0 < \pi_S, \qquad (2.4.29)$$

подразумевающем, что вероятность возврата банковских кредитов фирмами, изначально равная π_0, возрастает для успешных фирм до π_S и убывает для неуспешных до π_U. Поэтому критический уровень долга, после которого могут возникнуть проблемы с недобросовестностью управления, в момент $t = 0$ больше, чем в статической ситуации. Это объясняется тем, что фирмы знают, что если они преуспеют на этапе $t = 0$, то получат более дешевое финансирование (R_S вместо R_U) в $t = 1$.

Если обозначить через δ коэффициент дисконтирования ($\delta < 1$), то критический уровень выплат по долгу R_C^0, после которого фирма предпочтет выбирать «плохую» технологию реализации проекта на этапе $t = 0$, может быть определен из уравнения

$$\pi_B(B-R) + \delta\pi_G[G - \pi_B R_S - (1-\pi_B)R_U] =$$

$$= \pi_G(G-R) + \delta\pi_G[G - \pi_G R_S - (1-\pi_G)R_U],$$

откуда следует, что

$$R_C^0 = R_C + \delta\pi_G(R_U - R_S). \qquad (2.4.30)$$

В результате проведенных рассуждений получаем, что

☞при предположении, что

$$\pi_0 \le \frac{1}{R_C^0},\ \pi_S > \frac{1}{R_C},\ \pi_U > \frac{1+C}{G},$$

равновесие в двухпериодной модели Даймонда характеризуется следующим образом:

в момент времени $t = 0$ все фирмы заимствуют у банков по ставке

$$R_0 = \frac{1+C}{\pi_0}; \qquad (2.4.31)$$

в момент времени $t = 1$ успешные фирмы обеспечивают себе прямое финансирование, выпуская долговые обязательства со ставкой

$$R_S = \frac{1}{\pi_S}, \qquad (2.4.32)$$

а остальные — берут банковский кредит по ставке

$$R_U = \frac{1+C}{\pi_U}. \qquad (2.4.33)$$

Заметим, что утверждения (2.4.31)–(2.4.33) непосредственно вытекают из утверждений (2.4.18)–(2.4.19), сформулированных в предыдущем пункте.

Несмотря на свою простоту, данная модель позволяет выявить некоторые принципиальные качественные характеристики кредитного рынка:

- фирмы с хорошей репутацией могут выпускать долговые обязательства и получать, таким образом, прямые займы;
- «неуспешные» фирмы вынуждены поддерживать бо́льшую ставку, чем вновь возникающие фирмы $(R_U > R_0)$;

- проблемы недобросовестного управления (возможного морального ущерба) могут быть частично уменьшены эффектом хорошей репутации $(R_C^0 > R_C)$.

2.4.4. Мониторинг и капитал

Хольмстрём и Тироль (Holmström—Tirole) в [12] также рассмотрели модель, исследующую проблему выбора между прямым и банковским (посредническим) финансированием. Однако в ней в отличие от модели, описанной в предыдущем пункте, фактором, определяющим преимущества по использованию прямого финансирования, является объем капитала, которым владеет фирма.

В экономике, описываемой моделью Хольмстрёма—Тироля, присутствуют три типа агентов:

- фирмы (заемщики), обладающие принципиальными возможностями реализовывать проекты, приносящие прибыль;
- банки (посредники, способные выполнять функции мониторинга деятельности фирм);
- инвесторы, не обладающие достаточной информацией о возможностях фирм.

Каждый проект, предлагаемый той или иной фирмой, требует вложений в размере I. В случае успешного завершения он приносит доход объемом R, а в случае неудачи — нулевой доход.

Как и ранее, предполагается, что все проекты могут быть разделены на два класса:

- «хорошие» — с высокой вероятностью успеха π_h;
- «плохие» — с низкой вероятностью успеха π_l.

В дальнейшем разность между верхним и нижним уровнем вероятности успеха будем обозначать

$$\Delta\pi = \pi_h - \pi_l. \qquad (2.4.34)$$

Предполагается, что «плохие» проекты могут приносить индивидуальную прибыль фирме (но не инвестору!). Данный фактор и является потенциальной причиной его возможного морального ущерба. Мониторинг фирм, проводимый банками, требует затрат объемом C и может снизить «частную» прибыль фирм, получаемую от «плохих» проектов с B до b.

Инвесторы предполагаются риск-нейтральными, что выражается в наличии у них возможностей альтернативного вложения средств, приносящих ожидаемый доход γ.

Также будем считать, что только «хорошие» проекты имеют положительное значение чистой текущей стоимости (*NPV*):

$$\pi_h R - \gamma I > 0 > \pi_l R - \gamma I + B. \qquad (2.4.35)$$

В описываемой модели фирмы отличаются только объемом принадлежащего им капитала A. Распределение капитала по всей совокупности фирм задается функцией $G(\cdot)$. Капитал, которым обладает банковская сфера в целом, считается параметром, заданным извне.

Рассмотрим принципиальные ситуации, характеризующие поведение агентов в сконструированной экономической системе.

Прямое заимствование фирмы у инвесторов означает, что она будет пытаться привлечь для реализации своего проекта инвестиции на сумму I_u, обещая им взамен доход R_u. Ограничение сверху на значение R_u может быть определено из условия

$$\pi_h(R - R_u) \geq \pi_l(R - R_u) + B, \qquad (2.4.36)$$

что равносильно

$$R_u \leq R - \frac{B}{\Delta\pi}. \qquad (2.4.37)$$

В то же время, исходя из соображения о рациональности поведения инвестора, условие, задающее верхнюю границу на объем возможных вложений в проекты фирм I_u, может быть сформулировано как

$$\pi_h R_u \geq \gamma I_u \qquad (2.4.38)$$

или

$$I_u \leq \frac{\pi_h R_u}{\gamma} \leq \frac{\pi_h}{\gamma}\left[R - \frac{B}{\Delta\pi}\right]. \qquad (2.4.39)$$

Очевидно, что проект может быть профинансирован только тогда, когда фирма имеет достаточный капитал:

$$A + I_u \geq I. \qquad (2.4.40)$$

Основываясь на (2.4.39), из (2.4.40) получаем еще одну форму условия достаточности финансового обеспечения проекта:

$$A \geq I - \frac{\pi_h}{\gamma}\left[R - \frac{B}{\Delta\pi}\right], \qquad (2.4.41)$$

а неравенство (2.4.41), в свою очередь, позволяет определить значение нижней границы для объема капитала фирмы:

$$\bar{A} = I - \frac{\pi_h}{\gamma}\left[R - \frac{B}{\Delta\pi}\right]. \qquad (2.4.42)$$

Если фирма не обладает достаточным капиталом, чтобы ограничиться прямыми заимствованиями, то она вынуждена будет недостаток средств покрывать с помощью *банковского финансирования*. В этом случае она возьмет кредиты в объеме I_m, обещая в случае успеха своего проекта вернуть R_m. При этом фирма попадает в условия мониторинга со стороны банка (значение «частного» дохода снижается с B до b). С учетом совместного использования прямого и банковского финансирования условие (2.4.36) приобретает вид

$$\pi_h(R - R_u - R_m) \geq \pi_l(R - R_u - R_m) + b, \qquad (2.4.43)$$

откуда получаем

$$R_u + R_m \leq R - \frac{b}{\Delta\pi}. \qquad (2.4.44)$$

Для того чтобы банк имел стимулы к деятельности по мониторингу фирмы, должно выполняться неравенство

$$\pi_h R_m - C \geq \pi_l R_m, \qquad (2.4.45)$$

или

$$R_m \geq \frac{C}{\Delta\pi}. \qquad (2.4.46)$$

Поскольку банковское кредитование, как правило, является более дорогим источником финансирования, то мы вправе предположить, что фирмы будут стремиться использовать его в минимальном объеме, по возможности замещая прямыми инвестициями. Используя приведенный довод, можно выйти на получение явного выражения для значения объемов инвестиций, получаемых от банка:

$$I_m = \frac{\pi_h R_m}{\beta} = \frac{\pi_h C}{\beta \cdot \Delta\pi}, \qquad (2.4.47)$$

где β — ставка процентных выплат по кредитам, предоставляемым банком. Соответственно, сумму кредитов, предоставляемых банком, можно рассматривать как функцию от процентной ставки: $I_m(\beta)$. Одновременно со значением I_m мы можем получить и значение для объема прямых заимствований:

$$I_u = \frac{\pi_h R_u}{\gamma}. \tag{2.4.48}$$

Применяя (2.4.44) и (2.4.46), получаем

$$R_u \le R - \frac{b+C}{\Delta\pi}, \tag{2.4.49}$$

откуда следует

$$I_u \le \frac{\pi_h}{\gamma}\left[R - \frac{b+C}{\Delta\pi}\right]. \tag{2.4.50}$$

Учитывая, что для того, чтобы можно было профинансировать проект в полном объеме, должно выполняться условие

$$A + I_u + I_m \ge I, \tag{2.4.51}$$

получаем неравенство

$$A \ge I - I_m(\beta) - \frac{\pi_h}{\gamma}\left[R - \frac{b+C}{\Delta\pi}\right]. \tag{2.4.52}$$

По аналогии с (2.4.42) обозначим правую часть (2.4.52) через $\bar{\bar{A}}(\beta)$. Заметим также, что $\bar{\bar{A}}(\beta)$ является еще одной оценкой снизу для объема капитала фирмы.

Условие равновесия на рассматриваемом рынке можно сформулировать в виде требования равенства спроса и предложения на банковский капитал:

$$K_m = [G(\bar{A}) - G(\bar{\bar{A}}(\beta))] \cdot I_m(\beta), \tag{2.4.53}$$

где

K_m — общий объем капитала, которым располагает банковская сфера в целом;

$[G(\bar{A}) - G(\bar{\bar{A}}(\beta))]$ — количество фирм, имеющих возможность и необходимость в использовании банковского финансирования, то есть фирм, для которых $A \in [\bar{\bar{A}}(\beta)), \bar{A}[$;[1]

[1] См. определение функции $G(\cdot)$.

$I_m(\beta)$ — объем средств, заимствуемых в банке одной фирмой.

Таким образом, правая часть уравнения (2.4.53) отражает предложение банковского капитала, а левая — спрос на него. Также из (2.4.53) может быть определена характеризующая состояние равновесия ставка процента за банковский кредит.

Основным выводом, вытекающим из модели Хольмстрёма—Тироля, является заключение о том, что все фирмы в зависимости от объема капитала, которым они обладают, разбиваются на три группы:

- фирмы с высоким уровнем капитала ($A \geq \bar{A}$) — могут использовать для своих проектов исключительно прямое финансирование;
- фирмы со средним уровнем капитала ($\bar{\bar{A}}(\beta) \leq A \leq \bar{A}$) — используют для финансирования проектов как прямые заимствования, так и банковские кредиты;
- фирмы с недостаточным уровнем капитала ($A \leq \bar{\bar{A}}(\beta)$) — не находят источников инвестиций для своих проектов.

2.4.5. Обзор моделей, предусматривающих сочетание различных форм финансирования

Завершая тему, кратко остановимся на обзоре наиболее известных моделей, рассматривающих деятельность банковских институтов с точки зрения теории делегированного мониторинга.

В частности, в работах Шарпа и Райана (Sharpe, Rajan) изучались вопросы взаимоотношений банков и заемщиков в динамике. Ключевым элементом сформулированных в них моделей была идея о том, что банки стараются установить «добрые» отношения с заемщиками в целях получения доступа к источникам информации о них. Так же, как в модели Даймонда, предполагается, что успешные в прошлом фирмы имеют лучшие шансы на развитие своего успеха в будущем. Однако считается, что банки обладают достоверной информацией только о тех фирмах, для которых они являлись кредиторами на предыдущих этапах, в противном случае банки должны проводить процедуры аудита неизвестных для них фирм. Таким образом, «успешные» фирмы сталкиваются с проблемой «издержек переключения» при смене банка-партнера.

Существуют модели, рассматривающие функционирование финансовых рынков в условиях ограниченного спроса на активы, что порождает проблему ограничений на участие в финансовых рынках. Интересно отметить, что один из выводов, получаемый в ходе анализа моделей такого рода, состоит в том, что *с увеличением количества участ-*

ников на финансовом рынке его эффективность растет, а банковский сектор сокращается.

Следующий класс моделей связан с изучением вопросов сосуществования финансовых посредников и рынков ценных бумаг. Замечено, что наличие такого фактора, как рынок ценных бумаг, может существенно влиять на степень информированности экономических субъектов и менять в ту или другую сторону ситуацию с информационной асимметрией.

Такие авторы, как Бхаттачарья и Кьеза (*Bhattacharya—Chiesa*), изучали проблему собственности на информацию. Суть ее состоит в том, что фирмы-заемщики могут нести убытки в том случае, если конкурентам становится доступной некоторая частная информация, касающаяся их деятельности. С другой стороны, кредиторы, как правило, в процессе мониторинга получают возможность накапливать информацию о деятельности заемщиков. В рамках данного контекста может быть сделан вывод о том, что двусторонние отношения банка и заемщика могут оказаться эффективнее многостороннего кредитования.

Основные выводы

Кратко сформулируем основные результаты настоящей главы, которая была посвящена моделям банков как институтов финансового посредничества.

- С точки зрения теории финансового посредничества банки могут быть рассмотрены как экономические институты, осуществляющие трансформацию финансовых контрактов. К принципиальным экономическим факторам, объясняющим причины существования банков, могут быть отнесены трансакционные издержки, ситуации информационной асимметрии, эффект экономии за счет концентрации возможностей, эффект экономии на масштабах.
- В рамках простейшей однопродуктовой модели формирования группой экономических субъектов пула ликвидности (модели Брайанта) может быть показано, что оптимальное рыночное распределение продукта достигается при наличии институтов, выполняющих функции финансового посредничества (и не может быть достигнуто без них).
- В рамках базовой модели рынка капитала, описывающей взаимоотношения предпринимателей и инвесторов в условиях асиммет-

ричной информации, возможно достижение равновесия при условии, что предприниматели используют частичное самофинансирование предлагаемых ими проектов.

- В условиях неблагоприятного выбора и возможного морального ущерба возникает потребность в деятельности посредника, осуществляющего контроль (мониторинг) за деятельностью заемщиков (предпринимателей). Соответствующие функции при определенных условиях может выполнять банк, который в этом случае трактуется как учреждение делегированного мониторинга. В рамках модели Даймонда может быть показано, что экономическая система, в которой действуют финансовые посредники, оказывается эффективней непосредственного контроля инвестора за заемщиком.
- Эффективность условий реализации проектов, выносимых предпринимателями на рынок капитала, может быть повышена за счет обеспечения им смешанного финансирования: как банковского, так и прямого (за счет выпуска непосредственных обязательств предпринимателей перед инвесторами). Могут быть предложены различные схемы, объясняющие возможности фирм по привлечению более дешевого для них прямого кредитования. С одной стороны, это динамические модели, описывающие процесс построения успешными предпринимателями «репутации», способствующей доверию инвесторов. Другая категория моделей связывает доступ к непосредственному финансированию с объемом капитала, которым владеет фирма.

Литература

1. *Allen F.* The market for information and the origin of financial intermediation // *Journal of financial intermediation*, vol. 1, pp. 3–30, 1990.
2. *Benston G., Smith C. W.* A transaction cost approach to the theory of financial intermediation // *The Journal of Finance*, vol. 31, pp. 215–231, 1976.
3. *Bryant J.* A model of reserves, bank runs and deposit insuarance // *Journal of Banking and Finance*, vol. 43, pp. 749–761, 1980.
4. *Campbell T. S., Kracaw W. A.* Information production, market signalling, and the theory of financial intermediation // *The Journal of Finance*, vol. 35, pp. 863–882, 1980.
5. *Diamond D.* Financial intermediation and delegated monitoring // *Review of economic studies*, vol. 51, pp. 393–414, 1984.
6. *Diamond D.* Monitoring and reputation: The choice between bank loans and directly placed debt // *Journal of Political Economy*, vol. 99, pp. 689–721, 1991.
7. *Diamond D., Dybvig P.* Bank runs, deposit insurance and liquidity // *Journal of Political Economy*, vol. 91, pp. 401–419, 1983.
8. *Fama E.* Banking in the theory of finance // *Journal of Monetary Economics*, vol. (6)1, pp. 39–57, 1980.
9. *Freixas X., Rochet J.-Ch.* Microeconomics of banking. MIT Press, 1998.
10. *Gorton G., Pennachi G.* Financial intermediaries and liquidity creation // *The Journal of Finance*, vol. 45, pp. 49–71, 1990.
11. *Grossman S. J., Stiglitz J.* On the impossibility of informationally efficient markets // *American Economic Review*, vol. 70, pp. 393–408, 1980.
12. *Holmström B., Tirole J.* Financial intermediation, loanable funds, and the real sector. IDEI, Toulouse University, 1993.
13. *Leland H. E., Pyle D. H.* Informational asymmetries, financial structure and financial intermediation // *The Journal of Finance*, vol. 32, pp. 371–387, 1977.
14. *Millon M. H., Thakor A. V.* Moral hazard and information sharing: A model of financial information gathering agencies // *The Journal of Finance*, vol. 40(5), pp. 1403–1422, 1985.
15. *Ramakrishnan R. T. S., Thakor A. V.* Information reliability and theory of financial intermediation // *Review of economic studies*, vol. 51, pp. 415–432, 1984.

Глава 3

ПРОИЗВОДСТВЕННО-ОРГАНИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ БАНКОВСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Система моделей и методов, которые будут рассмотрены в настоящей главе, базируется на представлении банка (финансовой компании) как некоторого абстрактного объекта, характеризующегося входными и выходными параметрами, а также функцией, которая их связывает. Такой подход в определенном смысле приближает математические модели банков к традиционным моделям производственных предприятий и организаций. Поэтому он также получил название *производственно-организационного*[1].

Фундаментальным преимуществом, открывающимся при применении производственно-организационного подхода, является возможность найти точки соприкосновения между теорией финансово-банковских институтов и классической теорией фирмы. При данном подходе банк фактически рассматривается как *фирма финансовых услуг* или *финансовая фирма*. В рамках концепции финансовой фирмы также, как и в моделях, изученных в предыдущей главе, деятельность банков трактуется как посредничество, в рамках которого покупаются одни финансовые ресурсы (займы, кредиты и т. п.) и продаются ценные другие (депозиты). Однако в данном случае делается упор на изучение технологии, определяющей возможности банка по проведению посреднических операций с финансовыми ресурсами. Классическим способом описания технологии является задание *производственной функции банка*, т. е. такой функции, которая связывает его входные параметры с выходными. Таким образом, финансово-банковские институты в моделях данного класса выступают в качестве самостоятельных экономических субъектов, которые, исходя из имеющихся у них целевых установок, стараются оптимальным образом воздействовать на окружающую среду.

[1] От англ. *industrial organization approach to banking.*

Безусловно, следует отметить, что, описывая деятельность банка с точки зрения концепции финансовой фирмы, мы абстрагируемся от таких существенных сторон его деятельности, как управление рисками, информационные аспекты и др. Однако, несмотря на подобные упрощения, производственно-организационный подход представляет собой мощный инструмент по изучению многих принципиальных проблем, возникающих в банковской сфере. Это, прежде всего, формулировка условий существования равновесия на рынке кредитов и депозитов, разработка мер денежной политики и банковского регулирования, влияние институциональной организации субъектов финансового рынка на формы и условия конкуренции.

3.1. Производственные модели банка в условиях совершенной конкуренции

В качестве простейшей иллюстрации применения производственно-организационного подхода может быть рассмотрена следующая модель. Представим банк как фирму, оказывающую финансовые услуги, сводящиеся к привлечению депозитов[1] со стороны заимодателей и предоставлению кредитов заемщикам. Допустим также, что ее состояние может быть охарактеризовано всего лишь двумя параметрами, а именно:

- объемом депозитов D;
- объемом кредитов L.

Предположим, что технология работы такой фирмы может быть описана с помощью производственной функции $C(D, L)$, которая возвращает значение издержек C, возникающих при управлении депозитами объемом D и кредитами в объеме L.

В общем случае, если в банковском секторе существует n банков, то каждый отдельно взятый банк j может быть представлен своей производственной функцией $C_j(D, L)$, где $j \in 1:n$. Однако для начала, чтобы излишне не усложнять модель, будем считать, что у всех банков технологические возможности одинаковы и могут быть описаны с помощью единственной производственной функции:

$$\text{для } \forall \ j = 1:n \ C_j(D,L) = C(D,L).$$

[1] Здесь и далее на протяжении всей третьей главы привлеченные средства банка представлены термином «депозиты». Последнее делается для компактности изложения, так как для приводимых ниже моделей специальное выделение недепозитных форм заимствованных ресурсов не является существенным.

Делая предположения о свойствах данной функции, будет разумным допустить, что она является дважды дифференцируемой и выпуклой. Последнее с экономической точки зрения соответствует эффекту убывающей отдачи от масштабов.[1] Пример функции, удовлетворяющей таким условиям, показан на рис. 3.1.

Агрегированное (и предельное упрощенное) представление банковского баланса дано в табл. 3.1.

Приведенная схема $(L_j + R_j = D_j)$, безусловно, весьма далека от реальных банковских документов и нужна нам исключительно для того,

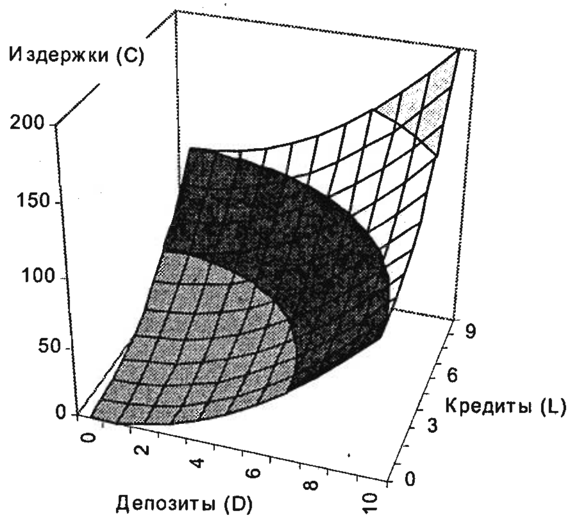

Рис. 3.1. Пример производственной функции банка $C(D, L)$

Таблица 3.1. Принципиальная схема баланса банка

Активы	Пассивы
Кредиты L_j Резервы R_j	Депозиты D_j

[1] Действительно, в случае выпуклой функции издержек удельные издержки при росте значений D и L увеличиваются.

чтобы представить соотношение параметров, используемых в рассматриваемой простейшей модели финансовой фирмы.[1]

Резервы R_j, в свою очередь, распадаются на две принципиальные части:

$$R_j = W_j + M_j, \tag{3.1.1}$$

где

W_j — обязательные страховые резервы, перечисляемые каждым банком на специальные счета в центральном банке[2];

M_j — свободные денежные суммы, представляющие чистую позицию банка на межбанковском рынке (в общем случае она может быть как положительной, так и отрицательной).

Принципиальное различие между этими двумя составляющими состоит в том, что суммы, резервируемые в центральном банке, (W_j) не приносят процентного дохода, и, следовательно, банк объективно стремится к их минимизации. Как правило, регулирующий орган определяет минимальную долю обязательных резервов пропорционально объему депозитов, привлеченных банком:

$$W_j = \alpha D_j, \tag{3.1.2}$$

где α — норма обязательного резервирования. Она представляет собой один из важнейших инструментов денежно-кредитной политики, проводимой центральным банком. В частности, посредством изменения значения α может регулироваться количество денег в экономике.

Пояснить данную мысль удобно с помощью принципиальной схемы соотношения основных финансовых компонент в экономике, показанной на рис. 3.2.

Согласно предлагаемой схеме в некоторой условной экономической системе могут быть выделены агенты (субъекты) четырех типов:

- фирмы (предприятия), осуществляющие проекты, для которых требуются инвестиции объемом I;
- домохозяйства — некоторые субъекты, обладающие определенными денежными сбережениями S;

[1] Прежде всего, необходимо отметить, что здесь мы абстрагируемся от присутствия в балансе банка его собственного капитала, а также недепозитных привлеченных средств.

[2] Данные положения в той или иной форме присутствуют в законодательных актах, регламентирующих деятельность банков практически всех стран.

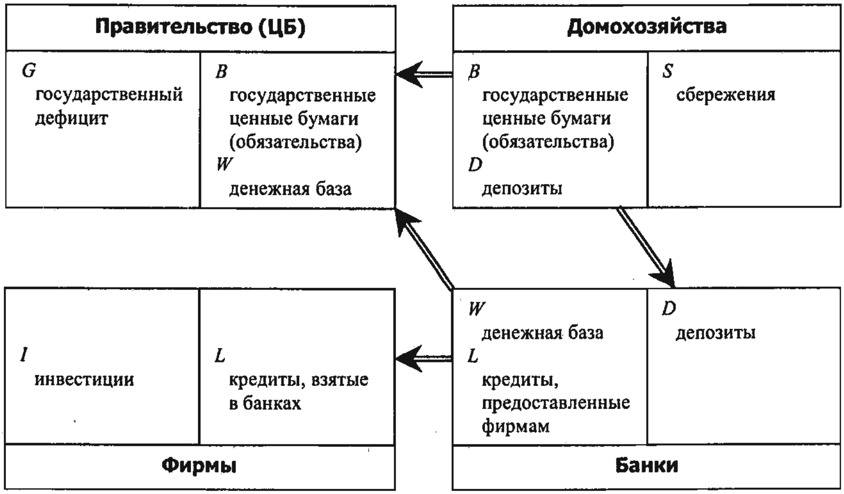

Рис. 3.2. Принципиальная схема соотношения основных финансовых компонент в экономике

- банки — учреждения, способные аккумулировать сбережения домохозяйств в форме депозитов D с целью последующего инвестирования привлеченных средств в деятельность фирм в количестве L;
- правительство (центральный банк), роль которого сводится к финансированию дефицита государственного бюджета G. Для этого оно может выпускать обязательства (государственные ценные бумаги B), а также использовать страховые резервные суммы W, депонируемые в центральном банке коммерческими банками. Последние образуют так называемую денежную базу, или деньги высокой силы (*high-powered money*).[1]

Исходя из того, что в данной модели игнорируется валютное обращение (валюта в накоплениях домохозяйств, а также задействованная во внешнеторговых операциях), мы получаем простое соотношение, связывающее в условиях равновесия денежную базу и депозиты, привлеченные банками:

$$W = \sum_{j=1}^{n} W_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha D_j = \alpha D. \qquad (3.1.3)$$

[1] Здесь, безусловно, присутствует определенное упрощение, так как в реальной экономике в образовании денежной базы также участвуют находящиеся в обращении валютные суммы.

3.1.1. Общие подходы к изучению деятельности банка, вытекающие из макроэкономической теории

Одной из ключевых проблем, решаемых в рамках микроэкономических моделей банковской деятельности, является выяснение тех закономерностей, в соответствии с которыми устанавливаются значения процентных ставок как по кредитам, выдаваемым банками фирмам, так и по депозитам, привлекаемым ими со стороны потенциальных заимодателей (r_L и r_D). Очевидно, что данные вопросы перекликаются со стандартными вопросами ценообразования в классической теории фирмы.

Для начала остановимся на самых общих подходах к решению указанных задач, базирующихся на фундаментальных макроэкономических положениях.

В агрегированном виде связь между денежной массой, циркулирующей в экономике, и общим количеством депозитов и кредитов может быть описана следующими формулами:

$$D = \frac{W}{\alpha} = \frac{G-B}{\alpha}, \qquad (3.1.4)$$

$$L = D - W = \frac{W}{\alpha} - W = (\frac{1}{\alpha} - 1)W = (G-B)(\frac{1}{\alpha} - 1). \qquad (3.1.5)$$

Из (3.1.4) можно получить выражение для предельного изменения депозитов в зависимости от денежной базы

$$\frac{\partial D}{\partial W} = -\frac{\partial D}{\partial B} = \frac{1}{\alpha} > 0. \qquad (3.1.6)$$

Данный показатель получил название *денежного мультипликатора*. С макроэкономической точки зрения он может служить оценкой для значения нормы процентных выплат по депозитам (r_D).

Аналогично может быть определен *кредитный мультипликатор*:

$$\frac{\partial L}{\partial W} = -\frac{\partial L}{\partial B} = \frac{1}{\alpha} - 1 > 0, \qquad (3.1.7)$$

представляющий собой предельный прирост общей суммы кредитов на единичное изменение денежной базы. Кредитный мультипликатор, соответственно, может играть роль оценки значения для процентной ставки, выплачиваемой по кредитам (r_L).

3.1.2. Производственно-организационная модель поведения банка в условиях совершенной конкуренции

Несмотря на то что кредитный и денежный мультипликаторы являются важнейшими характеристиками состояния экономики, данное ее представление имеет весьма ограниченные возможности. Это, прежде всего, связано с тем, что из него нельзя получить конструктивных выводов, касающихся деятельности отдельно взятого банка.

В связи с этим перейдем к рассмотрению микроэкономической *модели поведения банка в условиях совершенной конкуренции*. Напомним, что ситуация совершенной конкуренции предполагает, что банки пассивно принимают значения ставок r_L и r_D, не имея возможности повлиять на них. Также внешним параметром для них является ставка доходов на капитал, присутствующий на межбанковском рынке r.

С учетом ранее введенных обозначений прибыль банка описывается следующим образом:[1]

$$\pi = r_L L + rM - r_D D - C(D,L), \tag{3.1.8}$$

где

$r_L L$ — прибыль, приносимая кредитами в сумме L;

rM — доходы (расходы), которые банк имеет по своей чистой позиции на межбанковском рынке в зависимости от ее знака;[2]

$r_D D$ — выплаты, которые банк производит по депозитам;

$C(D, L)$ — издержки банка на управление депозитами в сумме D и кредитами в сумме L, задаваемые его производственной функцией.

Поскольку чистая позиция банка задается выражением

$$M = (1-\alpha)D - L, \tag{3.1.9}$$

то функцию прибыли банка можно переписать как

$$\pi(D,L) = (r_L - r)L + (r(1-\alpha) - r_D)D - C(D,L). \tag{3.1.10}$$

Таким образом, в построенной модели прибыль банка представляет собой функцию от его депозитов и кредитов. Если поставить задачу максимизации функции π по аргументам D и L, то необходимое усло-

[1] Для простоты и компактности изложения опустим индекс банка j, т. е. будем писать π вместо π_j.

[2] Другими словами, имеются в виду средства либо вынесенные на рынок межбанковских кредитов, либо полученные взаймы на этом рынке.

вие оптимальности (равенство первых частных производных нулю) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial D} = (r(1-\alpha) - r_D) - \dfrac{\partial C(D,L)}{\partial D} = 0, \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial L} = (r_L - r) \qquad - \dfrac{\partial C(D,L)}{\partial L} = 0. \end{cases} \tag{3.1.11}$$

Из (3.1.11) следует ряд фундаментальных свойств, характеризующих оптимальное поведение банка в конкурентной экономике.

☞Максимизируя свою прибыль в условиях свободной конкуренции, банк будет привлекать депозиты в таком объеме D^*, чтобы предельные издержки на управление ими равнялись $r(1-\alpha)-r_D$. По аналогии, кредиты будут выдаваться в таком объеме L^*, чтобы предельные издержки на управление равнялись $r_L - r$.

Заметим, что в рамках подхода к банку как к фирме финансового посредничества величину $r(1-\alpha)-r_D$ можно трактовать как норму расходов на оказываемые им услуги, а $r_L - r$ — как норму дохода, приносимого данным видом деятельности.

С точки зрения сравнительной статики могут быть установлены следующие зависимости объемов депозитов и кредитов от процентных ставок:

☞увеличение r_D влечет за собой уменьшение банковского спроса на депозиты D^*, а повышение r_L ведет к увеличению банковского предложения кредитов L^*.

Эффект перекрестного влияния r_D на L^* и r_L на D^* зависит от знака второй производной функции издержек.
Если

$$\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} > 0,$$

то при увеличении r_D происходит уменьшение предложения кредитов L^*, а при увеличении r_L происходит уменьшение спроса на депозиты D^*.
Если

$$\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} < 0,$$

то при увеличении r_D происходит увеличение предложения кредитов L^*, а при увеличении r_L происходит увеличение спроса на депозиты D^*.

Если

$$\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} = 0,$$

то эффект перекрестного влияния отсутствует (функция издержек $C(D, L)$ является сепарабельной относительно своих аргументов).

Доказательство.

Доказательство сформулированных утверждений проведем для случая влияния вариаций r_L (для случая вариаций r_D оно проводится аналогично).

Если продифференцировать уравнения системы (3.1.11) по r_L, то получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 C}{\partial L \partial D} \cdot \dfrac{dD}{dr_L} + \dfrac{\partial^2 C}{\partial L^2} \cdot \dfrac{dL}{dr_L} = 1, \\ \dfrac{\partial^2 C}{\partial D^2} \cdot \dfrac{dD}{dr_L} + \dfrac{\partial^2 C}{\partial L \partial D} \cdot \dfrac{dL}{dr_L} = 0. \end{cases} \tag{3.1.12}$$

Условия (3.1.12) можно рассматривать как систему уравнений относительно переменных

$$\frac{dD}{dr_L} \text{ и } \frac{dL}{dr_L}.$$

Учитывая, что функция $C(D, L)$ является выпуклой, получаем, что определитель системы (3.1.12)

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 C}{\partial L \partial D} \right)^2 - \frac{\partial^2 C}{\partial L^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial D^2} \tag{3.1.13}$$

является отрицательным.

В соответствии с правилом Крамера решения системы (3.1.12) имеют вид:

$$\frac{dD}{dr_L} = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} \tag{3.1.14}$$

и

$$\frac{dL}{dr_L} = -\frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial D^2}. \qquad (3.1.15)$$

Из (3.1.15) получаем, что $\frac{dL}{dr_L}$ имеет тот же знак, что и $\frac{\partial^2 C}{\partial D^2}$, т. е. является положительным. Последнее соответствует росту суммы предлагаемых кредитов L при увеличении r_L.

Из (3.1.14) следует, что $\frac{dD}{dr_L}$ имеет знак, обратный знаку $\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L}$, что обосновывает сформулированные выше направления изменения объема спроса на депозиты D в зависимости от вариаций r_L. ✌

Содержательно условия, накладываемые на знак

$$\frac{\partial^2 C}{\partial L \partial D},$$

могут быть интерпретированы как направление действия эффекта экономии «за счет концентрации возможностей». Так, если

$$\frac{\partial^2 C}{\partial L \partial D} < 0,$$

то увеличение суммы предлагаемых кредитов L ведет к уменьшению предельных издержек на содержание депозитов. Это фактически означает, что банк, представляющий собой экономический объект, одновременно работающий как с кредитами, так и депозитами, получает преимущества, даваемые эффектом экономии за счет концентрации возможностей. Следовательно, его деятельность в этом плане является более эффективной по сравнению с деятельностью «неуниверсальных» фирм, работающих только с кредитами или только с депозитами.

Дополнительно заметим, что случай, когда

$$\frac{\partial^2 C}{\partial L \partial D} > 0,$$

будет соответствовать эффекту потерь от концентрации возможностей (необходимости нести дополнительные издержки за возможность сочетания различных видов деятельности).

3.1.3. Равновесие при совершенной конкуренции

Остановимся теперь на условиях существования *равновесия в конкурентной банковской системе.*

Пусть в рассматриваемой экономической ситуации действуют n банков, каждый из которых ($j \in 1:n$) характеризуется функцией предложения кредитов $L_j(r_L,r_D,r)$ и функцией спроса на депозиты $D_j(r_L,r_D,r)$. Аргументами данных функций являются процентные ставки по кредитам (r_L), депозитам (r_D) и на межбанковском рынке (r).

Введем в рассмотрение функцию агрегированного спроса фирм на кредиты $I(r_L)$. Поскольку предположение о возможности выпуска фирмами обязательств в форме ценных бумаг в настоящей (упрощенной) модели не рассматривается, то агрегированный спрос на кредиты должен равняться их агрегированному предложению:

$$I(r_L)=\sum_{j=1}^{n}L_j(r_L,r_D,r). \qquad (3.1.16)$$

Пусть $S(r_D)$ — функция агрегированных сбережений домашних хозяйств. Если считать, что для домохозяйств депозиты и государственные ценные бумаги являются *совершенными субститутами*, то в ситуации равновесия процентные ставки по ним будут равны между собой. Тогда условие равновесия на рынке сбережений примет вид:

$$S(r_D)=B+\sum_{j=1}^{n}D_j(r_L,r_D,r), \qquad (3.1.17)$$

где B — объем обязательств, приобретенных домохозяйствами.

Наконец, условие равновесия, характеризующее состояние межбанковского рынка, должно связывать агрегированное предложение кредитов с суммарными депозитами за вычетом суммы обязательных страховых резервов, переводимых в центральный банк:

$$\sum_{j=1}^{n}L_j(r_L,r_D,r)=(1-\alpha)\sum_{j=1}^{n}D_j(r_L,r_D,r). \qquad (3.1.18)$$

Уравнение (3.1.18) также отражает предположение о том, что агрегированная позиция всех банков на рынке межбанковских кредитов равна нулю (предложение одних компенсируются спросом других).

Таким образом, система уравнений (3.1.16)–(3.1.18), накладывающих условия на кредитный рынок, рынок сбережений и межбанковский рынок, определяет состояние равновесия $(r_L^*,\ r_D^*,\ r^*)$ для случая свободной конкуренции банков в экономике. Напомним, что равновесие данного типа также называют *равновесием по Вальрасу*.

Предложенная модель может быть обобщена за счет добавления к ней условия, отражающего возможность эмиссии или изъятия денежных средств со стороны центрального банка. В этом случае ставка r становится внешней переменной, выбираемой регулирующим органом (центральным банком). Также возможна модификация модели, при которой r трактуется как параметр, формируемый на международном рынке капитала. Заметим, что как при первом, так и при втором варианте уравнение (3.1.18) исчезает.

Достаточно интересная и содержательная характеристика состояния равновесия может быть получена в рамках частного случая, предполагающего, что предельные издержки банка на управление кредитами и депозитами являются постоянными:

$$\frac{\partial C}{\partial L} \equiv \gamma_L, \ \frac{\partial C}{\partial D} \equiv \gamma_D.$$

Тогда условия оптимальности (3.1.11) примут вид:

$$r_D = r(1-\alpha) - \gamma_D, \tag{3.1.19}$$

$$r_L = r + \gamma_L, \tag{3.1.20}$$

а уравнение равновесия на рынке сбережений (3.1.17) можно записать так:

$$S[r(1-\alpha) - \gamma_D] - \frac{I(r+\gamma_L)}{1-\alpha} = B. \tag{3.1.21}$$

Из уравнения (3.1.21) может быть определена ставка процента на межбанковском рынке r, а также оно позволяет установить направление воздействия на равновесный уровень процентных ставок r_D и r_L при изменении ставки обязательного резервирования α и объема выпуска государственных обязательств B.

☞ Увеличение объема выпуска государственных ценных бумаг B влечет за собой уменьшение объемов депозитов D и кредитов L. При этом абсолютные величины их предельных изменений, вызванных приращением B, меньше соответствующих значений денежного и кредитного мультипликаторов (см. (3.1.6) и (3.1.7)):

$$\left|\frac{\partial D}{\partial B}\right| < 1, \quad \left|\frac{\partial L}{\partial B}\right| < 1-\alpha.$$

Доказательство.

Продифференцировав (3.1.21) по B, получим

$$\left\{(1-\alpha)S'(r_D) - \frac{I'(r_L)}{1-\alpha}\right\}\frac{dr}{dB} = 1, \tag{3.1.22}$$

а учитывая, что

$$D(r_D) = S(r_D) - B, \tag{3.1.23}$$

имеем

$$\frac{\partial D}{\partial B} = S'(r_D)(1-\alpha)\frac{dr}{dB} - 1 = \frac{1}{\dfrac{(1-\alpha)^2 S'(r_D)}{I'(r_L)} - 1}. \tag{3.1.24}$$

Исходя из экономических реалий, функцию агрегированных сбережений $S(r_D)$ можно полагать возрастающей относительно процентной ставки r_D, т. е. $S'(r_D) > 0$. Аналогично, будет вполне естественным считать, что суммарный спрос на инвестиции $I(r_L)$ является убывающей функцией от нормы процентных выплат по кредитам r_L, откуда следует, что $I'(r_L) < 0$.

Тогда из (3.1.24) получаем, что

$$\frac{\partial D}{\partial B} < 0 \tag{3.1.25}$$

и

$$\left|\frac{\partial D}{\partial B}\right| < 1. \tag{3.1.26}$$

Учитывая, что агрегированные инвестиции и кредиты в ситуации равновесия равны (в рамках рассматриваемой модели):

$$L = I \quad \text{или} \quad L = (1-\alpha)D,$$

имеем

$$\frac{\partial L}{\partial B} = (1-\alpha)\frac{\partial D}{\partial B}, \tag{3.1.27}$$

откуда с учетом (3.1.25) и (3.1.26) получаем:

$$\frac{\partial L}{\partial B} < 0 \tag{3.1.28}$$

и

$$\left|\frac{\partial L}{\partial B}\right| < 1-\alpha. \tag{3.1.29}$$

☞Если ставка резервных требований α увеличивается, то объем кредитов уменьшается, однако ее влияние на объем депозитов является неоднозначным.

Доказательство.

Продифференцировав (3.1.21) по α, получим

$$\left\{(1-\alpha)S'(r_D) - \frac{I'(r_L)}{1-\alpha}\right\}\frac{dr}{d\alpha} = rS'(r_D) + \frac{I(r_L)}{(1-\alpha)^2}. \tag{3.1.30}$$

Поскольку $S'(r_D) > 0$, $I'(r_L) < 0$ и $\frac{dr}{d\alpha} > 0$, выражение (3.1.30) является положительным. Тогда, учитывая необходимые условия оптимальности (3.1.19) и (3.1.20), получаем, что при увеличении α значение r_L также увеличивается, а следовательно, объем кредитов L уменьшается. В то же время

$$\frac{dr_D}{d\alpha} = -r + (1-\alpha)\frac{dr}{d\alpha}, \tag{3.1.31}$$

что, собственно говоря, и означает неоднозначность влияния α на r_D (и объем депозитов D).

Доказанный результат в определенном смысле является парадоксальным, особенно в том случае, когда процентная ставка по депозитам r_D оказывается убывающей функцией от нормы резервных требований α. Объяснение такого положения дел вытекает из того, что в рассматриваемой модели ставка межбанковского рынка r является внутренней переменной, определяемой из уравнения (3.1.21).

В случае же, когда r задается извне (допустим, задается центральным банком или определяется международным рынком капитала), то в силу (3.1.20) получаем, что процентная ставка по кредитам r_L не зависит от нормы резервных требований α, которая будет оказывать влияние только на процентную ставку по депозитам r_D (см. (3.1.19)).

3.2. Модели поведения монополистического банка

Как известно, ситуация совершенной конкуренции является нехарактерной для банковской отрасли, которой свойственны высокие входные барьеры. В связи с этим более адекватными экономическим реалиям представляются модели, рассматривающие поведение банка в условиях монополии и олигополии. На некоторых (наиболее известных) мы остановимся в настоящем параграфе.

3.2.1. Описание модели Монти—Кляйна

Для начала рассмотрим достаточно простую модель поведения банка-монополиста, получившую в литературе название *модели Монти—Кляйна* (Monti—Klein), см. [9, 11].

В ее рамках действует банк, который в соответствии с классической микроэкономической теорией монополии обладает возможностями по изменению величин процентных ставок на кредиты и депозиты (r_L и r_D). Формально данную предпосылку можно выразить через задание функций:

- $L(r_L)$, ставящей в соответствие значению процентной ставки за кредиты r_L объем кредитов L, которые потенциальные заемщики возьмут у банка по такой ставке;
- $D(r_D)$, ставящей в соответствие значению процентной ставки за депозиты r_D объем средств D, которые сможет занять у депозиторов банк, обещая им выплаты по данной ставке.

Представляется естественным считать, что функция $L(r_L)$ является убывающей, а $D(r_D)$ — возрастающей, см. рис. 3.3.

При дальнейшем изложении модели нам также понадобятся и обратные функции $r_L(L)$ и $r_D(D)$. Дополнительно будем полагать, что процентная ставка по межбанковским кредитам является параметром, задаваемым извне (допустим, назначается центральным банком). Тогда прибыль, получаемая некоторым банком-монополистом, будет равна

$$\pi(D,L) = (r_L(L) - r)L + (r(1-\alpha) - r_D(D))D - C(D,L). \qquad (3.2.1)$$

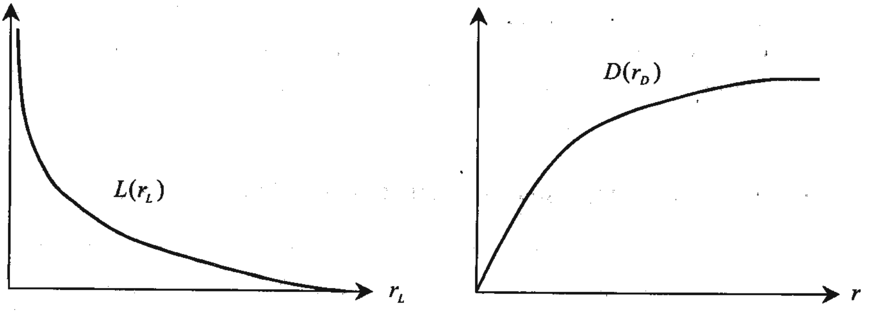

Рис. 3.3. Примерные графики функций банка $L(r_L)$ и $D(r_D)$

Заметим, что по компонентам (доход, получаемый по кредитам, минус расходы по депозитам, минус издержки управления) формула (3.2.1) идентична формуле (3.1.10).

Необходимое условие максимума функции прибыли $\pi(D,L)$ — равенство первых частных производных нулю — примет вид:

$$\frac{\partial\pi}{\partial D} = -r_D'(D)D + r(1-\alpha) - r_D - \frac{\partial C(D,L)}{\partial D} = 0, \qquad (3.2.2)$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial L} = r_L'(L)L + r_L - r - \frac{\partial C(D,L)}{\partial L} = 0. \qquad (3.2.3)$$

Заметим, что в случае, если выполняется предположение о вогнутости $\pi(D,L)$, то условия (3.2.2)–(3.2.3) будут также и достаточными.

Эластичность спроса на кредиты по процентной ставке выражается формулой

$$\varepsilon_L = -\frac{r_L L'(r_L)}{L(r_L)}. \qquad (3.2.4)$$

Знак «минус» в формуле (3.2.4) нужен для обеспечения неотрицательности значения эластичности ($\varepsilon_L > 0$), что является своего рода традиционным моментом в литературе по микроэкономике.[1]

В свою очередь, *эластичность предложения депозитов* (по процентной ставке) примет вид

[1] Ранее было сделано предположение, что $L(r_L)$ — убывает, т. е. $L'(r_L) < 0$.

$$\varepsilon_D = \frac{r_D D'(r_D)}{D(r_D)} > 0. \qquad (3.2.5)$$

С учетом (3.2.4) и (3.2.5) решение системы (3.2.2)–(3.2.3) (r_L^*, r_D^*) определяется равенствами

$$\frac{r_L^* - (r - C'_L)}{r_L^*} = \frac{1}{\varepsilon_L(r_L^*)}, \qquad (3.2.6)$$

$$\frac{r(1-\alpha) - C'_D - r_D^*}{r_D^*} = \frac{1}{\varepsilon_D(r_D^*)}. \qquad (3.2.7)$$

Нетрудно заметить, что левые части уравнений (3.2.6)–(3.2.7) представляют собой традиционные показатели степени монопольной власти над ценой — *индексы Лернера* (разность цены и предельных издержек, деленная на цену).

В результате условие равновесия в монопольной банковской системе может быть сформулировано следующим образом:

☞ банк-монополист будет устанавливать количество кредитов (L) и депозитов (D) таким образом, чтобы выполнялось условие равенства индексов Лернера обратным эластичностям.

Из (3.2.6)–(3.2.7) следует, что чем больше влияние банков на величины ставок по депозитам или кредитам, тем больший индекс Лернера и меньшая эластичность соответствуют им. Также можно прийти к интуитивному заключению о том, что предельные издержки будут больше тогда, когда сильнее монопольная власть банка.

Дополнительно следует обратить внимание и на то, что модель поведения банка в конкурентной среде может рассматриваться как частный случай модели Монти—Кляйна, который получается при стремлении значений эластичностей к бесконечности. Так, из того, что $\varepsilon_D(r_D^*) \to \infty$ и $\varepsilon_L(r_L^*) \to \infty$, вытекает, что

$$\frac{r(1-\alpha) - C'_D - r_D^*}{r_D^*} = \frac{1}{\varepsilon_D(r_D^*)} \to 0,$$

$$\frac{r_L^* - (r - C'_L)}{r_L^*} = \frac{1}{\varepsilon_L(r_L^*)} \to 0,$$

т. е. условия конкурентного равновесия (см. (3.1.11)).

Из сформулированного выше условия равновесия в монопольной банковской системе вытекает вывод о том, что *появление на финансовом рынке заменителей (субститутов) банковских услуг может оказать неблагоприятное влияние на предельные издержки банка по управлению кредитами и депозитами.* Например, это может произойти при получении домохозяйствами доступа к разного рода взаимным денежным фондам, что явится субститутом для банковских депозитов, или же при выпуске фирмами прямых долговых обязательств, которые замещают банковское кредитование.

Непосредственно из (3.2.6)–(3.2.7) вытекает принципиально важное заключение о том, что

☞ если в рамках модели Монти—Кляйна функция издержек управления банком C является аддитивной относительно своих параметров D и L[1], то значения оптимальных ставок по депозитам и кредитам (r_D и r_L). являются независимыми друг от друга; другими словами, кредитный и депозитный рынки обладают независимыми характеристиками для состояния их равновесия.

Наконец, приведем и докажем еще одно важное свойство состояния равновесия для случая банка-монополиста:

☞ если в модели Монти—Кляйна функция издержек является аддитивной, то при возрастании ставки межбанковского рынка r ставки по кредитам (r_L) и депозитам (r_D) также возрастают.

Доказательство.

Условия максимума функции прибыли $\pi(D,L)$ (3.2.2)–(3.2.3) неявно задают некоторую функцию от r:

$$\frac{\partial\pi}{\partial L}(L^*(r),r)=\frac{\partial\pi}{\partial D}(D^*(r),r)=0. \tag{3.2.8}$$

Тогда, если повторно продифференцировать (3.2.8) по r, получим:

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial L^2}\frac{dL^*}{dr}+\frac{\partial^2\pi}{\partial L\partial r}=0, \tag{3.2.9}$$

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial D^2}\frac{dD^*}{dr}+\frac{\partial^2\pi}{\partial D\partial r}=0. \tag{3.2.10}$$

[1] В качестве примера аддитивной функции издержек может быть приведена функция $C(D, L)=\gamma_D D+\gamma_L L$.

Поскольку функция $\pi(D,L)$ предполагается вогнутой, то

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial L^2}(r_L^*,r)<0 \ \text{ и } \ \frac{\partial^2\pi}{\partial D^2}(r_D^*,r)<0.$$

Откуда следует, что $\frac{dL}{dr}$ имеет тот же знак, что и $\frac{\partial^2\pi}{\partial L^2}$, а $\frac{dD}{dr}$ — тот же знак, что и $\frac{\partial^2\pi}{\partial D^2}$. Из (3.2.2)–(3.2.3) можем получить:

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial L\partial r}=-1<0 \tag{3.2.11}$$

и

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial D\partial r}=1-\alpha>0. \tag{3.2.12}$$

Следовательно,

$$\frac{dL^*(r)}{dr}<0 \ \text{ и } \ \frac{dD^*(r)}{dr}>0.$$

Учитывая, что функция $L(r_L)$ является убывающей, получаем, что

$$\frac{dr_L^*}{dr}>0.$$

Аналогично, принимая во внимание, что функция $D(r_D)$ является возрастающей, получаем, что

$$\frac{dr_D^*}{dr}>0. ✌$$

3.2.2. Модель олигополии

Ситуация, при которой в условиях рыночной экономики банковская отрасль может контролироваться только одним банком-монополистом, представляется малореалистичной. В то же время более правдоподобным выглядит предположение, когда в банковской отрасли существует конкуренция ограниченного числа банков, что соответствует модели олигополии. На соответствующей модификации модели Монти—Кляйна мы остановимся в настоящем пункте.

Пусть на рынке присутствует n банков, пронумерованных индексом $j \in 1:n$. Допустим также, что все они характеризуются одинаковой линейной функцией издержек управления:

$$C_j(D,L) = C(D,L) = \gamma_D D + \gamma_L L. \qquad (3.2.13)$$

Изучение свойств модели начнем с такой традиционной для микроэкономических исследований проблемы, как выяснение условий существования в ней равновесия по Курно.

☞ В контексте рассматриваемой ситуации под *равновесием по Курно* будем понимать такой вектор $\{(D_j^*, L_j^*)\}_{j=1:n}$ размерности $2 \times n$, где (D_j^*, L_j^*) — количества депозитов и кредитов, принадлежащих j-му банку. Для всех j пара значений (D_j^*, L_j^*) такова, что она максимизирует прибыль j-ого банка при условии, что остальные банки $(i \neq j)$ владеют кредитами и депозитами в объемах $\{(D_i^*, L_i^*)\}_{i \neq j}$.

Другими словами, вектор $\{(D_j^*, L_j^*)\}_{j=1:n}$ задает такое устойчивое состояние банковской системы, от которого каждому банку в отдельности не выгодно отклоняться (при условии, что остальные банки также будут придерживаться своих «равновесных» стратегий). Напомним, что основной специфической особенностью понятия равновесия по Курно является то, что в тех моделях, где оно рассматривается, стратегии участников (фирм, банков и т. п.) задаются в форме принятия решений по объему продукции, выставляемой на рынок (для банков, соответственно, — по объемам кредитов и депозитов).

С математической точки зрения для каждого j пара (D_j^*, L_j^*) определяется как решение задачи

$$\max_{(D_j,L_j)} \{(r_L(L_j + \sum_{i:i \neq j} L_i^*) - r)L_j + (r(1-\alpha) - r_D(D_j + \sum_{i:i \neq j} D_i^*))D_j - C(D_j, L_j)\}.$$

Если обозначить через

$$D^* = \sum_{j=1}^{n} D_j^* \quad \text{и} \quad L^* = \sum_{j=1}^{n} L_j^*, \qquad (3.2.14)$$

то нетрудно заметить, что для функции издержек типа (3.2.13) единственное равновесное состояние определяется условиями:

$$D_j^* = \frac{D^*}{n} \quad \text{и} \quad L_j^* = \frac{L^*}{n}. \qquad (3.2.15)$$

В этом случае функция прибыли отдельного банка примет вид:

$$\pi_j(D_j,L_j) = (r_L(nL_j) - r)L_j + (r(1-\alpha) - r_D(nD_j))D_j - C(D_j,L_j) =$$

$$= (r_L(L^*) - r)L_j + (r(1-\alpha) - r_D(D^*))D_j - C(D_j,L_j). \qquad (3.2.16)$$

Необходимое условие максимума $\pi_j(D_j,L_j)$ определяется уравнениями:

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial D_j} = -r_D'(D^*)\frac{D^*}{n} + r(1-\alpha) - r_D(D^*) - \gamma_D = 0, \qquad (3.2.17)$$

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial L_j} = r_L'(L^*)\frac{L^*}{n} + r_L(L^*) - r - \gamma_L = 0. \qquad (3.2.18)$$

Условия (3.2.17)–(3.2.18) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{r_L^* - (r + \gamma_L)}{r_L^*} = \frac{1}{n \cdot \varepsilon_L(r_L^*)}, \qquad (3.2.19)$$

$$\frac{r(1-\alpha) - \gamma_D - r_D^*}{r_D^*} = \frac{1}{n \cdot \varepsilon_D(r_D^*)}. \qquad (3.2.20)$$

Полученные уравнения (3.2.19)–(3.2.20) являются дальнейшим обобщением условий равновесия для моделей конкурентной (см. 3.1.11) и монополистической (см. 3.2.6–3.2.7) банковских систем. Можно заметить, что условия равновесия по Курно для модели банковской олигополии отличаются от аналогичных условий в модели монополистического банка только тем, что коэффициент эластичности в знаменателе правой части умножается на число банков n.

Таким образом, мы получаем вполне естественный результат: монопольная банковская система представляет собой граничный случай олигопольной при $n = 1$, а конкурентная банковская система — при $n = \infty$.

Уравнения (3.2.19)–(3.2.20) также можно использовать в качестве критерия уровня «несовершенности» конкуренции в банковском секторе. Они, в частности, позволяют выразить «предельную чувствительность» ставок r_L^* и r_D^* к изменениям ставки межбанковского рынка r. Особенно наглядно это можно сделать, если допустить, что эластичности ε_L и ε_D являются постоянными величинами. Тогда на основе (3.2.19)–(3.2.20) можно записать:

$$\frac{\partial r_L^*}{\partial r} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{n\varepsilon_L}} \qquad (3.2.21)$$

и

$$\frac{\partial r_D^*}{\partial r} = \frac{1-\alpha}{1+\dfrac{1}{n\varepsilon_D}}. \qquad (3.2.22)$$

Из условий (3.2.21)–(3.2.22) видно, что «предельные чувствительности» ставок r_L^* и r_D^* к изменениям ставки межбанковского рынка r зависят от количества банков n. Последнее, в свою очередь, может быть интерпретировано как то, что при увеличении интенсивности конкуренции (возрастании n) процентная ставка по кредитам r_L^* становится менее чувствительной (а процентная ставка по депозитам r_D^* — более чувствительной) к изменениям ставки r.

3.2.3. Применение модели Монти—Кляйна для анализа политики регулирования ставки депозитов

В законодательствах подавляющего большинства стран в той или иной форме присутствуют ограничения на размер ставки процентных выплат по депозитам.[1] В настоящем пункте мы остановимся на некоторых аспектах применения модели Монти—Кляйна для изучения последствий политики регулирования депозитной ставки, заключающейся в задании верхнего предела:

$$r_D \le \overline{r}_D.$$

Типичным объяснением смысла такой меры служит тот довод, что уменьшение стоимости ресурсов для банков вызовет уменьшение тех ставок по кредитам, которые они устанавливают для заемщиков. Спорность данного рассуждения и, в частности, его некорректность в рамках модели Монти—Кляйна будет показана ниже.

Проблему регулирования ставки по депозитам рассмотрим на базе модели банковской монополии. В целях упрощения будем считать, что средствами, депонируемыми обычными банками в центральном банке в качестве обязательных страховых резервов, можно пренебречь, т. е. коэффициент α равен 0. Заметим, предпосылка о том, что рассматри-

[1] Более подробно эти вопросы были рассмотрены в главе 1.

вается банк-монополист, не является принципиальной. Приводимые ниже рассуждения могут быть обобщены для случая олигополии простым умножением эластичностей на количество банков n.

Предположим также, что в отличие от моделей, описанных в предыдущих пунктах, управляющими параметрами для банков являются не объемы депозитов и кредитов (D и L), а процентные ставки по ним (r_D и r_L). Тогда традиционная функция прибыли банка

$$\pi(D,L)=(r_L(L)-r)L+(r-r_D(D))D-C(D,L) \qquad (3.2.23)$$

примет вид

$$\Pi(r_D,r_L)=(r_L-r)L(r_L)+(r-r_D)D(r_D)-C(D(r_D),L(r_L)). \qquad (3.2.24)$$

Если предположить, что функция $\Pi(r_D,r_L)$ является вогнутой, то необходимое и достаточное условие для точки ее безусловного максимума (r_D^*, r_L^*) задается уравнениями:

$$\frac{r-r_D^*-C_D'}{r_D^*}=\frac{1}{\varepsilon_D(r_D^*)}, \qquad (3.2.25)$$

$$\frac{r_L^*-r-C_L'}{r_L^*}=\frac{1}{\varepsilon_L(r_L^*)}. \qquad (3.2.26)$$

Если предположить, что существует $\bar{r}_D$ — ограничение сверху на ставку депозитов, то задача поиска безусловного максимума функции $\Pi(r_D,r_L)$ трансформируется в задачу условной оптимизации с одним связующим ограничением:

$$\begin{cases}\max\Pi(r_D,r_L)\\ r_D\le\bar{r}_D\end{cases}. \qquad (3.2.27)$$

Если обозначить через ($\hat{r}_D$, $\hat{r}_L$) — решение задачи (3.2.27), то возможны два принципиальных случая:

- $r_D^*\le\bar{r}_D$ — ограничение $r_D\le\bar{r}_D$ не меняет значения оптимальной ставки по депозитам (по сравнению с задачей безусловной максимизации):

  $$\hat{r}_D=r_D^*,\ \hat{r}_L=r_L^*,$$

  т. е. с экономической точки зрения регулирование не имеет практических последствий;

- $r_D^* > \bar{r}_D$ — данный случай более интересен, так как решение меняет свою структуру и приобретает вид $(\bar{r}_D, \hat{r}_L)$. При этом оно должно удовлетворять условию:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r_L}(\bar{r}_D, \hat{r}_L) = 0. \qquad (3.2.28)$$

Поскольку $\Pi(r_D, r_L)$ вогнутая функция, то существует единственное значение $\hat{r}_L$, являющееся решением уравнения (3.2.28). При этом (3.2.28) определяет $\hat{r}_L$ как неявную функцию от аргумента $\bar{r}_D$. Согласно теореме о дифференцировании неявной функции можно записать:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_L^2}\frac{d\hat{r}_L}{d\bar{r}_D} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_L \partial r_D} = 0. \qquad (3.2.29)$$

Так как значение $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_L^2}$ отрицательно, то знак $\frac{d\hat{r}_L}{d\bar{r}_D}$ должен совпадать со знаком $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_L \partial r_D}$. Таким образом, было доказано следующее утверждение:

☞ограничение сверху на размер ставки по депозитам вызывает уменьшение процентных ставок по кредитам тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_L \partial r_D} > 0.$$

С содержательной точки зрения условие

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_L \partial r_D} > 0 \qquad (3.2.30)$$

соответствует ситуации, когда депозиты и кредиты являются субститутами, т. е. в случае, когда количество кредитов увеличивается (ставка по ним уменьшается), предельная доходность депозитов уменьшается.

По аналогии, условие

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_L \partial r_D} < 0 \qquad (3.2.31)$$

соответствует ситуации, когда депозиты и кредиты являются *комплементами* — при увеличении количества кредитов предельная доходность по депозитам также увеличивается.

Следующее важное утверждение формулирует свойства политики задания ограничений по депозитной ставке в условиях взаимной независимости предложения кредитов и спроса на депозиты (когда L зависит только от r_L, а D только от r_D):

☞ если спрос на кредиты и предложение по депозитам являются независимыми друг от друга, а банки имеют доступ к источникам денежных ресурсов с неограниченной эластичностью, то ограничение на ставку депозитов вызывает уменьшение ставки по кредитам тогда, когда

$$\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} > 0.$$

Если же функция издержек управления $C(D, L)$ является аддитивной относительно своих аргументов (сепарабельной):

$$\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} = 0,$$

то введение ограничения сверху на ставку депозитов $\bar{r}_D$ не влияет на ставку по кредитам.

Последнее утверждение является непосредственным следствием из предыдущего, если учесть, что

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_D \partial r_L} = -\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} \cdot L'(r_l) D'(r_D),$$

где $L'(r_l) < 0$ и $D'(r_D) > 0$.

Полученный результат фактически означает, что регулирование ставки депозитов путем задания ограничения сверху в случае сепарабельности функции издержек банка является бессмысленным, так как не может никоим образом повлиять на ставку по кредитам. Более того, предположение, выполнение которого требуется для оправдания осмысленности процесса регулирования ставки по депозитам:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} > 0,$$

оказывается прямо противоположным требованию комплементарности (взаимодополняемости) издержек:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} < 0.$$

Напомним, что последнее условие используется при обосновании эффекта от объединения в рамках банка как фирмы финансовых услуг деятельности по привлечению депозитов и выдаче кредитов. Другими словами, при выполнении принятых предпосылок узкоспециализированные финансовые институты, занимающиеся только каким-то одним видом деятельности, оказываются более эффективными, чем универсальные.

Однако данный «парадоксальный» результат скорее свидетельствует о несовершенстве той модели, в рамках которой он получен, чем о бессмысленности политики регулирования депозитной ставки. Пути разрешения этого противоречия так или иначе связаны с различными методами учета эффекта замещения между депозитами и кредитами.

В частности, данный эффект может проявиться, если допустить, что ставка межбанковского рынка r меняется в зависимости от объема совокупных резервов банков, представленных на этом рынке. Обозначим их через R. Заметим, что поскольку речь идет о поведении банка-монополиста, то можно считать, что для него

$$R = D - L. \qquad (3.2.32)$$

В этом случае функция прибыли банка может быть записана в виде:

$$\Pi(r_D, r_L) = r_L L(r_L) - r_D D(r_D) - \Psi(D(r_D), L(r_L)), \qquad (3.2.33)$$

где $\Psi(D, L)$ — функция, задающая «полные» издержки банка как финансового посредника:

$$\Psi(D, L) = C(D, L) + (D - L)[r(D - L)], \qquad (3.2.34)$$

или, учитывая (3.2.32):

$$\Psi(D, L) = C(D, L) + Rr(R). \qquad (3.2.35)$$

Последний член выражения (3.2.35), который имеет такой же знак, как и R, представляет чистый доход от операций на рынке денег. Взаимозаменяемость кредитов и депозитов достигается, если

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial D\partial L}>0, \tag{3.2.36}$$

что эквивалентно неравенству:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial D\partial L}>Rr''(R)+2r'(R). \tag{3.2.37}$$

Это условие выполняется, например, тогда, когда функция издержек управления является сепарабельной:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial D\partial L}=0,$$

а ставка межбанковского рынка — убывающая ($r'(R)<0$) и вогнутая ($r''(R)\le 0$) функция от величины чистой позиции R.

В заключение разговора о политике регулирования ставки по депозитам отметим, что все приведенные выше рассуждения основываются на предположении о риск-нейтральности банков, которая, допустим, может быть обеспечена за счет диверсификации их портфеля. В случае же принятия гипотезы о ненулевом риске разорения появляются дополнительные аргументы за введение ограничений сверху на размер процентных выплат по депозитам в качестве меры, предостерегающей банки от совершения «опасных» операций.

3.3. Модели банковской конкуренции

В настоящем параграфе мы остановимся на некоторых принципиальных вопросах конкуренции в банковском секторе и методах их изучения, базирующихся на производственно-организационном подходе.

3.3.1. Конкуренция по Бертрану в моделях банковской деятельности

В рассмотренных в пп. 3.2.1, 3.2.2 модификациях модели Монти—Кляйна внимание было сосредоточено на условиях существования равновесия по Курно, которое, как известно, предусматривает конкуренцию по объемам выпускаемой продукции (в случае банков — по объемам предлагаемых депозитов и кредитов). Однако наряду с признанием несомненной значимости и содержательности результатов, полученных в рамках моделей данного класса, к ним могут быть обращены и все те критические замечания, которые традиционно предъявляются к их адекватности экономическим реалиям. В первую очередь имеется в виду то, что более жизненной представляется та организационная схема, в которой банки могут управлять значениями процентных ставок по кредитам и депозитам, а не их абсолютными объемами. Другими словами, на практике мы чаще сталкиваемся с конкуренцией не по объемам, а по ценам, то есть с ситуацией *конкуренции по Бертрану*.

Как известно, одной из принципиальных особенностей микроэкономических моделей, рассматривающих данный тип конкуренции, является то, что в них не гарантируется существование равновесия.

В банковской сфере фактором, существенно осложняющим достижение состояния *равновесия по Бертрану*, является так называемая *двойная конкуренция*. Данный термин отражает то явление, что в случае банков между ними происходит одновременное соперничество как по «входам» (депозитам), так и по «выходам» (кредитам).[1]

Рассмотрим условную ситуацию, в которой затраты банков на обеспечение своей деятельности описываются функцией с постоянными предельными издержками. Последние могут быть без потери общности нормализованы до нуля. Кроме того, будем считать, что резервными требованиями, а также доходами и расходами, связанными с межбанковскими финансовыми рынками, можно пренебречь.

Обозначим через:

$L(r_L)$ — спрос на кредиты;

$D(r_D)$ — предложение депозитов.

С учетом сделанных предположений традиционное для случая совершенной конкуренции равновесие по Вальрасу будет определяться условием

$$r_L = r_D = \hat{r}, \qquad (3.3.1)$$

где $\hat{r}$ — единственное решение уравнения

$$L(r) = D(r). \qquad (3.3.2)$$

Фактически такой тип равновесия идентичен ситуации, когда спрос и предложение денежных фондов сталкиваются на некотором центра-

[1] Дополнительно процесс исследования ситуации конкуренции по Бертрану в банковской деятельности осложняется тем, что применение к данной сфере традиционной концепции сдерживания объемов по Эджуорту не представляется достаточно обоснованным.

лизованном рынке (без посредников). Однако,если допустить существование посредников и принять во внимание, что в реальной экономике неограниченных источников денежных средств не существует, то возникает возможность такого варианта развития событий, при котором банк может «загнать в угол» рынок кредитов, привлекая всю сумму доступных депозитов. Таким образом, конкуренция на рынке депозитов может свестись к приобретению одним из банков права быть монополистом на рынке кредитов. Поэтому равновесие по Вальрасу ($r_L = r_D = \hat{r}$) не может быть устойчивым, так как, предлагая более высокую ставку по депозитам ($r_D = \hat{r} + \varepsilon$), любой из банков вытеснит своих конкурентов и станет монополистом на рынке кредитов.

Дополнительно хочется обратить внимание на то, что делаемые на основе приведенных теоретических построений выводы *существенно зависят от соглашения об очередности совершения операций* на депозитном и кредитном рынках. В данном случае, в частности, предполагалось, что сначала банки привлекают депозиты, а затем предлагают кредиты.

Шталь (Stahl) в [14] показал, что при достаточно высокой эластичности спроса на кредиты (для ситуации, когда конкурентные действия на депозитном рынке предшествуют действиям на кредитном рынке) результаты двойной конкуренции по Бертрану не являются нейтральными, а полученное в рамках соответствующей модели равновесие обладает следующими свойствами:

- на рынке активно действует только один посредник;
- предельный посреднический доход является положительным $(r_L^* > r_D^*)$, однако все посредники в целом получают нулевую прибыль;
- равновесная кредитная ставка r_L^* определяется из условия максимизации дохода от предоставления кредитов $(1 + r_L)L(r_L)$;
- равновесная депозитная ставка r_D^* определяется из уравнения $(1 + r_D^*)D(r_D^*) = (1 + r_L^*)L(r_L^*)$;
- существует избыточное предложение депозитов: $D(r_D^*) > L(r_L^*)$.

Отметим, что одновременное сосуществование в данном состоянии равновесия общей нулевой прибыли и положительного посреднического дохода объясняется тем, что только один из банков («активный посредник») имеет свободные резервы. Отсюда следует явная неэффективность размещения фондов. Отметим также, что полученное равновесие подобно тому, которое бы возникло, если бы вкладчики могли устанавливать для заемщиков монопольную ставку r_L^*, определяющую объем их спроса на кредиты $L(r_L^*)$. Отличие состоит только в том, что вкладчики не должны были бы собирать депозиты в сумме, превышающей значение $L(r_L^*)$.

Вполне естественным было бы предположить, что существует равновесие, симметричное описанному выше, при котором, наоборот, заемщики эксплуатируют вкладчиков, извлекая прибыль за счет опережающего принятия решений на кредитном рынке. Однако его практическая реализация представляется невозможной, так как она подразумевает существование отрицательных резервов. Более реальным является выход, при котором заемщики договариваются между собой об ограничении спроса на кредиты, что позволяет несколько снизить и ставку по ним.

3.3.2. Свободная конкуренция и оптимальное количество банков

Напомним, что концепция монополистической конкуренции была впервые представлена в работе Чемберлина (Chamberlin) [4], вышедшей в 1933 г. Ее ключевым моментом стало раскрытие тех последствий, которые возникают вследствие фактора дифференциации продуктов, представленных на рынке, по тем или иным признакам. Данные идеи в дальнейшем нашли широкое применение в работах различных авторов, развивавших методологический аппарат производственно-организационного подхода.

Одной из наиболее популярных моделей монополистической конкуренции является *модель Салопа* (Salop) (см. [13]). В ней дифференциация между продуктами происходит по признаку транспортных издержек. Здесь под *транспортными издержками* мы будем понимать некоторые обобщенные (агрегированные) затраты, которые несет клиент банка (вкладчик) при доступе к его услугам. Аналогичный смысл будем вкладывать в понятие «расстояния» между банком и клиентом, т. е. будем трактовать его не в качестве физической характеристики, а как некоторый фактор, обусловливающий возникновение издержек доступа к банковскому сервису.

В простейшей формулировке модели Салопа для банковской системы предполагается существование совокупности депозиторов (вкладчиков) в количестве D, каждый из которых обладает наличными запасами денежных средств, которые он готов потенциально поместить в банк. Для простоты будем считать, что каждый вкладчик владеет суммой величиной в некоторую условную единицу.[1] Расположение бан-

[1] Фактически данная предпосылка означает, что денежные запасы более или менее равномерно распределены среди всей совокупности вкладчиков. Именно тогда их можно нормализовать до некоторой общей условной единицы измерения.

ков и вкладчиков друг относительно друга с точки зрения принятого выше понятия «расстояния» моделируется с помощью круга (см. рис. 3.4), длина которого считается равной единице. Будем считать, что вкладчики равномерно распределены по окружности.

Пусть в рассматриваемой экономике существуют n банков, идентифицируемых с помощью индекса $j \in 1:n$. Предполагается, что банки, в отличие от вкладчиков, имеют возможность вкладывать привлеченные ими средства в некоторые безрисковые активы, приносящие доход с процентной ставкой r.

Также предполагается, что вкладчики, помещая средства в банк, несут «транспортные» издержки αx (пропорционально «расстоянию» x, отделяющему их от банка).

Поскольку депозиторы расположены по окружности однородно, то оптимальная организация банковской системы потребует и соответствующего равномерного распределения банков. Тогда максимально возможное расстояние, которое придется преодолеть вкладчику до ближайшего банка, равно

$$\frac{1}{2n}.$$

При этом его транспортные издержки определяются как

$$2n\int_0^{\frac{1}{2n}} \alpha x D dx = \frac{\alpha D}{4n}. \qquad (3.3.3)$$

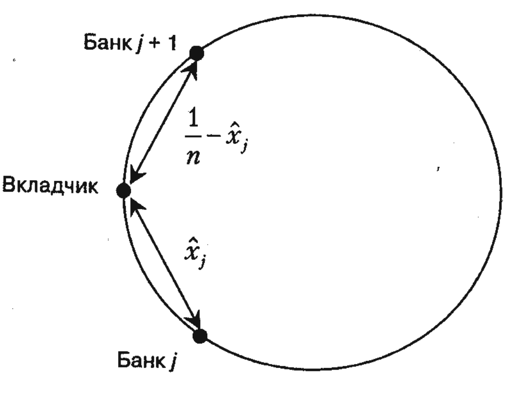

Рис. 3.4. «Круг» Салопа

Наконец, пусть средние издержки на создание нового банка равны F.

В рамках построенной модели закономерным представляется вопрос: какое количество банков будет оптимальным для рассматриваемой экономической системы. При этом «логичным» критерием оптимальности представляется минимизация суммарных издержек, складывающихся из затрат на учреждение банка и транспортных издержек:

$$nF+\frac{\alpha D}{4n}. \tag{3.3.4}$$

Если пренебречь условием целочисленности n, то минимум выражения (3.3.4) достигается, когда его производная по n равна нулю:

$$F-\frac{\alpha D}{4n^2}=0, \tag{3.3.5}$$

откуда получаем формулу для оптимального количества банков:

$$n^*=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha D}{F}}. \tag{3.3.6}$$

Теперь зададимся вопросом: *сколько банков возникнет в рамках рассматриваемой экономики в условиях свободной конкуренции?* Под свободной конкуренцией будем понимать отсутствие ограничений на создание новых банков и регулирования ставок.

Чтобы ответить на поставленный вопрос, рассмотрим условную ситуацию, когда n банков одновременно входят в отрасль, однородно размещаются по окружности и устанавливают ставки $r_D^1, \ldots, r_D^n$. Чтобы определить количество депозитов D_j, привлекаемых банком j, необходимо рассчитать положение его «предельного вкладчика», то есть такого депозитора, которому безразлично (одинаково выгодно с точки зрения издержек) обратиться в банк j, либо в следующий за ним по окружности банк $j+1$.

Расстояние $\hat{x}_j$ между этим предельным депозитором и банком j определяется из уравнения

$$r_D^j-\alpha\hat{x}_j=r_D^{j+1}-\alpha\left(\frac{1}{n}-\hat{x}_j\right), \tag{3.3.7}$$

откуда получаем:

$$\hat{x}_j = \frac{1}{2n} + \frac{r_D^j - r_D^{j+1}}{2\alpha}, \tag{3.3.8}$$

а общее количество депозитов, привлекаемых банком j:

$$D_j = D\left[\frac{1}{n} + \frac{2r_D^j - r_D^{j+1} - r_D^{j-1}}{2\alpha}\right]. \tag{3.3.9}$$

Заметим, что поскольку банки в настоящей модели расположены по кругу, то, очевидно, $r_D^{n+1} = r_D^1$ и $r_D^0 = r_D^n$.

Доход банка j задается формулой:

$$\pi_j = D(r - r_D^j)\left[\frac{1}{n} + \frac{2r_D^j - r_D^{j+1} - r_D^{j-1}}{2\alpha}\right]. \tag{3.3.10}$$

Исходя из приведенных в предыдущих параграфах идей под равновесием в рассматриваемой банковской системе будем понимать такой набор ставок $\hat{r}_D^j$ $(j \in 1:n)$, каждая из которых в отдельности максимизирует прибыль банка π_j при условии, что остальные банки устанавливают депозитные ставки из данного набора. При установлении состояния равновесия выполняются уравнения:

$$r - r_D^j = \frac{\alpha}{n} + \frac{2r_D^j - r_D^{j+1} - r_D^{j-1}}{2}, \quad j \in 1:n. \tag{3.3.11}$$

Легко убедиться, что система (3.3.11) имеет единственное решение

$$r_D^1 = \ldots = r_D^n = r - \frac{\alpha}{n}, \tag{3.3.12}$$

которое дает одинаковую прибыль для всех банков:

$$\pi_1 = \ldots = \pi_n = \frac{\alpha D}{n^2}. \tag{3.3.13}$$

Учитывая, что в модели отсутствуют ограничения на вход, то равновесное количество банков (обозначим его как n_e) достигается, если прибыль равна издержкам на образование банка F:

$$n_e = \sqrt{\frac{\alpha D}{F}}. \tag{3.3.14}$$

Сравнение формулы (3.3.14) для количества банков в условиях равновесия n_e с формулой (3.3.6), определяющей оптимальное количество банков n^* (минимизирующее суммарные издержки), показывает, что

☞ свободная конкуренция приводит к избыточному количеству банков.

Данный вывод позволяет прийти к заключению о том, что банковская отрасль с точки зрения количества банков представляет собой потенциальный объект для внешнего (государственного) регулирования. Однако в этом случае возникает дополнительный вопрос о приемлемых формах такого регулирования. Нетрудно заметить, что такая мера, как увеличение резервных требований эквивалента, ведет к уменьшению нормы отдачи r от банковских активов. В то же время формула (3.3.14) показывает, что это не влияет на равновесное количество действующих банков.

Наоборот, любая мера, ведущая прямо (законодательные ограничения на создание новых банков) или косвенно (налогообложение, вступительные взносы, минимальные требования к стартовому капиталу) к уменьшению числа действующих банков, будет способствовать улучшению положения вещей (приближать количество банков к оптимальному).

3.3.3. Влияние регулирования ставок депозитов на ставки по кредитам

Напомним, что в ходе анализа модели Монти—Кляйна был получен вывод о том, что если рынки депозитов и кредитов независимы, то влияние на процентную ставку по кредитам (r_L) ставки по депозитам (r_D) определяется свойствами функции издержек управления банком. В частности, если функция издержек является сепарабельной, то данные параметры являются независимыми друг от друга.

Однако существует и несколько иной подход к изучению связей между депозитной и кредитной ставками (см., например, [5]). В соответствии с ним депозиторы одновременно являются и заемщиками. Каждый из них предъявляет неэластичный спрос на кредиты величиной $L<1$.

Общая полезность типичного клиента (депозитора-заемщика) может быть выражена как

$$U=(1+r_D)-\alpha x_D-(1+r_L)L-\beta x_L, \qquad (3.3.15)$$

где

x_D — расстояние до банка, в котором клиент открывает депозит (помещает денежные средства);[1]

x_L — расстояние до банка, в котором клиент получает кредит;

r_L — ставка по кредитам;

α — коэффициент «транспортных» издержек, связанных с открытием депозита;

β — коэффициент «транспортных» издержек, связанных с получением кредита.

Очевидно, что клиент может открывать депозит в одном банке, а брать кредит в другом. Более того, коэффициенты «транспортных» издержек по депозитным и кредитным услугам (α и β) даже для одного и того же банка могут иметь различные значения. Это, например, может объясняться различной частотой сделок.

Развивая результаты, полученные в рамках модели Салопа, можно показать, что, если в экономике действует n банков, которые равномерно размещены друг относительно друга и свободно конкурируют между собой, то равновесие, устанавливающееся в такой системе, будет характеризоваться ставкой по депозитам

$$r_D^e = r - \frac{\alpha}{n} \tag{3.3.16}$$

и ставкой по кредитам

$$r_L^e = r + \frac{\beta}{nL}. \tag{3.3.17}$$

Соответственно, при равном разделении рынка прибыль каждого банка составит

$$\pi^e = \frac{D(\alpha+\beta)}{n^2}. \tag{3.3.18}$$

Количество действующих банков в равновесном состоянии при свободном доступе в банковскую систему определяется равенством между π и издержками на вход F, что дает:

$$n^e = \sqrt{\frac{D(\alpha+\beta)}{F}}. \tag{3.3.19}$$

[1] Напомним, что объем средств, помещаемых вкладчиком на депозит, считается нормализованным (равным условной единице измерения).

Согласно формулам (3.3.16) и (3.3.17),на единицу ставки на кредиты и депозиты являются независимыми друг от друга. Действительно, если регулируется (уменьшается) ставка по депозитам, то это не влияет на ставку по кредитам. Изменится только то, что банки станут получать относительно больший доход депозитов. Последнее повлечет за собой рост количества банков, а следовательно, их благосостояние понизится.

Одно из интересных направлений развития данной модели связано с изучением так называемых *связанных контрактов*.[1] Данное понятие отражает достаточно широко распространенную практику, при которой кредиты в банке предоставляются тем клиентам, которые держат в нем депозиты. Подобная политика может проводиться через систему кредитных ставок, условий кредитных договоров и т. п. В [5] показано, что при существовании подобных контрактов в экономической системе может не существовать равновесия, если отсутствует внешнее регулирование деятельности банков.

Закономерности поведения банков в условиях существования связанных контрактов могут быть формализованы в виде следующего утверждения:

☞ в условиях регулирования (ограничения) предельной ставки по депозитам банки будут предлагать своим клиентам связанные контракты с более низкими (чем в случае отсутствия регулирования) ставками по кредитам.

Доказательство.

Пусть полезность клиента банка (вкладчика-заемщика) по-прежнему задается функцией (3.3.15). Тогда прибыль, получаемая отдельным банком, может быть определена как

$$\pi = 2D\left[\hat{x}_D(r - r_D) + L\hat{x}_L(r - r_L)\right], \qquad (3.3.20)$$

где

$\hat{x}_D$ — расстояние от банка до его «предельного» вкладчика;

$\hat{x}_L$ — расстояние от банка до его «предельного» заемщика.

Множитель 2 в формуле (3.3.20) учитывает предпосылку о «симметричном расположении» банка относительно его клиентов.

Предположение о регулировании (задании верхнего предела) депозитной ставки учтем в форме допущения о том, что ее значение нормализовано до нуля ($r_D = 0$). Очевидно, что данное допущение не умаля-

[1] От англ. *«tied-up» contracts.*

ет общности наших рассуждений в данном контексте, но позволяет упростить ряд математических выкладок.

В том случае, если связанные контакты отсутствуют (запрещены), вкладчики, минимизируя свои издержки, будут обращаться в ближайший банк, т. е. расстояние от банка до предельного вкладчика будет

$$\hat{x}_D = \frac{1}{2n}, \tag{3.3.21}$$

а равновесные ставки по кредитам и прибыль могут быть вычислены по формулам:

$$r_L^0 = r + \frac{\beta}{nL}, \tag{3.3.22}$$

$$\pi^0 = \frac{D}{n}\left[r + \frac{\beta}{n}\right]. \tag{3.3.23}$$

Если сравнить (3.3.22) с (3.3.17), то можно заметить, что

$$r_L^0 = r_L^e, \tag{3.3.24}$$

в то же время, сравнивая (3.3.23) с (3.3.18), получаем, что

$$\pi^0 = \pi^e. \tag{3.3.25}$$

Рассмотрим теперь ситуацию, в которой допускается существование связанных контрактов. В этом случае, предлагая своим клиентам договора с пониженными кредитными ставками, банк будет собирать «дополнительные» депозиты и соответственно увеличивать свою предельную прибыль (так как единица привлеченных средств дает ему ренту размером r). Поскольку мы предполагаем, что связанные договора могут и будут использоваться всеми банками, то в конечном счете все клиенты при установлении равновесия должны будут использовать для кредитных и депозитных услуг один и тот же банк, т. е.

$$x_D = x_L.$$

Тогда расстояние от банка до его предельного клиента $(\hat{x})$ может быть определено из условия

$$1-(\alpha+\beta)\hat{x}-(1+r_L)L = 1-(\alpha+\beta)(\frac{1}{n}-\hat{x})-(1+r_L')L, \tag{3.3.26}$$

где r_L — ставка по кредитам, устанавливаемая рассматриваемым (текущим) банком, а r_L' — ставка по кредитам, устанавливаемая его ближайшим соседом. Фактически условие (3.3.26) описывает ситуацию, в которой клиенту с точки зрения выгодности ставки по кредитам безразлично, в какой из двух банков обращаться. Из (3.3.26) получаем:

$$\hat{x} = \frac{1}{2n} + \frac{L(r_L' - r_L)}{2(\alpha+\beta)}, \tag{3.3.27}$$

откуда имеем выражение для значения прибыли банка:

$$\pi = 2D\hat{x}\left[r + L(r_L - r)\right]. \tag{3.3.28}$$

Тогда из условия максимума π — равенства первой производной по r_L нулю — вытекает, что:

$$\frac{1}{\pi}\frac{\partial\pi}{\partial r_L} = -\frac{L}{2\hat{x}(\alpha+\beta)} + \frac{L}{r + L(r_L - r)} = 0 \tag{3.3.29}$$

или

$$r_L = r - \frac{r - 2\hat{x}(\alpha+\beta)}{L}. \tag{3.3.30}$$

Учитывая фактор симметричного распределения банков по «окружности» в условиях равновесия, т. е. что

$$\hat{x} = \frac{1}{2n}, \tag{3.3.31}$$

получаем новое значение равновесной ставки по кредитам в условиях допустимости связанных контрактов:

$$r_L^1 = r - \frac{1}{L}\left(r - \frac{\alpha+\beta}{n}\right). \tag{3.3.32}$$

Данную формулу можно переписать как

$$r_L^1 = \left(r + \frac{\beta}{Ln}\right) - \frac{1}{L}\left(r - \frac{\alpha}{n}\right) = r_L^e - \frac{r_D^e}{L}, \tag{3.3.33}$$

откуда и следует, что

$$r_L^1 < r_L^e.$$

Полученное неравенство является не чем иным, как математической записью доказываемого утверждения. ✌

Также, сравнив значения прибыли, получаемой банками, в случаях разрешения-запрещения связанных контрактов, нетрудно показать справедливость следующего утверждения:

☞ в условиях политики регулирования предельной ставки по депозитам запрещение связанных контрактов ведет к уменьшению благосостояния банковской системы.

3.3.4. Конкуренция и проблемы организационной структуры банков

В данном пункте мы остановимся на вопросе, который вызывал и вызывает достаточно активные дискуссии в профессиональной литературе, посвященной банковской тематике. Кратко его можно сформулировать следующим образом: *какая организационная форма является более предпочтительной: банк, обладающий разветвленной сетью филиалов,*[1] *или же банк, представляющий собой целостную (унитарную) структурную единицу?*

Ключевой проблемой, возникающей при поиске ответа на данный вопрос, является проблема издержек, которые несут клиенты в случае перехода из одного банка в другой. Ее можно достаточно наглядно проиллюстрировать в рамках двухпериодной модели распределения клиентов по банкам. В данной модели рассматривается поведение банков и их потенциальных вкладчиков в течение двух этапов. На первом этапе перед банками стоит задача привлечения клиентов, а перед клиентами, соответственно, — выбора банка. На втором этапе клиенты решают: остаться на обслуживании в ранее выбранном банке или перейти в другой. Очевидно, что если издержки, связанные с переходом в новый банк («издержки переключения»[2]), высоки, то клиенты оказываются «запертыми» в ранее выбранном банке. Последнее меняет характер конкуренции на втором этапе и позволяет банкам назначать монопольные цены.

Одновременно следует отметить, что на первом этапе банки будут нести вре́менные потери, осуществляя дополнительные расходы на привлечение клиентов, которых они будут «эксплуатировать» на втором этапе. Можно предположить, что при совершенной конкуренции в состоянии равновесия рента второго периода будет растрачиваться на покрытие убытков первого периода. Однако нетрудно заметить, что

[1] Дополнительно отметим, что банк, обладающий филиальной сетью, иногда может рассматриваться как частный случай картеля.
[2] От англ. *switching costs.*

такой подход к определению условий равновесия значительно отличается от стандартного, основывающегося на системе цен, формирующихся в соответствии с предельными издержками. Так что более вероятной представляется ситуация, в которой фактор издержек переключения будет приводить к весьма сложному неконкурентному равновесию.

Для более детального изучения данной проблематики может быть использована модель, предложенная Гейлом (Gale) в [6]. Согласно ее предпосылкам ставка по депозитам является предопределенным параметром и с позиций потребителей банки отличаются только качеством предоставляемых ими услуг.

Если отношения банков и их клиентов ограничены в пределах некоторой территориальной единицы (города, региона и т. п.), то равновесие, устанавливающееся в такой системе, будет обладать вышеописанными свойствами. При отсутствии у клиентов априорной информации о качестве банковского обслуживания и относительно высоких издержках перехода банки будут вести себя как монополисты и предлагать самый низкий уровень услуг, на который только согласятся депозиторы. При этом такое состояние действительно будет обладать свойствами равновесия ввиду отсутствия у банков стимулов отклоняться от данного типа поведения: отклоняющийся банк сможет переманить вкладчиков от своих конкурентов только в том случае, если предложит им очень высокое (и слишком дорогое для себя!) качество обслуживания, способное компенсировать издержки перехода.

Однако, если предположить, что экономика состоит из нескольких территориальных единиц (городов) и в каждом периоде по каким-либо причинам часть депозиторов вынуждена мигрировать из одного города в другой, то ситуация может качественно измениться, если также допустить возможность существования банков с филиальной структурой. Банк, имеющий подразделения в различных городах, будет заинтересован в некотором повышении качества услуг во всех своих филиалах (и сопутствующих этому издержек) с целью привлечения депозиторов-мигрантов. В то же время, из-за отсутствия подобных стимулов, согласно модели Гейла, поведение банков унитарного типа, не имеющих филиалов в других городах, останется неизменным.

Основной вывод, вытекающий из данной модели, состоит в том, что

☞ в условиях высоких издержек перехода и непрозрачности информации об уровне и качестве услуг равновесие в финансово-банковском секторе, складывающееся как результат конкуренции значительного количества относительно небольших по размерам банков унитарного типа, может оказаться менее привлекательным с точки зрения клиентов (депозиторов), чем равновесие, возникающее в случае существования банков, обладающих филиальной сетью.

В заключение отметим, что приведенная система аргументов имеет большое количество альтернатив. В частности, достаточно популярны модели, интерпретирующие преимущества филиальной структуры с позиций ее положительного влияния на рост спроса на депозиты при расширении числа отделений банков.

3.4. О некоторых проблемах построения производственной функции для финансовой фирмы

В настоящем параграфе мы остановимся еще на одном аспекте применения производственно-организационного подхода к описанию банковской деятельности. Если во всех ранее рассмотренных моделях производственная функция банка предполагалась априорно заданной, то теперь мы обратим внимание именно на методы ее конструирования.

Необходимо сразу отметить: единой и общепринятой точки зрения на пути решения данной проблемы не существует. Как нетрудно догадаться, подходы к определению вида производственной функции банковской фирмы вытекают из целей и задач тех модельных исследований, которые в дальнейшем на ее основе предполагается проводить. Безусловно, кардинальное влияние на возможную структуру производственной функции оказывает та статистическая база, которую в принципе может применять исследователь для определения ее параметров.

Можно выделить два глобальных направления в исследованиях, посвященных методам построения банковских производственных функций:

- моделирование без учета посреднической деятельности;
- моделирование с учетом посреднической деятельности.

Рассмотрим оба направления более подробно.

3.4.1. Построение производственных функций без учета посреднической деятельности

Исторически данный подход берет свое начало от работ Бенстона, Белла и Мэрфи (Benston, Bell, Murphy), см. [1, 2]. В соответствии с ним депозиты, привлекаемые банком от вкладчиков, и кредиты, предоставляемые им заемщикам, рассматриваются как выходные параметры его деятельности, а расходы на оплату сотрудников, капитальные вложения и т. п. — как входные. В упомянутых работах на основе данных программы *Функционально-стоимостного анализа*[1], осуществляемой Федеральной резервной системой США, были построены независимые функции издержек для различных видов банковских ресурсов: депозитов до востребования, срочных и сберегательных депозитов, капитальных, потребительских и бизнес-кредитов. Напомним, что ключевым моментом программы Функционально-стоимостного анализа как раз и является выделение из совокупных затрат тех долей, которые идут на отдельные виды деятельности.

Для оценки затрат на ту или иную банковскую услугу Бенстон, Белл и Мэрфи предложили использовать функциональную зависимость типа Кобба—Дугласа:

$$C_i = const \cdot Q_i^{\varepsilon_i} w_i^{a_i} r_i^{(1-a_i)},$$

которая легко может быть «линеаризирована» за счет логарифмирования:

$$\log C_i = \varepsilon_i \log Q_i + a_i \log w_i + (1-a_i) \log r_i + const,$$

где

i — индекс вида деятельности (депозиты до востребования, срочные депозиты и т. п.);

C_i — полные затраты на i-й вид деятельности;

w_i — объем затрат на оплату труда, приходящийся на i-й вид деятельности (т. н. «первый входной параметр»);

r_i — объем капитальных затрат, приходящийся на i-й вид деятельности (т. н. «второй входной параметр»);

const — постоянный коэффициент, согласовывающий системы измерения входных и выходных параметров.

Оценки для значений эластичности ε_i и параметра a_i получались с помощью метода наименьших квадратов.

Первая серьезная претензия, которая может быть предъявлена к данной методике построения производственной функции, основывается на проблеме измерения выходных параметров. Действительно,

[1] Также о программе Функционально-стоимостного анализа (Functional Cost Analysis, FCA) см. в главе 1.

5—1807

далеко не очевидно, как следует мерить, например, операции с депозитными ресурсами: суммарным их объемом, количеством счетов или количеством операций с ними?

Другой недостаток данного подхода связан с тем, что он, рассматривая издержки по различным банковским услугам независимо друг от друга, не оставляет возможностей для исследований эффекта экономии за счет концентрации видов деятельности.

Серьезной проблемой, порождаемой применением производственной функции типа Кобба—Дугласа, является то, что ей соответствуют монотонные средние издержки (возрастающие при $\varepsilon_i > 1$, убывающие при $\varepsilon_i < 1$ и постоянные при $\varepsilon_i = 1$). Последнее препятствует постановке вопроса об оптимальных значениях входных параметров. Поэтому с данной точки зрения более привлекательной представляется идея построения таких функций, в которых логарифм издержек $\log C$ нелинейно зависит от логарифмов входных и выходных параметров.

В литературе неоднократно отмечалось, что описанная выше интерпретация банковской деятельности наиболее адекватно отражает работу отдельно взятого подразделения (филиала). Такое подразделение решает некоторую локальную задачу, например, привлекает депозиты и все аккумулированные средства передает в свой головной офис, в рамках которого происходит интеграция и координация результатов работы локальных подразделений. Однако процессы, происходящие в самом центральном офисе, остаются за рамками модели. Отчасти подобные трудности разрешаются за счет построения так называемых многопродуктовых производственных функций, связывающих одновременно несколько выходных и входных параметров.

3.4.2. Построение производственных функций, учитывающих посредническую деятельность

Данный класс методов и подходов к построению производственной функции в отличие от предыдущего предполагает учет на содержательном уровне результатов деятельности банков как финансовых посредников. В первую очередь, разумеется, речь идет о трансформации активов: временном и рисковом преобразовании денежных средств, собранных у вкладчиков, в денежные средства, предлагаемые заемщикам. На концептуальном уровне такой поход к конструированию производственных функций более адекватно отражает специфику задач, решаемых банками. Он получил интересное и содержательное развитие в таких работах, как [3, 8, 10, 12]. Дополнительно следует обратить внимание на такой знаменательный (и в чем-то удивительный) факт, что результаты, полученные в моделях как одного, так и другого типа, незначительно отличались друг от друга.

При построении производственной функции для банка (финансовой фирмы) весьма существенной представляется проблема классификации рассматриваемых факторов на входные и выходные. Важность вопроса в первую очередь объясняется тем, что причисление к выходам тех факторов, которые в действительности таковыми не являются, ведет к неизбежному искажению истинных целей моделируемого объекта. С этой точки зрения представляет интерес подход к решению задач классификации, предлагаемый в работе Д. Хэнкок (Hancock) [7]. В ней вводится термин *издержек использования финансового ресурса* (*user costs of financial good*), под которым понимаются чистые издержки (или, соответственно, доходы) от владения (содержания) единицы данного ресурса (услуги) в течение рассматриваемого периода времени. В качестве ресурсов, которыми владеет банк (финансовая фирма), как правило, берутся статьи балансового отчета.

Если обозначить через

$y_{i,t}$ — объем i-го ресурса в t-ом периоде, где $i=1:N_1$ — индексы, соответствующие активам, а $i=N_1+1:N_1+N_2$ — индексы, соответствующие обязательствам;

$h_{i,t}$ — нормы доходов для активов $(i=1:N_1)$ и нормы затрат для обязательств $(i=N_1+1:N_1+N_2)$ в t-м периоде;

b_i — знаковый коэффициент: $b_i=-1$ для активов $(i=1:N_1)$ и $b_i=1$ для обязательств $(i=N_1+1:N_1+N_2)$;

P_t — общий индекс цен для t-го периода,

то общая прибыль банка от обладания в t-м периоде некоторым набором финансовых ресурсов может быть выражена как

$$\pi_t=-\sum_{i=1}^{N_1+N_2} b_i\cdot\left[\left(1+h_{i,t-1}\right)\cdot y_{i,t-1}\cdot P_{t-1}-y_{i,t}\cdot P_t\right]. \qquad (3.4.1)$$

Тогда, если R_s — коэффициент дисконтирования для s-го периода, то коэффициент приведения затрат (доходов) t-го периода на начальный момент времени может быть выражен как

$$d_t=\prod_{s=1}^{t}\frac{1}{1+R_s}, \qquad (3.4.2)$$

где $R_s=0$ при $s=t$, а общий объем капитализированной прибыли, приведенный к начальному моменту, за периоды $t=2,\dots,T$ примет вид

$$\Pi(Y)=\sum_{t=2}^{T}d_t\pi_t=-\sum_{t=2}^{T}\sum_{i=1}^{N_1+N_2}d_t\cdot b_i\cdot\left[\left(1+h_{i,t-1}\right)\cdot y_{i,t-1}\cdot P_{t-1}-y_{i,t}\cdot P_t\right],\quad(3.4.3)$$

где $Y=\left\|y_{i,t}\right\|_{N_1+N_2,T}$.

Выражение (3.4.3) можно переписать, сгруппировав коэффициенты при переменных $y_{i,t}$:

$$\Pi(Y)=\sum_{i=1}^{N_1+N_2}b_i\times$$

$$\times\left[-d_1\cdot\left(1+h_{i,1}\right)\cdot y_{i,1}\cdot P_1-\sum_{t=2}^{T-1}\left[-d_t\cdot P_t+d_{t+1}\cdot\left(1+h_{i,t}\right)\cdot P_t\right]\cdot y_{i,t}+d_T\cdot y_{i,T}\cdot P_T\right].\quad(3.4.4)$$

Но так как

$$d_{t+1}=d_t\cdot\frac{1}{1+R_t},\quad(3.4.5)$$

то, представив $\Pi(Y)$ как линейную функцию от Y с некоторыми коэффициентами $u_{i,t}$, имеющими смысл стоимостей использования i-го актива (обязательства) в t-й период, а именно

$$\Pi(Y)=\sum_{i=1}^{N_1+N_2}b_i\cdot\left[-d_1\cdot\left(1+h_{i,1}\right)\cdot y_{i,1}\cdot P_1-\sum_{t=2}^{T-1}u_{i,t}\cdot y_{i,t}+d_T\cdot y_{i,T}\cdot P_T\right],\quad(3.4.6)$$

можно в явном виде получить выражения для них (с учетом знакового коэффициента b_i):

$$u_{i,t}=-b_i\cdot P_t\cdot\frac{R_t-h_{i,t}}{1+R_t}\quad(3.4.7)$$

или

$$\frac{u_{i,t}}{P_t}=\frac{R_t-h_{i,t}}{1+R_t},\ i=1:N_1;\quad(3.4.8)$$

$$\frac{u_{i,t}}{P_t}=\frac{h_{i,t}-R_t}{1+R_t},\ i=N_1+1:N_1+N_2.\quad(3.4.9)$$

Исходя из того, что при $u_{i,t}>0$ происходит уменьшение прибыли, а при $u_{i,t}<0$ — ее увеличение, предлагается в первом случае рассматривать i-й ресурс как вход, а во втором — как выход.

Значения $h_{i,t}$ для активов (ресурсов, приносящих доход), т. е. $(i=1:N_1)$, предлагается определять как сумму норм процентных выплат, норм затрат и доходов от обслуживания кредитных ресурсов (там, где таковые виды затрат и доходов присутствуют), норм предусмотренных потерь, связанных с невозвращенными кредитами, и т. п.

При определении значений $h_{i,t}$ для обязательств (ресурсов, привлекаемых на платной основе), т. е. $(i=N_1+1:N_1+N_2)$, учитываются нормы процентных расходов, нормы расходов, возникающих при обслуживании сумм, замораживаемых в соответствии с обязательными резервными требованиями, а также затрат на обязательное страхование депозитов.

Определенные вариации при определении $h_{i,t}$ в различных моделях возникают в зависимости от того, к каким моментам в них привязываются различные виды доходов и расходов соответственно. Они с учетом коэффициента дисконтирования R_t могут приводиться либо к началу, либо к концу t-го интервала. Нетривиальность и непростота данного решения, неизбежного при построении любой модели данного класса, следует из того, что в реальной ситуации как доходы, так и расходы распределяются по всему временно́му периоду.

Подход к делению факторов на входные и выходные исходя из их влияния на прибыль (в обобщенном случае — на значение оптимизируемой функции), безусловно, дает нам систему классификации, адекватную системе целей управляемого объекта. Одновременно из него вытекает «парадокс»: в процессе функционирования финансовой фирмы ее ресурсы (т. е. соответствующие статьи баланса) могут менять свою роль: входы становиться выходами и наоборот. В частности, из формул (3.4.8) и (3.4.9) можно в явном виде определить влияние коэффициента дисконтирования R_t на роль факторов — при его увеличении возникает тенденция к тому, чтобы они становились входами, а при уменьшении — наоборот, выходами. В упомянутой выше монографии [7] на основе данных Федеральной резервной системы США за период с 1979 по 1984 год были рассчитаны стоимости использования ресурсов по 223 коммерческим банкам. На основе проведенных исследований был сделан вывод, что в большинстве случаев кредиты и депозиты до востребования являются выходами, а наличные средства, срочные депозиты, материальные затраты и трудозатраты — входами.

Дополнительно следует отметить, что на современном этапе все чаще используются методики, в которых комплексно соединяются средства классической теории фирмы с инструментарием, который позволяет учитывать специфику деятельности банка по управлению рисками и обработке информации.

3.4.3. Построение функциональных зависимостей между объемами привлеченных средств и затратами на их привлечение

В настоящем пункте мы более подробно остановимся на конкретных вопросах конструирования и определения параметров функций, устанавливающих соответствие между затратами на привлечение заимствованных финансовых ресурсов и объемом этих ресурсов.

Напомним, что в предыдущих параграфах, посвященных различным модификациям модели Монти—Кляйна, активно использовались как прямые, так и обратные функции, связывающие между собой объем депозитов D и величину соответствующей процентной ставки r_d.

Продолжим разговор о зависимостях подобного типа. В дальнейшем, чтобы не ограничивать общность рассуждений, под D будем понимать объем денежных средств некоторого вида, привлекаемых банком (финансовой фирмой), а под r_D — усредненную норму затрат на привлечение единицы этих средств.

Исходя из экономических реалий поведение функции $D(r_D)$ может быть приблизительно описано графиком S-образного вида, приведенным на рис. 3.5, где по оси абсцисс отложены нормы затрат на единицу привлеченных средств, а по оси ординат — соответствующие привлеченные объемы. Участок графика $[r_{D_1}, r_{D_2}]$ соответствует незначительному приросту средств при малых нормах затрат на их привлечение, участок $[r_{D_2}, r_{D_3}]$ — быстрому приросту, начинающемуся при достижении некоего критического уровня, сложившегося на рынке. В целом, преодоление уровня r_{D_2} означает способность финансового института обеспечить некоторый минимальный стандарт обслуживания клиентов по выплате процента, сервису, рекламе и т. п.

Наконец, по достижении уровня r_{D_3} начинается убывание скорости прироста объемов, что соответствует исчерпанию возможностей рынка привлеченных средств. Для определенных видов привлеченных ресурсов и определенных ситуаций иногда можно полагать, что на участке $[r_{D_2}, r_{D_3}]$ объемы находятся в линейной зависимости от норм затрат, что и обусловливает плодотворность использования в таких случаях приведенных выше линейных моделей. Для объективности изложения также следует добавить, что в определенных ситуациях целесообразным будет допущение об убывании $D(r_D)$ по достижении некоторого

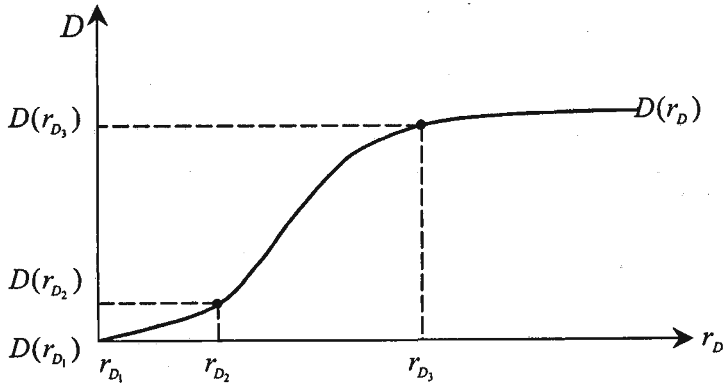

Рис. 3.5. График зависимости объема привлеченных средств D от нормы затрат на привлечение r_D

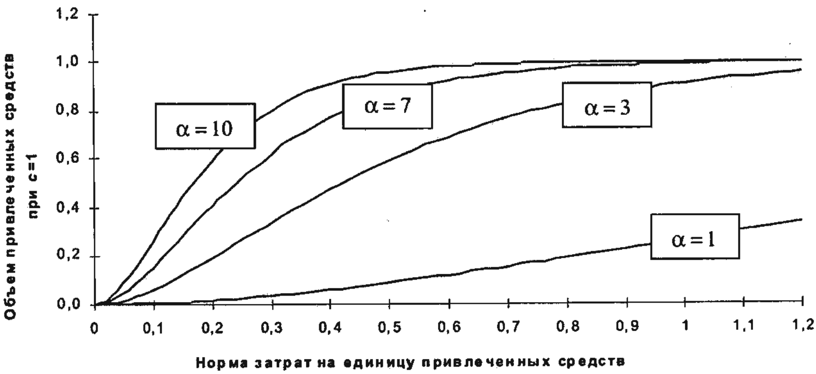

Рис. 3.6. Объем привлеченных средств при различных значениях α

уровня r_{D_4}, что отражает потерю финансовой фирмой клиентов при нереальных, ведущих к заведомому банкротству нормах затрат.

Аналитически зависимость такого вида может быть описана, например, с помощью параметрического класса функций

$$D(r_D) = c \cdot (1 - (1 + \alpha r_D) \cdot e^{-\alpha r_D}), \qquad (3.4.10)$$

где $\alpha > 0$, $c > 0$, $r_D \geq 0$.

Параметр c в (3.4.10) может быть интерпретирован как масштабирующий коэффициент, привязывающий построенную зависимость к сложившейся системе измерения привлекаемых средств, а параметр α определяет «скорость подъема» кривой $D(r_D)$, т. е. скорость достижения состояния исчерпания возможностей рынка. На рис. 3.6 дается иллюстрация поведения кривой $D(r_D)$ для различных значений α при $c = 1$. В общем виде влияние параметра α может быть отражено с помощью графика поверхности, приведенного на рис. 3.7.

При построении функции $D(r_D)$ для реальных экономических объектов (т. е. при определении фактических значений c и α) может быть применен *метод наименьших квадратов*.

Если обозначить через D_k $(k \in 1:n)$ набор фактических значений объемов привлеченных средств, наблюдаемых при нормах затрат $r_D(k)$, а через $D(c,\alpha,r_D(k))$ — соответствующие теоретические значения, то сумма квадратов отклонений фактических значений от теоретических примет вид

$$\Phi(c,\alpha) = \sum_k \left(D(c,\alpha,r_D(k)) - D_k\right)^2. \tag{3.4.11}$$

В соответствии с принципом наименьших квадратов для аппроксимации экспериментальных значений теоретической зависимостью заданного вида нам требуется определить значения c^* и α^*, обращающие в минимум функцию (3.4.11). Необходимое условие экстрему-

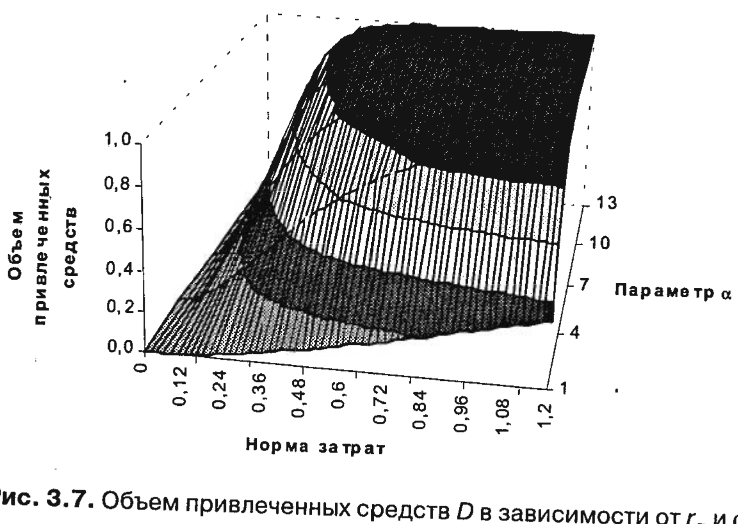

Рис. 3.7. Объем привлеченных средств D в зависимости от r_D и α

ма — равенство частных производных нулю — может быть записано в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial c} = \sum_k 2\cdot\left(D(c,\alpha,r_D(k)) - D_k\right)\cdot \dfrac{\partial D(c,\alpha,r_D(k))}{\partial c} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \sum_k 2\cdot\left(D(c,\alpha,r_D(k)) - D_k\right)\cdot \dfrac{\partial D(c,\alpha,r_D(k))}{\partial \alpha} = 0. \end{cases} \quad (3.4.12)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial D}{\partial c} = 1 - \left(1 + \alpha r_D(k)\right)\cdot e^{-\alpha r_D(k)} \quad (3.4.13)$$

и

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha} = c\cdot\alpha\cdot(r_D(k))^2\cdot e^{-\alpha r_D(k)}, \quad (3.4.14)$$

можно преобразовать условие (3.4.12) к виду

$$\begin{cases} \sum_k \left(c\cdot(1-\left(1+\alpha r_D(k)\right)\cdot e^{-\alpha r_D(k)}) - D_k\right)\cdot\left(1-\left(1+\alpha r_D(k)\right)\cdot e^{-\alpha r_D(k)}\right) = 0 \\ \sum_k \left(c\cdot(1-\left(1+\alpha r_D(k)\right)\cdot e^{-\alpha r_D(k)}) - D_k\right)\cdot(r_D(k))^2\cdot e^{-\alpha r_D(k)} = 0 \end{cases} \quad (3.4.15)$$

и, обозначив

$$g(\alpha,r_D) = 1 - \left(1+\alpha r_D\right)\cdot e^{-\alpha r_D}, \quad (3.4.16)$$

$$h(\alpha,r_D) = (r_D)^2\cdot e^{-\alpha r_D}, \quad (3.4.17)$$

записать в компактной форме

$$\begin{cases} \sum_k \left(c\cdot g(\alpha,r_D(k)) - D_k\right)\cdot g(\alpha,r_D(k)) = 0 \\ \sum_k \left(c\cdot g(\alpha,r_D(k)) - D_k\right)\cdot h(\alpha,r_D(k)) = 0. \end{cases} \quad (3.4.18)$$

Раскрыв скобки и проведя элементарные преобразования, приводим систему (3.4.18) к виду

$$\begin{cases} c\cdot\sum_k g^2(\alpha,r_D(k)) & -\sum_k\left[D_k\cdot g(\alpha,r_D(k))\right] & = 0 \\ c\cdot\sum_k\left[g(\alpha,r_D(k))\cdot h(\alpha,r_D(k))\right] & -\sum_k\left[D_k\cdot h(\alpha,r_D(k))\right] & = 0, \end{cases} \quad (3.4.19)$$

откуда получаем выражение

$$c = \frac{\sum_k [D_k \cdot g(\alpha, r_D(k))]}{\sum_k g^2(\alpha, r_D(k))}, \tag{3.4.20}$$

позволяющее в явном виде найти значение параметра c, и уравнение

$$\left[\sum_k (D_k \cdot g(\alpha, r_D(k)))\right] \cdot \left[\sum_k (g(\alpha, r_D(k)) \cdot h(\alpha, r_D(k)))\right] -$$

$$-\left[\sum_k (D_k \cdot h(\alpha, r_D(k)))\right] \cdot \left[\sum_k g^2(\alpha, r_D(k))\right] = 0, \tag{3.4.21}$$

в результате решения которого находится значение α. Хотя уравнение (3.4.21) не допускает аналитического решения, оно может быть решено с помощью численных методов, чего вполне достаточно при построении функции $D(r_D)$ по конкретной статистической выборке.

Оговоримся, что вопрос о статистических свойствах оценок параметров c и α, получаемых на основе выражений (3.4.20) и (3.4.21), в данном случае не обсуждается. Речь идет, прежде всего, о некоторой разумной эмпирической методике аппроксимации предложенной функциональной зависимости.

Основные выводы

Кратко сформулируем основные результаты настоящей главы. Она была посвящена моделям, реализующим производственно-организационный подход. Его ключевой идеей является представление банка в качестве объекта, характеризующегося некоторыми входными и выходными параметрами, а также связывающей их производственной функцией.

- Основываясь на предпосылках простейшей микроэкономической модели поведения банка в условиях совершенной конкуренции (3.1.8), можно быть получить вывод о том, что в целях максимизации получаемой прибыли банк будет привлекать депозиты в таком объеме D^*, чтобы предельные издержки на управление ими равнялись $r(1-\alpha) - r_D$. Соответственно, кредиты будут выдаваться в таком объеме L^*, чтобы предельные издержки на управление равнялись $r_L - r$.

- Из модели Монти–Кляйна, описывающей поведение банка в условиях монополии, следует, что банк-монополист будет устанавливать объемы предлагаемых им кредитов (L) и депозитов (D) таким образом, чтобы выполнялось условие равенства индексов Лернера обратным эластичностям. Данный вывод может быть обобщен на случай олигополии. При этом требуется равенство индексов Лернера обратным произведениям эластичностей на количество банков.
- На базе модели Монти–Кляйна могут быть получены принципиальные выводы, касающиеся последствий политики регулирования ставки процентных выплат по депозитам. В частности, ограничение сверху на размер депозитной ставки r_D вызывает уменьшение процентных ставок по кредитам r_L тогда и только тогда, когда относительно функции прибыли банка выполняется условие

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_L \partial r_D} > 0,$$

т. е. депозиты и кредиты являются субститутами.

- В рамках модели Салопа, рассматривающей взаимоотношения банков и их вкладчиков (депозиторов) с точки зрения «расстояния» как фактора, порождающего издержки вкладчиков по доступу к банковским услугам, может быть получен вывод о том, что свободная конкуренция (отсутствие ограничений на вхождение для новых банков в отрасль) приводит к появлению избыточного количества банков (с точки зрения критерия минимизации суммарных издержек).
- Используя модели, развивающие идеи модели Салопа, можно обосновать вывод о том, что в условиях регулирования (ограничения) предельной ставки по депозитам банки будут предлагать своим клиентам связанные контракты с более низкими (чем в случае отсутствия регулирования) ставками по кредитам.
- В условиях высоких издержек перехода и непрозрачности информации об уровне и качестве услуг равновесие в финансово-банковском секторе, складывающееся как результат конкурен-

ции значительного количества относительно небольших по размерам банков унитарного типа, может оказаться менее привлекательным с точки зрения клиентов (депозиторов), чем равновесие, возникающее в случае существования банков, обладающих филиальной сетью.

Литература

1. *Bell F. W., Murphy N. B.* Economies of scale and division of labor commercial banking // *National Banking Review*, vol. 5, pp. 131–139, 1968.
2. *Benston G. I.* Branch banking and economies of scale // *Journal of Finance*, vol. 20, pp. 312–331, 1965.
3. *Benston G. I., Hanweck G. A., Humphrey D.* Scale economies in banking // *The Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 14(1), pp. 435–546, 1982.
4. *Chamberlin E.* Theory of monopolistic competition. Cambridge: Harvard University Printing Office, 1933.
5. *Chiappori P. A., Perez-Castrillo D., Verdier F.* Spatial competition in the banking system, localization, cross-subsides and the regulation of interest rates // *European Economic Review*, vol. 39(5), pp. 889–919, 1995.
6. *Gale D.* Branch banking, unitary banking and competition. Department of Economics, Boston University. Mimeograph, 1993.
7. *Hancock D.* A Theory of Production for the Financial Firm. Norwell (Mass.), Kluver Academic Publishers, 1991.
8. *Kim M.* Banking technology and existence of a consistent output aggregate //*Journal of Monetary Economics*, vol. 18(2), pp. 181–195, 1986.
9. *Klein M.* A Theory of banking firm // *The Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 3, pp. 205–218, 1971.
10. *Mester L.* A multiproduct cost study of savings and loans // *Journal of Finance*, vol. 42(2), pp. 423–445, 1987.
11. *Monti M.* Deposit, credit, and interest rate determination under alternative bank objectives // *Mathematical methods of finance.* Amsterdam: North-Holland, 1972.
12. *Murray J. D., White R. W.* Economies of scale and economies of scope in multi-product financial institutions: A Study of British Columbia credit unions // *Journal of Finance*, vol. 38(3), pp. 887–902, 1983.

13. *Salop S.* Monopolistic competition with outside goods // *Bell Journal of Economics*, vol. 10(1), pp. 141–156, 1979.
14. *Stahl D. O.* Bertrand competition for inputs and Walrasian outcomes // *American Economic Review*, vol. 78(1), pp. 189–201, 1988.

Глава 4

БАНК КАК СОВОКУПНОСТЬ СТОХАСТИЧЕСКИХ ФИНАНСОВЫХ ПОТОКОВ

Общей чертой моделей, излагавшихся во второй и третьей главах, является то, что они описывают деятельность банка в целом, представляя его в обобщенном виде. Теперь мы остановимся на методах, ориентированных на более подробное изучение закономерностей процессов, протекающих внутри финансовых институтов. В частности, особое внимание будет уделено средствам решения задач, возникающих в ходе привлечения депозитных финансовых ресурсов.

Очевидно, что как внешние условия, сопутствующие деятельности банка (финансовой фирмы), так и процессы, протекающие внутри него, являются результатом сложных и неоднозначных взаимодействий огромного числа факторов, причин, зависимостей и закономерностей, большинство из которых имеет случайную (вероятностную) природу. Следствием этого является то, что работа банков в значительной мере сопряжена с риском и неопределенностью. В связи с этим достаточно привлекательными и конструктивными представляются идеи, касающиеся использования в экономико-математических моделях банковских структур инструментального аппарата теории вероятностей, математической статистики и теории массового обслуживания.

Достаточно хорошо зарекомендовали себя в этой области методы, связанные с подходом к описанию банка как *совокупности стохастических финансовых потоков*. В последние годы появилось несколько интересных работ, развивающих данное направление исследований. Среди них могут быть, например, названы [2, 1].

4.1. Основные концепции стохастического моделирования финансовых потоков

Способы, с помощью которых может быть описано текущее состояние банка или какого-либо иного финансового института, весьма разнообразны. Однако, наверное, одним из самых логически простых и естественных будет его представление с помощью *вектора состояния* или, как еще говорят, *вектора характеристик*:

$$x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

Количественный и качественный состав компонент вектора x определяется степенью детализации представления банка в модели. Это может быть, допустим, объем депозитов до востребования или же объем конкретного вклада, принадлежащего конкретному лицу.

Фактически данная форма описания состояния банка с содержательной точки зрения адекватна обычному банковскому балансу: компоненты вектора характеристик x могут интерпретироваться как обычные статьи баланса, а их количество и структура соответствуют уровню его агрегированности (ежедневный, включающий счета второго порядка, или укрупненный квартальный).

Конкретные значения каждой из компонент x_j вектора состояния x определяются выбором единиц измерения для соответствующего ресурса (характеристики). Очевидно, что в подавляющем большинстве случаев это денежные измерители в той или иной валюте, но, в принципе, возможны и иные формы учета. Например, через перечисление видов, количества и номиналов облигаций или же через указание числа мерных слитков, веса драгоценных камней и т. п. Для обобщения допустимых способов исчисления значений компонент вектора состояний x может быть введено понятие *ресурсных единиц* (*р. е.*). Другими словами, состояние отдельного j-го ресурса отождествляется с некоторым элементом множества неотрицательных действительных чисел $R^1_+ = [0,\ +\infty)$, геометрическим образом которого является положительная полуось вещественной прямой. Таким образом, состояние банка в целом может быть представлено некоторой точкой неотрицательного ортанта n-мерного евклидова пространства:

$$x \in R^n_+ = \{x = (x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n) \mid x_j \in R^1_+\}.$$

Множество всех возможных (допустимых) точек (векторов) x образует *пространство состояний* банка.

$$X = \{x\} \subset R^n_+.$$

На основе элементов вектора x, представляющих собой первичные характеристики состояния банка, могут быть получены некоторые производные (вторичные) характеристики

$$y = (y_1,\ldots,y_i,\ldots,y_m) \in R^m.$$

Очевидно, что вектор производных характеристик y при таком задании является функцией от вектора исходных характеристик

$$y = f(x).$$

В качестве типичного примера вторичных характеристик состояния банка может быть приведена система обязательных финансовых нормативов (коэффициентов), устанавливаемых центральными банками или иными регулирующими органами.

Для того чтобы обеспечить в модели учет фактора времени, следует задать некоторое *множество T, элементы которого $t \in T$ будем называть моментами времени.* Особо подчеркнем высокий уровень абстракции такого способа ввода понятия «время», относительно которого существует и развивается моделируемая система. Очевидно, что данное определение охватывает в качестве частных случаев как непрерывное, так и дискретное время. Традиционно в качестве модели «непрерывного физического» времени используется множество точек бесконечной одномерной действительной числовой оси R^1 с фиксированным началом отсчета, а множество всех учитываемых моментов времени T в этом случае представляет собой некоторый отрезок на этой оси (замкнутый или отрытый)[1] :

$$T = [T_-, T_+] \text{ или } T = (T_-, T_+).$$

При задании в модели банка непрерывного времени состояние j-й характеристики может рассматриваться как значение функции $x_j(t)$, определенной на множестве T и принимающей значения из множества R_+^1. Тогда график $x_j(t)$ играет роль *траектории* изменения во времени j-й характеристики. Соответственно, состояние банка в целом есть значение векторной функции от времени

$$x(t) = (x_1(t),\ldots,x_j(t),\ldots,x_n(t)), \qquad (4.1.1)$$

а *траектория системы* $\{x(t)\}_{t\in T}$ представляет собой некоторую кривую в n-мерном пространстве. Каждая точка такой траектории является элементом пространства возможных состояний банка X.

На основе введенных выше понятий может быть определен принципиально важный термин — «поток».

[1] В том случае, когда замкнутость (открытость) временного интервала не имеет значения, для его задания обычно используется обозначение: $T = \langle T_-, T_+ \rangle$.

☞ *Поток* (flow) — экономическая величина, которая измеряется в движении с учетом рассматриваемого временного интервала. Размерность потока — это объем, деленный на время.[1] В то же время *объем* (stock, volume) — величина, характеризующая значение какого-либо показателя на некоторый фиксированный момент времени.

Содержательная сторона понятия «поток» связана с понятием *скорости изменения состояния системы*. Если предположить, что функции $x_j(t)$, задающие траектории изменения характеристик состояния банка, являются «гладкими», то есть дифференцируемыми во всех точках промежутка $T = \langle T_-, T_+ \rangle$, то соответствующие первые производные

$$x'_j(t) = \frac{dx_j(t)}{dt} \tag{4.1.2}$$

могут быть интерпретированы как скорости изменения этих характеристик. Учитывая, что $x_j(t)$ является не чем иным, как объемом j-го ресурса, выраженным в некоторых ресурсных единицах (*р. е.*), то функция $\dot{x}_j(t) = x'_j(t)$ представляет собой *ресурсный поток*, определяющий в каждый момент времени t скорость изменения величины ресурса (j-й компоненты состояния банка) в ресурсных единицах, деленных на единицы измерения времени. Например, в рублях в день. При рассмотрении конкретного ресурса мы получаем конкретные виды потоков: финансовый поток, денежный поток, поток наличности и т. п.

Динамика банка в целом может быть описана с помощью *векторного ресурсного потока*

$$\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_j(t), \ldots, \dot{x}_n(t)),$$

задающего вектор скоростей изменения состояний изучаемого объекта в пространстве R^n. При этом значение отдельной характеристики объекта (j-й компоненты вектора состояния) для любого момента времени $t \in \langle T_-, T_+ \rangle$ определяется по формуле

$$x_j(t) = \int_{T_-}^{t} \dot{x}_j(\tau) d\tau. \tag{4.1.3}$$

[1] См., например, *Лопатников Л. И.* Экономико-математический словарь, 3-е изд. М., 1993.

С введением понятия ресурсного потока мы получаем возможность сформулировать модель, базирующуюся на представлении банка как системы (вектора) первичных ресурсных потоков

$$\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t),\dots,\dot{x}_j(t),\dots,\dot{x}_n(t)),\ t \in \langle T_-,\ T_+ \rangle. \tag{4.1.4}$$

Модель (4.1.4) является альтернативой модели (4.1.1), в основе которой лежит система (вектор) состояний. Основываясь на формулах (4.1.2) и (4.1.3), можно прийти к заключению, что оба способа формализованного представления банка при выполнении условий дифференцируемости функций $x_j(t)$ являются эквивалентными.

Понятие векторного ресурсного потока естественным образом может быть распространено и на производные (вторичные) ресурсные потоки:

$$\dot{y}(t) = (\dot{y}_1(t),\dots,\dot{y}_i(t),\dots,\dot{y}_m(t)),\ t \in \langle T_-,\ T_+ \rangle, \tag{4.1.5}$$

где $\dot{y}_i(t) = y_i'(t)$ описывает скорость изменения

$$y_i(t) = f_i(x(t)), \tag{4.1.6}$$

т. е. некоторой функции от первичных характеристик банка.

В частности, в указанном смысле можно говорить о потоках коэффициентов или обязательных нормативов.

Обе из приведенных выше моделей (как (4.1.1), так и (4.1.4)) дают представление о положении изучаемого объекта (банка) для каждого момента времени t в отдельности. Однако можно привести немало примеров того, когда возникает необходимость в переходе от такого «точечного» представления к «интегральному» описанию поведения j-й характеристики на некотором заданном промежутке $\langle t_-, t_+ \rangle \subseteq \langle T_-, T_+ \rangle$. Для этого могут быть введены понятия *среднего значения характеристики* (j-й компоненты вектора состояния) на интервале $\langle t_-, t_+ \rangle$:

$$\bar{x}_j(t_-, t_+) = \frac{1}{t_+ - t_-} \int_{t_-}^{t_+} x_j(t)\ dt, \tag{4.1.7}$$

которое измеряется в соответствующих ресурсных единицах, а также — *среднего потока*:

$$\bar{\dot{x}}_j(t_-, t_+) = \frac{x_j(t_+) - x_j(t_-)}{t_+ - t_-}, \tag{4.1.8}$$

измеряемого в ресурсных единицах на единицу времени.

Очевидно, что (4.1.8) определяет среднюю скорость изменения объема j-го ресурса на интервале $\langle t_-,t_+\rangle$.

Как нетрудно догадаться, модели динамики банковских ресурсов, основывающиеся на непрерывных представлениях временных интервалов, являются весьма проблематичными с точки зрения их практической реализации. Во-первых, они предъявляют достаточно высокие требования к массивам данных, требующимся для их тестирования и эксплуатации. Во-вторых, текущее равномерно и непрерывно «физическое» время не соответствует, как правило, внутренним ритмам «жизненного цикла» экономических субъектов. Классический пример несоответствия «физического» и «экономического» времени связан с учетом выходных и праздничных дней, в течение которых банки не проводят свои операции.

Для перехода от непрерывного времени к дискретному, более адекватно учитывающему условия деятельности финансово-экономических институтов, может быть использована так называемая *интертемпоральная модель Хикса*.[1] Согласно концепции, предложенной Дж. Хиксом, конечный отрезок времени $[t_-,t_+]$, на протяжении которого наблюдается функционирование исследуемой системы, разбивается на равные интервалы длиной δ:

$$[t_-,\ t_-+\delta),\ [t_-+\delta,\ t_-+2\delta),\ \ldots,\ [t_-+(k-1)\delta,\ t_-+k\delta),\ \ldots,\ [t_-+(K-1)\delta,\ t_+],$$

где $t_-+K\delta=t_+$. Заметим, что все интервалы, кроме последнего, являются открытыми справа.

Данное разбиение предполагает, что внутри самих интервалов $[t_-+(k-1)\delta,\ t_-+k\delta)$ все параметры $x_j(t)$, характеризующие состояние банка и условия его функционирования, остаются постоянными и изменяются лишь на границах временных промежутков. Его идея на принципиальном уровне представлена на рис. 4.1.1.

Концепция Хикса получила название «интертемпоральной» именно потому, что согласно ей все транзакции происходят *между рассматриваемыми временными интервалами*. Приняв ее, мы вместо непрерывного «физического» времени t, «пробегающего» все точки отрезка $[t_-,t_+]$, получаем дискретное «банковское время» τ, принимающее значения 0, 1, ..., k, ..., K.

Заметим, что допущение о разбиении исходного временного периода именно на равные интервалы не имеет принципиального значения. Гораздо более существенным представляется требование о постоян-

[1] См. *Хикс Дж.* Стоимость и капитал. М., 1993.

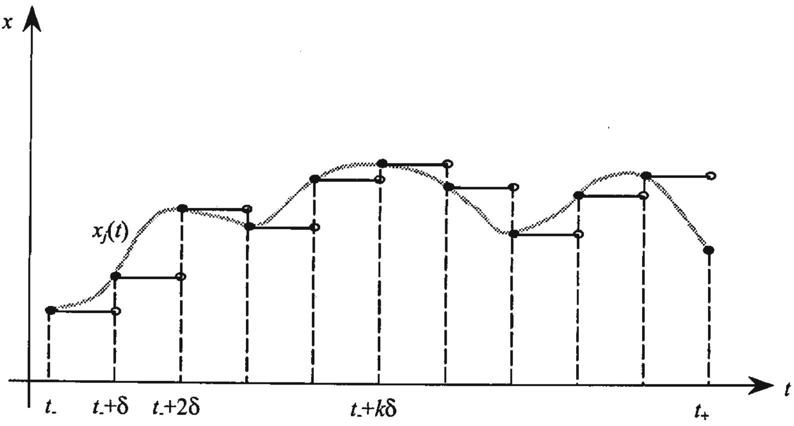

Рис. 4.1.1. Переход от непрерывного к дискретному времени в интертемпоральной схеме Хикса

стве условий функционирования объекта внутри самих интервалов. В связи с этим описанная схема перехода от непрерывного к дискретному временному измерению может быть легко обобщена на тот случай, когда моменты «банковского» времени τ отделены друг от друга промежутками «физического» времени различной длины. Последнее позволяет учитывать уже упоминавшийся выше фактор выходных и праздничных дней.

При введении дискретного времени происходит фиксация относительно его моментов векторов состояния (исходных характеристик)

$$x(\tau) = (x_1(\tau),\ldots,x_j(\tau),\ldots,x_n(\tau))$$

и векторов ресурсных потоков

$$\dot{x}(\tau) = (\dot{x}_1(\tau),\ldots,\dot{x}_j(\tau),\ldots,\dot{x}_n(\tau)).$$

Помимо случая перехода от непрерывного времени к дискретному для моделей динамики банковских ресурсов достаточно естественной представляется ситуация замены одного типа дискретного времени на другой. Так, например, за счет увеличения расстояния между отсчетами можно от «ежедневного» времени перейти к «еженедельному», «ежемесячному» и т. д.

Следующий шаг в процессе совершенствования рассматриваемого класса моделей связан с учетом в них факторов риска неопределенности. Напомним, что упоминания о них как о непременных спутниках деятельности практически любого финансового института уже неоднократно встречались на страницах данной книги.

Для описания неопределенности, присутствующей в траектории состояний, в которых может оказаться исследуемый объект, удобно воспользоваться терминологией *теории случайных процессов*. Под *случайным процессом* (*случайной функцией времени*)[1] понимается функция $\tilde{x}(t)$, которая может иметь ту или иную конкретную реализацию (траекторию) их некоторого фиксированного множества возможных траекторий $X = \{x(t, \theta) \mid \theta \in \Theta\}$.

Обобщая сказанное, получаем, что в условиях неопределенности моделью динамики состояния банка может служить векторный случайный процесс

$$\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t),\ldots,\tilde{x}_j(t),\ldots,\tilde{x}_n(t)),$$

каждая компонента $\tilde{x}_j(t)$ которого описывает стохастическую динамику j-й характеристики (ресурса) банка. По аналогии, фактор неопределенности, присутствующий в системе ресурсных потоков банка, может быть описан в формализованном виде при помощи векторного случайного процесса

$$\tilde{\dot{x}}(t) = (\tilde{\dot{x}}_1(t),\ldots,\tilde{\dot{x}}_j(t),\ldots,\tilde{\dot{x}}_n(t)),\ t \in \langle T_-, T_+ \rangle.$$

Одновременно заметим, что модели, основывающиеся на задании стохастических процессов в общем виде, имеют исключительно теоретическое значение и предназначены лишь для изложения на принципиальном уровне идей применения соответствующего математического аппарата. Исследования, направленные на содержательный анализ закономерностей работы банков, так или иначе должны опираться на предпосылки, конкретизирующие тип и параметры используемых в них случайных величин и функций. Ряд частных примеров, базирующихся на данном подходе, будет приведен в последующих параграфах.

4.2. Мультипликативные стохастические модели

Рассмотрение моделей управления привлеченными ресурсами в финансовой фирме логично начать с моделей, носящих описательный характер, т. е. отражающих тенденции в поведении величины того или

[1] Также в литературе используются термины «стохастический процесс» или «вероятностный процесс».

иного ресурса безотносительно к сознательным управляющим воздействиям на нее. Очевидно, изменения таких величин являются результатом влияния очень широкого круга различных по своей природе факторов, носящих как по силе, так и по природе своего проявления случайный характер, что и предопределяет использование для отражения процесса изменения объемов финансовых ресурсов у изучаемых объектов аппарата теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов.

4.2.1. Простейшая мультипликативная стохастическая модель динамики финансового ресурса

Исследование моделей поведения объемов ресурсов финансовой фирмы начнем с наиболее простой стохастической модели для отдельно взятого ресурса. В качестве наблюдаемого ресурса могут выступать, как привлеченные средства в целом, так и депозиты до востребования, срочные депозиты и т. д.

В основе исследуемой модели лежит предпосылка о возможности отслеживать объемы изучаемого ресурса через дискретные равноотстоящие промежутки времени t. Обозначим через x_t объем ресурса в момент времени t, соответственно, x_0 — объем в начальный момент времени (предполагается, что $x_0 > 0$). Положим, что переход объема ресурса (в дальнейшем, для краткости изложения, в выражении «объем ресурса» слово «объем» в тех местах, где это позволяет контекст, будет опускаться), определяемого действительным числом $x_{i-1} > 0$ в момент времени $t = i-1$, к ресурсу величиной $x_i > 0$, соответствующему моменту времени $t = i$, описывается соотношением

$$x_i = \alpha_i \cdot x_{i-1}, \qquad (4.2.1)$$

где $\alpha_i > 0$ — положительный *коэффициент элементарного перехода* от x_{i-1} к x_i, $i = 1,\dots,n,\dots$. Из соотношения (4.2.1) следует формула

$$x_n = x_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} \alpha_i\,, \qquad (4.2.2)$$

где $x_0, x_n, \alpha_i \in R^1$, $x_0 > 0$, $x_n > 0$, $\alpha_i > 0$, $i = 1:n$. Эта формула может быть интерпретирована как *мультипликативная модель динамики ресурса* на дискретном отрезке времени $[0, n]$. В частном случае, когда все коэффициенты элементарных переходов одинаковы ($\alpha_i = \alpha > 0$, $i = 1,\dots,n$), формула (4.2.2) принимает вид соотношения

$$x_n = x_0 \cdot \alpha^n = x_0 \cdot \exp(n \ln \alpha), \qquad (4.2.3)$$

указывающего на экспоненциальную зависимость величины ресурса от времени. При этом $x_n \to +\infty$, если $\alpha > 1$, и $x_n \to 0$ при $\alpha < 1$.

Если наблюдаемые значения $\alpha_1,...,\alpha_n$ коэффициентов элементарных переходов интерпретировать как значения соответствующих случайных величин $\tilde{\alpha}_1,...,\tilde{\alpha}_n$, то формула (4.2.2) дает следующую *стохастическую мультипликативную модель динамики ресурса* на дискретном отрезке времени $[0,n]$:

$$\tilde{x}_n = x_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}_i. \qquad (4.2.4)$$

Здесь $\tilde{x}_n$ — случайное значение величины ресурса в момент времени $t = n$.

Предположим, что все случайные коэффициенты элементарных переходов независимы, и каждый из этих коэффициентов имеет логарифмически нормальное распределение. Последнее будем обозначать $\tilde{\alpha}_i \in Ln(\mu_i, \sigma_i^2)$, где μ_i, σ_i^2 — параметры логарифмически нормально распределенной случайной величины $\tilde{\alpha}_i$. Иными словами, предполагается, что натуральный логарифм $\ln\tilde{\alpha}_i$ случайной величины $\tilde{\alpha}_i$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $M\ln\tilde{\alpha}_i = \mu_i$ и с дисперсией $D\ln\tilde{\alpha}_i = \sigma_i^2$ ($\ln\tilde{\alpha}_i \in N(\mu_i, \sigma_i^2)$). Знание плотности распределения

$$f(\alpha;\tilde{\alpha}_i) = \frac{1}{\alpha\sigma_i\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln\alpha - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right], \ \alpha > 0, \qquad (4.2.5)$$

случайной величины $\tilde{\alpha}_i$ позволяет найти математическое ожидание

$$m_i = M\tilde{\alpha}_i = \int_0^{+\infty} \alpha \ f(\alpha;\tilde{\alpha}_i) \ d\alpha = \exp\left(\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}\right), \qquad (4.2.6)$$

второй начальный момент

$$M\tilde{\alpha}_i^{\,2} = \int_0^{+\infty} \alpha^2 \ f(\alpha;\tilde{\alpha}_i) \ d\alpha = \exp(\mu_i + 2\sigma_i^2) \qquad (4.2.7)$$

и дисперсию

$$s_i^2 = D\tilde{\alpha}_i^{\,2} = M\tilde{\alpha}_i^{\,2} - m_i^2 = \exp(2\mu_i + 2\sigma_i^2) - \exp(2\mu_i + \sigma_i^2) \qquad (4.2.8)$$

случайного коэффициента элементарного перехода.

Найдем теперь распределение случайного коэффициента

$$\tilde{\alpha}_{1,n} = \prod_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}_i \tag{4.2.9}$$

перехода от начальной величины ресурса x_0 в момент времени $t = 0$ к случайной величине $\tilde{x}_n$ этого ресурса в момент времени $t = n$. Очевидно, что случайный коэффициент $\tilde{\alpha}_{1,n}$ имеет логарифмически нормальное распределение ($\tilde{\alpha}_{1,n} \in Ln(\mu, \sigma^2)$) с параметрами

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i, \tag{4.2.10}$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2. \tag{4.2.11}$$

Отсюда получаем математическое ожидание

$$m_{1,n} = M\tilde{\alpha}_{1,n} = \exp\left[\sum_{i=1}^{n} \mu_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right], \tag{4.2.12}$$

второй начальный момент

$$M\tilde{\alpha}_{1,n}{}^2 = \exp\left[2\sum_{i=1}^{n} \mu_i + 2\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right] \tag{4.2.13}$$

и дисперсию

$$s_{1,n}^2 = \exp\left[2\sum_{i=1}^{n} \mu_i + 2\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right] - \exp\left[2\sum_{i=1}^{n} \mu_i + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right] \tag{4.2.14}$$

случайного коэффициента $\tilde{\alpha}_{1,n}$ перехода от начальной величины ресурса x_0 к случайной величине $\tilde{x}_n$ в момент времени $t = n$.

Поскольку случайная величина $\tilde{x}_n$ связана с начальной величиной ресурса формулой

$$\tilde{x}_n = x_0 \cdot \tilde{\alpha}_{1,n}, \tag{4.2.15}$$

постольку в качестве прогноза $\bar{x}_n$ величины ресурса в момент времени $t = n$, делаемого в момент времени $t = 0$, можно использовать математическое ожидание

$$\bar{x}_n = M\tilde{x}_n = x_0 \cdot M\tilde{\alpha}_{1,n} = x_0 \cdot m_{1,n} \tag{4.2.16}$$

случайной величины $\tilde{x}_n$. Точность такого прогноза естественно оценить при помощи стандартного отклонения

$$s_n = \sqrt{D\tilde{x}_n} = x_0 \cdot \sqrt{D\tilde{\alpha}_{1,n}} = x_0 \cdot s_{1,n}, \qquad (4.2.17)$$

которое можно использовать при построении доверительного интервала

$$[\bar{x}_n - \gamma \cdot s_n,\ \bar{x}_n + \gamma \cdot s_n] \qquad (4.2.18)$$

для возможных значений прогнозируемой величины ресурса в момент времени $t = n$. Коэффициент $\gamma > 0$ выбирается с тем расчетом, чтобы обеспечить заданную вероятность попадания значений случайной величины ресурса $\tilde{x}_n$ в интервал (4.2.18).

Если все независимые случайные величины $\tilde{\alpha}_i$, $i = 1,..., n$, имеют одно и то же логарифмически нормальное распределение с параметрами μ, σ^2 $(\tilde{\alpha}_i \in Ln(\mu, \sigma^2))$, то из формул (4.2.14)–(4.2.17) получаются простые явные выражения для прогнозного значения

$$\bar{x}_n = x_0 \cdot \exp\left(n\mu + \frac{n\sigma^2}{2}\right) \qquad (4.2.19)$$

величины ресурса на момент времени $t = n$ и для меры точности (стандартного отклонения)

$$s_n = x_0 \cdot \left[\exp(2n\mu + 2n\sigma^2) - \exp(2n\mu + n\sigma^2)\right]^{1/2} \qquad (4.2.20)$$

этого прогноза.

Для указанного случая простой стохастической мультипликативной модели динамики ресурса, когда все коэффициенты элементарных переходов независимы и имеют одно и то же логарифмически нормальное распределение, можно предложить следующую схему оценивания параметров μ, σ^2.

Пусть исследователь наблюдает ряд последовательных значений $x_0, x_1, ..., x_k$ величины ресурса. Полагая, что все эти значения положительны, вычисляем ряд значений $\alpha_1, ..., \alpha_n$ коэффициента элементарного перехода:

$$\alpha_i = \frac{x_i}{x_{i-1}}, \ i = 1:k. \qquad (4.2.21)$$

Согласно нашей модели, ряд значений $\ln\alpha_i$, $i = 1:k$, можно рассматривать как простую случайную выборку объема k из генеральной совокупности, описываемой нормальным распределением с математическим ожиданием μ и с дисперсией σ^2. Поэтому состоятельной, несмещенной и эффективной оценкой для параметра μ служит выборочное математическое ожидание

$$\bar{\mu} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \ln \alpha_i, \tag{4.2.22}$$

а состоятельной и несмещенной оценкой для параметра σ^2 — исправленная выборочная дисперсия

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k} [\ln \alpha_i - \bar{\mu}]^2. \tag{4.2.23}$$

Теперь, подставив в формулы (4.2.19), (4.2.20) оценки $\bar{\mu}$, $\bar{\sigma}^2$ параметров μ, σ^2 соответственно, получаем, согласно методу моментов, искомые эмпирические формулы для прогнозной величины $\breve{x}_n$ ресурса на момент времени $t = n$ и для точности (стандартного отклонения) $\breve{s}_n$ этого прогноза:

$$\breve{x}_n = x_0 \cdot \exp\left[n\left(\bar{\mu} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)\right], \tag{4.2.24}$$

$$\breve{s}_n = x_0 \cdot \left\{\exp\left[2n(\bar{\mu} + \bar{\sigma}^2)\right] - \exp\left[n(2\bar{\mu} + \bar{\sigma}^2)\right]\right\}^{1/2}. \tag{4.2.25}$$

В качестве положительной стороны построенной выше стохастической мультипликативной модели динамики ресурса следует отметить возможность ее применения как к различным видам финансовых ресурсов, так и к различным по масштабу временным интервалам. В то же время, поскольку в настоящей модели осуществляется только «пассивное» отслеживание изменений под воздействием текущих тенденций и условий, то значения прогнозных величин $\breve{x}_n$ и $\breve{s}_n$ будут справедливы при неизменности этих условий, т. е. в течение некоторого ограниченного периода. К спорным сторонам модели, безусловно, следует отнести требования строгой положительности объемов ресурса ($x_i > 0$) на каждом шаге. Однако для большинства реальных ситуаций выполнение этого ограничения тем или иным образом может быть обеспечено.

Типичная иллюстрация результатов практического применения мультипликативной стохастической модели приведена на рис. 4.2.1.

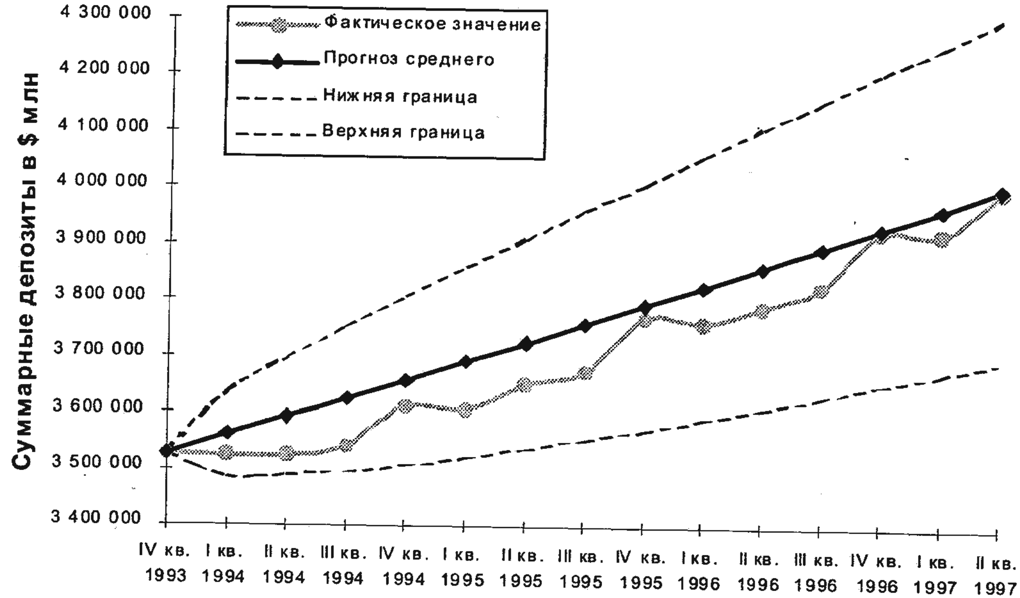

Рис. 4.2.1. Суммарные депозиты в банках-участниках FDIC: прогноз, факт и границы доверительного интервала

На нем изображены графики фактических и прогнозных значений ($\breve{x}_n$), построенные на основе данных по объемам суммарных депозитов в банках-участниках *Федеральной корпорации страхования депозитов* (FDIC). Также приведены графики, иллюстрирующие верхнюю и нижнюю оценки возможных отклонений реальных данных от прогноза. Последние вычисляются как $\breve{x}_n \pm \breve{s}_n$.

Серьезная проблема, возникающая в ходе практической реализации вышеизложенной методики прогнозирования динамики финансовых ресурсов, связана с тем, что интервальные оценки для возможных отклонений фактических величин от прогнозных получаются очень широкими. Более того, величина $\breve{s}_n$, определяющая данные оценки, как правило, очень быстро возрастает с увеличением номера каждого последующего периода. Все это, разумеется, в значительной мере снижает ценность получаемых результатов.

Общий вид зависимости оценки стандартного отклонения $\breve{s}_n$ от n приводится на рис. 4.2.2. Как можно заметить из рис. 4.2.2, в графике функции $\breve{s}_n(n)$ присутствует некоторая точка перегиба n^*, определяющая номер периода, начиная с которого скорость «расхождения» границ доверительного интервала качественно возрастает. Последний факт может быть использован для определения того количества периодов, на которое мы в рамках мультипликативной модели можем получить относительно осмысленную оценку границ отклонений фактических значений от прогнозных.

Очевидно, что значение n^*, начиная с которого скорость расхождения границ доверительного интервала существенно возрастает, может быть определена из условия

$$(\breve{s}_n)'' = 0. \tag{4.2.26}$$

Из (4.2.26), в свою очередь, можно получить, что

$$n^* = \frac{\ln\left[(1-\gamma)(1+\sqrt{1+\gamma^2})+\gamma^2\right]}{\bar{\sigma}^2}, \tag{4.2.27}$$

где

$$\gamma = \frac{2\bar{\mu}+\bar{\sigma}^2}{2(\bar{\mu}+\bar{\sigma}^2)}. \tag{4.2.28}$$

Гипотеза о логарифмически нормальном распределении коэффициентов элементарного перехода обеспечивает удобство и простоту про-

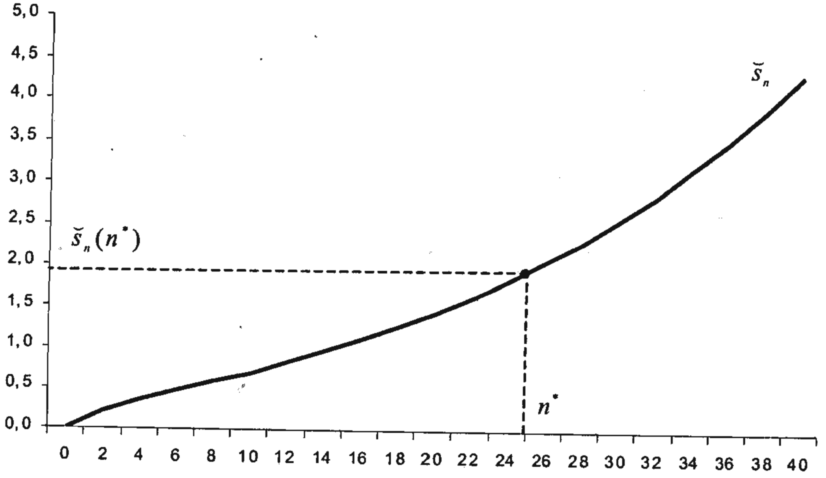

Рис. 4.2.2. Пример графика для $\breve{s}_n$

водимых над ними мультипликативных преобразований, что, однако, не распространяется на операции аддитивного характера. Эта проблема представляется существенной прежде всего потому, что практически все конкретные финансовые ресурсы связаны теми или иными аддитивными отношениями, так, например, сумма всех депозитов складывается из сумм трансакционных, сберегательных и т. д. депозитов. Соответственно, сделав допущения о логарифмически нормальном распределении коэффициентов перехода для отдельных видов депозитов, мы автоматически определяем закон распределения для аналогичных коэффициентов суммарных депозитов, который не будет логарифмически нормальным. Наиболее рациональным представляется следующий подход к разрешению данного противоречия. Учитывая то, что сумма независимых случайных величин распределена по нормальному закону, на практике можно считать, что распределение коэффициентов элементарного перехода для суммарного финансового ресурса может быть аппроксимировано логарифмически нормальным, особенно при близости значений их параметров.

На рис. 4.2.3 приводятся графики плотностей распределения двух логарифмически нормальных случайных величин и их суммы, что в терминах рассматриваемой модели может быть интерпретировано как сложение двух финансовых ресурсов с единичным начальным объемом x_0. Вид плотности распределения суммарной случайной величи-

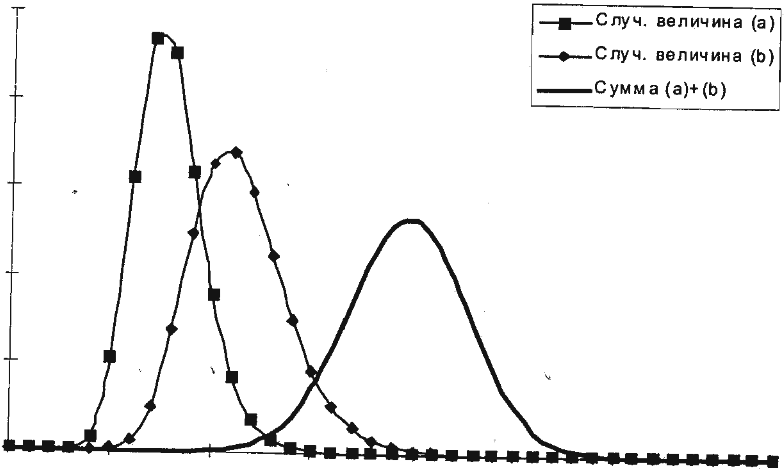

Рис. 4.2.3. Вид плотности распределения для суммы логарифмически нормально распределенных случайных величин

ны на рис. 4.2.3 наглядно подтверждает допустимость предположения о ее логарифмически нормальном характере.

4.2.2. Мониторинг стохастической динамики финансового ресурса

Как уже отмечалось выше, предположение о том, что коэффициенты элементарного перехода $\tilde{\alpha}_i$ являются случайными величинами, имеющими одно и то же логарифмически нормальное распределение с параметрами μ, σ^2 $(\tilde{\alpha}_i \in Ln(\mu,\sigma^2))$, предопределяет справедливость прогнозов, получаемых на основе мультипликативной стохастической модели в течение ограниченного временного периода, характеризующегося неизменностью условий. Отсюда вытекает задача разработки методов оперативного и эффективного определения момента изменения факторов, влияющих на динамику ресурса (момента изменения значений μ, σ^2). Она может быть решена за счет *мониторинга* (*постоянного отслеживания*) значений математического ожидания $m_i = M\tilde{\alpha}(i)$ и дисперсии $s_i^2 = D\tilde{\alpha}(i)$ случайных коэффициентов элементарного перехода $\tilde{\alpha}(i)$, $i = 1,..., n,...$.

Значение m_i определяет ожидаемое изменение ресурса при переходе от момента времени $t = i-1$ к следующему моменту времени $t = i$: если $m_i < 1$ $(m_i > 1)$, то можно ожидать уменьшения (увеличения) ресурса, а если $m_i = 1$, то существенных изменений величины ресурса не ожидается. Дисперсия же s_i^2 определяет степень неопределенности ожидаемой величины ресурса и может служить в этом смысле оценкой риска финансово-экономических операций, ориентирующихся на ожидаемую величину ресурса.

Поскольку математическое ожидание

$$m = M\tilde{\alpha} = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \tag{4.2.29}$$

и дисперсия

$$s^2 = D\tilde{\alpha} = \exp\left(2\mu + 2\sigma^2\right) - \exp\left(2\mu + \sigma^2\right) \tag{4.2.30}$$

случайного коэффициента элементарного перехода $\tilde{\alpha} \in Ln(\mu, \sigma^2)$ взаимно однозначно связаны с параметрами

$$\mu = M \ln\tilde{\alpha} = 2\ln m - \ln\sqrt{m^2 + s^2}, \tag{4.2.31}$$

$$\sigma^2 = D\ln\tilde{\alpha} = \ln\left(m^2 + s^2\right) - 2\ln m \tag{4.2.32}$$

соответствующей нормальной случайной величины $\ln\tilde{\alpha} \in N(\mu, \sigma^2)$, постольку мониторинг параметров m_i, s_i^2 может быть редуцирован к отслеживанию математического ожидания μ_i и дисперсии σ_i^2 нормальных случайных величин, для которых разработан обширный арсенал средств статистического исследования.

Учитывая вышесказанное, для мониторинга параметров m_i, s_i^2 стохастической динамики ресурса можно предложить следующую схему. Пусть исследователь наблюдает ряд последовательных значений $x_0, x_1, \dots, x_n$ величины ресурса. Полагая, что все эти значения положительны, вычисляем ряд значений $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ коэффициентов элементарного перехода: $\alpha_i = x_i / x_{i-1}$, $i = 1:n$. Согласно мультипликативной стохастической модели динамики ресурса ряд значений $\ln\alpha_i$, $i = 1:n$ можно интерпретировать как ряд однократных реализаций независимых нормальных случайных величин $\ln\tilde{\alpha}_i \in N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1:n$. Для мониторинга математического ожидания (тренда) этого ряда можно использовать *скользящее среднее* k-го порядка $\bar{\mu}(i;k)$, вычисляемое по формуле

$$\bar{\mu}(i;k) = \frac{1}{k} \sum_{j=i-k+1}^{i} \ln\alpha_j \tag{4.2.33}$$

для моментов времени $i = k, k+1, \dots, n$. Аналогично вычисляется *скользящая дисперсия* k-го порядка

$$\bar{\sigma}^2(i;k) = \frac{1}{k}\sum_{j=i-k+1}^{i}\left[\ln\alpha_j - \bar{\mu}(i;k)\right]^2, \tag{4.2.34}$$

где $i = k, k+1, ..., n$. Подставляя (4.2.33), (4.2.34) в формулы (4.2.29), (4.2.30), получаем следующие выражения для искомых скользящих оценок k-го порядка математического ожидания m_i и дисперсии s_i^2 случайного коэффициента i-го элементарного перехода $\tilde{\alpha}(i) \in Ln(\mu_i, \sigma_i^2)$:

$$\bar{m}(i;k) = \exp\left[\bar{\mu}((i;k) + \frac{\bar{\sigma}^2(i;k)}{2}\right], \tag{4.2.35}$$

$$\bar{s}^2(i;k) = \exp\left[2\bar{\mu}(i;k) + 2\bar{\sigma}^2(i;k)\right] - \bar{m}^2(i;k), \tag{4.2.36}$$

где $i = k, k+1, ..., n$. Заметим, что если положить, не умаляя общности, что в момент времени $t = 0$ мы имеем единичный ресурс $(x_0 = 1)$, то величина $\bar{m}(i,k)$ будет иметь смысл величины ресурса на момент времени $t = i$.

Одной из важнейших целей мониторинга стохастической динамики ресурса является своевременное обнаружение изменения параметров m_i, s_i^2 (параметров μ_i, σ_i^2) этой динамики. В простейшем случае такое изменение можно представить как переход от ряда значений $\ln\alpha_1, ..., \ln\alpha_{n_1}$, представляющего собой n_1-кратную реализацию нормальной случайной величины $\ln\tilde{\alpha}_1 \in N(\mu_1, \sigma_1^2)$, к ряду значений $\ln\alpha_{n_1+1}, ..., \ln\alpha_{n_1+n_2}$, представляющему собой n_2-кратную реализацию нормальной случайной величины $\ln\tilde{\alpha}_2 \in N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Если предположить равенство дисперсий указанных двух рядов наблюдений $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$, то проверку статистической гипотезы H_0 о равенстве математических ожиданий $(H_0 : \mu_1 = \mu_2)$ можно провести при помощи критерия Стьюдента. Для этого вычисляется дробь Стьюдента

$$T(n_1, n_2) = \frac{\bar{\mu}(n_1; n_1) - \bar{\mu}(n_1 + n_2; n_2)}{\bar{\sigma}(n_1, n_2)\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \tag{4.2.37}$$

где

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{(n_1 - 1)\ \bar{\sigma}^2(n_1; n_2) + (n_2 - 1)\ \bar{\sigma}^2(n_1 + n_2; n_2)}{n_1 + n_2 - 2}. \tag{4.2.38}$$

Далее, зафиксировав уровень доверия $\beta \in (0,1)$ к исходной гипотезе $H_0: \mu_1 = \mu_2$ и вычислив соответствующее критическое значение $T(\beta;\nu)$ для критерия Стьюдента с $\nu = n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы, мы принимаем исходную гипотезу H_0 при $|T(n_1,n_2)| \le T(\beta;\nu)$ и отвергаем эту гипотезу в пользу альтернативы $H: \mu_1 > \mu_2$ (или в пользу альтернативы $H': \mu_1 < \mu_2$ — в зависимости от знака величины $T(n_1,n_2)$) при $|T(n_1,n_2)| > T(\beta;\nu)$.

Указанную процедуру выявления статистически значимых изменений параметра μ можно включить в общую схему мониторинга ресурса следующим образом. Для моментов времени $i = k,\ k+1, \ldots,\ n$ вычисляется «скользящая» дробь Стьюдента

$$T(i;k) = \frac{\bar{\mu}(k;k) - \bar{\mu}(i;k)}{\bar{\sigma}((k,i)\sqrt{\dfrac{2}{k}}}, \tag{4.2.39}$$

где

$$\bar{\sigma}^2(k,i) = \frac{\bar{\sigma}^2(k;k) + \bar{\sigma}^2(i;k)}{2}, \tag{4.2.40}$$

и для значений $i = 2k,\ 2k+1,\ \ldots,\ n$ проверяется гипотеза H_0 при помощи соответствующего критерия Стьюдента с $\nu = 2(k-1)$ степенями свободы.

С достаточной для практики точностью процедуру проверки статистической гипотезы $H_0: \mu_1 = \mu_2$ при помощи критерия Стьюдента можно распространить и на случай неравных дисперсий σ_1^2, σ_2^2. Действительно, обширные экспериментальные исследования показывают, что при неравных дисперсиях следует использовать критерий Стьюдента с числом степеней свободы ν, лежащим между числами $k - 1$ и $2(k - 1)$.

Аналогично проводится мониторинг дисперсии σ_i^2, совмещенный с периодической проверкой гипотезы о равенстве дисперсий на различных непересекающихся отрезках времени. Для этого вычисляется «скользящее» отношение дисперсий

$$F(i,k) = \frac{\bar{\sigma}^2(i;k)}{\bar{\sigma}^2(k;k)} \tag{4.2.41}$$

для моментов времени $i = k,\ k+1, \ldots,\ n$. Зафиксируем уровень доверия $\beta \in (0,1)$ к гипотезе $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, где σ_1^2 есть постоянная дисперсия случайных величин $\ln\tilde{\alpha}_1,\ldots,\ \ln\tilde{\alpha}_k$, а σ_2^2 – постоянная дисперсия случайных величин $\ln\tilde{\alpha}_{i-k+1},\ldots,\ \ln\tilde{\alpha}_i$, $i=2k,\ 2k+1,\ldots,\ n$. Теперь гипотеза H_0 может быть проверена путем сравнения вычисляемой величины $F(i,k)$ с критическим значением $F(\beta;\nu_1,\nu_2)$ F-критерия со степенями свободы $\nu_1=\nu_2=k-1$.

4.3. Рекуррентные модели динамики финансовых ресурсов

Основной целью настоящего параграфа является развитие модели финансовой фирмы в направлении учета фактора времени и исследование тех изменений, которые вносят в стратегию привлечения средств связующие ограничения на ресурсы системы для смежных этапов ее функционирования. При переходе к *рекуррентной динамической модели* сразу следует отметить, что прибыль, получаемая фирмой на отдельных этапах, не может быть единственным оценочным показателем ее деятельности – помимо нее необходимо учитывать также и такие характеристики, как величина собственных средств (капитала) фирмы, темпы его изменения и т. п.

Введем обозначения:

t – индекс периода ($t\in 1:T$);

q_t – объем собственных средств фирмы в t-м периоде;

x_t – объем привлеченных средств в t-м периоде;

v – усредненная норма затрат на единицу привлеченных средств;

u – усредненная норма дохода на единицу используемых средств;[1]

θ – доля собственных средств, превращаемых в активы, т. е. используемых для получения дохода.

Тогда

$v\cdot x_t$ – затраты на привлечение средств в t-м периоде;

$u\cdot(\theta\cdot q_{t-1}+x_t)$ – доход t-го периода,

и величина собственных средств определяется рекуррентным соотношением

$$q_{t+1}=q_t+u\cdot(\theta\cdot q_t+x_{t+1})-v\cdot x_t. \qquad (4.3.1)$$

[1] Дополнительно подчеркнем, что величины, обозначенные как u и v, интерпретируются как некоторые усредненные нормы и с этой точки зрения отличаются от ставок процентных выплат r_L и r_D, использовавшихся в моделях, рассматриваемых в главе 3.

Описанная модель основана на следующих существенных допущениях, значительно упрощающих реальную ситуацию:

- предполагается неизменность норм u, v, θ для всех периодов t, что обусловливает возможность непосредственного использования данной модели для относительно непродолжительных временных периодов;
- предполагается, что изменения объемов привлеченных и применяемых средств, а также расходы и получение дохода происходят дискретно.

Однако, несмотря на эти упрощения, данная модель может быть эффективно использована для анализа принципиальных зависимостей динамики показателей состояния финансовой фирмы от норм затрат на привлечение средств и дохода от активов.

Соотношение (4.3.1) с математической точки зрения является линейным разностным уравнением, для решения которого может быть, в частности, применено z-преобразование. Аппарат интегральных и дискретных преобразований основан на связывании однозначной функции комплексной переменной (*изображения*) с соответствующей функцией действительной переменной (*оригиналом*). Для многих практически значимых ситуаций это позволяет операции над оригиналами заменить более простыми операциями над изображениями, что широко используется при решении дифференциальных и интегральных уравнений (интегральные преобразования) и в теории импульсных систем (дискретное преобразование Лапласа, z-преобразование).

Напомним, что z-преобразованием функции дискретного аргумента $f(k) = f_k$, $k = 0, 1, \ldots$ называется функция

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k},$$

определенная на некоторой области комплексной плоскости.

Приведем выражение (4.3.1) к виду

$$q_{t+1} = (1 + u \cdot \theta) \cdot q_t + u \cdot x_{t+1} - v \cdot x_t \qquad (4.3.2)$$

или

$$q_{t+1} - \rho \cdot q_t = u \cdot x_{t+1} - v \cdot x_t, \qquad (4.3.3)$$

где

$$\rho = 1 + u \cdot \theta. \qquad (4.3.4)$$

Величину ρ можно интерпретировать как *норму накопления собственных средств банка (финансовой фирмы) за один период.*

4.3.1. Многоэтапная динамика на базе мультипликативной стохастической модели

Для начала рассмотрим относительно простую ситуацию. Будем считать, что объемы привлеченных средств по периодам являются некоторым внешним фактором, динамика которого может быть описана с помощью мультипликативной стохастической модели (см. п. 4.2.1).

Тогда объем привлеченных средств в период $t + 1$ можно представить как

$$x_{t+1} = x_0 \cdot \prod_{i=1}^{t} \tilde{\alpha}_i, \tag{4.3.5}$$

где коэффициенты приращения $\tilde{\alpha}_i$ — случайные величины, распределенные по логарифмически нормальному закону с параметрами μ_i и σ_i, причем предполагается, что μ_i зависят от v $(\tilde{\alpha}_i \in Ln(\mu_i(v),\sigma_i))$. Тогда уравнение (4.3.3) приобретает вид

$$q_{t+1} - \rho \cdot q_t = x_0 \cdot (u \cdot \tilde{\alpha}_{t+1} - v) \cdot \prod_{i=1}^{t} \tilde{\alpha}_i. \tag{4.3.6}$$

Решение данного уравнения можно найти, используя метод Дюамеля для z-преобразования. С этой целью рассмотрим вспомогательное уравнение

$$g_{t+1} - \rho \cdot g_t = \delta_t, \quad g_0 = 0, \tag{4.3.7}$$

где

$$\delta_t = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t = 0; \\ 0, & \text{если} \quad t > 0. \end{cases} \tag{4.3.8}$$

Пусть $g_t \to G(z)$ и $\delta_t \to 1$ — z-преобразования функций g_t и δ_t. Тогда $g_{t+1} \to z \cdot G(z)$, и изображающее уравнение для (4.3.7) примет вид

$$z \cdot G(z) - \rho \cdot G(z) = 1. \tag{4.3.9}$$

Следовательно,

$$G(z) = \frac{1}{z-\rho} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z-\rho}. \tag{4.3.10}$$

Оригиналом для

$$\frac{z}{z-\rho}$$

служит последовательность ρ^t. Стало быть, по известным свойствам z-преобразования

$$g_t = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t=0; \\ \rho^{t-1}, & \text{если} \quad t>0. \end{cases} \tag{4.3.11}$$

Чтобы привести уравнение (4.3.6) к нулевому начальному условию, введем новую переменную $h_t = q_t - q_0$. Если положить

$$\tilde{A}_t = x_0 \cdot (u \cdot \tilde{\alpha}_{t+1} - v) \cdot \prod_{i=1}^{t} \tilde{\alpha}_i, \tag{4.3.12}$$

то уравнение для h_t примет вид

$$h_{t+1} - \rho \cdot h_t = \tilde{A}_t + (\rho - 1) \cdot q_0. \tag{4.3.13}$$

Обозначим $H(z)$ — z-преобразование h_t и $F(z)$ — z-преобразование $\tilde{A}_t + (\rho-1) \cdot q_0$. Тогда изображающее уравнение для уравнения (4.3.13) примет вид

$$z \cdot H(z) - \rho \cdot H(z) = F(z). \tag{4.3.14}$$

Рассматривая совместно уравнения (4.3.9) и (4.3.14), получим

$$H(z) = G(z) \cdot F(z). \tag{4.3.15}$$

Это означает, что последовательность h_t, являющаяся оригиналом для $H(z)$, может быть найдена как свертка оригиналов g_t (см. (4.3.10)) и $\tilde{A}_t + (\rho-1) \cdot q_0$, т. е.

$$h_t = \sum_{i=0}^{t} \left(\tilde{A}_i + (\rho - 1) \cdot q_0 \right) \cdot g_{t-i} = \sum_{i=0}^{t-1} \left(\tilde{A}_i + (\rho - 1) \cdot q_0 \right) \cdot \rho^{t-i-1}. \tag{4.3.16}$$

После элементарных преобразований выражение (4.3.16) принимает вид

$$h_t = q_0 \cdot (\rho^t - 1) + \sum_{i=0}^{t-1} \tilde{A}_i \cdot \rho^{t-i-1}. \tag{4.3.17}$$

Таким образом, найдено решение разностного уравнения (4.3.6)

$$q_t = q_0 \cdot \rho^t + x_0 \cdot (u \cdot \tilde{\alpha}_{t+1} - v) \cdot \sum_{i=0}^{t-1} \left[\left(\prod_{j=1}^{i} \tilde{\alpha}_j \right) \cdot \rho^{t-i-1} \right]. \qquad (4.3.18)$$

В том случае, когда коэффициенты элементарного перехода имеют одинаковое распределение для всех моментов t $(\tilde{\alpha}_t = \tilde{\alpha})$, решение (4.3.18) принимает вид

$$q_t = q_0 \cdot \rho^t + x_0 \cdot (u \cdot \tilde{\alpha}_{t+1} - v) \cdot \sum_{i=0}^{t-1} \left[\tilde{\alpha}^i \cdot \rho^{t-i-1} \right] =$$

$$= q_0 \cdot \rho^t + x_0 \cdot (u \cdot \tilde{\alpha}_{t+1} - v) \cdot \frac{\tilde{\alpha}^t - \rho^t}{\tilde{\alpha} - \rho}. \qquad (4.3.19)$$

Используя результаты, полученные для стохастических мультипликативных моделей, прогноз величины привлеченных средств на момент $t + 1$ может быть выражен как

$$\bar{x}_{t+1} = \bar{A}^t \cdot x_0, \; \bar{A} = \exp\left(\bar{\mu}_0 + \frac{\bar{\sigma}_0^2}{2} \right), \qquad (4.3.20)$$

где

x_0 — объем привлеченных средств на начальный момент времени $(t = 0)$;

$\bar{\mu}_0$, $\bar{\sigma}_0$ — оценки значений параметров μ, σ соответственно.

В силу предположения о взаимной независимости коэффициентов перехода α_t, заменив их в формуле (4.3.19) соответствующими оценками, получим выражение для прогнозного значения объема собственных средств на момент t

$$\bar{q}_t = q_0 \cdot \rho^t + x_0 \cdot \frac{u \cdot \bar{A} - v}{\bar{A} - \rho} \cdot (A^t - \rho^t), \qquad (4.3.21)$$

где значение $\bar{A}$ может быть получено из (4.3.20).

В частном случае, если $\rho = \bar{A}$ $(\rho \approx \bar{A})$, после раскрытия неопределенности $\dfrac{\bar{A}^t - \rho^t}{\bar{A} - \rho}$ выражение (4.3.13) имеет более компактную форму

$$\bar{q}_t = q_0 \cdot \bar{A}^t + x_0 \cdot (u \cdot \bar{A} - v) \cdot t \cdot \bar{A}^{t-1}. \qquad (4.3.22)$$

Формулы (4.3.13) и (4.3.12) имеют прозрачную экономическую интерпретацию — объем собственных средств финансовой фирмы на момент времени t зависит в рамках предложенной модели от двух составляющих:

- $q_0 \cdot \rho^t$ — величины начального капитала с учетом проводимой политики накопления;
- $x_0 \cdot \dfrac{u \cdot \bar{A} - v}{\bar{A} - \rho} \cdot (\bar{A}^t - \rho^t)$ — результатов деятельности по привлечению средств и получению доходов от их активного использования.

Графическая иллюстрация поведения последовательности $\bar{q}_t$ для различных значений v приводится на рис. 4.3.1 и рис. 4.3.2 (для наглядности изображение поверхности дано в двух ракурсах).

Остановимся более подробно на вопросах проверки работоспособности предлагаемой модели динамики собственного капитала. Очевидно, что компоненты соотношения (4.3.1), моделирующего поведение финансовой фирмы в весьма редуцированном виде, крайне затруднительно соотнести с теми или иными статьями баланса реаль-

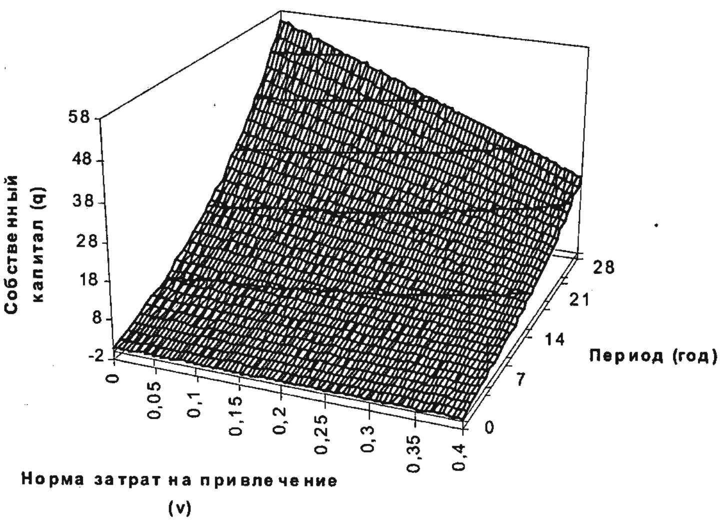

Рис. 4.3.1. Динамика объема собственного капитала при различных нормах затрат на привлечение средств (вид 1)

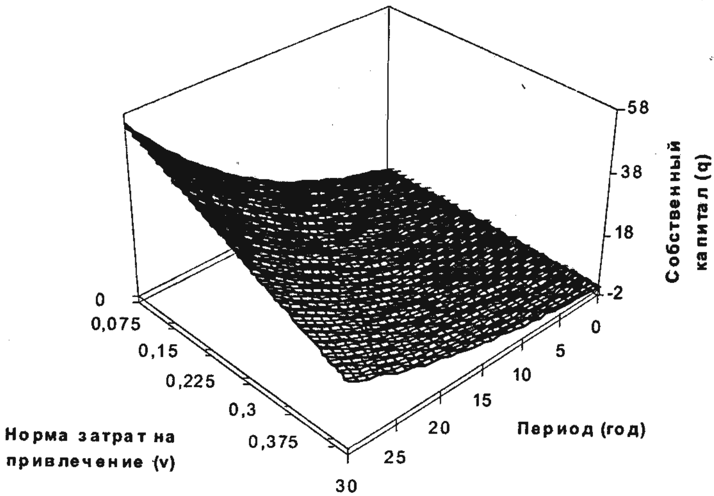

Рис. 4.3.2. Динамика объема собственного капитала при различных нормах затрат на привлечение средств (вид 2)

ного финансового объекта. Сделать это можно лишь с очень большими оговорками и ценой существенных потерь в точности получаемых результатов. Поэтому предлагаемые ниже примеры претендуют только на демонстрацию работоспособности рассматриваемых методов на принципиальном уровне.

В качестве статистической базы для контрольного примера представляется разумным взять ежегодную финансовую отчетность одного из банков США, а именно Банка Нью-Йорка (The Bank of New York), свободный доступ к которой можно получить на Web-сервере FDIC.

В табл. 4.3.1 содержатся данные по динамике собственного капитала, обязательств и объемов процентных доходов и расходов в Банке Нью-Йорка за период с 1992 по 1997 год. На их основе находятся первичные оценки значений нормы дохода от применения средств $\hat{\bar{u}}$, получаемые как усредненное отношение процентного дохода U_t ко всему капиталу $x_t + q_t$, и нормы затрат на их привлечение $\hat{\bar{v}}$, равные усредненному отношению процентного расхода V_t к объему обязательств предыдущего периода x_{t-1}. Учитывая то, что из рассмотрения опущены такие факторы, как непроцентные доходы и расходы, расходы на выплату налогов и т. п., для соотнесения объемов чистого про-

Таблица 4.3.1. Данные по динамике собственного капитала, обязательств, процентным доходам и расходам для Банка Нью-Йорка

Год	Обязательства, \$ млн, x_t	Собственный капитал, \$ млн, q_t	Годовой прирост собственного капитала, \$ млн, Δq_t	Процентный доход, \$ млн, U_t	Процентный расход, \$ млн, V_t	Чистый процентный доход, \$ млн U_t-V_t
1992	34 038	2 606	–	2 065	1 131	934
1993	33 207	2 881	3 053	1 808	836	972
1994	36 226	3 062	3 541	2 087	1 030	1057
1995	39 225	3 487	4 072	2 634	1 447	1186
1996	48 096	4 025	4 651	2 785	1 419	1366
1997	51 193	4 961	5 281	3 093	1 599	1494

Источник: html://www.fdic.gov

центного дохода $U_t - V_t$ с приростами собственного капитала Δq_t необходимо введение нормирующего коэффициента, значение которого определяется как отношение

$$\frac{\Delta q_t}{U_t - V_t}.$$

После умножения на него первичных оценок норм дохода и затрат $(\hat{\bar{u}}, \hat{\bar{v}})$ мы получаем их окончательные оценки $(\bar{u}, \bar{v})$. Оговоримся, что понятия первичности и окончательности оценок употребляются в контексте их использования для интерпретации модели (4.3.1). Применяя для нахождения оценки величины коэффициента элементарного перехода объема обязательств $\bar{A}$ формулу (4.3.20) и подставив вместо u и v их оценки $\bar{u}$ и $\bar{v}$ в формулу (4.3.21), можно найти прогнозные значения объемов собственного капитала $\bar{q}_t$ по годам рассматриваемого периода. Результаты данного расчета представлены в табл. 4.3.2 (значение параметра θ, влиянием которого при столь высоком уровне погрешности, заложенном в исходной информации, можно пренебречь, взято равным 0,05, соответственно, $\rho \approx 1{,}001$).

Таблица 4.3.2. Фактические и прогнозные значения объема собственного капитала для Банка Нью-Йорка

Год	Обязательства, \$ млн, x_t	Собственный капитал-факт, \$ млн, q_t	Собственный капитал-прогноз, \$ млн, $\bar{q}_t$	В том числе по составляющим		Отклонение прогноза от факта, %
				$q_0 \cdot \rho^t$	$x_0 \cdot \frac{\bar{u} \cdot \bar{A} - \bar{v}}{\bar{A} - \rho} \cdot (\bar{A}^t - \rho^t)$	
1992	34 038	2 606	–	–	–	–
1993	33 207	2 881	3 053	2 609	445	–6,0
1994	36 226	3 062	3 541	2 612	930	–15,7
1995	39 225	3 487	4 072	2 615	1 458	–16,8
1996	48 096	4 025	4 651	2 618	2 033	–15,6
1997	51 193	4 961	5 281	2 621	2 661	–6,5

Источник: расчет по данным html://www.fdic.gov

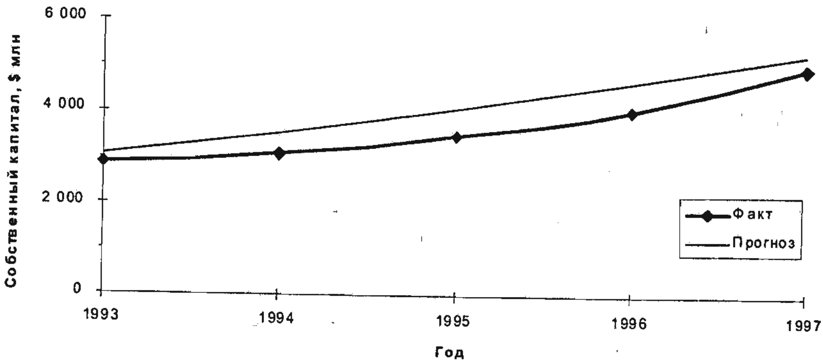

Рис. 4.3.3. Динамика фактических и прогнозных значений объема собственного капитала для Банка Нью-Йорка

Относительно высокий уровень отклонений между расчетными и действительными величинами, достигающий в отдельные годы (−16,8%), адекватен уровню ошибки, заложенному в используемых данных. По сериям, содержащимся в табл. 4.3.2, построены графики динамики фактического и прогнозного значений объема собственного капитала за период с 1993 по 1997 год, представленные на рис. 4.3.3.

Следующий пример аналогичен по структуре, но в нем в качестве объекта для исследования рассматривается не отдельный финансовый институт, а все банки-участники FDIC, что также демонстрирует и возможности применения рассматриваемых экономико-математических методов на разных уровнях агрегации. Суммарные данные по динамике собственного капитала, обязательств и объемов процентных доходов и расходов приведены в табл. 4.3.3.

Результаты расчета прогнозов объемов собственного капитала $\overline{q}_t$, полученные по описанной выше методике, помещены в табл. 4.3.4. Заслуживает внимания уменьшение отклонения прогнозных величин от фактических, что, в первую очередь, объясняется сглаживанием локальных колебаний и выбросов в рядах данных при их обобщении.

По аналогии с рис. 4.3.3 на рис. 4.3.4 приводятся графики динамики фактического и прогнозного значений за рассматриваемый период.

Таблица 4.3.3. Суммарные данные по динамике собственного капитала, обязательств, процентным доходам и расходам по банкам-участникам FDIC

Год	Обязательства, \$ млн, x_t	Собственный капитал, \$ млн, q_t	Годовой прирост собственного капитала, \$ млн, Δq_t	Процентный доход, \$ млн, U_t	Процентный расход, \$ млн, V_t	Чистый процентный доход, \$ млн, $U_t - V_t$
1985	2 561 554	169 117	–	248 220	157 323	90 898
1986	2 758 556	182 143	13 026	237 765	142 829	94 936
1987	2 819 298	180 651	−1 491	244 839	144 953	99 886
1988	2 934 250	196 546	15 894	272 277	165 028	107 249
1988	3 094 540	204 822	8 276	317 371	205 142	112 229
1989	3 170 873	218 616	13 794	320 476	204 952	115 524
1990	3 198 983	231 698	13 082	289 214	167 302	121 912

Источник: html://www.fdic.gov

Таблица 4.3.4. Фактические и прогнозные (по формуле (4.3.21)) значения объема собственного капитала по банкам-участникам FDIC

Год	Обязательства, \$ млн, x_t	Собственный капитал-факт, \$ млн, q_t	Собственный капитал-прогноз, \$ млн, $\overline{q}_t$	В том числе по составляющим		Отклонение прогноза от факта, %
				$q_0 \cdot \rho^t$	$x_0 \cdot \frac{\overline{u} \cdot \overline{A} - \overline{v}}{\overline{A} - \rho} \cdot (\overline{A}^t - \rho^t)$	
1985	2 561 554	169 117	–	–	–	–
1986	2 758 556	182 143	178 236	169 267	8 970	2,1
1987	2 819 298	180 651	187 705	169 417	18 288	–3,9
1988	2 934 250	196 546	197 536	169 568	27 969	–0,5
1989	3 094 540	204 822	207 744	169 718	38 026	–1,4
1990	3 170 873	218 616	218 342	169 869	48 473	0,1
1991	3 198 983	231 698	229 345	170 019	59 326	1,0

Источник: расчет по данным html://www.fdic.gov

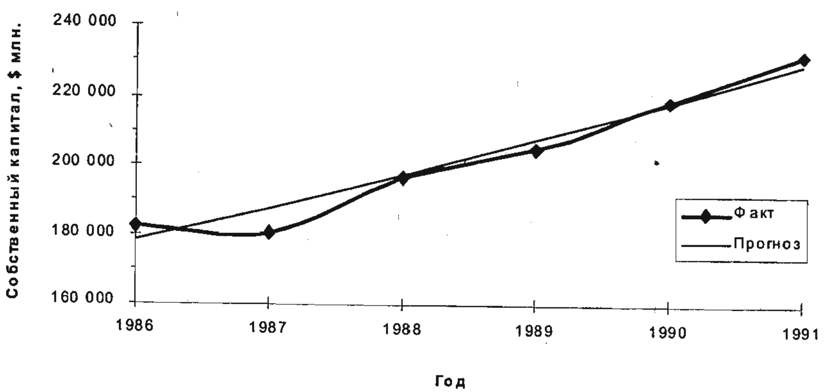

Рис. 4.3.4. Динамика фактических и прогнозных (по формуле (4.3.21)) значений объема собственного капитала для банков-участников FDIC

4.3.2. Рекуррентные динамические модели с учетом возможностей управления привлекаемыми средствами

Рассмотрим более сложную ситуацию, в которой присутствует зависимость между затратами на привлечение средств и их объемом, т. е., другими словами, существует возможность управления количеством привлекаемых средств x за счет изменения нормы затрат v.

Предположим, что зависимость между ними может быть описана с помощью функции вида

$$x = \varphi(v) = c \cdot (1 - (1 + \alpha \cdot v) \cdot \exp(-\alpha v). \tag{4.3.23}$$

Напомним, что вопросам построения подобных функциональных зависимостей был посвящен п. 3.4.3.

Подставив (4.3.23) в (4.3.1), получим

$$q_{t+1} = (1 + u \cdot \theta) \cdot q_t + (u - v) \cdot x, \tag{4.3.24}$$

что, учитывая (4.3.4) и обозначив

$$A = (u - v) \cdot x, \tag{4.3.25}$$

можно записать в виде соотношения

$$q_{t+1} - \rho \cdot q_t = A. \tag{4.3.26}$$

Зададим z-преобразование $q_t \to Q(z)$. Тогда, используя его свойство

$$f_{k+m} \to z^m (F(z) - \sum_{i=0}^{m-1} f_i \cdot z^{-i}), \tag{4.3.27}$$

получаем

$$q_{t+1} \to z \cdot (Q(z) - q_0). \tag{4.3.28}$$

Правая часть (4.3.26) может быть представлена как произведение $A \cdot \eta_t$, где

$$\eta_t = \begin{bmatrix} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0, \end{bmatrix} \tag{4.3.29}$$

есть функция, для которой существует стандартное (табличное) преобразование

$$\eta_t \to \frac{z}{z-1}, \tag{4.3.30}$$

и соответственно

$$A \cdot \eta_t \to \frac{A \cdot z}{z-1}. \qquad (4.3.31)$$

На основании (4.3.26), (4.3.28) и (4.3.31) можно получить соотношение

$$z \cdot (Q(z) - q_0) - \rho \cdot Q(z) = \frac{A \cdot z}{z-1} \qquad (4.3.32)$$

или

$$(z-\rho) \cdot Q(z) - z \cdot q_0 = \frac{A \cdot z}{z-1}. \qquad (4.3.33)$$

Проведем преобразования

$$(z-\rho) \cdot Q(z) = \frac{A \cdot z}{z-1} + z \cdot q_0 = z \cdot \frac{A + z \cdot q_0 - q_0}{z-1} \qquad (4.3.34)$$

и получим

$$Q(z) = z \cdot \frac{A + z \cdot q_0 - q_0}{(z-1) \cdot (z-\rho)} \qquad (4.3.35)$$

или

$$\frac{Q(z)}{z} = \frac{A - q_0 + z \cdot q_0}{(z-1) \cdot (z-\rho)}. \qquad (4.3.36)$$

Дробь

$$\frac{A - q_0 + z \cdot q_0}{(z-1) \cdot (z-\rho)}$$

можно разложить на сумму элементарных дробей вида

$$\frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-\rho},$$

где значения коэффициентов a и b находятся с помощью стандартных подстановок $z = 1$ и $z = \rho$ в выражение

$$A - q_0 + z \cdot q_0 = a \cdot (z-\rho) + b \cdot (z-1) \qquad (4.3.37)$$

и соответственно равны:

$$a=\frac{A}{1-\rho};\ b=\frac{-A+q_0-q_0\cdot\rho}{1-\rho}. \qquad (4.3.38)$$

Откуда имеем

$$\frac{Q(z)}{z}=\frac{a}{z-1}+\frac{b}{z-\rho}=\frac{A}{1-\rho}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{-A+q_0-q_0\cdot\rho}{1-\rho}\cdot\frac{1}{z-\rho} \qquad (4.3.39)$$

или

$$Q(z)=\frac{A}{1-\rho}\cdot\frac{z}{z-1}+\frac{-A+q_0-q_0\cdot\rho}{1-\rho}\cdot\frac{z}{z-\rho}. \qquad (4.3.40)$$

Используя обратные табличные преобразования

$$\frac{z}{z-1}\Rightarrow 1 \text{ и } \frac{z}{z-\rho}\Rightarrow\rho^t,$$

мы можем вернуться к оригиналу для $Q(z)\Rightarrow q_t$:

$$q_t=\frac{A}{1-\rho}+\frac{-A+q_0-q_0\cdot\rho}{1-\rho}\cdot\rho^t=\frac{A}{1-\rho}+\left(\frac{-A}{1-\rho}+q_0\right)\cdot\rho^t \qquad (4.3.41)$$

и окончательно, учитывая (4.3.23) и (4.3.25), получаем

$$q_t=q_0\cdot\rho^t+\frac{A}{\rho-1}\cdot(\rho^t-1), \qquad (4.3.42)$$

где $A=c\cdot(1-(1+\alpha\cdot v)\cdot\exp(-\alpha v))\cdot(u-v)$.

Экономическая интерпретация формулы (4.3.42) в значительной степени аналогична интерпретации формул (4.3.21) и (4.3.22) — объем собственных средств финансовой фирмы на момент времени t по-прежнему определяется составляющими, зависящими от величины начального капитала $(q_0\cdot\rho^t)$ и доходов от эксплуатации привлеченных средств

$$\left(\frac{A}{\rho-1}\cdot(\rho^t-1)\right).$$

Поведение последовательности q_t при различных значениях нормы затрат на привлечение средств v, изменяющихся в пределах [0; 0,4], и $t\in 0:30$ иллюстрируется поверхностью, изображенной на рис. 4.3.5.

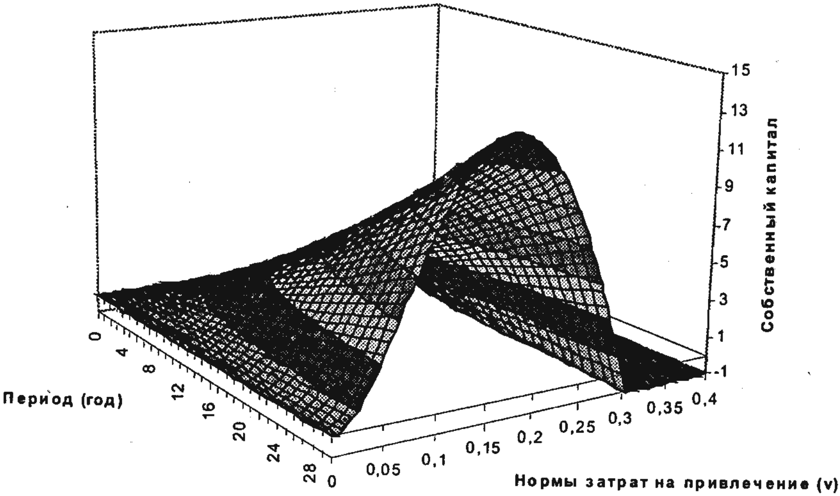

Рис. 4.3.5. Динамика объема собственного капитала при различных нормах затрат на привлечение средств

Таблица 4.3.5. Фактические и прогнозные (по формуле (4.3.42)) значения объема собственного капитала по банкам-участникам FDIC

Год	Обязательства, \$ млн, x_t	Собственный капитал-факт, \$ млн, q_t	Собственный капитал-прогноз, \$ млн, $\bar{q}_t$	В том числе по составляющим		Отклонение прогноза от факта, %
				$q_0 \cdot \rho^t$	$\frac{A}{\rho-1} \cdot (\rho^t - 1)$	
1985	2 561 554	169 117	–	–	–	–
1986	2 758 556	182 143	179 283	169 326	9 957	1,6
1987	2 819 298	180 651	189 462	169 536	19 925	−4,9
1988	2 934 250	196 546	199 653	169 746	29 907	−1,6
1989	3 094 540	204 822	209 857	169 957	39 900	−2,5
1990	3 170 873	218 616	220 074	170 167	49 906	−0,7
1991	3 198 983	231 698	230 303	170 378	59 925	0,6

Источник: расчет по данным html://www.fdic.gov

Характер поверхности, изображенной на рис. 4.3.5, свидетельствует о возможности оптимального выбора нормы затрат на привлечение средств v, обеспечивающего максимальный рост собственного капитала.

Для построения примера, демонстрирующего возможности практической эксплуатации модели (4.3.24)–(4.3.42), воспользуемся уже применявшимися в аналогичных целях сводными данными по финансовым показателям банков-участников FDIC. Подставляя в (4.3.42) значения параметров функции $\varphi(v)$, а также u и v, получаем прогнозные значения суммарного объема собственных средств для рассматриваемой группы финансовых учреждений (см. табл. 4.3.5 и графики динамики фактических и прогнозных величин на рис. 4.3.6).

Сравнивая результаты текущего и предыдущего примеров, не трудно заметить, что они незначительно отличаются друг от друга с точки зрения точности прогнозирования, поскольку основаны фактически на одном и том же варианте развития событий (за счет соответствующего подбора в текущем примере значения переменной v).

4.4. Стохастические модели банковских депозитов

В настоящем параграфе мы остановимся на системе моделей, в предпосылках которых происходит дальнейшая детализация закономерностей поведения наблюдаемых финансовых ресурсов. С одной стороны, это позволяет лучше учесть специфику предмета исследований, но, с другой, — влечет за собой усложнение математических выражений как для промежуточных, так и конечных результатов.

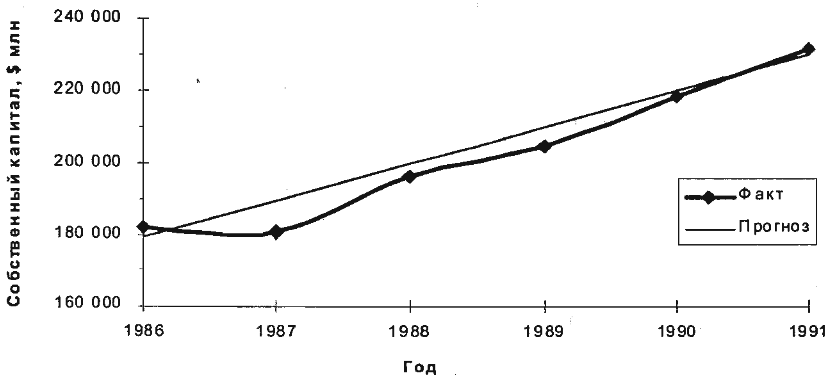

Рис. 4.3.6. Динамика фактических и прогнозных (по формуле (4.3.42)) значений объема собственного капитала для банков-участников FDIC

Приводимые ниже модели ориентированы на описание динамики процессов, происходящих с привлеченными средствами банка депозитной природы, в формировании которых участвует значительное число вкладчиков (депозиторов). Термин *стохастические модели банковских депозитов* заимствован из литературы, посвященной соответствующим вопросам, см. [2, 1]. Заметим, что в настоящем контексте термин «вкладчик» является достаточно условным, подразумевающим некоторого клиента банка, которым может быть как физическим, так и юридическим лицом, поведение которого адекватно требованиям предлагаемых моделей.

Вкладчики, задействованные в формировании суммарного финансового ресурса, могут быть разделены на две принципиальные категории, а именно на тех, кто на некоторый исходный момент времени t_0 уже имеет открытые счета, и тех, кто потенциально готов это сделать. Данная классификация предопределяет логику последующего изложения. Вначале будут по отдельности построены модели поведения для каждого типа вкладчиков, на основе чего мы получаем модель, описывающую динамику ресурса в целом.

4.4.1. Модель поведения реального вкладчика

Сформулируем следующую модель поведения вкладчика. Под ним мы будем понимать такого клиента банка, на счете которого к моменту времени t_0 лежит вклад величиной $x_0 > 0$.

Обстоятельства, следствием которых является закрытие счета, предполагаются случайными. Обозначим через $\tilde{k}_-(t_0,t)$ случайное число событий, влекущих ликвидацию счета, происходящих в течение временного интервала $[t_0,\ t]$, где $t \geq t_0$. Для простоты будем считать, что вкладчик не может неоднократно открывать и закрывать свой счет на промежутке времени $[t_0,\ t]$.

Пусть введенная дискретная случайная величина $\tilde{k}_-(t_0,t)$ представляет собой приращение стохастического процесса Пуассона $\tilde{k}_-(t)$:

$$\tilde{k}_-(t_0,t) = \tilde{k}_-(t) - \tilde{k}_-(t_0).$$

Тогда распределение этой случайной величины задается формулой

$$f(k;\tilde{k}_-(t_0,t)) = P\{\tilde{k}_-(t_0,t) = k\} = \frac{[\lambda_-(t-t_0)]^k}{k!} \cdot \exp[-\lambda_-(t-t_0)], \quad (4.4.1)$$

где λ_- — параметр интенсивности соответствующего пуассоновского процесса. Факт принадлежности случайной величины $\tilde{k}_-(t_0,t)$ к классу случайных величин, распределенных по закону Пуассона с параметром $\lambda_{-}(t-t_0)$, будем обозначать

$$\tilde{k}_{-}(t_0,t)\in Pn(\lambda_{-}(t-t_0)).$$

Из (4.4.1) следует, что вероятность $p_{-}(t_0,t)$ ликвидации к моменту времени t рассматриваемого счета определяется формулой

$$p_{-}(t_0,t)=P\{\tilde{k}_{-}(t_0,t)>0\}=1-P\{\tilde{k}_{-}(t_0,t)=0\}=1-\exp[-\lambda_{-}(t-t_0)], \quad (4.4.2)$$

а вероятность $q_{-}(t_0,t)$ «выживания» счета до момента времени t — формулой

$$q_{-}(t_0,t)=1-p_{-}(t_0,t)=P\{\tilde{k}_{-}(t_0,t)=0\}=\exp[-\lambda_{-}(t-t_0)]. \quad (4.4.3)$$

Сам же случайный момент времени $\tilde{\tau}_{-}\geq t_0$, в который происходит ликвидация счета, существующего на момент времени t_0, имеет, как известно, функцию распределения

$$F(\tau\,;\tilde{\tau}_{-})=1-\exp[-\lambda_{-}(\tau-t_0)],\quad \tau\geq t_0, \quad (4.4.4)$$

и плотность

$$f(\tau\,;\tilde{\tau}_{-})=\lambda_{-}\ \exp[-\lambda_{-}(\tau-t_0)],\quad \tau\geq t_0. \quad (4.4.5)$$

Иными словами, случайная величина $\tilde{\tau}_{-}-t_0$ принадлежит классу экспоненциально распределенных случайных величин: $\tilde{\tau}_{-}-t_0\in Ep(\lambda_{-})$. Математическое ожидание и дисперсия случайного момента времени $\tilde{\tau}_{-}$ равны $t_0+\lambda_{-}^{-1}$ и λ_{-}^{-2} соответственно.

Заметим, что, в то время как сам пуассоновский поток $\tilde{k}_{-}(t)$ «наступлений» обстоятельств, влекущих ликвидацию счета вкладчиком, является в рамках нашей модели ненаблюдаемым, вероятность $q_{-}(t_0,t)$ сохранения счета и ожидаемая продолжительность $\lambda_{-}^{-1}=M\tilde{\tau}_{-}-t_0$ существования счета могут быть оценены, в принципе, по наблюдаемым статистическим данным. Имея же статистические оценки $\bar{\tau}_{-}-t_0$ и $\bar{q}_{-}(t_0,t)$ для величин $M\tilde{\tau}_{-}-t_0$ и $q_{-}(t_0,t)$, легко получить оценки $\bar{\lambda}_{-}=(\bar{\tau}_{-}-t_0)^{-1}$ и $\bar{\lambda}_{-}=-(t-t_0)\ \ln\bar{q}_{-}(t_0,t)$ для параметра λ_{-} ненаблюдаемого пуассоновского процесса. Оцениваемый таким образом параметр λ_{-} имеет смысл ожидаемого числа появлений в единицу времени обстоятельств, влекущих закрытие счета.

Обозначим через $\tilde{n}(t_0,t)$ случайное число операций (начислений и списаний), проводимых вкладчиком к моменту времени t без закрытия счета, и положим, что это случайное число есть приращение пуассоновского процесса $\tilde{n}(t)$ с интенсивностью λ: $\tilde{n}(t_0,t)=\tilde{n}(t)-\tilde{n}(t_0)\in Pn(\lambda\ \ (t-t_0))$. Тогда математическое ожидание $M\tilde{n}(t_0,t)=\lambda\ \ (t-t_0)$ случайной величины $\tilde{n}(t_0,t)$ указывает среднее число операций со счетом, проводимых вкладчиком за промежуток времени $[t_0,t]$, и может быть оценено по наблюдаемым статистическим данным.

Введем еще один компонент нашей модели поведения вкладчика — случайный коэффициент $\tilde{\alpha}\in[0,+\infty)$ изменения величины вклада после проведения вкладчиком одной операции: если после операции, проведенной в момент времени t_{n-1}, остаток на счете равен $x(t_{n-1})$, то после непосредственно следующей операции, проводимой в момент времени t_n, на счете остается вклад случайной величины

$$\tilde{x}(t_n)=x(t_{n-1})\tilde{\alpha}.$$

Предположим, что случайная величина $\tilde{\alpha}$ имеет логарифмически нормальное распределение ($\tilde{\alpha}\in Ln(\mu_\alpha,\sigma_\alpha^2)$) с математическим ожиданием μ_α и с дисперсией σ_α^2, то есть предположим, что логарифм этой случайной величины имеет нормальное распределение с математическим ожиданием μ и с дисперсией σ^2 ($\ln\tilde{\alpha}\in N(\mu,\sigma^2)$). Плотность распределения

$$f(\alpha;\tilde{\alpha})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma\alpha}\cdot\exp\left[-\frac{(\ln\alpha-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],\quad \alpha>0, \tag{4.4.6}$$

случайной величины $\tilde{\alpha}$ позволяет найти ее математическое ожидание

$$\mu_\alpha=M\tilde{\alpha}=\int_0^{+\infty}\alpha f(\alpha;\tilde{\alpha})d\alpha=\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right), \tag{4.4.7}$$

второй начальный момент

$$M\tilde{\alpha}^2=\int_0^{+\infty}\alpha^2 f(\alpha;\tilde{\alpha})d\alpha=\mu_\alpha^2+\sigma_\alpha^2=\exp(2\mu+2\sigma^2) \tag{4.4.8}$$

и дисперсию

$$\sigma_\alpha^2=D\tilde{\alpha}^2=M\tilde{\alpha}^2-(M\tilde{\alpha})^2=\exp(2\mu+2\sigma^2)-\exp(2\mu+\sigma^2). \tag{4.4.9}$$

Для того чтобы охарактеризовать центр распределения логарифмически нормальной случайной величины $\tilde{\alpha}$, можно использовать наряду с уже вычисленным математическим ожиданием $M\tilde{\alpha}$ моду (локальный максимум плотности $f(\alpha;\tilde{\alpha})$) $\operatorname{mod}\tilde{\alpha}=\exp(\mu-\sigma^2)$ и медиану $\mathrm{med}(\tilde{\alpha}) = \exp(\mu)$, определяемую как корень уравнения $F(\mathrm{med}(\tilde{\alpha}), \tilde{\alpha}) = 1/2$, где слева стоит функция распределения случайной величины $\tilde{\alpha}$, выражаемая через стандартную нормальную функцию распределения

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \tag{4.4.10}$$

формулой

$$F(\alpha;\tilde{\alpha}) = \Phi\left(\frac{\ln\alpha - \mu}{\sigma}\right). \tag{4.4.11}$$

Найдем теперь случайный коэффициент $\tilde{\alpha}(n)$ изменения величины вклада на счете после n операций, предполагаемых взаимно независимыми. Эту случайную величину можно представить как произведение

$$\tilde{\alpha}(n) = \tilde{\alpha}_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{\alpha}_n = \prod_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}_i$$

одинаково распределенных независимых случайных величин $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n$, $\tilde{\alpha}_i \in Ln(\mu_\alpha, \sigma_\alpha^2)$, $\ln\tilde{\alpha}_i \in N(\mu, \sigma^2)$. Очевидно, что случайный коэффициент $\tilde{\alpha}(n)$ имеет логарифмически нормальное распределение: $\tilde{\alpha}(n) \in Ln(n\mu, n\sigma^2)$. Отсюда получаем выражения

$$M\tilde{\alpha}(n) = \exp[n\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)] = \mu_\alpha^n, \tag{4.4.12}$$

$$M\tilde{\alpha}^2(n) = \exp[2n(\mu + \sigma^2)] = \left(M\tilde{\alpha}^2\right)^n = (\mu_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2)^n, \tag{4.4.13}$$

$$D\tilde{\alpha}(n) = \exp[2n(\mu + \sigma^2)] - \exp[n(2\mu + \sigma^2)] = (\mu_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2)^n - \mu_\alpha^{2n} \tag{4.4.14}$$

для математического ожидания, второго начального момента и дисперсии случайной величины $\tilde{\alpha}(n)$ соответственно.

Заметим, что ситуация, когда операции начисления и списания не проводились, может быть формально описана вырожденной случайной величиной $\tilde{\alpha}(0)$, принимающей с вероятностью единица значение $\tilde{\alpha}(0) = 1$. Эта случайная величина определяется функцией распределения

$$F(\alpha;\tilde{\alpha}(0)) = \begin{cases} 0, & \alpha \le 1, \\ 1, & \alpha > 1, \end{cases} \tag{4.4.15}$$

имеет математическое ожидание $M\tilde{\alpha}(0) = 1$ и нулевую дисперсию.

Предполагая, что к моменту времени t счет не ликвидирован, введем случайную величину $\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t))$, представляющую собой случайный коэффициент изменения величины начального вклада x_0 к моменту времени t (после случайного числа $\tilde{n}(t_0,t)$ операций с депозитом). Используя формулу полной вероятности, функцию распределения $F(\alpha\,;\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t)))$ случайной величины $\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t))$ можно представить как дискретную смесь

$$F(\alpha\,;\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t)) = \sum_{n=0}^{\infty} F(\alpha;\tilde{\alpha}(n))P\{\tilde{n}(t_0,t)=n\} =$$

$$= \exp\,[-\lambda(t-t_0)] \sum_{n=0}^{\infty} F(\alpha;\tilde{\alpha}(n)) \frac{[\lambda(t-t_0)]^n}{n!} \qquad (4.4.16)$$

функций распределения непрерывных случайных величин $\tilde{\alpha}(1),\ldots,\tilde{\alpha}(n)$ и вырожденной случайной величины $\tilde{\alpha}(0)$. Весовые коэффициенты этой смеси задаются распределением дискретной случайной величины $\tilde{n}(t_0,t)$.

Так как $\tilde{\alpha}(n) \in Ln(n\mu, n\sigma^2)$, то (4.4.16) можно преобразовать в формулу

$$F(\alpha\,;\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t))) = F(\alpha\,;\tilde{\alpha}(0))\exp[-\lambda(t-t_0)] +$$

$$+\exp[-\lambda(t-t_0)] \sum_{n=0}^{\infty} \Phi\left(\frac{\ln\alpha - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \frac{[\lambda(t-t_0)]^n}{n!}, \qquad (4.4.17)$$

дающую явное выражение для функции распределения случайной величины $\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t))$.

Для нахождения математического ожидания $M\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t))$ проведем ряд простых преобразований, учитывающих соотношение (4.4.16):

$$M\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t)) = \int_0^{\infty} \alpha\, dF(\alpha\,;\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t))) =$$

$$= \int_0^{\infty} \alpha \frac{d}{d\alpha}\left[\exp[-\lambda(t-t_0)] \sum_{n=0}^{\infty} F(\alpha\,;\tilde{\alpha}(n)) \frac{[\lambda(t-t_0)]^n}{n!}\right] =$$

$$= \exp[-\lambda(t-t_0)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda(t-t_0)]^n}{n!} \left[\int_0^{\infty} \alpha\, dF(\alpha;\tilde{\alpha}(n))\right] =$$

$$= \exp[-\lambda(t-t_0)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda(t-t_0)]^n}{n!} M\tilde{\alpha}(n) =$$

$$= \exp[-\lambda(t-t_0)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda(t-t_0)\ \mu_\alpha]^n}{n!} =$$

$$= \exp[-\lambda(t-t_0)] \cdot \exp[\lambda(t-t_0)\ \mu_\alpha]. \qquad (4.4.18)$$

Отсюда получаем выражение

$$M\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t)) = \exp[\lambda(t-t_0)(\mu_\alpha - 1)] \qquad (4.4.19)$$

математического ожидания случайного коэффициента изменения величины депозита на промежутке времени $[t_0,t]$ через математическое ожидание μ_α коэффициента изменения депозита при одной операции и параметр интенсивности λ пуассоновского потока $\tilde{n}(t)$ таких операций.

Проведя преобразования

$$M\tilde{\alpha}^2(\tilde{n}(t_0,t)) = \int_0^{\infty} \alpha^2 dF(\alpha;\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t))) =$$

$$= \exp[-\lambda(t-t_0)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda(t-t_0)]^n}{n!} M\tilde{\alpha}^2(n) =$$

$$= \exp[-\lambda(t-t_0)] \cdot \exp[\lambda(t-t_0)(\mu_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2)], \qquad (4.4.20)$$

аналогичные преобразованиям (4.4.18), получаем выражение

$$M\tilde{\alpha}^2(\tilde{n}(t_0,t)) = \exp[\lambda(t-t_0)(\mu_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2 - 1)] \qquad (4.4.21)$$

второго начального момента случайного коэффициента $\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t))$ через математическое ожидание μ_α и дисперсию σ_α^2 случайного коэффициента $\tilde{\alpha}$ изменения величины депозита при одной операции и через параметр интенсивности λ пуассоновского потока $\tilde{n}(t)$ таких операций.

Из (4.4.19) и (4.4.21) находим выражение

$$D\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t)) = M\tilde{\alpha}^2(\tilde{n}(t_0,t)) - [M\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t))]^2 =$$

$$= \exp[\lambda(t-t_0)(\mu_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2 - 1)] - \exp[2\lambda(t-t_0)(\mu_\alpha - 1)] \qquad (4.4.22)$$

дисперсии случайного коэффициента изменения депозита за промежуток времени $[t_0,t]$ через математическое ожидание μ_α и дисперсию σ^2_α случайного коэффициента $\tilde{\alpha}$ и через интенсивность λ соответствующего пуассоновского процесса.

До сих пор мы предполагали, что рассматриваемый счет не будет ликвидирован к моменту времени t. Для учета возможности закрытия счета к моменту времени t введем коэффициент $\tilde{a}(t_0,t)$ изменения начального вклада x_0 за промежуток времени $[t_0,t]$ при помощи следующих соотношений: $\tilde{a}(t_0,t)=\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t))$ с вероятностью $q_-(t_0,t)$; $\tilde{a}(t_0,t)=0$ с вероятностью $p_-(t_0,t)=1-q_-(t_0,t)$. Иными словами, случайная величина $\tilde{a}(t_0,t)$ есть смесь случайной величины $\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t))$ и вырожденной случайной величины $\tilde{a}_0$, принимающей с вероятностью $p_-(t_0,t)$ значение 0, и значение 1 — с вероятностью $q_-(t_0,t)$. Функция распределения случайного коэффициента $\tilde{a}(t_0,t)$ задается формулой

$$F(a\,;\tilde{a}(t_0,t))=q_-(t_0,t)\cdot F(a\,;\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t)))+p_-(t_0,t)\cdot F(a\,;\tilde{a}_0), \qquad (4.4.23)$$

где $F(a;\tilde{a}_0)$ есть функция распределения вырожденной случайной величины $\tilde{a}_0$: $F(a;\tilde{a}_0)=0$, когда $a\le 0$; $F(a;\tilde{a}_0)=1$, когда $a>0$.

Из (4.4.23) получаем выражение

$$M\tilde{a}(t_0,t)=q_-(t_0,t)\cdot M\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t))+p_-(t_0,t)\cdot M\tilde{a}_0=$$

$$=\exp[-\lambda_-(t-t_0)]\cdot\exp[\lambda(t-t_0)(\mu_\alpha-1)]=$$

$$=\exp\big[(t-t_0)[\lambda(\mu_\alpha-1)-\lambda_-]\big] \qquad (4.4.24)$$

математического ожидания случайного коэффициента $\tilde{a}(t_0,t)$ через математическое ожидание μ_α случайного коэффициента $\tilde{\alpha}$ и параметры интенсивности λ, λ_- соответствующих пуассоновских процессов. Аналогичные вычисления дают выражение

$$M\tilde{a}^2(t_0,t)=\exp[(t-t_0)[\lambda(\mu^2_\alpha+\sigma^2_\alpha-1)-\lambda_-]] \qquad (4.4.25)$$

для второго начального момента случайной величины $\tilde{a}(t_0,t)$. Из (4.4.24), (4.4.25) получаем выражение

$$D\tilde{a}(t_0,t)=\exp[(t-t_0)[\lambda(\mu^2_\alpha+\sigma^2_\alpha-1)-\lambda_-]]-$$

$$-\exp[2(t-t_0)(\lambda(\mu_\alpha-1)-\lambda_-)] \qquad (4.4.26)$$

дисперсии случайного коэффициента $\tilde{a}(t_0,t)$ через математическое ожидание μ_α и дисперсию σ^2_α случайного коэффициента $\tilde{\alpha}$ и параметры интенсивности λ, λ_- соответствующих пуассоновских процессов.

Итак, получена функция распределения (4.4.23) и вычислены математическое ожидание (4.4.24) и дисперсия (4.4.26) случайного коэффициента $\tilde{a}(t_0,t)$ изменения начального вклада x_0 за промежуток времени $[t_0,t]$ с учетом двух вариантов хода событий, первый из которых состоит в сохранении счета к моменту времени $t > t_0$, а второй — в ликвидации счета к этому моменту времени (см. рис. 4.4.1).

Теперь мы можем приступить к основной задаче, связанной с изучаемой стохастической моделью поведения вкладчика, — к задаче оценки величины вклада в момент времени t при условии, что в момент времени $t_0 < t$ на счете лежал вклад величиной x_0.

Поскольку величина вклада, лежащего на счете к моменту времени t, есть случайная величина $\tilde{x}_0(t_0,t) = x_0 \cdot \tilde{a}(t_0,t)$, постольку ее оценкой может служить какая-нибудь характеристика «центра» распределения этой случайной величины. Например, в качестве прогноза величины вклада на момент времени t (по информации о его величине x_0 в момент времени t_0) можно использовать математическое ожидание

$$\mu_0(t_0,t) = M\tilde{x}_0(t_0,t) = x_0 \cdot M\tilde{a}(t_0,t) =$$

$$= x_0 \cdot \exp[(t-t_0)(\lambda(\mu_\alpha - 1) - \lambda_-)]. \qquad (4.4.27)$$

Здесь $\mu_\alpha = M\tilde{\alpha}$ — математическое ожидание коэффициента изменения величины вклада при одной операции, λ — интенсивность потока операций с данным счетом, λ_- — интенсивность потока обстоятельств, вызывающих закрытие счета. Если величина вклада на момент време-

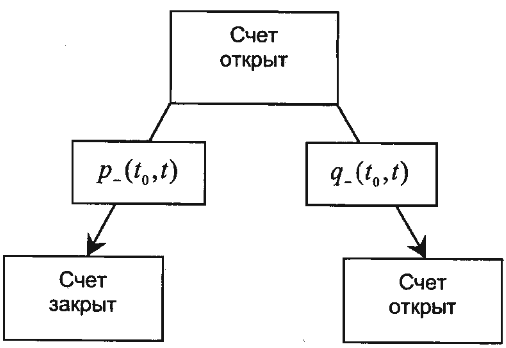

Рис. 4.4.1. Схема событий для модели поведения реального вкладчика

ни t оценивается математическим ожиданием $\mu_0(t_0,t)$, то точность такой оценки имеет смысл измерять при помощи стандартного отклонения $\sigma_0(t_0,t)$, связанного с дисперсией случайной величины $\tilde{x}_0(t_0,t)$ формулой

$$\sigma_0^2(t_0,t)=D\tilde{x}_0(t_0,t)=x_0^2\cdot D\tilde{a}(t_0,t)=$$
$$=x_0^2\cdot\Big(\exp[(t-t_0)[\lambda\ \ (\mu_\alpha^2+\sigma_\alpha^2-1)-\lambda_-]]\ -$$
$$-\ \exp[2(t-t_0)[\lambda\ \ (\mu_\alpha-1)-\lambda_-]]\Big), \qquad (4.4.28)$$

где σ_α^2 — дисперсия случайного коэффициента изменения величины вклада при одной операции. Если же величине вклада на момент времени t дается интервальная оценка вида $[x_-,x_+]$, то вероятность того, что случайная величина вклада $\tilde{x}_0(t_0,t)$ попадает в указанный интервал, определяется формулой

$$P\{x_-\le\tilde{x}_0(t_0,t)\le x_+\}=P\left\{\frac{x_-}{x_0}\le\tilde{a}(t_0,t)\le\frac{x_+}{x_0}\right\}=$$
$$=F\left(\frac{x_+}{x_0};\tilde{\alpha}(t_0,t)\right)-F\left(\frac{x_-}{x_0};\tilde{\alpha}(t_0,t)\right), \qquad (4.4.29)$$

где $F(a;\tilde{a}(t_0,t))$ есть функция распределения (4.4.23) случайной величины $\tilde{a}(t_0,t)$.

4.4.2. Модель поведения потенциального вкладчика

Рассмотрим теперь модель *поведения потенциального вкладчика*, то есть вкладчика, еще не открывшего своего счета к моменту времени t_0. В этой модели предполагается, что счет открывается в некоторый случайный момент времени $\tilde{\tau}\ge t_0$ под влиянием обстоятельств, появление которых во времени описывается пуассоновским стохастическим процессом $\tilde{k}_+(t)$ с параметром интенсивности λ_+. Таким образом, случайное число $\tilde{k}_+(t_0,t)=\tilde{k}_+(t)-\tilde{k}_+(t_0)$ появлений за промежуток времени $[t_0,t]$ обстоятельств, способствующих открытию счета потенциальным вкладчиком, имеет распределение Пуассона: $\tilde{k}_+(t_0,t)\in Pn(\lambda_+(t-t_0))$. Для упрощения модели предполагается, что потенциальный вкладчик не может многократно открывать и закрывать свой счет на промежутке времени $[t_0,t]$.

Возможны два варианта поведения потенциального вкладчика на промежутке времени $[t_0,t]$:

a) с вероятностью

$$p_+(t_0,t) = P\{\tilde{k}_+(t_0,t) > 0\} = 1 - \exp[-\lambda_+ \ (t - t_0)] - \qquad (4.4.30)$$

в случайный момент времени из промежутка $[t_0,t]$ он открывает счет;

b) с вероятностью

$$q_+(t_0,t) = 1 - p_+(t_0,t) = \exp[-\lambda_+(t - t_0)] - \qquad (4.4.31)$$

счет не открывается к моменту времени t (см. рис. 4.4.2).

Рассмотрим подробнее вариант, при котором счет открывается в случайный момент времени из промежутка $[t_0,t]$. Как известно, случайная величина $\tilde{\tau} - t_0$ промежутка времени между двумя соответствующими соседними событиями, поток которых описывается пуассоновским процессом $\tilde{k}_+(t)$ с интенсивностью λ_+, имеет экспоненциальную функцию распределения: $\tilde{\tau} - t_0 \in Ep(\lambda_+)$. Математическое ожидание и

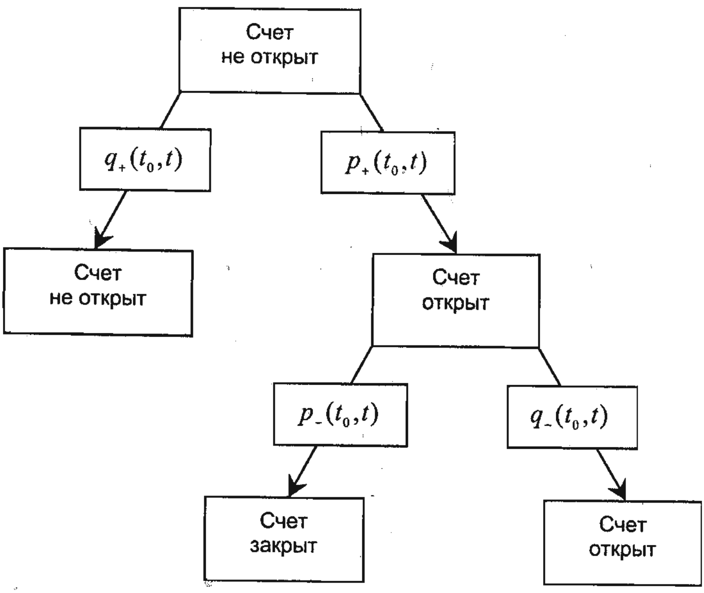

Рис. 4.4.2. Схема событий для модели поведения потенциального вкладчика

дисперсия случайной величины $\tilde{\tau} \geq t_0$ равны $t_0 + \lambda_+^{-1}$ и λ_+^{-2} соответственно. Если предположить, что счет открывается на промежутке времени $[t_0,t]$, то случайное время $\tilde{\tau}(t_0,t) \in [t_0,t]$ открытия этого счета имеет экспоненциальное распределение, суженное на промежуток $[t_0,t]$. Функция распределения случайной величины $\tilde{\tau}(t_0,t)$ определяется формулой

$$F(\tau ;\tilde{\tau}(t_0,t)) = \frac{F(\tau ;\tilde{\tau})}{p_+(t_0 t)} = \frac{1-\exp[-\lambda_+(\tau - t_0)]}{1-\exp[-\lambda_+(t-t_0)]} \tag{4.4.32}$$

для значений $\tau \in [t_0,t]$. Для этих же значений переменной τ плотность случайной величины $\tilde{\tau}(t_0,t)$ имеет вид

$$f(\tau ;\tilde{\tau}(t_0,t)) = \frac{f(\tau ;\tilde{\tau})}{p_+(t_0,t)} = \frac{\lambda_+ \quad \exp[-\lambda_+(\tau - t_0)]}{1-\exp[-\lambda_+(t-t_0)]}. \tag{4.4.33}$$

Знание плотности (4.4.33) случайной величины $\tilde{\tau}(t_0,t)$ позволяет найти ее математическое ожидание

$$M\tilde{\tau}(t_0,t) = t_0 + \frac{1}{\lambda_+} - (t-t_0)\frac{1-p_+(t_0,t)}{p_+(t_0,t)} \tag{4.4.34}$$

и дисперсию

$$D\tilde{\tau}(t_0,t) = \frac{1}{\lambda_+^2} - (t-t_0)^2\frac{1-p_+(t_0,t)}{p_+^2(t_0,t)}. \tag{4.4.35}$$

Если счет будет открыт в момент времени $\tau \in [t_0,t]$, то дальнейшие возможные варианты поведения вкладчика на промежутке времени $[\tau,t]$ совпадают с уже изученными при анализе первой модели вариантами его поведения на промежутке времени $[t_0,t]$ (см. рис. 4.4.1, 4.4.2). Поэтому случайный коэффициент $\tilde{a}(\tau,t)$ изменения величины депозита на промежутке времени $[\tau,t]$ определяется функцией распределения $F(a ;\tilde{a}(\tau,t))$, задаваемой формулой (4.4.23). Используем этот факт для нахождения распределения случайного коэффициента $\tilde{a}(\tilde{\tau},t)$ изменения к моменту времени t величины вклада, лежащего на счете, открытом в случайный момент времени $\tilde{\tau} \in [t_0,t]$. Функция распределения этого случайного коэффициента есть смесь

$$F(a ;\tilde{a}(\tilde{\tau},t)) = \int_{t_0}^{t} F(a ;\tilde{a}(\tau,t)) \;\; f(\tau ;\tilde{\tau}(t_0,t)) \;\; d\tau \tag{4.4.36}$$

функций распределения случайных коэффициентов $\tilde{a}(\tau,t)$, $\tau\in[t_0,t]$, в которой роль весовой функции играет плотность распределения случайного времени $\tilde{\tau}(t_0,t)$ открытия счета.

Проведя ряд простых преобразований

$$M\tilde{a}(\tilde{\tau},t)=\int_0^{\infty} a\ \ dF(a\ ;\tilde{a}(\tilde{\tau},t))=$$

$$=\int_0^{\infty} a\ \ d\left(\int_{t_0}^{t} F(a\ ;\tilde{a}(\tau,t))\ \ f(\tau\ ;\tilde{\tau}(t_0,t))\ \ d\tau\right)=$$

$$=\int_{t_0}^{t} f(\tau\ ;\tilde{\tau}(t_0,t))\left(\int_0^{\infty} a\ \ dF(a\ ;\tilde{a}(\tau,t))\right)d\tau=$$

$$=\int_{t_0}^{t} M\tilde{a}(\tau\ ;t)\ \ f(\tau\ ;\tilde{\tau}(t_0,t))\ \ d\tau, \tag{4.4.37}$$

получаем следующее выражение:

$$M\tilde{a}(\tilde{\tau},t)=\frac{\lambda_+}{\lambda\ (\mu_\alpha-1)+\lambda_+-\lambda_-}\cdot\frac{q_+(t_0,t)}{p_+(t_0,t)}\times$$

$$\times\left[\exp\left[(t-t_0)(\lambda\ (\mu_\alpha-1)+\lambda_+-\lambda_-)\right]-1\right] \tag{4.4.38}$$

для математического ожидания случайного коэффициента $\tilde{a}(\tilde{\tau},t)$ изменения величины вклада, положенного в случайный момент времени $\tilde{\tau}\in[t_0,t]$ на счет, открытый в этот же момент времени. Аналогично вычисляется второй центральный момент этого случайного коэффициента:

$$M\tilde{a}^2(\tilde{\tau},t)=\int_0^{\infty} a^2\ \ dF(a\ ;\tilde{a}(\tilde{\tau},t))=$$

$$=\frac{\lambda_+}{\lambda\ (\mu_\alpha^2+\sigma_\alpha^2-1)+\lambda_+-\lambda_-}\cdot\frac{q_+(t_0,t)}{p_+(t_0,t)}\times$$

$$\times\left[\exp\left[(t-t_0)(\lambda\ (\mu_\alpha^2+\sigma_\alpha^2-1)+\lambda_+-\lambda_-)\right]-1\right]. \tag{4.4.39}$$

Отсюда дисперсия случайной величины $\tilde{a}(\tilde{\tau},t)$ определяется формулой:

$$D\tilde{a}(\tilde{\tau},t)=$$

$$=\frac{\lambda_+}{\lambda\ (\mu_\alpha^2+\sigma_\alpha^2-1)+\lambda_+-\lambda_-}\cdot\frac{q_+(t_0,t)}{p_+(t_0,t)}\times$$

$$\times\left[\exp\left[(t-t_0)(\lambda\ (\mu_\alpha^2+\sigma_\alpha^2-1)+\lambda_+-\lambda_-)\right]-1\right]-$$

$$-\frac{\lambda_+^2}{(\lambda\ (\mu_\alpha-1)+\lambda_+-\lambda_-)^2}\cdot\frac{q_+^2(t_0,t)}{p_+^2(t_0,t)}\times$$

$$\times\left[\exp[(t-t_0)(\lambda\ (\mu_\alpha-1)+\lambda_+-\lambda_-)]-1\right]^2. \qquad (4.4.40)$$

До сих пор мы учитывали лишь тот вариант действий потенциального вкладчика, при котором он обязательно открывает счет в какой-нибудь случайный момент времени $\tilde{\tau}(t_0,t)\in[t_0,t]$ (см. рис. 4.4.2). Для учета варианта, при котором не происходит открытие счета к моменту времени t, введем случайный коэффициент $\tilde{A}(t_0,t)$ следующими соотношениями:

$$\tilde{A}(t_0,t)=\tilde{a}(\tilde{\tau},t) \text{ с вероятностью } p_+(t_0,t);$$
$$\tilde{A}(t_0,t)=0 \qquad \text{ с вероятностью } q_+(t_0,t).$$

Введенная случайная величина $\tilde{A}(t_0,t)$ есть коэффициент изменения величины вклада на счете к моменту времени t, учитывающий как возможность открытия такого счета на промежутке времени $[t_0,t]$, так и возможность противоположного варианта поведения потенциального вкладчика.

Поскольку функция распределения случайной величины $\tilde{A}(t_0,t)$ есть смесь

$$F(a\,;\tilde{A}(t_0,t))=p_+(t_0,t)\ F(a\,;\tilde{a}(\tilde{\tau},t))+q_+(t_0,t)\ F(a\,;\tilde{a}(0)) \qquad (4.4.41)$$

функции распределения случайной величины $\tilde{a}(\tilde{\tau},t)$ и функции распределения вырожденной случайной величины $\tilde{\alpha}(0)$, постольку, учитывая формулы (4.4.15) и (4.4.37), получаем выражение

$$M\tilde{A}(t_0,t)=\frac{\lambda_+\cdot q_+(t_0,t)}{\lambda\ (\mu_\alpha-1)+\lambda_+-\lambda_-}\times$$

$$\times\left[\exp[(t-t_0)(\lambda\ (\mu_\alpha-1)+\lambda_+-\lambda_-)]-1\right] \qquad (4.4.42)$$

для математического ожидания случайного коэффициента $\tilde{A}(t_0,t)$. Аналогичные вычисления позволяют найти и второй начальный момент этого случайного коэффициента:

$$M\tilde{A}^2(t_0,t) = \frac{\lambda_+ \cdot q_+(t_0,t)}{\lambda\ (\mu_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2 - 1) + \lambda_+ - \lambda_-} \times$$

$$\times \left[\exp\left[(t-t_0)(\lambda\ (\mu_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2 - 1) + \lambda_+ - \lambda_-)\right] - 1\right]. \qquad (4.4.43)$$

Из (4.4.42) и (4.4.43) легко получить формулу для вычисления дисперсии $D\tilde{A}(t_0,t)$ случайного коэффициента изменения величины депозита потенциального вкладчика:

$$D\tilde{A}(t_0,t) =$$

$$= \frac{\lambda_+ \cdot q_+(t_0,t)}{\lambda\ (\mu_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2 - 1) + \lambda_+ - \lambda_-} \times$$

$$\times \left[\exp\left[(t-t_0)(\lambda\ (\mu_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2 - 1) + \lambda_+ - \lambda_-)\right] - 1\right] -$$

$$\frac{\lambda_+^2 \cdot q_+^2(t_0,t)}{(\lambda\ (\mu_\alpha - 1) + \lambda_+ - \lambda_-)^2} \times$$

$$\times \left[\exp\left[(t-t_0)(\lambda\ (\mu_\alpha - 1) + \lambda_+ - \lambda_-)\right] - 1\right]^2. \qquad (4.4.44)$$

Обозначим через $\tilde{x}_0$ случайную величину начального вклада на счете, открываемом потенциальным вкладчиком в случайный момент времени $\tilde{\tau} \in [t_0,t]$. Положим, что $\tilde{x}_0 \in Ln(\mu_0,\sigma_0^2)$, и предположим независимость случайных величин $\tilde{x}_0$, $\tilde{A}(t_0,t)$. Последнее предположение существенно упрощает анализ случайной величины $\tilde{x}(t_0,t) = \tilde{x}_0 \cdot \tilde{A}(t_0,t)$ депозита, лежащего к моменту времени t на счете потенциального вкладчика. Действительно, если указанные случайные величины независимы, то функция распределения величины депозита $\tilde{x}(t_0,t)$ задается формулой

$$F(x;\tilde{x}(t_0,t)) = F(x;\tilde{x}_0) \cdot F(x;\tilde{A}(t_0,t)), \qquad (4.4.45)$$

из которой следуют формулы математического ожидания случайной величины $\tilde{x}(t_0,t)$

$$\mu\ (t_0,t) = M\tilde{x}(t_0,t) = M\tilde{x}_0 \cdot M\tilde{A}(t_0,t) =$$

$$=\frac{\mu_0\cdot\lambda_+\cdot q_+(t_0,t)}{\lambda\ (\mu_\alpha-1)+\lambda_+-\lambda_-}\times$$

$$\times\left[\exp[(t-t_0)(\lambda\ (\mu_\alpha-1)+\lambda_+-\lambda_-)]-1\right], \qquad (4.4.46)$$

а также ее второго начального момента

$$M\tilde{x}^2(t_0,t)=(\mu_0^2+\sigma_0^2)\ \cdot\ M\tilde{A}^2(t_0,t)=$$

$$=\frac{(\mu_0^2+\sigma_0^2)\cdot\lambda_+\cdot q_+(t_0,t)}{\lambda\ (\mu_\alpha^2+\sigma_\alpha^2-1)+\lambda_+-\lambda_-}\times$$

$$\times\left[\exp\left[(t-t_0)(\lambda\ (\mu_\alpha^2+\sigma_\alpha^2-1)+\lambda_+-\lambda_-)\right]-1\right] \qquad (4.4.47)$$

и дисперсии

$$\sigma^2(t_0,t)=D\tilde{x}(t_0,t)=M\tilde{x}_0^2\ \cdot\ M\tilde{A}^2(t_0,t)-\mu_0^2\ \cdot\ M^2\tilde{A}(t_0,t)=$$

$$=\frac{(\mu_0^2+\sigma_0^2)\cdot\lambda_+\cdot q_+(t_0,t)}{\lambda\ (\mu_\alpha^2+\sigma_\alpha^2-1)+\lambda_+-\lambda_-}\times$$

$$\times\left[\exp\left[(t-t_0)(\lambda\ (\mu_\alpha^2+\sigma_\alpha^2-1)+\lambda_+-\lambda_-)\right]-1\right]-$$

$$-\frac{\mu_0^2\cdot\lambda_+^2\cdot q_+^2(t_0,t)}{(\lambda\ (\mu_\alpha-1)+\lambda_+-\lambda_-)^2}\times$$

$$\times\left[\exp[(t-t_0)(\lambda\ (\mu_\alpha-1)+\lambda_+-\lambda_-)]-1\right]^2. \qquad (4.4.48)$$

Полученное математическое ожидание $\mu\ (t_0,t)$ можно использовать в качестве искомой оценки величины вклада, лежащего к моменту времени t на счете потенциального вкладчика, еще не открывшего счет к моменту времени t_0. Тогда стандартное отклонение $\sigma(t_0,t)$ может служить мерой точности оценки $\mu(t_0,t)$. Если величине вклада потенциального вкладчика дается интервальная оценка вида $\tilde{x}(t_0,t)\in[x_-,x_+]$, то достоверность такой оценки можно измерить вероятностью

$$P\{\tilde{x}(t_0,t)\in[a,b]\}=F(x_+;\tilde{x}(t_0,t))-F(x_-;\tilde{x}(t_0,t)). \qquad (4.4.49)$$

Итак, построены две стохастические модели поведения вкладчика: первая модель описывает случайную величину $\tilde{x}_0(t_0,t)$ вклада, лежащего к моменту времени t на счете, реально открытом вкладом размера

$x_0 > 0$ к моменту времени $t_0 \le t$; вторая — случайную величину $\tilde{x}(t_0,t)$ вклада, лежащего к моменту времени t на счете, который, возможно, будет открыт потенциальным вкладчиком в случайный момент времени $\tilde{\tau} \in [t_0,t]$. Эти модели поведения реального и потенциального вкладчиков позволяют прогнозировать в момент времени t_0 ожидаемые (на момент времени $t > t_0$) значения $\mu_0(t_0,t) \pm \sigma_0(t_0,t)$, $\mu\ (t_0,t) \pm \sigma\ (t_0,t)$ величин вкладов, лежащих на соответствующих счетах.

4.4.3. Модель поведения совокупности вкладчиков

Перейдем к рассмотрению стохастической динамики суммарной величины вкладов. Пусть к моменту времени t_0 открыто r_0 счетов. Предполагается, что вкладчики, владеющие этими счетами, действуют взаимно независимо и поведение каждого из них описывается разработанной выше моделью (см. рис. 4.4.1) с одинаковыми для всех параметрами $\lambda, \lambda_-, \mu_\alpha, \sigma_\alpha$. Пусть $x_0^{(i)}$ — величина вклада, лежащего на i-м счете в момент t_0. Тогда на этом счете к моменту времени t будет лежать, согласно нашей модели, вклад случайной величины $\tilde{x}_0^{(i)}(t_0,t) = x_0^{(i)} \cdot \tilde{a}_i(t_0,t)$, $i = 1,..., r_0$. Случайные величины $\tilde{a}_1(t_0,t),..., \tilde{a}_{r_0}(t_0,t)$ предполагаются независимыми в совокупности и имеющими одно и то же распределение — распределение случайной величины $\tilde{a}(t_0,t)$.

Обозначим через $X_0 = x_0^{(1)} + ... + x_0^{(r_0)}$ сумму вкладов, лежащих на счетах, открытых к моменту времени t_0, а через $\tilde{X}_0(t_0,t) = \tilde{x}_0^{(1)}(t_0,t) + \\ + ... + \tilde{x}_0^{(r_0)}(t_0,t)$ — случайную сумму вкладов, лежащих на этих же счетах к моменту времени t. Оценим ожидаемое значение суммы вкладов $\tilde{X}_0(t_0,t)$ математическим ожиданием

$$\mathrm{M}_0(t_0,t) = M\tilde{X}_0(t_0,t) = \sum_{i=1}^{r_0} M\tilde{x}_0^{(i)}(t_0,t) =$$

$$= X_0 \exp[(t-t_0)[\lambda\ (\mu_\alpha - 1) - \lambda_-]]. \tag{4.4.50}$$

Тогда точность полученной оценки $\mathrm{M}_0(t_0,t)$ может быть измерена стандартным отклонением $\Sigma_0(t_0,t)$ случайной величины $\tilde{X}_0(t_0,t)$, вычисляемым по формуле

$$\Sigma_0^2(t_0,t) = D\tilde{X}_0(t_0,t) = \sum_{i=1}^{r_0} D\tilde{x}_0^{(i)}(t_0,t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r_0} \left[x_0^{(i)}\right]^2 D\tilde{a}_i(t_0,t) = D\tilde{a}(t_0,t) \sum_{i=1}^{r_0} \left[x_0^{(i)}\right]^2 =$$

$$=\left(\exp[(t-t_0)[\lambda\ (\mu_\alpha^2+\sigma_\alpha^2-1)-\lambda_-]]-\right.$$

$$\left.-\exp[2(t-t_0)[\lambda\ (\mu_\alpha-1)-\lambda_-]]\right)\ \sum_{i=1}^{r_0}\left[x_0^{(i)}\right]^2. \qquad (4.4.51)$$

Случайное число $\tilde{r}_0(t_0,t)$ сохранившихся к моменту времени t счетов, открытых к моменту времени t_0, имеет биномиальное распределение ($\tilde{r}_0(t_0,t)\in Bm(q_-(t_0,t),r_0)$):

$$f(r;\tilde{r}_0(t_0,t))=P\{\tilde{r}_0(t_0,t)=r\}=$$

$$=\begin{pmatrix} r_0 \\ r \end{pmatrix}\ q_-^r(t_0,t)\ \ [1-q_-(t_0,t)]^{r_0-r}. \qquad (4.4.52)$$

Здесь $q_-(t_0,t)=\exp[-\lambda_-\ \ (t-t_0)]$ — вероятность того, что отдельный счет, открытый к моменту времени t_0, не будет ликвидирован к моменту времени t. Ожидаемое число счетов, открытых к моменту времени t_0 и не ликвидированных к моменту времени t, можно оценить математическим ожиданием

$$\bar{r}_0(t_0,t)=M\tilde{r}_0(t_0,t)=r_0\ \cdot\ q_-(t_0,t)=r_0\ \ \exp[-\lambda_-(t-t_0)] \qquad (4.4.53)$$

случайной величины $\tilde{r}_0(t_0,t)$. Тогда точность оценки $\bar{r}_0(t_0,t)$ может быть измерена стандартным отклонением этой случайной величины, определяемым формулой

$$\sqrt{D\tilde{r}_0(t_0,t)}=\sqrt{r_0\ \ q_-(t_0,t)\ \ [1-q_-(t_0,t)]}. \qquad (4.4.54)$$

Итак, модель поведения вкладчика, открывшего счет к моменту времени t_0, перенесена на случай, когда имеется r_0 таких вкладчиков, действующих независимо друг от друга. При этом получен прогноз $\mathrm{M}_0(t_0,t)$ суммы вкладов и прогноз $\bar{r}_0(t_0,t)$ числа сохранившихся счетов к моменту времени t (см. формулы (4.4.50) и (4.4.53)), а также оценена точность полученных прогнозов (см. формулы (4.4.51) и (4.4.54)).

Рассмотрим теперь совокупность, состоящую из s_+ потенциальных вкладчиков, действующих независимо друг от друга. Предположим, что поведение каждого потенциального вкладчика описывается случайной величиной $\tilde{x}^{(i)}(t_0,t)$, $i=1,...,s_+$, указывающей величину вклада, лежащего на счете i-го вкладчика к моменту времени t с учетом как возможности «неоткрытия» этого счета к указанному моменту, так и возможности его ликвидации после открытия на промежутке времени $[t_0,t]$ (см. рис. 4.4.2).

Мы знаем (см. формулу (4.4.3)) вероятность $q_-(\tau,t)$ того, что счет, открытый в *фиксированный* момент времени $\tau\in[t_0,t]$, не будет закрыт к моменту времени t. Теперь определим вероятность $q_-(t)$ того, что счет, открытый в некоторый *случайный* момент времени $\tau\in[t_0,t]$, не будет ликвидирован к моменту времени t. Для этого используем формулу полной вероятности:

$$q_-(t)=\int_{t_0}^{t} q_-(\tau,t)\ f(\tau\ ;\tilde{\tau}(t_0,t))\ d\tau=$$

$$=\frac{\lambda_+}{\lambda_+-\lambda_-}\cdot\frac{p_+(t_0,t)-p_-(t_0,t)}{p_+(t_0,t)}. \tag{4.4.55}$$

Обозначим $P_+(t_0,t)$ вероятность того, что счет будет открыт в случайный момент времени $\tilde{\tau}\in[t_0,t]$ и не будет ликвидирован к моменту времени t. Очевидно, что $P_+(t_0,t)=p_+(t_0,t)\cdot q_-(t)$. Отсюда имеем соотношение

$$P_+(t_0,t)=\frac{\lambda_+}{\lambda_+-\lambda_-}\cdot[p_+(t_0,t)-p_-(t_0,t)], \tag{4.4.56}$$

определяющее параметр дискретной биномиальной случайной величины $\tilde{s}_+(t_0,t)\in Bm(P_+(t_0,t),s_0)$, указывающей число счетов, открытых в какой-то момент из промежутка времени $[t_0,t]$ и не закрытых к моменту времени t.

В качестве прогноза $\bar{s}_+(t_0,t)$ числа таких счетов на момент времени t можно использовать математическое ожидание

$$\bar{s}_+(t_0,t)=M\tilde{s}_0(t_0,t)=s_+\lambda_+\cdot\frac{p_+(t_0,t)-p_-(t_0,t)}{\lambda_+-\lambda_-} \tag{4.4.57}$$

случайной величины $\tilde{s}_+(t_0,t)$. Мерой же точности такого прогноза может служить стандартное отклонение

$$\sqrt{D\tilde{s}_+(t_0,t)}=\sqrt{s_+\ \lambda_+}\ \times$$

$$\times\frac{[p_+(t_0,t)-p_-(t_0,t)]^{1/2}[\lambda_+\ q_+(t_0,t)-\lambda_-\ q_-(t_0,t)]^{1/2}}{\lambda_+-\lambda_-} \tag{4.4.58}$$

этой случайной величины.

Рассмотрим сумму $\tilde{X}_+(t_0,t)=\tilde{x}^{(1)}(t_0,t)+...+\tilde{x}^{(s_+)}(t_0,t)$ депозитов, лежащих на счетах потенциальных вкладчиков к моменту времени t. Эта случайная величина получена с учетом возможности и того, что счета некоторых потенциальных вкладчиков не будут открыты к моменту времени t, и того, что счета ряда потенциальных вкладчиков, открытые в некоторый момент времени $\tau\in[t_0,t]$, будут ликвидированы к указанному моменту t. Предполагается, что случайные величины $\tilde{x}^{(i)}(t_0,t)$, $i=1,..,s_+$ независимы в совокупности и имеют одинаковое распределение — распределение случайной величины $\tilde{x}(t_0,t)$.

В качестве прогноза $\text{М}_+(t_0,t)$ суммы вкладов потенциальных (на момент t_0) вкладчиков к моменту t можно использовать математическое ожидание

$$\text{М}_+(t_0,t)=M\tilde{X}_+(t_0,t)=\sum_{i=1}^{s_+}M\tilde{x}^{(i)}(t_),t)=$$

$$=\frac{s_+\cdot\mu_0\cdot\lambda_+\cdot q_+(t_0,t)}{\lambda\ (\mu_\alpha-1)+\lambda_+-\lambda_-}\times$$

$$\times\left[\exp[(t-t_0)(\lambda\ (\mu_\alpha-1)+\lambda_+-\lambda_-)]-1\right] \qquad (4.4.59)$$

случайной величины $\tilde{X}_+(t_0,t)$. Точность такого прогноза $\text{М}_+(t_0,t)$ можно оценить при помощи стандартного отклонения $\Sigma_+(t_0,t)$ этой же случайной величины, определяемого соотношением

$$\Sigma_+^2(t_0,t)=D\tilde{X}_+(t_0,t)=\sum_{i=1}^{s_+}D\tilde{x}^{(i)}(t_0,t)=$$

$$=\frac{s_+\cdot(\mu_0^2+\sigma_0^2)\cdot\lambda_+\cdot q_+(t_0,t)}{\lambda\ (\mu_\alpha^2+\sigma_\alpha^2-1)+\lambda_+-\lambda_-}\times$$

$$\times\left[\exp\left[(t-t_0)(\lambda\ (\mu_\alpha^2+\sigma_\alpha^2-1)+\lambda_+-\lambda_-)\right]-1\right]-$$

$$-\frac{s_+\cdot\mu_0^2\cdot\lambda_+^2\cdot q_+^2(t_0,t)}{(\lambda\ (\mu_\alpha-1)+\lambda_+-\lambda_-)^2}\times$$

$$\times\left[\exp[(t-t_0)(\lambda\ (\mu_\alpha-1)+\lambda_+-\lambda_-)]-1\right]^2. \qquad (4.4.60)$$

Общее число счетов, существующих на момент времени t, определяется случайной величиной

$$\tilde{N}(t_0,t)=\tilde{r}_0(t_0,t)+\tilde{s}_+(t_0,t), \qquad (4.4.61)$$

математическое ожидание

$$\bar{N}(t_0,t)=M\tilde{N}(t_0,t)=\bar{r}_0(t_0,t)+\bar{s}_0(t_0,t)=$$

$$=r_0\cdot q_-(t_0,t)+s_+\cdot P_+(t_0,t)=$$

$$=r_0\cdot q_-(t_0,t)+\frac{s_+\ \lambda_+}{\lambda_+-\lambda_-}[p_+(t_0,t)-p_-(t_0,t)], \qquad (4.4.62)$$

которой может служить в качестве прогноза на момент времени t общего количества счетов, то есть как счетов, имевшихся к моменту времени t_0 и не ликвидированных к моменту времени t, так и счетов, открытых на промежутке времени $[t_0,t]$ и просуществовавших до момента t. Точность такого прогноза $\bar{N}(t_0,t)$ можно оценить при помощи стандартного отклонения

$$\sqrt{D\tilde{N}(t_0,t)}=\sqrt{D\tilde{r}_0(t_0,t)+D\tilde{s}_+(t_0,t)} \qquad (4.4.63)$$

случайной величины $\tilde{N}(t_0,t)$.

Общая сумма вкладов, лежащих на указанном числе $\tilde{N}(t_0,t)$ счетов, функционирующих к моменту времени t, определяется случайной величиной

$$\tilde{X}(t_0,t)=\tilde{X}_0(t_0,t)+\tilde{X}_+(t_0,t)=$$

$$=\sum_{i=1}^{r_0}\tilde{x}_0^{(i)}(t_0,t)+\sum_{j=1}^{s_+}\tilde{x}^{(j)}(t_0,t), \qquad (4.4.64)$$

математическое ожидание

$$\mathrm{M}(t_0,t)=M\tilde{X}(t_0,t)=M\tilde{X}_0(t_0,t)+M\tilde{X}_+(t_0,t) \qquad (4.4.65)$$

которой может служить прогнозом общей суммы депозитов. Стандартное отклонение

$$\Sigma(t_0,t)=\sqrt{D\tilde{X}(t_0,t)}=\sqrt{D\tilde{X}_0(t_0,t)+D\tilde{X}_+(t_0,t)} \qquad (4.4.66)$$

этой случайной величины можно использовать для оценки точности прогноза $\mathrm{M}(t_0,t)$.

Безусловно, предложенные модели стохастической динамики вкладов являются весьма приблизительными и не отражают многих важных особенностей реального движения депозитных финансовых потоков. Однако, несмотря на это, они могут достаточно успешно применяться на практике за счет «настраивания» их многочисленных параметров на конкретные ситуации. Помимо этого идеи, заложенные в данных моделях, носят принципиальный характер и находят дальнейшее развитие в их более сложных модификациях.

Основные выводы

Приведем в обобщенном виде основные положения настоящей главы, которая была посвящена моделям, описывающим процессы стохастической динамики финансовых ресурсов и потоков в банке.

- В общем случае процессы деятельности банка (финансовой фирмы) могут быть описаны либо с помощью *траектории векторов состояния* банка

  $$x(t)=(x_1(t),\ldots,x_j(t),\ldots,x_n(t)),\ t\in T,$$

  либо через задание *векторного ресурсного потока*

  $$\dot{x}(t)=(\dot{x}_1(t),\ldots,\dot{x}_j(t),\ldots,\dot{x}_n(t)),\quad t\in T.$$

  В условиях неопределенности моделью динамики состояния банка может служить векторный случайный процесс

  $$\tilde{x}(t)=(\tilde{x}_1(t),\ldots,\tilde{x}_j(t),\ldots,\tilde{x}_n(t)),$$

  где каждая компонента $\tilde{x}_j(t)$ определяет стохастическую динамику j-й характеристики (ресурса) банка.
- Для построения прогнозов значений отдельных финансовых ресурсов, фигурирующих в деятельности банков, может быть использована мультипликативная стохастическая модель, в рамках которой переход объема ресурса, определяемого действительным числом $x_{i-1}>0$ в момент времени $t = i - 1$, к ресурсу величиной $x_i>0$, соответствующему моменту времени $t = i$, описывается соотношением

  $$x_i=\alpha_i\cdot x_{i-1},$$

  где α_i — некоторый *коэффициент элементарного перехода*. Особый интерес представляет случай, при котором все значения α_i независимы и могут рассматриваться как реализации случайных величин $\tilde{\alpha}_i$, имеющих логарифмически нормальное распределение.

- Прогнозы значений финансовых ресурсов, полученные с помощью мультипликативной стохастической модели, сохраняют свою справедливость в случае неизменности условий, при которых они были построены. Оперативное выявление момента изменения условий («момента разладки») может быть осуществлено за счет процедур *мониторинга среднего* (на основе вычисления скользящей дроби Стьюдента) и *дисперсии* (на основе расчета скользящей F-дроби).
- Для изучения влияния решений, принимаемых финансовой фирмой в области проводимой политики привлечения заемных ресурсов, на динамику ее развития (в частности, на динамику ее собственного капитала) могут достаточно эффективно применяться *рекуррентные динамические модели*, в основе которых лежит математический аппарат линейных разностных уравнений.
- Для построения прогнозов ожидаемых значений объемов финансовых ресурсов депозитной природы, аккумулируемых на основе средств значительного числа вкладчиков (однотипных счетов), могут быть использованы *стохастические модели банковских депозитов*. В их основе лежат гипотезы о возможности описания процессов, ведущих к изменению количества счетов, и числа операций с ними с помощью случайных величин, распределенных по закону Пуассона, а коэффициентов относительного изменения счетов в ходе отдельной операции — с помощью случайных величин, имеющих логарифмически нормальное распределение.

Литература

1. *Вишняков И. В.* Экономико-математические модели оценки деятельности коммерческих банков. СПб, 1999.
2. *Хованов Н. В.* Математические модели риска и неопределенности. СПб, 1998.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перед завершающей частью этой книги стоят две задачи:

- дать краткий обзор направлений микроэкономической теории банков, которые по тем или иным причинам не вошли в основное содержание;
- обсудить наиболее значимые вопросы, возникающие в процессе *практической разработки* экономико-математических моделей банковских и кредитных институтов.

Достаточно широкий пласт работ по микроэкономике финансовых фирм связан с подходом к их деятельности с точки зрения анализа *взаимосвязей кредитора и заемщика*. Исследования в данном направлении и предлагаемые в них экономико-математические модели позволяют раскрыть природу, особенности и закономерности отношений, возникающих в процессе кредитной деятельности банков (между банками-кредиторами и их заемщиками). Основой для данных взаимоотношений является кредитный договор. Очевидно, что в зависимости от условий деятельности экономических субъектов, вступающих в контрактные отношения, конкретные договора могут существенно отличаться по своему содержанию. В качестве непременных атрибутов стандартного кредитного контракта могут быть названы сумма кредита, порядок и сроки возврата, размер и условия процентных выплат и, как правило, обеспечение (гарантии).

Принципиальной для кредитной деятельности банков является проблема выполнения заемщиком обязательств по договору. С точки зрения микроэкономической теории она трансформируется в проблему выявления условий и стимулов, побуждающих заемщика к «честному» соблюдению принятых обязательств. С позиций конкретной экономики данная проблема осложняется тем, что реально существующие договора, как правило, по организационно-правовым причинам представляют собой достаточно общие документы, неспособные охватить все потенциальное многообразие событий, происходящих в хозяйственной деятельности субъектов договорных отношений. В решении соответствующих задач в последние десятилетия нашел активное применение математический аппарат теории игр. Более того, все чаще в зарубежной литературе для обозначения этой области используется самостоятельный термин *теория контрактов*.

В простейших моделях контрактных взаимоотношений рассматривается поведение кредитора и заемщика в условиях полной открытости информации. Объем денежного потока, получаемый предпринимателем, взявшим кредит в банке, в качестве дохода от реализуемого им проекта можно рассматривать как некоторую случайную величину $\tilde{y}$. Тогда объем процентных выплат по кредиту может быть представлен как некоторая функция $R(\tilde{y})$. Очевидно, что при отсутствии ограничений на доступ к информации банку известно фактическое значение денежного потока y, полученного предпринимателем, а следовательно, распределение дохода между ними может трактоваться как следствие договоренности о разделении рисков.

Если предположить, что результаты своей деятельности кредитор и заемщик оценивают с помощью функций полезности $u_L(\cdot)$ и $u_B(\cdot)$, то на основе вышеописанной ситуации может быть сформулирована задача максимизации по $R(\cdot)$ ожидаемой полезности заемщика при ограничении снизу на ожидаемую полезность кредитора U_L:

$$\max_{R(\cdot)} E\{u_B(\tilde{y}-R(\tilde{y}))\}, \qquad (1)$$

$$E\{u_L(R(\tilde{y}))\} \geq U_L, \qquad (2)$$

$$0 \leq R(y) \leq y. \qquad (3)$$

Из условий экстремума задачи (1)–(3) с помощью несложных преобразований может быть получено выражение для первой производной функции $R(y)$:

$$R'(y) = \frac{I_B(y-R(y))}{I_B(y-R(y)) + I_L(R(y))}, \qquad (4)$$

где

$$I_L(x) = \frac{u_L''(x)}{u_L'(x)} \text{ и } I_B(x) = \frac{u_B''(x)}{u_B'(x)}. \qquad (5)$$

$I_L(x)$ и $I_L(x)$ могут быть интерпретированы как *индексы неприятия риска*[1] кредитором и заемщиком. Экономический смысл выражения (4) достаточно прозрачен: *чувствительность объема процентных платежей $R(y)$ к изменению величины денежного потока y, определяемая первой производной $R'(y)$, оказывается выше, если степень неприятия риска у заемщика более высока, чем у кредитора $(I_B > I_L)$, и наоборот.* Нетрудно заметить, что данное утверждение плохо согласуется с реальной практикой банковского бизнеса, характеризующейся широким распространением кредитных договоров, предусматривающих фиксированные выплаты при платежеспособности заемщика или выплаты в размере суммы полученного денежного потока в случае его неплатежеспособности:

$$R(y) = \min\{y,\ R\}.$$

Более того, договора с подобными условиями получили наименование *стандартных кредитных договоров*. Анализируя причины несоответствия экономической интерпретации выражения (4) и реальной практики, можно прийти к принципиальному выводу о том, что, опираясь только на предположение о разделении рисков между кредитором и заемщиком, невозможно получить удовлетворительное объяснение закономерностей их взаимоотношений.

Большинство путей преодоления данной трудности связано с учетом фактора информационной асимметрии. В первую очередь он проявляется в ограниченности возможностей кредитора по доступу к информации об истинном значении дохода, полученного заемщиком. В частности, в моделях, предложенных в работах Таунсенда (Townsend), а также Гейла и Хельвига (Gale – Hellwig) [15, 6] изучается ситуация, в которой данные о величине дохода предпринимателя становятся известными банку только в результате относительно дорогостоящей процедуры аудита. Другая группа моделей данного направления (см., например, [4]) основывается на предпосылке о полном отсутствии у кредитора возможностей получить информацию о доходах заемщика. Традиционным объектом исследований, проводимых на их базе, становится система стимулов, побуждающих предпринимателя к выплате процентов по взятым кредитам. В простейшем случае это может быть угроза полного прекращения кредитования проектов «недобросовестного» заемщика. Также модели, описывающие контрактные отношения, возникающие в процессе выдачи-получения кредитов,

[1] Английский аналог *index of risk aversion*.

позволяют получить результаты, определяющие политику формирования требований по их обеспечению (гарантиям выполнения обязательств со стороны заемщика).

Еще одно из направлений развития современной микроэкономической теории банковской деятельности связано с так называемой проблемой кредитных ограничений. *Кредитным ограничением*[1] называется такая ситуация, в которой банки сознательно лимитируют свое предложение по предоставляемым кредитам, несмотря на то что потенциальные заемщики согласны производить по ним процентные выплаты в требуемом размере, а также нести другие «неценовые» элементы затрат. Типичным примером «неценовых» элементов затрат по кредитам являются требования по их обеспечению (гарантиям). Параллельно заметим, что случаи, когда заемщику отказывается в предоставлении кредита по причинам отсутствия у него необходимых гарантий, либо когда он не получает его в силу проводимой банками политики ценовой дискриминации или же из-за существующих институциональных ограничений, не являются кредитными ограничениями в классической трактовке данного понятия.

Сущность явления кредитного нормирования наглядно демонстрируется с помощью следующих примеров. Рассмотрим ситуацию, при которой на финансовом рынке действует банк-монополист. Его доход может быть представлен как функция от номинальной процентной ставки по кредитам $\rho(r_L)$. В том случае, если функция $\rho(r_L)$ имеет вид, показанный на рис. 1, т. е. не является монотонно возрастающей,[2] то в соответствии с принципом монополистического ценообразования по предельному доходу банк будет ограничивать свое предложение кредитов величиной, соответствующей ставке r_L^*.

Феномен кредитного ограничения в условиях конкуренции в банковском секторе может быть проиллюстрирован с помощью рис. 2. На нем приведены варианты возможного взаимного расположения кривых, задающих зависимости агрегированного предложения и агрегированного спроса на кредиты от номинальной процентной ставки. В случае, если спрос на кредиты задается кривой I, то на рынке устанавливается равновесие, которому отвечает процентная ставка $\hat{r}_L$. Од-

[1] Английский аналог *credit rationing*, т. е. дословно — *«нормирование кредитов»*.

[2] В качестве обоснования такого вида функции отдачи от кредитной деятельности банка может быть приведен довод об увеличении риска потерь от невозврата кредитов при росте их объема.

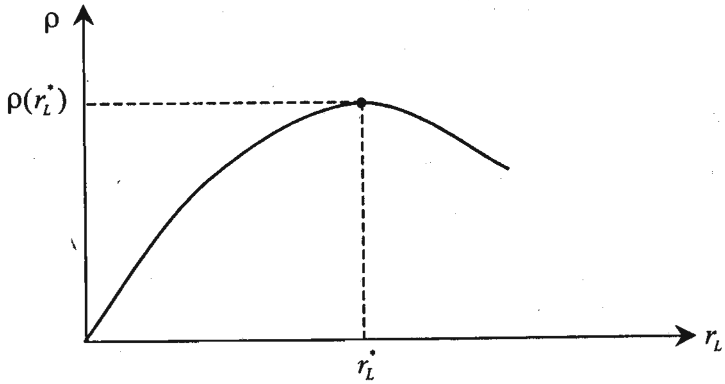

Рис. 1. Ожидаемый доход монополистического банка как функция от ставки по кредитам

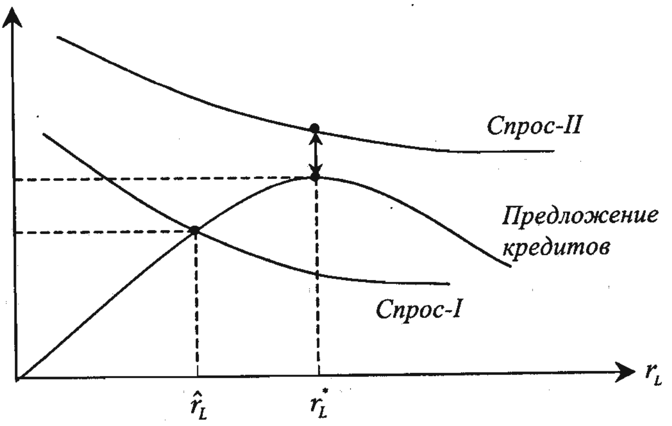

Рис. 2. Кредитные ограничения в условиях конкурентного равновесия

нако, если спрос таков, что ему соответствует кривая II, то линии спроса и предложения не пересекаются. Это означает, что устанавливающееся при некоторой ставке r_L^* равновесие будет характеризоваться ограниченным предложением кредитов при избыточном спросе на них.

Среди моделей, ориентированных на изучение особенностей поведения банков в условиях нормирования кредитов, может быть выделена модель Штиглица—Вайса (Stiglitz—Weiss), см. [14]. В ее рамках с использованием терминологии теории игр описывается деятельность банков, которые выступают в качестве игроков, устанавливающих цены на кредитном рынке и объемы на рынке депозитов.

В первой главе кратко упоминались функции банков, связанные с *управлением рисками*. Однако соответствующие модели в данной книге не рассматриваются.[1] Это может быть оправдано тем, что на настоящий момент существует достаточное количество изданий, посвященных данной теме, см. например [1]. Дополнительно следует отметить и то, что модели и методы риск-менеджмента носят достаточно универсальный характер и применимы к задачам, возникающим как в банковской сфере, так и в деятельности фирм иных типов (страховых компаниях, инвестиционных и пенсионных фондах, брокерских фирмах и т. д.).

Наконец, завершая разговор о существующих на текущий момент областях микроэкономического моделирования банковских и финансовых фирм, следует упомянуть о *задачах государственного регулирования деятельности банков*. Необходимо отметить, что они по своей природе в значительной мере отличаются от задач и методов, развиваемых в общеэкономической теории регулирования промышленных и торговых фирм. В этой связи очень немногие выводы и положения этой теории могут быть распространены на процессы, происходящие в банковских учреждениях.

В настоящей книге мы так или иначе уже затрагивали отдельные аспекты банковского регулирования.[2] В частности, приводились аргументы, обосновывающие необходимость контроля работы банков со стороны государства, а при определенных обстоятельствах — и его вмешательства. К ним относятся доводы об особой социальной роли банков в жизни общества. Также предлагалось брать во внимание тот факт, что последствия от провалов в деятельности банков оказывают негативное влияние на значительное количество связанных с ним экономических субъектов (в том числе и других банков), вызывая, таким образом, эффект «цепной реакции». Еще одним аргументом в пользу мероприятий по внешнему контролю и регулированию является так называемая «хрупкость» банковских институтов — постоянно присутствующая возможность разорения при одномоментном отзыве вкладчиками своих средств. Наконец, нельзя не упомянуть доводы, вытекающие из учета факторов информационной асимметрии и морального ущерба.

[1] В качестве примера может быть названа модификация модели Монти—Кляйна, в которой учитывается фактор риска ликвидности, предложенная в [10].
[2] См., например, п. 1.3.6 о регулировании процессов привлечения средств.

Для общей теории экономического регулирования традиционно присущи *нормативные подходы*, или, другими словами, она в основном нацелена на разработку некоторых «оптимальных» правил и рекомендаций по тому, как следует осуществлять регулирующие воздействия. В то же время в литературе по банковскому регулированию преобладают *позитивные подходы*, то есть внимание сосредоточено на анализе реально проводимой политики. Как правило, задачи исследований формулируются таким образом, чтобы получить ответы на такие вопросы, как: достигает или нет своей цели та или иная мера, какие побочные результаты дает рассматриваемое ограничение и т. п.

Можно выделить следующие основные классы регулирующих мер в банковском секторе:[1]

1. Задание потолка (ограничения сверху) для ставки процентных выплат по депозитам.
2. Ограничения на вход в отрасль (например, через требования, которым должен удовлетворять вновь создаваемый банк).
3. Ограничения на состав и структуру портфеля активов банковского учреждения.
4. Обязательное страхование депозитов (создание обязательных резервов).
5. Требования по структуре капитала (задание нормативов на соотношение собственного и заемного капитала).
6. Осуществление мониторинга (регулярного контроля).

Перечисленный список определяет проблемы, решаемые в микроэкономических исследованиях, посвященных банковскому регулированию. Среди важнейших из них, имеющих несомненное теоретическое и практическое значение, могут быть названы:

- необходимость и причины существования центральных банков, могут или нет функции центральных банков выполняться учреждениями, не контролируемыми государством;
- выработка рекомендаций по тому, как должны формироваться ограничения на состав и структуру портфеля банковских активов;
- модели, описывающие процессы страхования банковских депозитов;
- процедуры выработки решений о банкротстве банка: кто и согласно каким правилам должен принимать соответствующие решения;

[1] Некоторые из них уже упоминались, например, в п. 1.3.6, п. 3.2.3.

- проблема недопущения со стороны государства разорения больших банков, оказавшихся на грани банкротства, или, как еще говорят: может ли банк быть слишком большим для того, чтобы разориться?

Остановимся теперь на ряде «технических» аспектов процесса построения и практического применения моделей банков. Начало исследований, посвященных разработке математической модели банковской фирмы, принято связывать с работой Фрэнсиса Эджуорта, опубликованной в 1888 г. (см. [5]). В дальнейшем очень многие из экономистов с мировым именем работали над данными задачами и внесли значительный вклад в их решение. В то же время следует отметить, что и на настоящий момент экономико-математическое моделирование банков остается научной областью с весьма размытыми границами. Она характеризуется наличием большого количества методологических подходов, различных по своей природе, а иногда и противоречащих друг другу.

Прежде всего такое положение связано с чрезвычайной сложностью самого изучаемого предмета. Она в значительной мере предопределила остроту споров вокруг так называемой проблемы «полных» и «частичных» моделей банковской фирмы.

Модели, изложенные в предыдущих главах, в силу возможностей лежащего в их основе методологического аппарата были способны осветить лишь отдельно взятые стороны и закономерности процесса работы банка. По этой причине их также называют *частичными моделями банковской фирмы.*

Среди всевозможных видов частичных моделей на настоящий момент лидирующее положение занимают две группы. Это модели, основанные на методах теории оптимального портфеля и управления рисками, с одной стороны, и модели, реализующие производственно-организационный подход, — с другой.

К несомненным достоинствам моделей, составляющих первую группу, относят учет в них факторов риска и неопределенности. В качестве примера исследований, развивающих данное направление, могут быть названы такие работы, как [7, 8, 12]. В то же время существует стандартный набор претензий, предъявляемых к этому классу моделей. Среди них, во-первых, — абстрагирование от учета издержек, связанных с расходом реальных ресурсов, а во-вторых, классический портфельный подход, который трактует поведение банков как субъектов конкурентного рынка, принимающих установившиеся цены и ставки как данность, что, допустим, исключает возможность учета и изучения многих аспектов политики управления пассивами.

В свою очередь, в адрес моделей, основанных на принципах организационно-производственного подхода и классической теории фирмы,[1] вполне справедливо могут быть высказаны критические замечания, касающиеся отсутствия адекватного учета рисковых характеристик активов и абстрагирования от проблем их портфельного управления.

Как нетрудно догадаться, преодоление названных трудностей связано с синтезом обоих подходов, приводящим к построению так называемых полных моделей. Под ***полной моделью банковской фирмы*** подразумевается модель, которая комплексно описывает все функции, выполняемые банком, включая расчетно-платежные услуги, трансформацию активов, управление ликвидностью, выбор портфеля активов, проведение политики ценообразования на активы и пассивы и т. д.

В качестве типичного примера «полной» модели в профессиональной литературе принято рассматривать модель, предложенную Сили (Sealey), см. [13]. В ней при описании поведения финансовой фирмы (посредника) учитываются как возможные действия по управлению портфелем рисковых активов, так и факторы издержек, а также проводимая политика воздействия на депозитные ставки. Сравнительно-статический анализ, осуществляемый в рамках модели Сили, позволяет определить воздействие несклонности к риску финансовых посредников на принятие ими оптимальных решений. Существуют и другие достаточно известные «полные» модели, например, модель Балтенспергера (Baltensperger), см. [2].

В то же время следует отметить, что определение «полная» в настоящем контексте может применяться с большой долей условности. Действительно, ведь речь идет не столько о всеобъемлющем охвате в рамках модели абсолютно всех операций, выполняемых типичным банком, и написании законченной картины его деятельности, сколько о сочетании в ней двух важнейших подходов к изучению банковских фирм, отражающих, соответственно, две важнейшие группы решаемых ими задач.

Как уже отмечалось, органическим (принципиально неустранимым) недостатком всех теоретико-математических моделей является их сосредоточенность (локализованность) на относительно ограниченном круге характеристик описываемых объектов (в нашем случае — банков). Выделение такого круга из целостной совокупности свойств, при-

[1] См., например, [3, 9, 11].

сущих поведению финансовых институтов, и, соответственно, абстрагирование от всех остальных их черт и особенностей является необходимым условием для конструктивного изучения. Под термином «конструктивное изучение» подразумевается возможность построения обозримой экономической модели объекта, к анализу которой может быть корректно и результативно применен существующий математический аппарат. При несоблюдении этих требований мы рискуем получить модель, хорошо отражающую реальность, но, к сожалению, неработоспособную. Таким образом, адекватность и работоспособность модели являются своеобразными полюсами, между которыми ее авторы должны искать «золотую середину».

Достаточно эффективным средством решения данной дилеммы является применение методов *имитационного моделирования.* Данные методы подразумевают исследование интересующего нас объекта на базе так называемой *имитационной модели.* Под имитационной понимается такая модель, которая, имея иную по сравнению с исходным объектом природу, одновременно обладает набором схожих свойств (имитирует его), что в конечном счете позволяет выводы, полученные при работе с моделью, переносить на сам объект. Характеристическим свойством имитационных моделей является возможность проведения на их базе экспериментов (многократно повторяемых опытов со случайными или псевдослучайными исходами). Результатами такого «проигрывания» моделей, как правило, являются оценки значений функциональных (операционных) характеристик имитируемой системы.

В подавляющем большинстве случаев практическая реализация имитационных моделей осуществляется в форме программного обеспечения для ЭВМ. Очевидно, что такая форма работы с ними обладает такими преимуществами, как гибкость, быстродействие, возможность многовариантного анализа поведения исследуемого объекта при относительно небольших затратах.

Типичная ситуация, в которой оказывается эффективным применение аппарата имитационного моделирования, характеризуется отсутствием явных аналитических решений, громоздкостью и неработоспособностью классических математических моделей. В подобных условиях представляется целесообразным попытаться описать свойства и закономерности поведения изучаемой системы в виде некоторых алгоритмов и реализовать их в форме программного обеспечения для вычислительной машины.

Как нетрудно заметить, с подобным положением дел мы сталкиваемся при работе с моделями деятельности банков и финансовых фирм. Конструктивным выходом представляется сочетание алгоритмов, построенных на базе локальных и частичных аналитических моделей, в рамках интегрированной имитационной модели, позволяющей в комплексе оценить предполагаемые направления развития банка и сопровождающие данный процесс качественные и количественные эффекты.

Среди основных этапов процесса имитационного моделирования можно выделить:

- *анализ характеристик и закономерностей функционирования управляемого объекта*: выделение на содержательном уровне системы ограничений (ресурсных, физических, законодательных, социальных и т. п.), определение показателей измерения и оценки результатов, формулирование целей и проблем развития;
- *конструирование имитационной модели*: переход от реального объекта к имитирующим его поведение логическим схемам и алгоритмам (моделям), формальная постановка задач, решаемых в рамках имитационной модели;
- *подготовка системы данных для модели*: разработка информационного обеспечения, необходимого для функционирования имитационной модели, в том числе определение структуры и способов представления данных, источников их получения, форм и режимов хранения, установка взаимосвязей и взаимозависимостей между различными массивами данных;
- *программная реализация имитационной модели*: создание на основе логических схем, алгоритмов, описаний и представлений данных, разработанных на предыдущих этапах, программных продуктов для ЭВМ, обеспечивающих возможность непосредственной практической эксплуатации модели;
- *оценка адекватности модели*: сопоставление результатов, накопленных в процессе опытной эксплуатации модели, с информацией, полученной от реального имитируемого объекта, выявление и анализ расхождений и, при необходимости, внесение коррективов в модель;
- *проведение имитационных экспериментов*: очевидно, что данный этап является целевым (собственно говоря, ради него и строится имитационная модель). Он включает в себя стратегическое и тактическое планирование экспериментов, собственно экспериментирование («проигрывание модели»), которое завершается интерпретацией полученных результатов и принятием на основе сделанных выводов решений по управлению объектом (банком, финансовой фирмой).

Стратегическое планирование имитационного эксперимента нацелено на решение вопросов качественного плана. К таковым, например, могут относиться формулировка гипотезы о характере зависимостей между параметрами модели или же выбор конкретных методов исследования их взаимовлияния.

Тактическое планирование эксперимента связано с определением способов и условий его проведения. Типичными задачами тактического планирования являются выбор начальных значений для параметров модели или же определение порядка (последовательности) их варьирования.

Одним из наиболее важных моментов в процессе работы с имитационной моделью является анализ ее чувствительности. Под ним понимается определение степени изменчивости значений целевых показателей модели по отношению к колебаниям входных параметров. Так, если при относительно небольших изменениях исходных данных происходят значительные изменение в результатах моделирования, то это является достаточным основанием для дополнительных более детальных исследований взаимосвязей между соответствующими переменными.

К несомненно положительным качествам методов имитационного моделирования могут быть отнесены:

- предоставление исследователю возможностей по наблюдению как конечного результата функционирования наблюдаемого объекта, так и самого процесса его функционирования, приводящего объект к данному результату;
- широкие возможности по временнóму масштабированию процессов жизнедеятельности моделируемых объектов;
- обеспечение многовариантности исследований;
- многофункциональность имитационных моделей, заключающаяся в возможностях по гибкому выбору и последующим модификациям системы целей и критериев, преследуемых при проведении имитационных экспериментов.

В частности, имитационные методы могут быть достаточно эффективно использованы при разработке комплексной модели динамики совокупной системы финансовых потоков в банке. При этом поведение отдельных финансовых ресурсов может быть описано с помощью алгоритмов, построенных на основе моделей, рассмотренных в главе 4.

В то же время, перечисляя несомненные достоинства имитационных моделей, нельзя одновременно не обратить внимание на присущие им недостатки.

- Поскольку имитационные модели по своей природе являются всего лишь средством для проведения некоторого численного эксперимента, то результаты, получаемые с их помощью, представляют собой не что иное, как частные случаи (возможные варианты) развития моделируемого объекта. Соответственно, все выводы и заключения, делаемые на их базе, носят эвристический характер и в определенных случаях могут существенно искажать действительное положение дел.
- Во многих случаях получение оценки степени близости (или несоответствия) между имитационной моделью и реальным объектом оказывается весьма проблематичным.
- В подавляющем большинстве случаев в основе процесса имитации лежит некоторый статистический эксперимент, в ходе которого применяются некоторые генераторы псевдослучайных величин. Погрешности, объективно присущие таким генераторам, могут вносить значительные искажения в результаты, получаемые в ходе «проигрывания» моделей.

Завершая разговор о возможностях использования методов имитационного моделирования для решения задач банковской деятельности, нельзя не обратить внимание на обратное воздействие, оказываемое результатами, получаемыми в рамках имитационных экспериментов на теоретические экономико-математические модели. Действительно, анализ и обобщение накопленных в ходе имитационных экспериментов данных достаточно часто позволяют лучше понять качественные закономерности, присущие поведению управляемых объектов, и отразить их в аналитическом виде. Последнее рассуждение дополнительно подчеркивает справедливость того факта, что успешное решение задач по управлению деятельностью такого учреждения, как банк, подразумевает комплексное применение целостной системы моделей и методов как теоретико-аналитической, так и эмпирической природы.

Литература

1. *Первозванский А. А., Первозванская Т. Н.* Финансовый рынок: расчет и риск. М., 1994.
2. *Baltensperger E.* Alternative approaches to the theory of the banking firm // *Journal of Monetary Economics*, vol. 6, 1980.
3. *Berger A. N., Humphrey D. B.* Bank scale economies, mergers, concentration, and efficiency: the U.S. experience // *BOG finance and economics discussion series*, August, 1994.
4. *Bolton P., Scharfstein D.* A theory of predation based on agency problems in financial contracting // *American Economic Review*, vol. 80(1), pp. 93–106, 1990.
5. *Edgeworth F.* Mathematical Psychics. 1888.
6. *Gale D., Hellwig M.* Incentive compatible debt contracts: The one-period problem // *Review of Economic Studies*, vol. L11, pp. 647–663, 1985.
7. *Hart O. D., Jaffee D. M.* On the applications of portfolio theory to depository financial intermediaries // *Review of Economic Studies*, January 1974.
8. *Kane E. J., Malkiel E. G.* Bank portfolio allocation, deposit variability and the availability doctrine // *Quarterly Journal of Economics*, February, pp. 113–134, 1965.
9. *Klein M.* A Theory of the banking firm // *Journal of Money, Credit and Banking*, November 1971.
10. *Prisman E., Slovin M., Sushka M.* A general model of the banking firm under conditions of monopoly, uncertainty and resource // *Journal of Monetary Economics*, vol. 17(2), pp. 293–304, 1986.
11. *Pyle D. H.* On the theory of financial intermediation // *Journal of Finance*, June, 1971.
12. *Santomero A. M.* Modelling the Banking firm: A Survey // *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 16(4), 1984.
13. *Sealey C. W., Lindley J. T.* Inputs, outputs, and a theory of production and cost at depository financial institutions // *Journal of Finance*, vol. 32, pp. 1251–1266, 1977.
14. *Stiglitz J., Weiss A.* Credit rationing in markets with imperfect information // *American Economic Review*, vol. 71(3), pp. 393–410, 1981.
15. *Townsend R.* Optimal contracts and competitive markets with costly state verification // *Journal of Economic Theory*, vol. 21, pp. 265–93, 1979.

Предметный указатель