МИНИСТЕРСТВО ЗДРАВООХРАНЕНИЯ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

УНИВЕРСИТЕТ АДАМ
Департамент
математических и естественно-научных дисциплин

С.Ц. Манжикова, Ч.А. Иманалиева, Н.Ш. Назарбаева

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО МЕДИЦИНСКОЙ МАТЕМАТИКЕ

для студентов 1 курса специальности
«Лечебное дело»

Рекомендовано Ученым советом Университета Адам в качестве учебно-методического пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего профессионального образования – программам специалитета по специальности «шифр и наименование направления подготовки»

Бишкек
2022

УДК 519.7
ББК 22.18
У 91

Составители: доц. канд. физ.-мат. наук Манжикова С.Ц., ст. преп. Иманалиева Ч.А., преп. Назарбаева Н.Ш., преп. Исмаилова Б.И.

Рецензенты: Абдылдаева А.Р., доц. канд. физ.-мат. наук, кафедра прикладной математики и информатики КГТУ им. И.Раззакова,

Осмонова Р.Ч., доц. канд. физ.-мат. наук, кафедра прикладной математики и информатики КГТУ им. И.Раззакова

С.Ц. Манжикова, Ч.А. Иманалиева, Н.Ш. Назарбаева

У 91 Учебно-методическое пособие к практическим занятиям по медицинской математике / С.Ц. Манжикова и др. – Б.: 2022. 176 с.

ISBN 978-9967-479-60-9

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов лечебного факультета и направлена на получения высококвалифицированных студентов, которые способны применять полученные математические знания для решения проблем профессиональной направленности.

Пособие содержит теоретические основы математики, состоит из пяти тем, которая разделена на подтемы, даны примеры решения задач, задания самостоятельной работы, справочный материал и список литературы.

У91 УДК 519.7
ББК 22.18

ISBN 978-9967-479-60-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время во всех разделах медицины активно используются различные математические методы. Они охватывают широкий круг вопросов, начиная с обработки данных и заканчивая построением математических моделей, описывающих различные процессы, протекающие в живом организме. Обучение будущих врачей математическим основам медицинских знаний в первую очередь должно быть направлено на получение высококвалифицированных специалистов, которые способны применять полученные математические знания для решения проблем профессиональной направленности. Стоит отметить, что особую ценность представляют не конкретные математические знания, полученные студентами медицинского вуза, а умение использовать их для достижения учебных, диагностических, лечебных целей, применять при использовании вычислительной техники и различного программного обеспечения. Также изучение математики способствует формированию не только профессиональных, но и многих общекультурных компетенций, которые необходимы специалисту любой профессии: способность логически мыслить, систематизировать и анализировать информацию, четко ставить цели, строить причинно-следственные связи.

Целью математической подготовки студентов медицинских вузов является ознакомление их с основными понятиями и методами современного математического аппарата как средства решения задач физического, химического, биологического и иного характера, встречающихся как в процессе изучения профильных дисциплин, так и в дальнейшей профессиональной деятельности. Использование математических методов позволяет внедрить в деятельность врача элементы математического моделирования явлений медицинской практики с целью их анализа и прогнозирования.

Содержание данного учебно-методического руководства соответствует типовой учебной программе по высшей математике для студентов медицинских вузов. Руководство включает в себя краткие теоретические сведения, примеры решения типовых задач, задания для выполнения на практических занятиях и самостоятельной работы, а также необходимые справочные материалы. При изложении теоретической части материала, основной акцент сделан не на строгих математических доказательствах соответствующих теорем, а на их смысле и возможностях практического применения в медицине, биологии, химии, фармации, что имеет особое значение для студентов медицинских специальностей.

Каждый раздел Руководства завершается фактически спланированным практическим занятием с определением компетенций, которые должны быть сформированы в ходе освоения соответствующих теоретических вопросов и практических навыков. Ставится задача приобретения таких компетенций как **ОК-1, ОК-4, ОК-8**, **СЛК-2, СЛК 5, ПК-5, ПК-6, ПК-27**, что позволит студентам

Знать

- основные математические и естественнонаучные понятия и законы;
- основные теоретические основы математических и естественнонаучных методы, применяемых в медицинской практике и здравоохранении;

Уметь

- использовать основные законы естественно-научных дисциплин;
- применять практически методы медико-биологического и математического анализа с использованием информационных технологий;
- анализировать полученные результаты экспериментальных исследований и наблюдений и интерпретировать их;

Владеть

- методиками применения математических и естественнонаучных законов;
- математическими методами решения профессиональных задач.

В конце каждого раздела приводятся вопросы для самоконтроля и соответствующие тесты. Предоставление такого материала студентам способствует их лучшей подготовке для предстоящего экзаменационного тестирования, например, в среде обучающей системы Moodle.

ТЕМА 1. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Понятие производной функции и понятие дифференциала функции является одним из основных понятий математического анализа. Производная характеризует быстроту изменения функции при изменении ее аргумента и может быть использована при математическом описании динамики химических реакций, при нахождении градиентов скорости, давления, концентрации, температуры и других величин.

1.1. Определение производной

Пусть на интервале $(x_0; (x_0 + \Delta x))$ определена функция $y = f(x)$**.** При приращении аргумента Δx**,** функция получит приращение Δy**,** которые определяются равенством: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$**.** Тогда отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1.1.}$$

выражает среднюю скорость изменения функции $f(x)$ относительно аргумента х на интервале $(x_0; x_0 + \Delta x)$.

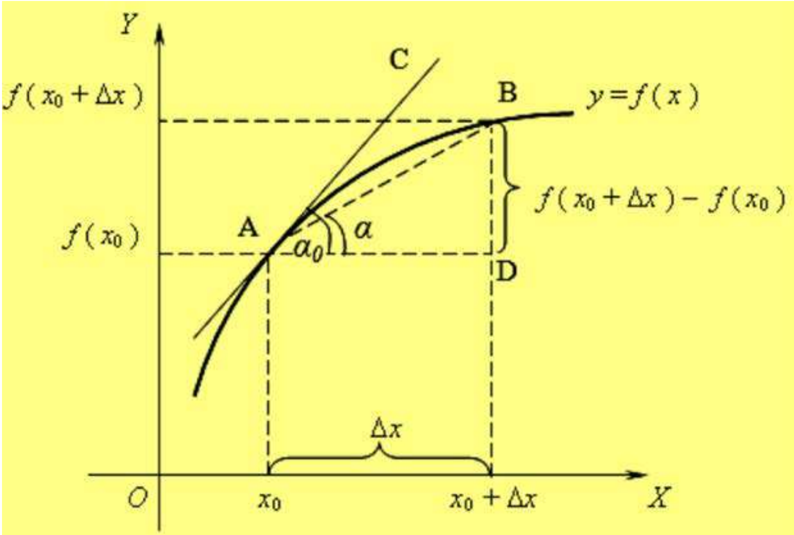

Рис. 1.1. *Определение производной*

Предел отношения приращения функции $\boldsymbol{\Delta y}$ к приращению аргумента $\boldsymbol{\Delta x}$, когда $\boldsymbol{\Delta x \to 0}$, при условии, что этот предел существует, называется ***производной*** функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ в точке $\boldsymbol{x \in (a; b)}$:

$$\boldsymbol{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} \tag{1.2}$$

Действие нахождения производной функции называется ***дифференцированием,*** а функцию, имеющую производную в точке ***x,*** называют ***дифференцируемой в этой точке.***

1.2. Механический смысл производной

Решение задач о нахождении скорости различных процессов приводит к понятию производной функции. Рассмотрим скорость прямолинейного движения. Пусть тело, двигаясь с переменной скоростью, прошло путь $\boldsymbol{S}$, тогда средняя скорость равна: $\boldsymbol{V}_{\text{ср}} = \frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{t}}$, где $\boldsymbol{t}$ - время движения тела.

Разобьем весь путь на $\boldsymbol{n}$ отдельных участков $\Delta\boldsymbol{S_1}$, $\Delta\boldsymbol{S_2}, \ldots, \Delta\boldsymbol{S_n}$, пройденные соответственно за время $\Delta\boldsymbol{t_1}$, $\Delta\boldsymbol{t_2}, \ldots, \Delta\boldsymbol{t_n}$, тогда скорости на этих участках можно определить как следующие отношения:

$$\frac{\Delta\boldsymbol{S_1}}{\Delta\boldsymbol{t_1}};\ \frac{\Delta\boldsymbol{S_2}}{\Delta\boldsymbol{t_2}}, \ldots, \frac{\Delta\boldsymbol{S_n}}{\Delta\boldsymbol{t_n}} \tag{1.3}$$

Если величину участков уменьшить, т.е. задать $\Delta\boldsymbol{t} \to \boldsymbol{0}$, то средняя скорость стремится к пределу, который представляет собой скорость движения тела в данный момент времени или мгновенную скорость:

$$\boldsymbol{V}_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{V}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta S}{\Delta t}\right). \tag{1.4}$$

Таким образом, мгновенная скорость есть предел отношения приращения пути $\Delta\boldsymbol{S}$ к приращению времени $\Delta\boldsymbol{t}$, когда приращение времени стремится к нулю. Если сравнить эту формулу с формулой (1.2), то можно сделать вывод, что скорость прямолинейного движения есть производная пути $\boldsymbol{S}$ по времени $\boldsymbol{t}$. В этом состоит ***механический смысл производной.***

1.3. Геометрический смысл производной

Пусть функция $\boldsymbol{y = f(x)}$ задана графически. Возьмем на кривой произвольно выбранную точку $\boldsymbol{M(x, y)}$. Зададим приращение аргументу Δx, тогда функция получит приращение Δy и на графике мы получим точку $\mathrm{M}_{\mathbf{1}}$ с координатами $(\boldsymbol{x + \Delta x; y + \Delta y})$. Проведем секущую $\mathrm{MM}_{\mathbf{1}}$ и обозначим угол наклона секущей к оси Ox через φ: тогда его тангенс равен

$$\boldsymbol{tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

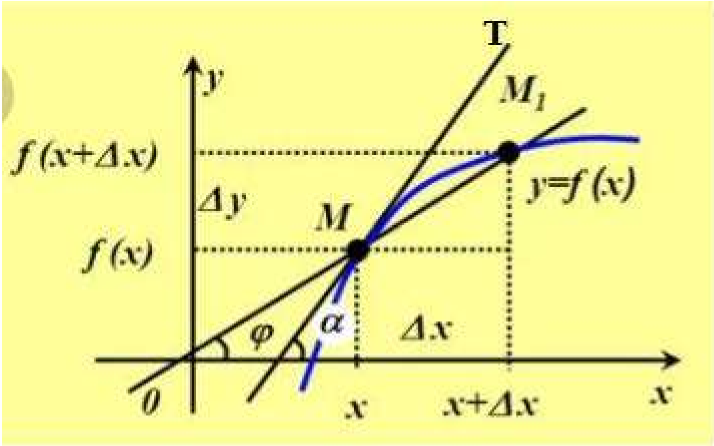

Рис. 1.2. Геометрический смысл производной

Пусть $\Delta \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}$, тогда точка $\mathrm{M}_{\mathbf{1}}$ будет стремиться к точке $\boldsymbol{M}$, величина угла $\boldsymbol{\varphi}$ будет изменяться. При приближении $\mathrm{MM}_{\mathbf{1}}$ к касательной МТ, угол $\boldsymbol{\varphi}$ приближается к углу $\boldsymbol{\alpha}$, следовательно $\boldsymbol{tg\alpha}$ равен угловому коэффициенту касательной:

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{tg\alpha} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) \qquad (1.5)$$

Таким образом, ***геометрический смысл производной*** заключается в том, что она есть угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке.

1.4. Основные правила дифференцирования

1.	***Постоянный множитель можно выносить за знак производной*** $(Cu)'_x = Cu'_x$
2.	***Производная алгебраической суммы (разности) функций равна алгебраической сумме (разности) производных этих функций*** $(u \pm v)'_x = u'_x \pm v'_x$
3.	***Производная произведения двух функций находится по формуле*** $(uv)'_x = uv'_x + vu'_x$
4.	***Производная частного двух функций определяется по формуле*** $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'_x v - v'_x u}{v^2}$
5.	***Производная сложной функции равна произведению производных от функций, ее составляющих.*** ***Пусть*** $y=f(u)$, $u=g(x)$. ***Тогда*** $y'=f'(u)\cdot u'(x)$ ***или*** $\frac{dy}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

1.5. Производные от основных элементарных функций

Таблица производных			
$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{(2\sqrt{x})}$
$kx+b$	k	e^x	e^x
x^2	2x	a^x	$a^x lna$
x^n	nx^{n-1}	tgx	$\frac{1}{cos^2x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$ctgx$	$-\frac{1}{sin^2x}$
$sinx$	$cosx$	lnx	$\frac{1}{x}$
$cosx$	$-sinx$	$\log_a x$	$\frac{1}{xlna}$

1.6. Производная сложной функции

Сложной функцией считается такая функция, у которой аргумент также является функцией. Сложная функция обозначается следующим образом: $\boldsymbol{y = u(v(x))}$, где функция $\boldsymbol{v(x)}$ считается аргументом $\boldsymbol{u\big(v(x)\big)}$. Производная сложной функции равна произведению производных от функций, ее составляющих, т.е.

$$\boldsymbol{y'_x = u'(v) \cdot v'(x) \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}} \qquad (1.6)$$

1.7. Производные высших порядков

Производная от производной первого порядка называется *производной второго порядка* и обозначается $\boldsymbol{y''_{xx}}$ или $\boldsymbol{f''(x)}$. Производная второй производной называется *производной третьего порядка* и т.д.

Физический смысл производной второго порядка заключается в том, что вторая производная от пути $\boldsymbol{S}$ по времени $\boldsymbol{t}$ равна мгновенному ускорению переменного движения:

$$\boldsymbol{a}_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{a}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right) = \boldsymbol{V'_t = S''_{tt}} \qquad (1.7)$$

1.8. Дифференциал функции и его геометрический смысл

С понятием производной теснейшим образом связано фундаментальное понятие математического анализа – дифференциал функции.

Дифференциал функции равен произведению производной функции на приращение ее аргумента:

$$dy = y'\Delta x \qquad (1.8)$$

Дифференциал аргумента *x* равен его приращению, т.е. $dx=\Delta x$. Тогда

$$dy = y'dx \qquad (1.9)$$

Дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал аргумента.

Формула (1.9) используется при вычислениях дифференциалов. Согласно определению, производная функции $y = f(x)$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

Известно, что разность между переменной величиной (в данном случае это $\frac{\Delta y}{\Delta x}$) и ее пределом (y') есть величина бесконечно малая (α). Поэтому имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - y' = \alpha,$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$; отсюда

$$\Delta y = y'\,\Delta x + \alpha\Delta x \qquad (1.10)$$

Из соотношения (1.10) следует, что приращение функции состоит из двух слагаемых $\boldsymbol{y' \Delta x}$ и $\boldsymbol{\alpha \Delta x}$, причем второе слагаемое ($\boldsymbol{\alpha \Delta x}$), как произведение двух бесконечно малых ($\boldsymbol{\alpha}$ – бесконечно малая величина по определению, а $\boldsymbol{\Delta x}$ – по условию) является бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $\boldsymbol{\Delta x}$. Следовательно, слагаемым $\boldsymbol{\alpha \Delta x}$ в равенстве (1.10) можно пренебречь по сравнению с $\boldsymbol{y' \Delta x}$, т.е. можно записать

$$\boldsymbol{\Delta y \approx y' \Delta x} \tag{1.11}$$

С учетом определения дифференциала – формула (1.8) – можно записать:

$$\boldsymbol{dy \approx \Delta y.} \tag{1.12}$$

Дифференциал функции при малых $\boldsymbol{\Delta x}$ приблизительно равен приращению функции:

$$\boldsymbol{dy \approx \Delta y.}$$

Геометрический смысл дифференциала функции можно пояснить с помощью рисунка 1.3, на котором функция $\boldsymbol{y = f(x)}$ задана графически.

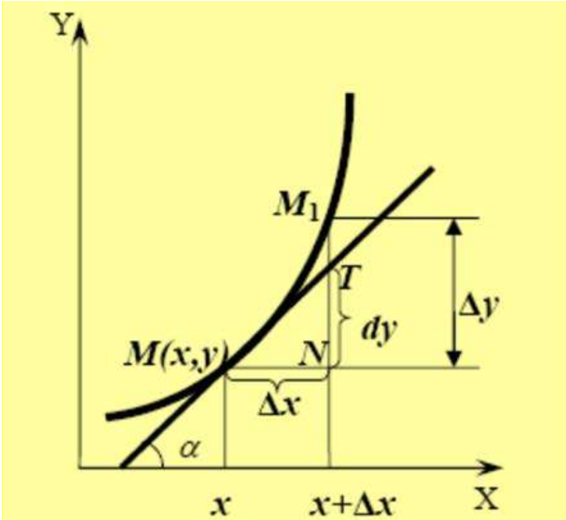

Рис. 1.3. Геометрический смысл дифференциала функции

Возьмем на графике точку **M(*x*,*y*)** и точку **M1(*x*+*Δx*, *y*+*Δy*).** Проведем касательную к графику в точке **M**. Производная от функции в точке **M** равна тангенсу угла наклона касательной: $y' = tg\alpha$. Из треугольника **MTN**

$$y' = tg\alpha = \frac{TN}{\Delta x}.$$

По определению дифференциала (1.8):

$$dy = y'\Delta x = \frac{\mathrm{TN}}{\Delta \mathrm{x}}\Delta x = TN$$

Таким образом, **дифференциал функции $y = f(x)$ геометрически представляет собой приращение**

ординаты касательной к графику функции в точке с абсциссой x при переходе от точки касания к точке с абсциссой $x+\Delta x$.

Правила вычисления дифференциала

Таблица для вычисления дифференциалов основных элементарных функций получается из таблицы для вычисления производных этих функций путем умножения соответствующей производной на дифференциал независимой переменной dx.

1	**Дифференциал произведения $c=const$ на функцию u**	$d(cu) = cdu$
2	**Дифференциал алгебраической суммы функций**	$d(u \pm v) = du \pm dv$
3	**Дифференциал произведения функций**	$d(uv) = udv + vdu$
4	**Дифференциал частного двух функций**	$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$

1.9. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Пусть имеется функция $\boldsymbol{y = f(x)}$ и имеется точное значение этой функции в точке $\boldsymbol{x_0}$, равное $\boldsymbol{f(x_0)}$. Необходимо найти значение функции в точке, находящейся достаточно близко к данной, т.е. в точке $\boldsymbol{x = x_0 + \Delta x}$.

Для дифференцируемой в точке $\boldsymbol{x_0}$ функции $\boldsymbol{f(x)}$, у которой $\boldsymbol{f(x_0) \neq 0}$, при достаточно малых $|\Delta \boldsymbol{x}|$ выполняется условие: $\Delta \boldsymbol{y} \approx \boldsymbol{dy}$. Учитывая, что

$$\Delta \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0} + \Delta \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) \text{ и } \boldsymbol{dy} = \Delta \boldsymbol{y},$$

получаем $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0} + \Delta \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) \approx \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x_0})\Delta \boldsymbol{x}$,
откуда

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0} + \Delta \boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) + \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x_0})\Delta \boldsymbol{x}.$$

Именно последняя формула применяется для приближенных вычислений значений различных функций, что показывается далее на примерах.

По аналогии с линеаризацией функции одной переменной можно при приближенном вычислении значений функции нескольких переменных, дифференцируемой в некоторой точке, заменять ее приращение дифференциалом. Таким образом, можно находить приближенное значение функции нескольких (например, двух) переменных по формуле:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0,y_0) \cdot \Delta y,$$

где

$$\Delta x = x - x_0,\ \Delta y = y - y_0.$$

Пример практического применения последних формул также приводится далее.

1.10. Максимумы и минимумы функций

Пусть $f(x)$ является непрерывной функцией на закрытом интервале [c, d]. Считается, что функция $f(x)$ имеет ***локальный максимум*** в точке A, если и только если $f(x) \le f(A)$ для всех x в некотором открытом интервале, содержащем A. Считается также, что функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке B, и только если $f(B) \ge f(x)$ для всех x в некотором открытом интервале, содержащем B. В каждой из этих точек (A и B) касательная к кривой $f(x)$ касательная параллельна к оси x , а производная функции равна нулю: $f'(A) = 0$ и $f'(B) = 0$ (рис. 1.4). Слева от точки максимума A наклон касательной положительный, т.е. $f'(x) > 0$. В то же самое время для точек справа наклон касательной отрицательный, т.е. $f'(x) < 0$. Другими словами, в точке максимума производная $f'(x)$ меняет свой знак с положительного на отрицательный. В точке же минимума

f'(x) меняет знак с отрицательного на положительный соответственно.

Если функция ***f(x)*** дифференцируема в точке ***x*** и

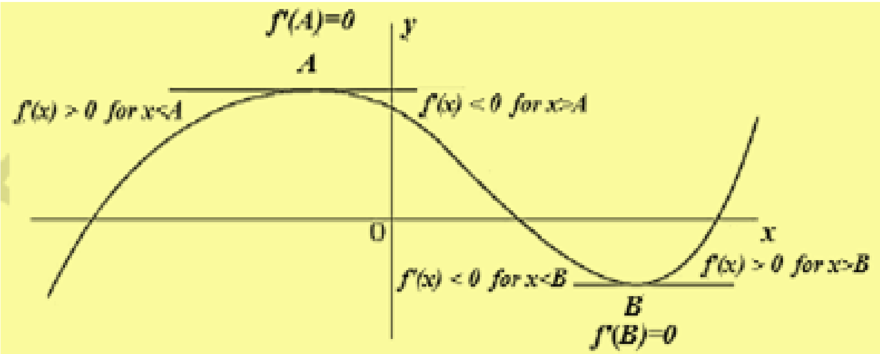

Рис.1.5. Локальные максимум и минимум

f'(x) = 0, точка ***x*** называется ***критической точкой*** или ***стационарной точкой*** функции ***f(x)***.

Чтобы найти максимальное или/и минимальное значения функции ***f(x)***, необходимо:

1) Решить алгебраическое уравнение

$$f'(x) = 0.$$

Корни x_1, x_2, x_3, … этого уравнения являются критическими точками.

2) Вычислить вторую производную функции ***f''(x)*** и определить ее знак в критических точках.

Если вторая производная положительна в стационарной точке, т.е. $f''(x_1) > 0$, точка x_1 является локальным минимумом; если же $f''(x_2) < 0$, точка x_2 является локальным максимумом; если $f''(x_3) = 0$, точка x_3 может быть, а может и не быть локальным экстремумом. В этом случае необходимо определить знак первой производной $f'(x)$ слева от точки x_3 $(x < x_3)$ и справа от нее $(x > x_3)$. Если знак $f'(x)$ меняется с положительного на отрицательный в точке x_3, значит, функция $f(x)$ в точке x_3 имеет локальный максимум. Если же знак $f'(x)$ меняется с отрицательного на положительный в точке x_3, значит, функция $f(x)$ в точке x_3 имеет локальный минимум.
3) Определить значения функции в точках максимума и минимума.

1.11. Применение понятия «произвольная функция» в медицине, химии и биологии

Производная в медицине. Реакция организма на введенное лекарство может выражаться в повышении кровяного давления, уменьшении температуры тела, изменении пульса или других физиологических показателей. Степень реакции зависит от назначенного лекарства, его дозы.

Предположим, что x обозначает дозу назначенного лекарства, y - функция степени реакции описывается функцией $\boldsymbol{y = R(x) = x^2(a - x)}$, где $\boldsymbol{a}$ - некоторая положительная постоянная. При каком значении $\boldsymbol{x}$ реакция максимальна?

Пример 1.1. Предположим, что x обозначает дозу назначенного лекарства, а $\boldsymbol{y = f(x)}$ – функцию степени реакции. $\boldsymbol{y = f(x) = x^2(a - x)}$ где, а – некоторая положительная постоянная. При какой дозе введенного лекарственного средства реакция организма максимальна?

Решение. Для решения задачи найдем 1-ю и 2-ю производные функции $\boldsymbol{y = f(x)}$. Имеем:

$$\boldsymbol{f'(x) = 2ax - 3x^2} \text{ и } \boldsymbol{f''(x) = 2a - 6x}.$$

Так как $\boldsymbol{x = \frac{2}{3}a}$ – корень уравнения $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ и в этой точке $\boldsymbol{f''\left(\frac{2}{3}a\right) = -2a < 0}$, то $\boldsymbol{x = \frac{2}{3}a}$ – тот уровень дозы, который дает максимальную реакцию организма на введение данного лекарства.

Биологический смысл производной. В биологии производная характеризует скорость размножения популяции микроорганизмов. Что такое популяция? Популяция – это совокупность особей данного вида, занимающих определенный участок территории внутри ареала вида, свободно скрещивающихся между собой и частично или полностью изолированных от других популяций, а также является элементарной единицей эволюции[1].

Пусть зависимость между числом особей популяции микроорганизмов $\boldsymbol{y}$ и временем $\boldsymbol{t}$ ее размножения задана уравнением $\boldsymbol{y = x(t)}$. Пусть $\boldsymbol{\Delta t}$ – промежуток времени от некоторого начального значения $\boldsymbol{t}$ до $\boldsymbol{t + \Delta t}$. Тогда $\boldsymbol{y + \Delta y = x(t + \Delta t)}$ – новое значение численности популяции, соответствующее моменту $\boldsymbol{t + \Delta t}$, а $\boldsymbol{\Delta y = x(t + \Delta t) - x(t)}$ – изменение числа особей организмов. Отношение $\boldsymbol{\frac{\Delta y}{\Delta t}}$ является средней скоростью размножения или, как принято говорить, средней производительностью жизнедеятельности популяции. Вычисляя предел $\boldsymbol{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}}$, получаем $\boldsymbol{y' = x'(t)}$, или производительность жизнедеятельности популяции в момент времени $\boldsymbol{t}$.

Пример 1.2. Размер популяции бактерий в момент $\boldsymbol{t}$ задается формулой $\boldsymbol{p(t) = 3000 + 100t^2}$. Найти скорость роста популяции $\boldsymbol{v(t)}$ в момент $\boldsymbol{t = 5}$ ч.

Решение. Находим производную функции $\boldsymbol{p(t)}$. Скорость роста популяции $v(t) = p'(t) = 200t$. В частности, при $\boldsymbol{t = 5}$ скорость роста составляет 1000 бактерий в час.

Химический смысл производной. Скорость

[1] Акимова Т. А., Хаскин В. В. Экология. Человек – Экономика – Биота - Среда: учебник для студентов вузов - 3 – е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2006

химической реакции – один из решающих факторов, который нужно учитывать во многих областях научно-производственной деятельности. Например, фармацевтам, химикам, разрабатывающим медицинские препараты, а также врачам, использующим эти препараты для лечения людей. Скорость химической реакции показывает, насколько быстро увеличивается количество продуктов реакции и/или уменьшается количество исходных веществ (реагентов).

Пусть дана функция $\boldsymbol{m = m(t)}$, где $\boldsymbol{m}$ – количество некоторого вещества, вступившего в химическую реакцию в момент времени $\boldsymbol{t}$. Приращению времени $\boldsymbol{\Delta t}$ будет соответствовать приращению $\boldsymbol{\Delta m}$ величины $\boldsymbol{m}$. Отношение $\frac{\Delta \mathbf{m}}{\Delta \mathbf{t}}$ – есть средняя скорость химической реакции за промежуток времени $\boldsymbol{\Delta t}$. Предел этого отношения $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}$ – есть скорость химической реакции в данный момент времени $\boldsymbol{t}$.

Пример 1.3. Пусть количество вещества, вступившего в химическую реакцию, задается зависимостью $\boldsymbol{p(t) = \frac{t^2}{2} + 3t - 3}$ (моль). Найти скорость химической реакции $\boldsymbol{v(t)}$ через 3 секунды.

Решение. Так как скорость химической реакции есть первая производная функции $\boldsymbol{p(t)}$, то имеем

$\boldsymbol{v(t) = p'(t) = t + 3}$. Подставив $\boldsymbol{t = 3}$, находим

$\boldsymbol{v(3) = 3 + 3 = 6}$ (моль/с).

Практическое занятие № 1
Нахождение производной и дифференциала функции

Занятие направлено на достижение таких компетенций студента как ОК-1, СЛК-2, ПК-6 и ПК-7. Для этого студент должен подготовиться к занятию и

знать следующие теоретические вопросы:

- Понятие производной и ее геометрический смысл.
- Механический смысл производной (привести примеры на вычисление скорости и градиента).
- Понятие сложной функции и правило дифференцирования сложной функции.
- Производные высших порядков. Физический смысл производной второго порядка.
- Дифференциал функции и его геометрический смысл.
- Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

В ходе занятия студент должен научиться делать следующее:

уметь

- Находить производные от элементарных и сложных функций.
- Находить производные высших порядков.
- Находить дифференциалы функций.
- Объяснить физический смысл производной первого и второго порядков.

владеть следующими техниками и приемами/методами:

- Правилами дифференцирования.

Примеры решения типовых задач:

Пример 1(а). Найти производную функции

$$y = x^5 - 6x + 4.$$

Решение. Для решения задачи необходимо применить правило дифференцирования алгебраической суммы: $(u \pm v \pm \omega)' = u' \pm v' \pm \omega'$ и формулу производной степени функции: $(x)^n = nx^{n-1}$. Тогда получим:

$$y' = (x^5)' - (6x)' + 4' = 5x^4 - 6.$$

Ответ: $y' = 5x^4 - 6.$

Пример 1(б). Найти производную функции

$$y = e^x \sin x.$$

Решение. Применяя правило дифференцирования произведения функции: $(u \cdot v)' = u'v + v'u$, находим:

$$y' = (e^x \cdot \sin x)' = (e^x)' \sin x + (\sin x)' e^x = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x).$$

Ответ: $y' = e^x(\sin x + \cos x).$

Пример 1(в). Найти производную функции $y = \frac{x}{x^2-1}$.

Решение. Применяя правило дифференцирования частного функции: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, находим: $y' = \left(\frac{x}{x^2-1}\right)' = \frac{(x)'(x^2-1) - x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{(x^2-1) - x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$.

Ответ: $y' = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$.

Пример 2(а). Найти производную функции

$$y = \sqrt{x^2+5}.$$

Решение. Данная функция может быть представлена в виде сложной степенной функции: $y = (x^2+5)^{\frac{1}{2}}$. В соответствии с формулой производной сложной степенной функции: $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ и имеем

$$y' = \left[(x^2+5)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(x^2+5)^{-\frac{1}{2}}(x^2+5)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}.$$

Ответ: $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$.

Пример 2(б). Найти производную функции

$$y = sin10x.$$

Решение. Применяя правило дифференцирования сложной функции:

$(sinu)' = cosu \cdot u'$ **и имеем** $y' = (sin10x)' = cos10x \cdot (10x)' = 10cos10x.$

Ответ: $y' = 10cos10x.$

Пример 2(в). Найти производную функции $\boldsymbol{y = sin^2x}$.

Решение. Данная функция является сложной, и ее производная определится следующим образом:

$$\boldsymbol{y' = (sin^2x)' = 2sinx \cdot (sinx)' = 2sinx \cdot cosx = sin2x.}$$

Ответ: $\boldsymbol{y' = sin2x.}$

Пример 3(а). Найти производную второго порядка от функции $\boldsymbol{y = log_2 x}$.

Решение. Находим первую производную:

$$\boldsymbol{y' = (\log_2 x)' = \frac{1}{xln2}}.$$

Зная, что производная второго порядка является производной от производной первого порядка, получаем:

$$\boldsymbol{y'' = (y')' = \frac{1}{ln2}\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{ln2 \cdot x^2}}$$

Ответ: $\boldsymbol{y'' = -\frac{1}{ln2 \cdot x^2}}$.

Пример 3(б). Точка движется по закону:

$\boldsymbol{x = t - sint.}$ Определить мгновенные скорость и ускорение точки.

Решение. Мгновенная скорость точки характеризуется первой производной от смещения *x* по времени ***t***:

$$\boldsymbol{V_{\text{мгн}} = x'_t = (t - sint)'_t = 1 - cost.}$$

Мгновенное ускорение точки характеризуется второй производной от смещения x по времени t:

$$a_{\text{мгн}} = V'_t = (1 - cost)'_t = sint.$$

Ответ: $V_{\text{мгн}} = 1 - cost; a_{\text{мгн}} = sint.$

Пример 4. Определите зависимость градиента концентрации от координаты, если зависимость концентрации от координаты задана функцией

$C(x) = C_0 e^{-kx}$, где k – константа, а C_0 есть концентрация вещества при $x=0$.

Решение. Величина градиента определяется выражением $\frac{dC}{dx}$ и характеризует быстроту изменения концентрации при изменении координаты. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции $(e^u)' = e^u \cdot u'$. В данном случае получим

$$\frac{dC}{dx} = C_0 e^{-kx}(-kx)' = -kC_0 e^{-kx}.$$

Ответ: Величина зависимости градиента концентрации от координаты

$$\frac{dC}{dx} = -kC_0 e^{-kx}.$$

Пример 5. Найти дифференциал функции $y = x^5 \cdot 5^x$.

Решение. По определению $dy = y'dx$, т.е. чтобы найти дифференциал одной переменной, нужно найти производную $y'(x)$ и умножить ее на dx. Искомый дифференциал будет:

$$dy = \left(x^5 \cdot 5^x\right)' dx = \left[\left(x^5\right)' 5^x + x^5 (5^x)'\right] dx$$
$$= \left[\left(5x^4 \cdot 5^x + x^5 \cdot 5^x \cdot ln5\right)\right] dx$$
$$= x^4 \cdot 5^x (5 + xln5) dx$$

Ответ: $dy = x^4 \cdot 5^x (5 + xln5) dx.$

Пример 6(а). Вычислить приближенно: $\sqrt{102}.$

Решение. Согласно формуле применения дифференциала в приближенных вычислениях: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ получаем: $\sqrt{102} = \sqrt{100 + 2}$ т.е. $x_0 = 100;$ $\Delta x = 2,$ тогда $\sqrt{102} \approx \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100}} \cdot 2 \approx 10,1.$

Пример 6(б). Вычислить приближенно: ***ln3.***

Решение. Согласно формуле применения дифференциала в приближенных вычислениях получаем:

$$ln3 = \ln(2,7 + 0,3) \approx ln2,7 + \frac{1}{2,7} \cdot 0,3$$
$$\approx 1 + 0,11 \approx 1,11$$

Пример 6(в). Применение дифференциала функции от двух переменных

Вычислить приближенное значение $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x,y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ и выберем $x_0 = 1,\ y_0 = 2.$

Тогда $\Delta x = 1{,}02 - 1 = 0{,}02;\ \Delta y = 1{,}97 - 2 = -0{,}03.$ Найдем значения частных производных $f'x\ (x_0,\ y_0)$ и

$f'_y(x_0,\ y_0)$:

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{3x_0^2}{2\sqrt{x_0^3+y_0^3}} = \frac{3\cdot 1}{2\sqrt{1+8}} = \frac{1}{2},$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{3y_0^2}{2\sqrt{x_0^3+y_0^3}} = \frac{3\cdot 4}{2\sqrt{1+8}} = 2.$$

В итоге, учитывая, что $f\ (1,2) = 3$, получаем

$$\sqrt{1,02^3 + 1,97^3} \approx 3+\frac{1}{2}\cdot 0,02 + 2\cdot(-0,03) = 2,95$$

Задания для самостоятельного решения:

Задание 1. Найти производные следующих функций:

а) $y=\frac{x^5}{5}+\frac{2}{x^2}-8$

б) $y=4x^{-4}-3x^{-2}+x$

в) $y=(3x+2)\cdot(x^2+2)$

г) $y=x^3\cdot\log_3 x$

д) $y=\sqrt{x^5}\cdot 5^x$

е) $y=e^x\cdot 6^x$

ж) $y=\frac{5x}{x+lnx}$

з) $y=\frac{sinx}{1+2cosx}$

и) $y=\frac{lnx-2}{\sqrt{x}}$

Задание 2. Найти производные следующих сложных функций:

а) $y=\frac{1}{3}cos^3 2x$

б) $y=4tg^3 3x$

в) $y=ctg^3 5x$

г) $y=2^{x^2+x^4}$

д) $y=\ln(ln2x)$

е) $y=sin2^x$

ж) $y=3\sqrt{x-sin5x}$

з) $y=\frac{1}{3}\sqrt{\cos(x^3+1)}$

и) $y=\sqrt{\ln(1-2x)}$

Задание 3. Найти производные второго порядка следующих функций:

а) $y = \sqrt{1 + x^3}$

б) $y = \frac{lnx}{x}$

в) $y = \ln(x^6 - 3)$

г) $y = 3cosx^3$

д) $y = x^5 sinx$

е) $y = e^x sinx$

ж) $y = e^x + arcctgx$

з) $y = 2e^{-x^4}$

и) $y = \sqrt[4]{x^2 - 1}$

Задание 4(а). Зависимость между количеством *x* вещества, полученного в некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением: $x = A(1 + e^{-kt})$, где A, k – постоянные. Определить скорость реакции.

Задание 4(б). Растворение лекарственных веществ из таблеток подчиняется уравнению $C = C_0 e^{-kt}$, где C – количество лекарственного вещества в таблетке, оставшееся ко времени растворения t; C_0 – исходное количество лекарственного вещества в таблетке; k – постоянная скорости растворения. Определить скорость растворения лекарственных веществ из таблеток.

Задание 4(в). Рост числа бактерий подчиняется закону $f(t) = \frac{1000e^t}{1+0,1(e^t-1)}$. Определить скорость роста числа бактерий.

Задание 5(а). Уравнение движения точки имеет вид $\boldsymbol{S(t) = 5 + 3t + t^2 + 0,3t^3}$. Определите мгновенную скорость и ускорение точки.

Задание 5(б). Смещение в ответ на одиночное мышечное сокращение (единичный импульс) описывается уравнением $\boldsymbol{y = te^{-\frac{t^2}{3}}}$, $\boldsymbol{t > 0}$. Определите скорость и ускорение в зависимости от времени.

Задание 6. При ламинарном течении крови по крупным сосудам ее слои имеют различную скорость в зависимости от расстояния $\boldsymbol{x}$ от оси сосуда:

$$\boldsymbol{V(x) = \frac{\Delta P}{4\eta e}(R^2 - x^2)},$$

где $\boldsymbol{\Delta P}$ – разность давления на участке сосуда длиной $\boldsymbol{l}$; $\boldsymbol{R}$ – радиус сосуда; $\boldsymbol{\eta}$ – коэффициент вязкости крови. Найдите величину градиента скорости на расстоянии $\boldsymbol{x}$ от оси сосуда.

Задание 7. Найти дифференциалы следующих функций:

а) $$\boldsymbol{y = \frac{e^{-4x}}{1 - x^4}}$$

е) $$\boldsymbol{y = x^3 \cdot \ln(1 - x^2)}$$

б) $$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}ctg^2x + ln \cdot cosx}$$

ж) $$\boldsymbol{y = 4^{ln4x}}$$

в) $$\boldsymbol{y = tg^2\left(\frac{x}{3}\right)}$$

з) $$\boldsymbol{y = \frac{1}{4}ln\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$$

г) $y = \dfrac{x \cdot lnx}{x-1}$ и) $y = \arcsin\left(1 - x^2\right)$

д) $y = 4^{\sqrt[3]{x^4}}$

Задание 8. Вычислить приближенно:

а) $\sqrt{35,2}$	г) $ln8$	ж) $6^{3,6}$
б) $\sqrt[3]{33}$	д) $\lg 15$	з) $cos86$
в) $\sqrt[3]{17}$	е) $ln103$	и) $sin43$

Вопросы для самоконтроля:

1. Производная функции одной переменной: определение, обозначение, таблица производных элементарных функций.
2. Частные и полная производные функции нескольких переменных: определение, обозначение.
3. Дифференциал функции: определение, обозначение, формулы для его нахождения.
4. Выражение производной функции через дифференциалы функции и аргумента.
5. Максимум и минимум функции, их определение.

Тестовые задания

Выберите один или несколько правильных ответов

1. НАХОЖДЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ НАЗЫВАЕТСЯ

1) интегрированием

2) дифференцированием

3) потенцированием

4) логарифмированием

2. ДИФФЕРИНЦИАЛ ФУНКЦИИ НАХОДИТСЯ ПО ФОРМУЛЕ:

1) $dx = y'dy$

2) $dy = y'dx$

3) $dx = x'dy$

4) $dy = x'dx$

9. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $y = 3x^4 + 5$ РАВНА

1) $12x^4 + 5$

2) $12x^3$

3) $12x^5$

4) $12x^3 + 5x$

Литература

1. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. Москва, Изд-во «Астрель» 2011. – 656 с.
2. Зайцев И.Л. Курс высшей математики. Москва, Изд-во «Высшая школа» 2013. – 253 с.

ТЕМА 2. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Интегральное исчисление является составной частью математического анализа и применяется при решении многих задач физики, химии и биологии именно в тех случаях, когда по известной производной требуется найти вид самой функции.

2.1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

Процесс дифференцирования, т.е. нахождение производной или дифференциала функции, с физической точки зрения, сводится к следующему: зная закон движения материальной системы, определить мгновенное значение скорости в данной точке траектории ее движения. С геометрической точки зрения, этот процесс состоит в нахождении $tg\alpha$ угла наклона касательной, проведенной к графику функции в данной точке.

Но часто ставится и обратная задача, т.е. необходимо определить закон движения материальной системы, зная ее скорость или по $tg\alpha$ угла наклона касательной, найти соответствующую функцию.

Для решения этой задачи вводится ***понятие неопределенного интеграла***, а сам процесс решения называется ***интегрированием***. Другими словами, если процесс дифференцирования состоит в нахождении производной данной функции, то ***процесс интегрирования – это нахождение функции по ее производной или***

дифференциалу.

Введем понятие первообразной функции. Функция ***F(x),*** имеющая функцию ***f(x)*** своей производной или ***f(x)dx*** своим дифференциалом называется ***первообразной данной функции:***

$$F'(x) = f(x); \tag{2.1}$$

$$dF(x) = f(x)dx \tag{2.2}$$

Пример 2.1. Основная задача механики состоит в нахождении положения, т.е. координат движущегося тела или материальной точки в любой момент времени. Для прямолинейного равноускоренного движения с начальной скоростью зависимость координаты от времени определяется следующей формулой:

$$F(x) = x(t) = x_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}, \tag{2.3}$$

где x_0 – начальная координата, V_0 – начальная скорость, a – ускорение.

Тогда мгновенная скорость есть:

$$F'(x) = x'(t) = V_0 + at.$$

При любых значениях x_0 выражение для скорости, т.е. производной остается одним и тем же.

Пример 2.1.2. Найти производные следующих функций:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{F_1(x) = x^3} \\ \boldsymbol{F_2(x) = x^3 + 3} \\ \boldsymbol{F_3(x) = x^3 - 5} \\ \boldsymbol{F_4(x) = x^3 + C, C = const} \end{aligned}\right\} \boldsymbol{F'(x) = f(x) = 3x^2}$$

Таким образом, одной производной или одному дифференциалу соответствует не одно, а множество первообразных.

Совокупность всех первообразных функций для дифференциала $\boldsymbol{f(x)dx}$ называется неопределённым интегралом и обозначается:

$$\int \boldsymbol{f(x)dx = F(x) + C}, \tag{2.4}$$

где $\int$ - знак неопределенного интеграла, $\boldsymbol{f(x)dx}$ – подынтегральное выражение, $\boldsymbol{f(x)}$ – подынтегральная функция, $\boldsymbol{C}$ – произвольная постоянная.

2.2. Свойства неопределенного интеграла

1.	**Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:** $$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$$
2.	**Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:** $$d\int f(x)dx = f(x)dx$$
3.	**Интеграл от дифференциала функции равен самой функции, сложенной с произвольной постоянной:** $$\int dF(x) = F(x) + C$$
4.	**Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:** $$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$
5.	**Интеграл алгебраической суммы функции равен алгебраической сумме интегралов этих функций:** $$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)]\, dx = = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \dots \pm \int f_n(x)dx$$

ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n, C - const, n \neq -1$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1, a - const$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, a \neq 0$
$\int \cos x\, dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{x^2+1} = arctg\, x + C$
$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\, x + C$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C, a \neq 0$
$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctg\, x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\|a\|} + C, a \neq 0$
$\int \mathrm{tg}\, x\, dx = -ln\|\cos x\| + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$\int \mathrm{ctg}\, x\, dx = ln\|\sin x\| + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \left\|x + \sqrt{x^2+a}\right\| + C, a \neq 0$

2.3. Основные методы интегрирования

1. Метод непосредственного интегрирования основан на использовании свойств неопределенного интеграла и приведении подынтегрального выражения к табличной форме.

Например, $\int(x+1)^2dx = \int(x^2-2x+1)dx = \int x^2dx - 2\int xdx + \int dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + C$.

Каждое промежуточное интегрирование дает свою произвольную C. Алгебраическая сумма произвольных постоянных будет также произвольной постоянной. Поэтому в окончательном результате принято ставить одну произвольную постоянную.

2. Метод подстановки (замены переменной). Этот метод основан на введении новой переменной. В интеграле $\int f(x)dx$ сделаем подстановку

$$f(x) = f(\varphi(t));$$

$$x = \varphi(t);\ dx = \varphi'(t)dt;$$

тогда,

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (2.5)$$

Например,

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \left| \begin{gathered} x^2+1=y \\ (x^2+1)'dx = dy \\ 2xdx = dy \end{gathered} \right|$$

$$= \int \frac{dy}{2y} = \frac{1}{2}\ln|x| + C \; \frac{1}{2} ln\left|x^2+1\right| + C$$

3) Метод интегрирования по частям. Пусть ***u*=*u(x)*** и ***v*=*v(x)*** – дифференцируемые функции, тогда ***d(u·v)=vdu+udv,*** откуда ***udv=d(uv)-vdu***.

Проинтегрируем последнее выражение:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

или

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (2.6)$$

Например,

$$\int x \cdot e^x dx = \left| \begin{gathered} u = x \\ du = dx \\ \int dv = \int e^x dx \\ v = e^x + C \end{gathered} \right|$$

$$= x \cdot e^x$$

$$- \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

$$= e^x(x-1) + C$$

Практическое занятие № 2
Нахождение неопределенного интеграла

Занятие направлено на достижение таких компетенций студента как ОК-1, СЛК-2, ПК-6 и ПК-7. Для этого студент должен подготовиться к занятию и ***знать*** следующие теоретические вопросы:

- Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла.
- Свойства неопределённого интеграла.
- Таблицу интегралов от основных элементарных функций.
- Методы интегрирования.

В ходе занятия студент должен научиться делать следующее, т.е. ***уметь***

- Находить интегралы методом непосредственного интегрирования.
- Находить интегралы методом подстановки.
- находить интегралы методом интегрирования по частям.
- Применять интегрирование для решения задач.

В ходе занятия студент должен приобрести и закрепить навыки практического применения соответствующих правил и формул, т.е. ***владеть*** следующими техниками и приемами/методами:

- Правилами интегрирования.

Примеры решения типовых задач:

Пример 1. Найти интеграл

$$\int (2x^3 - 3x^2 + 2x - 7)dx$$

Решение. Применяя свойство неопределенного интеграла для алгебраической суммы и метод непосредственного интегрирования находим:

$$\int (2x^3 - 3x^2 + 2x - 7)dx =$$

$$= \int 2x^3 dx - \int 3x^2 d + \int 2xdx - \int 7dx = 2\int x^3 dx$$

$$- 3\int x^2 dx$$

$$+ 2\int xdx - -7\int dx = = 2\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 7x + C$$

$$= \frac{x^4}{2} - x^3 + x^2 - -7x + C$$

Для проверки следует убедиться, что производная вычисленного неопределенного интеграла равна подынтегральная функции:

$$\left(\frac{x^4}{2} - x^3 + x^2 - 7x + C\right)' = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 7.$$

Пример 2. Найти интеграл

$$\int \boldsymbol{sin^3x \cdot cosxdx}$$

Решение:

$$\int sin^3x \cdot cosxdx = \begin{vmatrix} sinx = t \\ (sinx)'dx = dt \\ cosxdx = dt \end{vmatrix}$$

$$= \int t^3dt = \frac{x^4}{4} + C = \frac{sin^4x}{4} + C$$

Проверка:

$$\left[\frac{sin^4x}{4} + C\right]' = \frac{4sin^3x \cdot (sinx)'}{4} = sin^3x \cdot cosx.$$

Пример 3(а). Методом интегрирования по частям найти интеграл $\int xlnxdx$.

Решение: находим с помощью формулы:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu,$$

где u и v – функции x.

Обозначим $lnx = u$, тогда $xdx = dv$,

откуда

$$(lnx)'dx = du \frac{dx}{x} = du$$

$$\int xdx = \int dv \frac{x^2}{2} = v$$

Подставляя эти значения в формулу интегрирования по частям, получаем:

$$\int xlnxdx = \frac{x^2}{2}lnx - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2}lnx - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}lnx - \frac{x^2}{4} + C$$

Проверка:

$$\left[\frac{x^2}{2}lnx - \frac{x^2}{4} + C\right]' = \frac{1}{2}2xlnx + \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x} - \frac{2x}{4}$$

$$= xlnx$$

Пример 3(б). Методом интегрирования по частям найти интеграл $\int x^2 sinxdx$.

Решение:

$$\int x^2 sinxdx = \left| \begin{matrix} u = x^2 \text{ дифференцируем } du = 2xdx \\ dv = sinxdx \text{ интегрируем } v = -cosx \end{matrix} \right|$$

$$= -x^2cosx + 2\int xcosxdx$$

К полученному интегралу еще раз применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int xcosxdx = \left| \begin{matrix} u = x \text{ дифференцируем } du = dx \\ dv = cosxdx \text{ интегрируем } v = sinx \end{matrix} \right| =$$

$$xsinx - \int sinxdx = xsinx + cosx + C.$$

Таким образом, имеем:

$$\int x^2 sinxdx = -x^2cosx + 2(xsinx + cosx + C)$$

$$= -x^2cosx + 2xsinx + 2cosx + C$$

Проверка:

$$[-x^2cosx + 2xsinx + 2cosx + C]' = (-x^2)'cosx - x^2(cosx)' + (2x)'sinx + 2(cosx)' = x^2sinx.$$

Пример 4. Скорость движения точки задана уравнением $V = t^3 + 4t$ *(см/с)*. В момент времени ***t=2c*** точка находится на расстоянии 12 см от начала отсчета. Найти закон движения точки.

Решение: По определению, скорость точки

$$V(t) = \frac{dS(t)}{dt},$$

где ***S(t)*** – закон движения точки.

Тогда ***dS=Vdt,*** или

$$S = \int Vdt = \int (t^3 + 4t)dt = \frac{t^4}{4} + 2t^2 + C.$$

Из условия задачи при ***t****=2c*, ***S****=12 см* находим ***C***:

$\frac{2^4}{4} + 2^2 + C = 12$; или ***4+8+C=12;*** откуда ***C=0.***

Закон движения точки будет

$$S = \frac{t^4}{4} + 2t^2.$$

Задания для самостоятельного решения:

Задание 1. Найти следующие интегралы методом непосредственного интегрирования:

а) $\int \left(4x^3 + 3\sqrt{x} - 4\sqrt[5]{x}\right) dx$

б) $$\int \frac{5x^3 - 3x + 1}{\sqrt{x}} dx$$

в) $$\int \frac{5x^4 - 2\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}{x} dx$$

г) $$\int \left(x^{-7} - 7^x\right) dx$$

д) $$\int (x + 3)^2 dx$$

е) $$\int \left(e^x + x^{-4}\right)^2 dx$$

ж) $$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$$

з) $$\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin 3x} dx$$

и) $$\int \frac{\cos^3 x - 4}{\sin^2 x} dx$$

Задание 2. Методом подстановки найти следующие интегралы:

а)

$$\int (x^2+1)^8 dx$$

б)

$$\int x^2\sqrt{2+x^5dx}$$

в)

$$\int (x^2-1)^6 x^2 dx$$

г)

$$\int e^{x^3}\cdot x^3 dx$$

д)

$$\int \sin(2x-\pi)\,dx$$

е)

$$\int \frac{sinx}{cos^2x}dx$$

ж)

$$\int cos^4x\cdot sinxdx$$

з)

$$\int \frac{cosx+sinx}{cosx-sinx}dx$$

и)

$$\int \frac{dx}{x\cdot lnx}$$

Задание 3(а). Скорость точки задана уравнением $V = t^3-3t+7$ *(м/с)*. Найти уравнение движения точки, если в начальный момент времени она находится в начале координат.

Задание 3(б). Скорость распада радиоактивного вещества описывается формулой $V = -km_0\,e^{-kt}$, где k - постоянная; m_0 - масса радиоактивного вещества при $t = t_0$. Составить уравнение изменения массы $\boldsymbol{m(t)}$.

Задание 3(в). Растворение лекарственных веществ из таблеток подчиняется уравнению $\boldsymbol{C = C_0 e^{-kt}}$, где С – количество лекарственного вещества в таблетке, оставшееся ко времени растворения $\boldsymbol{t}$; $\boldsymbol{C_0}$ – исходное количество лекарственного вещества в таблетке; $\boldsymbol{k}$ – постоянная скорости растворения. Определить скорость растворения лекарственных веществ из таблеток.

Задание 3(г). Скорость роста популяций насекомых $\boldsymbol{V = t + t^2}$ ($\boldsymbol{t}$ выражается в днях). При $\boldsymbol{t = 0}$ число особей в популяции равно 10500. Определить численность популяции спустя:

1) 1 день; 2) 7 дней; 3) 15 дней.

Задание 3(д). Скорость роста числа бактерий задается формулой $\boldsymbol{V = 10^4 - 2 \cdot 10^3\, t}$. Составить уравнение роста числа бактерий $\boldsymbol{x(t)}$, если при $\boldsymbol{t = 0}$ $\boldsymbol{x(0) = 10^6}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. В чем состоит процесс интегрирования?
2. Понятие первообразной функции.
3. Свойства неопределенных интегралов.
4. Методы нахождения/вычисления неопределенных интегралов.
5. Применение интегрирования в медицине и биологии.

Тестовые задания

На каждый вопрос нужно выбрать один верный ответ.

1.Что называется интегрированием:

1) операция нахождения интеграла;
2) преобразование выражения с интегралами;
3) операция нахождения производной;
4) предел приращения функции к приращению её аргумента

2. Чему равен неопределенный интеграл от 0?

1) **0**;
2) **1**;
3) ***x;***
4) ***const C.***

3. Когда применяется метод интегрирования неопределенных интегралов по частям?

1) когда функция имеет квадратный корень;
2) не применяется данный метод нигде;
3) когда подынтегральное выражение содержит множители функций ***ln(x); arccos(x); arcsin (x);***
4) функция гиперболическая.

4. С помощью какой универсальной подстановки рационализируется тригонометрическая функция:

1. ***t = tg(x/2);***

2. ***t = sin(2x);***

3. ***t = tg(x);***

4. ***t = cos(x+2).***

5. Чему равен неопределенный интеграл от 1?

1. ***x+C;***

2. ***0;***

3. ***1+C;***

4. ***const C.***

6. Чему равен неопределенный интеграл *sin(x)?*

1. ***– cos(x) + C;***

2. ***cos(x) + C;***

3. ***tg(x) + C;***

4. ***arcsin(x) + C.***

7. Для чего используют метод замены переменной (метод подстановки) интеграла?

1. свести исходный интеграл к более простому с помощью перехода от старой переменной интегрирования к новой переменной;

2. просто необходимо выполнить какие-нибудь преобразования;

3. для усложнения подынтегральной функции;

4. для того, чтобы потом можно было бы использовать метод Римана

Литература

1. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. Москва, Изд-во «Астрель» .2011. – 656 с.
2. Зайцев И.Л. Курс высшей математики. Москва, Изд-во «Высшая школа». 2013. – 253 с.
3. Лобоцкая Н.Л. Основы высшей математики. Москва, Изд-во «АльянС» 2016 – 480 с. 5.
4. Павлушков И.В. Основы высшей математики и математической статистики. М.: ГЭОТАР-Медиа, 2009. – 432 с.

ТЕМА 3. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

При математических расчётах часто требуется найти приращение первообразной функции при изменении ее аргумента в заданных пределах. Такую задачу приходится решать при вычислении площадей и объемов различных фигур, при определении среднего значения функции, при вычислении работы переменной силы, количества теплоты, координат центра тяжести и определении момента инерции линии, круга или цилиндра. Эти задачи могут быть решены в результате вычисления соответствующих определенных интегралов.

3.1. Понятие определенного интеграла и его геометрический смысл

Рассмотрим задачу о нахождении площади криволинейной трапеции (рис. 3.1). Пусть дана некоторая функция $\boldsymbol{y = f(x)}$. На оси $\mathbf{0}$х выберем точки **“a”** и **“**в**”** и восстановим из них перпендикуляры до пересечения с кривой. Фигура, ограниченная кривой, перпендикулярами и осью $\boldsymbol{0x}$ называется криволинейной трапецией. Разобьем отрезок ***[а,в]*** на $\boldsymbol{n}$ небольших отрезков. Выберем произвольный отрезок $\Delta \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{x_{i-1}}$. Достроим криволинейную трапецию, соответствующую этому отрезку до прямоугольника.

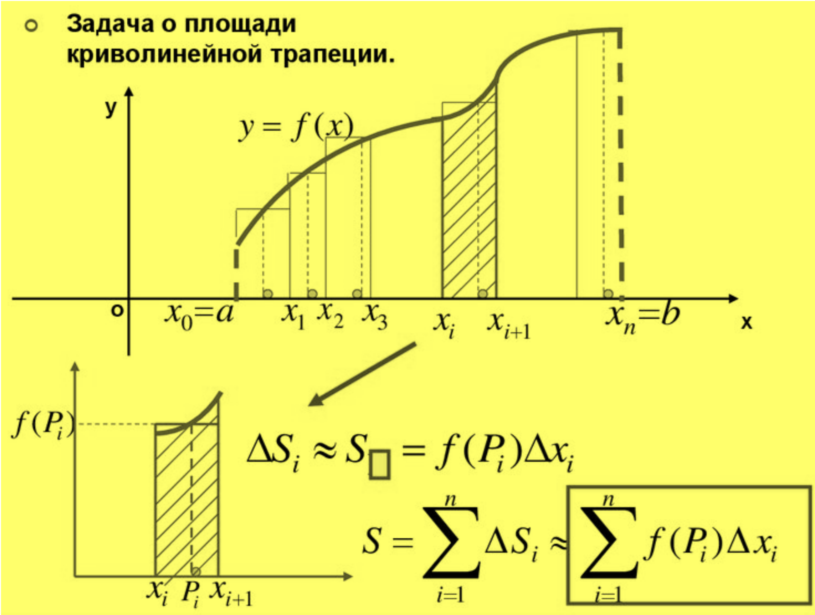

Рис. 3.1. *Определение определенного интеграла*

Площадь такого прямоугольника определится как: $\boldsymbol{S_i = f(x_i)\Delta x_i}$. На рис. 3.1 показана средняя высота прямоугольника для точки $\boldsymbol{x_i = P_i}$. Тогда площадь всех достоверных прямоугольников на отрезке интервале ***[а,в]*** будет равна:

$$\boldsymbol{S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} P_i \Delta x_i.} \tag{3.1}$$

Если каждый из отрезков достаточно мал и стремится к нулю, то суммарная площадь прямоугольников будет стремиться к площади криволинейной трапеции:

$$S = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i. \qquad (3.2)$$

Итак, задача о вычислении площади криволинейной трапеции сводится к определению предела суммы (3.1). Интегральная сумма есть сумма произведения приращения аргумента Δx_i на значение функции $f(xi)$, взятой в некоторой точке интервала, в границах которого изменяется аргумент. **Математически задача о нахождении предела интегральной суммы, если приращение независимой переменной стремится к нулю, приводит к *понятию определенного интеграла*.**

Функция $f(x)$ в некотором интервале от $x = a$ *до* $x = в$ интегрируема, если существует такое число, к которому стремится интегральная сумма при $\Delta x_i \to 0$. В этом случае число **J** называют ***определенным интегралом*** функции $f(x)$ на **отрезке** ***[а,в]***:

$$J = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \qquad (3.3)$$

где ***а, в*** – область интегрирования, ***а*** – нижний предел интегрирования, ***в*** – верхний предел интегрирования.

Таким образом, *с точки зрения геометрии,* определенный интеграл есть площадь фигуры, ограниченной графиком функции в определенном интервале и осью абсцисс.

3.2. Связь между определенным и неопределенным интегралами. Формула Ньютона-Лейбница

Неопределенный интеграл – это совокупность первообразных функций. Определенный интеграл – это число. Связь между ними задается формулой Ньютона-Лейбница.

Теорема. Значение определенного интеграла равно разности значений любой первообразной от подынтегральной функции, взятой при верхнем и нижнем пределах интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (3.4)$$

3.3. Свойства определенного интеграла

1.	**Определенный интеграл от суммы конечного числа непрерывных функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$, заданных на отрезке *[а,в]* равен сумме определенных интегралов от слагаемых функций:** $$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \dots + \int_a^b f_n(x)\,dx$$
2.	**Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:** $$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$
3.	**Если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то определенный интеграл изменит свой знак на противоположный:** $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4.	**Если *a* = *b*, то** $$\int_a^b f(x)dx = 0$$
5.	**Если отрезок интегрирования *[а,в]* разбить на две части *[а,с]* и *[с,в]*, то** $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3.4. Основные методы нахождения определенного интеграла

1) **Непосредственное интегрирование.**

Например,

$$\int_0^1 (x^2 + 4x)dx$$

$$= \int_0^1 x^2dx + 4\int_0^1 xdx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + 2 = 2\frac{1}{3}$$

2) **Метод подстановки (замены переменной).**

Например,

$$\int_1^2 x\sqrt{x^2-1}dx = \left| \begin{array}{c} x^2-1=t \\ 2xdx=dt \\ t_{\text{н}}=1^2-1=0 \\ t_{\text{в}}=2^2-1=3 \end{array} \right| = \int_0^3 \sqrt{t}\frac{dt}{2} =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{t^3}}{3}\Big|_0^3 = \frac{\sqrt{t^3}}{3}\Big|_0^3 = \frac{\sqrt{3^3}}{3} - 0 = \frac{\sqrt{3^3}}{3} = \sqrt{3}.$$

3) **Метод интегрирования по частям.**

Например,

$$\int_0^3 3^x(x+3)dx = \left| \begin{array}{c} u=x+3 \\ du=dx \\ dv=3^x dx \\ v=\frac{3^x}{ln3} \end{array} \right| = \frac{3^x}{ln3}(x+3)\Big|_0^1$$

$$-\frac{1}{ln3}\int_0^1 3^x dx$$

$$= \frac{3^x}{ln3}(x+3)\Big|_0^1 - \frac{1}{ln3}\cdot\frac{3^x}{ln3}$$

$$= \frac{1}{ln3}\left(3^1\cdot(1+3) - 3^0\cdot(0+3)\right)$$

$$-\frac{1}{ln^2 3}(3^1-3^0) = \frac{9}{ln3} - \frac{2}{ln^2 3} \approx 6{,}54$$

3.5. Приложения интегрального исчисления

Вычисление площадей плоских фигур. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,в]$. Пусть площадь криволинейной трапеции ограничена линиями $y=f(x)$; $y=0$; $x=a$; $x=в$, тогда:

1) Если $f(x) > 0$, тогда площадь фигуры будет:

$$S = \int_a^b f(x)dx \tag{3.5}$$

2) Если $f(x) \leq 0$, тогда площадь фигуры будет:

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right| \tag{3.6}$$

3) Если функция $y = f(x)$ пересекает ось $0x$, то отрезок $[a,в]$ разбивают на части в пределах, которых $f(x)$ не меняет знака, тогда общая сумма площади фигуры будет равна сумме частей.

Вычисление работы переменной силы. Если непрерывная переменная сила $F=f(x)$ действует в направлении оси Ox, то работа силы на отрезке $[a,b]$ выражается интегралом:

$$A = \int_a^b f(x)dx. \tag{3.7}$$

3.6. Практическое применение определенного интеграла в биологии, химии и медицине

В биологии ученые применяют интеграл для расчета величины изучаемых явлений. Так при изучении популяций, т.е. совокупности особей одного вида, интегрирование позволяет определить численность популяции и ее биомассу. При расчете прироста численности популяции используется следующая формула, в которой в качестве пределов интегрирования выступает промежуток времени от $\boldsymbol{t_0}$ до $\boldsymbol{T}$, а скорость популяции является подынтегральной функцией:

$$\int_{t_0}^{T} v(t)dt \tag{3.8}$$

В химии определенный интеграл используется для решения таких задач как нахождение количества электричества, протекшее через электролизер за время ***T***, определения средней и истинной теплоемкости, теплоты возгонки твердого тела, теплоты испарения жидкости для температур, далеких от критической и др. Например, для определения теплоты возгонки твердого тела применяется формула:

$$\Delta H_{\text{возг.Т}} = \Delta H_{\text{возг.}298} + \int_{298}^{T} \Delta C dT \tag{3.9}$$

Рентгеновская компьютерная томография является одним из самых эффективных методов современной диагностики в **медицине**, т.к. дает возможность рассмотреть послойное изображение тела человека без вмешательства скальпеля хирурга или эндоскопа. Математическим методом, лежащим в основании компьютерной томографии, является преобразование Радона. Преобразованием Радона функции ***f(x,y)*** называется функция:

$$\boldsymbol{R(s,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\cos\varphi - t\sin\varphi, s\sin\varphi + t\cos\varphi)dt} \quad (3.10)$$

Внутри компьютерного томографа находится рентгеновская трубка, которая излучает множество Х-лучей в виде узких пучков. Лучи проходят сквозь тело пациента, при этом они поглощаются разными тканями по-разному, и попадают на специальную чувствительную матрицу, данные с которой считываются компьютером. Компьютерная программа, построенная на сложных математических алгоритмах с использованием преобразования Радона, анализирует полученную информацию и выстраивает трехмерную картинку исследуемой части тела, которая выводится на специализированный медицинский монитор, а затем полученное изображение печатается на специальной пленке.

Применение интегралов для решения количественных медицинских задач.

Пример 3.1.

За первые 13 дней химиотерапии масса злокачественного новообразования уменьшалась со скоростью $\boldsymbol{M'(t) = 0,2t + 0,015t^2}$ грамм в день.

Какова масса опухоли на десятый день лечения, если начальная ее масса равнялась 180 грамм?

Решение:

$$\boldsymbol{M(10) = M(0) + \int_0^{10} M'(t)dt = M(0) + \int_0^{10} (0,2t + 0,015t^2)dt = 180 + \left(-0,2\frac{t^2}{2} + +0,015\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^{10} = 180 + (-0,1 \cdot 10^2 + 0,005 \cdot 10^3) = 175}$$

Ответ: 175 грамм.

Практическое занятие № 3

Нахождение определенного интеграла

Занятие направлено на достижение таких компетенций студента как ОК-1, СЛК-2, ПК-6 и ПК-7. Для этого студент должен подготовиться к занятию и ***знать*** следующие теоретические вопросы:

- Понятие определенного интеграла и ее свойства
- Формулу Ньютона-Лейбница.
- Методы вычисления неопределенного интеграла.
- Вычисление определенного интеграла методом непосредственного интегрирования, методом замены переменной и методом интегрирования по частям
- Вычисление площади криволинейной трапеции

В ходе занятия студент должен научиться делать следующее, т.е. ***уметь***

3. Вычислять определенный интеграл, используя формула Ньютона-Лейбница.
4. Применять понятие определенного интеграла для решения задач.
5. Находить дифференциалы функций.
6. Объяснить физический смысл производной первого и второго порядков.

В ходе занятия студент должен приобрести и закрепить навыки практического применения соответствующих правил и формул, т.е. ***владеть*** следующими техниками и приемами/методами:

- Правилами вычисления определенного интеграла и нахождения площади криволинейной трапеции.

Примеры решения типовых задач:

Пример 1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 x^2 dx$$

Решение: По формуле Ньютона-Лейбница получаем

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Пример 2. Методом подстановки вычислить интеграл:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$$

Решение. Введем новую переменную $4 - x = t,$ тогда $d(4-x) = dt;$ $dx = -dt$. Определим новые пределы интегрирования. Из равенства $4 - x = t,$ при $x_1 = 0$ получаем $t_1 = 4$, при $x_2 = 2$, получаем $t_2 = 2$ тогда:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \left| \begin{array}{c} 4 - x = t \\ dt = -dx \\ t_{\text{н}} = 4 - 0 = 4 \\ t_{\text{в}} = 4 - 2 = 2 \end{array} \right|$$

$$= -\int_4^2 \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\int_4^2 t^{-\frac{1}{2}} dt = -2t^{\frac{1}{2}}|_4^2$$

$$= -2\sqrt{2} + 2\sqrt{4} = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1,18$$

Ответ:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} \approx 1,18$$

<u>Пример 3.</u> Методом интегрирования по частям вычислите: $\int_1^2 \boldsymbol{ln\, x\, dx}$.

Решение: введём обозначения $\boldsymbol{ln\ x = u;\ dv = dx,}$ тогда $\boldsymbol{du} = \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{;\ v = x}$ и получаем

$$\int_1^2 \boldsymbol{lnxdx} = \boldsymbol{xlnx}|_1^2 - \int_1^2 \boldsymbol{x}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx} = (\boldsymbol{xlnx} - \boldsymbol{x})|_1^2 = \boldsymbol{2ln2 - 1}$$

Ответ:

$$\int_1^2 \boldsymbol{lnxdx} = \boldsymbol{2ln2 - 1}$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями: $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$ и $\boldsymbol{y = x^2}$.

Решение. Представим искомую площадь графически. Искомая площадь – площадь фигуры OACB (на рис. 3.2 закрашена зеленым).

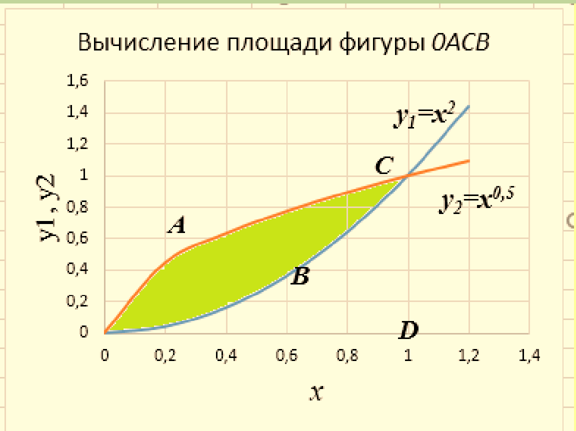

Рис. 3.2. *Применение определённого интеграла для вычисления площади произвольной фигуры.*

Находим точки пересечения линий из условия:

$\sqrt{x} = x^2$, откуда $x^4 - x = 0$ или $x(x^3 - 1) = 0$.

Следовательно, абсциссы точек пересечений линий $x_1 = 0, x_2 = 1$, а сами точки пересечения имеют координаты ***(0,0) и (1,1).***

В соответствии с геометрической интерпретацией определенного интеграла, определенный интеграл функции ***y = f (x)*** в пределах от $x = x_1$ до $x = x_2$, т.е. $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$**,** численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной линией графика функции ***y = f(x)***, осью абсцисс и линиями $x = x_1$ и $x = x_2$**.** Искомая площадь $S_{\mathbf{OACB}}$ равна разности площадей криволинейных трапеций:

$$S_{\mathbf{OACB}} = S_{OACD} - S_{\mathbf{OBCD}},$$

т.к.

$$S_{OACD} = \int_0^1 \sqrt{x}dx;$$

$$S_{OBCD} = \int_0^1 x^2dx$$

.

Искомая площадь:

$$S_{\mathbf{OACB}} = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}|_0^1 - \frac{x^3}{3}|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Ответ: Искомая площадь равна $\frac{1}{3}$ (квадратных единиц).

Пример 5. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину на 18 см, если сила в 24*Н* растягивает пружину на 3 см.

Решение. Согласно закону Гука, упругая сила, растягивающая пружину пропорциональна этому растяжению: ***F* = *kx*.**

Поэтому можно записать:

F(0,03м) = 24Н или ***24 = 0,03k***,

откуда получим значение ***коэффициента жесткости пружины***

k = 24Н/0,03м = 800Н/м.

Следовательно, сила, растягивающая пружину, равна

F = 800x.

Работа, выполняемая этой силой, равна:

$$A = \int_a^b F dx = \int_0^{0,18} 800x dx = 800 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,18} = 400x^2 \Big|_0^{0,18} = 400(0,18 - 0)^2 = 12,96 \text{ Дж}$$

Задания для самостоятельного решения:

Задание 1. Найти следующие интегралы методом непосредственного интегрирования:

а) $\int_0^3 3^x dx$	**б)** $\int_0^1 e^x dx$
в) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$	**г)** $\int_{-1}^{3} (2x^4 - 7) dx$

д) $$\int_{2}^{7} \frac{3-x}{x} dx$$	**е)** $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

Задание 2. Методом подстановки найти следующие интегралы:

а) $$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$	**б)** $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$$
в) $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right) dx$$	**г)** $$\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{e^5+6} dx$$
д) $$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} e^{\sin x} \cdot \cos x\, dx$$	**е)** $$\int_{0}^{\pi} \sin x \cdot \cos^2 x dx$$

Задание 3. Методом интегрирования по частям найти следующие интегралы:

а) $$\int_{1}^{3} e^{-x} \cdot x dx$$	*б)* $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{cos^2 x} dx$$
в) $$\int_{10}^{2} 4x \cdot 3^x \, dx$$	*г)* $$\int_{0}^{1} (x-1) \cdot e^{3x} dx$$
д) $$\int_{1}^{2} x ln x \, dx$$	*е)* $$\int_{0}^{\pi} x sin 2x dx$$

Задание 4. Вычислить площадь фигур, ограниченных следующими линиями:

а) $y = cosx$ *и осью Ox при* $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

б) $y = lnx$ *и* $y = 1 - \frac{x}{2}$ *при* $0 \leq x \leq 2$

в) $y = x^2$ *и* $y = 4 - x^3$ *при* $-1 \leq x \leq 1$

г) $y = x^3$ *и* $y = x$

д) $y = 4 - x^3$ *и* $y = 0$

е) $y = x^3 + 1$ *и* $x + y = 4$

Задание 5(а). Вычислить работу, затраченную спортсменом при растяжении пружины эспандера на *70 см*, если известно, что при усилии в *10Н* эспандер растягивается на *1см*.

Задание 5(б). Каково среднее значение электродвижущей силы, возникающей при обмене ионов мембраной и составляющими клетки и подчиняющейся закону

$$\boldsymbol{E = E_0 \sin\left(\frac{2\tau}{T} \cdot t\right)}$$

в течение одного полупериода?

Задание 5(в). Элемент давления крови на сосуды при кровообращении равен $\boldsymbol{dp = \frac{E \cdot h}{r^2} dr}$. Определить давление крови, испытываемое участком аорты радиуса ***r ≈3,5мм,*** толщиной ***h ≈1,5мм*** и упругостью ***E ≈150 МПа.***

Задание 5(г). Вычислить затраты энергии тока за время от $\boldsymbol{t_1 = 0}$ до $\boldsymbol{t_2 = T}$, если сила тока определяется формулой $\boldsymbol{I = I_0 \sin(\omega t)}$, где $\boldsymbol{I_0}$ – максимальное значение тока, $\boldsymbol{\omega}$ – круговая частота, ***t*** – время.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется определенным интегралом функции ***f(x)*** на отрезке ***[a, b]***?
2. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
3. Как записывается формула интегрирования по частям в случае определенного интеграла?
4. Чем отличается метод замены переменной в определенном интеграле от метода замены переменной в неопределенном интеграле?

Тестовые задания

1. Какая из нижеприведенных формул называется формулой Ньютона-Лейбница:

Выберите один из 4 вариантов ответа:

а. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

б. $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$

в. $\int_a^b f(x)dx = F(b)$

г. $\int_a^b f(x)dx = F(a)$

Варианты ответов:

1) а

2) б

3) в

4) г

Вопрос 2

2. Выберите верную формулу:

Выберите один из 3 вариантов ответа:

а) $F(x)\big|_a^b = F(b) + F(a)$

б) $F(x)\big|_a^b = F(a) - F(b)$

в) $F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$

Варианты ответов:

а)

б)

в)

3. Укажите верные свойства определенного интеграла:

Выберите несколько из 4 вариантов ответа:

а) $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

б) $\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

в) $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$

г) $\int_a^b k\, f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$

Варианты ответов:

а)

б)

в)

г)

4. Укажите неверные свойства определенного интеграла:

Выберите несколько из 4 вариантов ответа:

а) $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

б) $\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

в) $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$

г) $\int_a^b k\, f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$

Варианты ответов:

а)

б)

в)

г)

5. Вычислить

$$\int_{-1}^{3} x^3 dx$$

Запишите число:

Варианты ответов:

- 80
- 20
- -82
- -20,5

6. Определенный интеграл

$$\int_{1}^{3} (6x^2 - 3)dx$$

вычисляется по формуле:

а) $(2x^3 - 3x)\Big|_1^3$

б) $(x^3 + 3x)\Big|_1^3$

в) $(2x^3 + 3x)\Big|_1^3$

г) $(6x^2 - 3)\Big|_1^3$

Выберите один из 4 вариантов ответа:

а) б) в) г)

Варианты ответов:

а)

б)

в)

г)

7. По свойству определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx$$

равен:

Выберите один из 4 вариантов ответа:

Варианты ответов:

- $2F(a)$
- 0
- $f(x)$
- 1

8. Укажите утверждение, которое показывает геометрический смысл определенного интеграла:

Выберите один из 3 вариантов ответа:

Варианты ответов:

- угол наклона касательной к графику функции в точке с абсциссой x_1
- закон перемещения материальной точки на промежутке $[a,b]$
- площадь криволинейной трапеции

9. Укажите утверждение, которое показывает физический смысл определенного интеграла:

Выберите один из 3 вариантов ответа:

Варианты ответов:

- угол наклона касательной к графику функции в точке с абсциссой x_1

- закон перемещения материальной точки на промежутке $[a,b]$
- площадь криволинейной трапеции.

10. Что является значением определенного интеграла?

Варианты ответов

- Положительное число
- Отрицательное число
- Формула
- 0 (ноль)

Литература

1. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. Москва, Изд-во «Астрель» 2011. – 656 с.
2. Зайцев И.Л. Курс высшей математики. Москва, 2013. – 253 с.
3. Лобоцкая Н.Л. Основы высшей математики. Москва, Изд-во «АльянС» 2016 – 480 с.
4. Павлушков И.В. Основы высшей математики и математической статистики. М.: ГЭОТАР-Медиа, 2009. – 432 с.

ТЕМА 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальные уравнения используются при изучении явлений и процессов во всех областях знаний, в том числе в медицине. Сформулировав задачу на языке дифференциальных уравнений, специалист–медик получает готовый аппарат для численного решения задачи, изучения качественных особенностей этого решения. Кроме того, дифференциальные уравнения являются одним из средств математического моделирования. С их помощью устанавливается связь между переменными величинами, характеризующими данный процесс и явление.

4.1. Основные понятия дифференциальных уравнений

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную $\boldsymbol{x}$, искомую функцию $\boldsymbol{y=f(x)}$ и ее производные различных порядков $\boldsymbol{y', y'', \ldots, y^n}$. Общий вид дифференциального уравнения:

$$\boldsymbol{F(x,\ y,\ y',\ y'',\ldots, y^n) = 0}$$

или

$$\boldsymbol{F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0} \qquad (4.1)$$

Порядок дифференциального уравнения определяется порядком наивысшей производной, входящей в данное уравнение.

Решением (интегралом) дифференциального уравнения называется всякая функция $\boldsymbol{y = f\ (x)}$ которая, будучи подставлена в дифференциальное уравнение (вместе со своими производными) превращает его в тождество.

Всякое решение, которое содержит столько произвольных постоянных, каков порядок уравнения называется ***общим решением***.

Решение, полученное из общего решения, путем задания произвольным постоянным определенных численных значений называется ***частным решением***. На практике частное решение получается из общего решения не прямым заданием значений произвольных постоянных, а с учетом тех условий, которым должно удовлетворять искомое частное решение.

4.2. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Дифференциальное уравнение 1-го порядка $\boldsymbol{F(x, y, y') = 0}$ ***может быть разрешено относительно производной*** $\boldsymbol{y'}$: $\boldsymbol{y' = f(x, y)}$.

Общее решение уравнения имеет вид: $y = \varphi\ (x, C)$, где C - произвольная постоянная. *Геометрически общее решение (рис. 4.1) представляет собой семейство интегральных кривых, т.е. совокупность линий, соответствующих различным значениям постоянной С.*

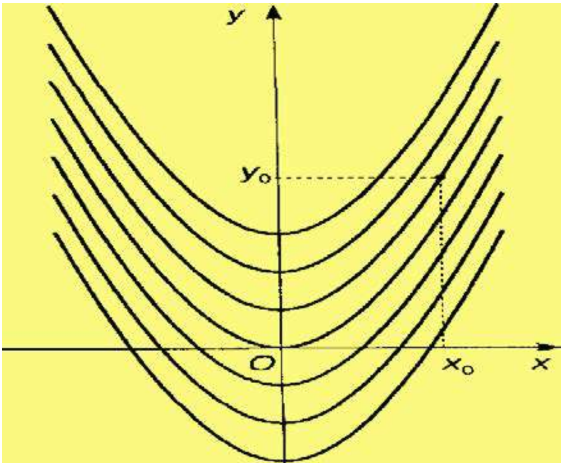

Рис.4.1. *Геометрическое представление общего решения дифференциального уравнения*

Если задать точку $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$**,** через которую должна проходить интегральная кривая, то тем самым из бесконечного семейства интегральных кривых, выделяется некоторая определенная интегральная кривая, которая соответствует ***частному решению*** дифференциального уравнения.

Аналитически это требование сводится к так называемому ***начальному условию:*** $\boldsymbol{y = y_0}$ ***при*** $\boldsymbol{x = x_0}$**.** Если известно общее решение $\boldsymbol{y = \varphi(x, C)}$**,** то из условия $\boldsymbol{y_0 = \varphi(x_0, C)}$ можно определить произвольную постоянную С и, следовательно, найти соответствующее частное решение.

Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию $\boldsymbol{y = y_0}$ ***при*** $\boldsymbol{x = x_0}$ ***называется задачей Коши.***

1) Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется **уравнением с *разделяющимися переменными,*** если его можно представить в виде:

$$\boldsymbol{y' = f(x) \cdot \varphi(x)}$$

Правая часть уравнения представляет собой произведение двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной.

Учитывая, что $\boldsymbol{y' = \frac{dy}{dx}}$, уравнение можно записать в виде $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot \varphi(x)}$ или $\boldsymbol{\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx}$. Интегрируя обе части данного уравнения, найдем его решение:

$$\boldsymbol{\int \frac{dy}{\varphi(y)} + C_1 = \int f(x)dx + C_2} \tag{4.2}$$

или

$$\boldsymbol{\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx} + \mathrm{C}$$

где $\boldsymbol{C = C_1 + C_2}$.

Например, найти общее и частное решение дифференциального уравнения:

$$\boldsymbol{(x^2 + 4)y' - 2xy = 0}, \text{при } \boldsymbol{x = 1}, \qquad \boldsymbol{y = 5}$$

Решение:

$$(\boldsymbol{x^2+4})\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{2xy} | \cdot \frac{\boldsymbol{dx}}{(\boldsymbol{x^2+4})\boldsymbol{y}}$$

$$(\boldsymbol{x^2+4})\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} \cdot \frac{\boldsymbol{dx}}{(\boldsymbol{x^2+4})\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{2xy} \cdot \frac{\boldsymbol{dx}}{(\boldsymbol{x^2+4})\boldsymbol{y}}$$

$$\int \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{y}} = \int \frac{\boldsymbol{2xdx}}{\boldsymbol{x^2+4}}$$

$\boldsymbol{ln|y| = ln\left|x^2+4\right| + ln|C| \ \Rightarrow y = C(x^2+4)}$ – ***общее решение***

$\boldsymbol{5} = \mathrm{C}(\boldsymbol{1^2+4}) \ \Rightarrow \mathrm{C} = \boldsymbol{1} \ \Rightarrow \boldsymbol{y = x^2+4}$ – ***частное решение***

2) Однородные дифференциальные уравнения

Однородным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида: $\boldsymbol{y' = f(\frac{y}{x})}$**.** Оно легко может быть преобразовано в уравнение с разделяющимися переменными. Для этого вводят новую неизвестную функцию $\boldsymbol{u = \frac{y}{x}}$**,** откуда $\boldsymbol{y = u\ x}$**.** Тогда производная

$\boldsymbol{y' = u'x + x'u}$ или $\boldsymbol{y' = u'x + u}$**,** а исходное уравнение принимает вид:

$$\boldsymbol{u + xu' = f(x)} \text{ или } \boldsymbol{xu' = f(x) - u}. \qquad (4.3)$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, для которого ход решения уже известен.

Например: найти общее решение дифференциального уравнения: $\mathbf{2xyy' = y^2 - 4x^2}$

Решение: $\mathbf{2xy\frac{dy}{dx} = y^2 - 4x^2}$

Разделим левую и правую части уравнения на $\boldsymbol{x^2}$*:*

$$2\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} - 4$$

т.к.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(u \cdot x)}{dx} = u + x\frac{du}{dx},$$

то

$$2u\left(u + x\frac{du}{dx}\right) = u^2 - 4u + x\frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 4}{2u}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 4}{2u} - u = -\frac{u^2 + 4}{2u}x\frac{du}{dx}$$

$$= -\frac{u^2 + 4}{2u} \Big| \cdot \frac{2udx}{x(u^2 + 4)}$$

$$\int \frac{2udu}{u^2+4} = -\int \frac{dx}{x} ln|u^2 + 4| = -ln|x| + ln|C|;$$

$$u^2 + 4 = \frac{C}{x}, \text{ т.к. } u = \frac{y}{x}, \text{ то } \frac{x^2}{y^2} + 4 = \frac{C}{x}$$

$y^2 + 4x^2 = Cx;\ y = \sqrt{Cx - 4x^2}$ ***– общее решение.***

4.3. Дифференциальные уравнения 2-го порядка

Дифференциальное уравнение 2-го порядка, разрешенное относительно второй производной y'' имеет вид: $\boldsymbol{y'' = f(x, y, y')}$.

Общее решение этого уравнения содержит две независимые произвольные постоянные $\boldsymbol{C_1}$ и $\boldsymbol{C_2}$:

$$\boldsymbol{y = \varphi(x, C_1, C_2)}.$$

Для выделения из общего решения уравнения некоторого частного решения необходимо иметь два начальных условия: $\boldsymbol{y = y_0}$, $\boldsymbol{y' = y'_0}$ при $\boldsymbol{x = x_0}$ (задача Коши). Тогда для нахождения постоянных $\boldsymbol{C_1}$ и $\boldsymbol{C_2}$ надо разрешить систему:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2)}, \\ \boldsymbol{y'_0 = \varphi'_0(x_0, C_1, C_2)}. \end{cases} \qquad (4.4)$$

Подставив найденные значения $\boldsymbol{C_1}$ **и** $\boldsymbol{C_2}$ в ***общее решение*** $\boldsymbol{y = \varphi(x, C_1, C_2)}$ найдем ***частное решение*** уравнения.

1) **Дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка**.

Рассмотрим некоторые виды дифференциальных уравнений 2-го порядка, приводимых к дифференциальным уравнениям 1-го порядка.

а) Дифференциальное уравнение 2-го порядка, не содержащее искомой функции и ее производной. Простейшее дифференциальное уравнение 2-го порядка, не содержащее искомой функции и ее производной имеет вид: $\boldsymbol{y'' = f(x)}$, где правая часть уравнения - функция одной переменной *x*.

Общее решение уравнения найдем двукратным интегрированием, последовательно понижая порядок уравнения на единицу.

Перепишем уравнение в виде $\frac{d(y')}{dx} = f(x).$ Тогда

$$dy' = f(x)dx$$

$$y' = \int f(x)dx + C_1$$

Затем

$$dy = \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx$$

и

$$\int dy = \int \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx$$

Таким образом,

$$y = \int(\int f(x)dx)dx + C_1x + C_2 \qquad (4.5)$$

будет общим решением исходного уравнения.

б) Дифференциальное уравнение 2-го порядка, не содержащее искомой функции. *Уравнение вида* $y'' = f(x)$ *называется дифференциальным уравнением 2-го порядка, не содержащим искомой функции.*

Вводя новую переменную $y' = p(x)$ получим уравнение первого порядка

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

Решив это уравнение, найдем $\boldsymbol{p = \varphi(x, C_1)}$.

Выполним теперь обратную замену и получим

$$y' = \varphi(x, C_1) \text{ или } dy = \varphi(x, C_1)dx,$$

откуда

$$\int dy = \int \varphi(x, C_1)dx$$

и

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$$

– есть общее решение.

в) Дифференциальное уравнение 2-го порядка, не

с о д е р ж а щ е е = а р г у м = е н т а .

Для нахождения решения данного уравнения вводим новую переменную $\boldsymbol{y' = p}$, которую будем считать функцией от $\boldsymbol{y}$. Тогда вторая производная будет равна

Из равенства

$$y' = \frac{dp}{dx} = p$$

найдем

$$dx = \frac{dy}{p}$$

и подставим в равенство

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}p$$

Подставив значения y'' и y' в уравнение, получим дифференциальное уравнение 1-го порядка:

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p). \qquad (4.6)$$

Решением этого уравнения будет функция

$$p = \varphi(y, C_1).$$

Произведем обратную замену и получим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1).$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим общее решение:

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx$$

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = \int dx$$

$$\int \frac{dy}{\varphi(y,\ C_1)} = x + C_2$$

2) Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Линейным однородным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида: $y'' + py' + qy = 0.$

Для решения такого уравнения составляется характеристическое уравнение. ***Характеристическим***

называется квадратное уравнение, полученное на основе дифференциального уравнения, в котором y, y', y'' заменяются новой переменной k степень которой определяется порядком производной: $y'' = k^2$, $y' = k^1$, $y = k^0 = 1$, тогда $k^2 + pk + q = 0$. Находим корни характеристического уравнения:

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \tag{4.7}$$

1. Если корни характеристического уравнения равны, т.е. $k_1 = k_2$, то решением дифференциального уравнения будет являться функция:
$$y = (C_1 x + C_2) \cdot e^{kx}$$

2. Если корни характеристического уравнения действительны и имеют разные значения, т.е. $k_1 \neq k_2$, то решением является функция
$$y = \left(C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}\right).$$

Например: найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Решение: характеристическое уравнение для дифференциального уравнения имеет вид:

$$k^2 - 2k - 3 = 0;$$

$$\boldsymbol{k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}};$$

$$\boldsymbol{k_1 = 3; \quad k_2 = -1,}$$

тогда решением уравнения будет функция

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}}$$

4.4. Применение дифференциальных уравнений в медицине

С помощью дифференциальных уравнений описывается большой класс физических процессов, среди которых волновые процессы, колебания, скорости изменения различных параметров и т.д. Причем, очень часто, одним и тем же дифференциальным уравнением описывается очень большой класс задач (друг от друга уравнения будут отличаться значениями некоторых параметров), поэтому, решив уравнение для какой-то конкретной задачи, мы можем найти решение целого класса аналогичных задач, в основе которых лежит тот же процесс.

В частности, как известно из биологии, анатомии и др. наук, многое в человеческом организме подвержено различным циклам (график сна/бодрствования, сердечный ритм и т.д.); органы зрения и слуха воспринимают световые и звуковые волны различной частоты и др. Как ни странно, все эти различающиеся процессы и объекты описываются дифференциальными уравнениями одного класса.

К этому же классу дифференциальных уравнений относятся все возможные волновые и колебательные процессы и явления, применение которых в медицине разнообразно:

- определение скорости кровотока, скорости движения клапанов и стенок сердца (эхокардиография), определение вязкости крови и других параметров гемодинамики;
- описание медико-биологических приложений ультразвука: эхоэнцефалограмма, УЗИ, ультразвуковая физиотерапия, ультразвуковая локация и др.;
- описание процессов физиологической акустики, изучающей устройство и работу звуковоспринимающих и звуковоспроизводящих органов человека и животных.

Как можно видеть из приведенных примеров, дифференциальные уравнения позволяют не только описать процессы, происходящие в теле человека, но и получить различные средства диагностики этих процессов, в том числе и создавать различные технические средства диагностики, а также создавать устройства, способные заменить или улучшить работу какого-либо органа (например, слуховой аппарат).

Практическое занятие № 4

Решение дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядка

Занятие направлено на достижение таких компетенций студента как ОК-1, СЛК-2, ПК-6 и ПК-7. Для этого студент должен подготовиться к занятию и ***знать*** следующие теоретические вопросы:

- Понятие о дифференциальных уравнениях.
- Основные определения теории дифференциальных уравнений
- Понятие о дифференциальных уравнениях первого порядка с разделяющимися переменными.
- Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.

В ходе занятия студент должен научиться делать следующее, т.е. ***уметь***

7. Научиться решать уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
8. Научиться решать дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
9. Научиться решать дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.

В ходе занятия студент должен приобрести и закрепить навыки практического применения соответствующих правил и формул, т.е. ***владеть*** следующими техниками и приемами/методами:

- Умением решать дифференциальные уравнения первого и второго порядков.

Примеры решения типовых задач:

Пример 1(а). Найти общее и частное решение уравнения:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}}$$

при $\boldsymbol{x = 1, y = 2.}$

Решение: в уравнении

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}}$$

путем умножения обеих частей на $\boldsymbol{dx}$ разделим дифференциалы:

$$\boldsymbol{dy = -\frac{y}{x}dx}$$

Разделив обе части последнего уравнения на $\boldsymbol{y}$**,** получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}}$$

Интегрируем это уравнение:

$$\int \boldsymbol{\frac{dy}{y}} = -\int \boldsymbol{\frac{dx}{x}}$$

откуда

$$\boldsymbol{ln|y| = -ln|x| + ln|C|;\ ln|y| \cdot ln|x| = ln|C|.}$$

Потенцируя последнее равенство, получаем $|\boldsymbol{y}| \cdot |\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{C}|$**,** откуда

$$\boldsymbol{y = \frac{C}{x}}$$

– ***общее решение*** уравнения.

Из условия, что при ***x=1, y=2*** найдем значение **С:** $\boldsymbol{2 = \frac{C}{1}}$**,** откуда ***C=2.***

Частное решение будет иметь вид

$$\boldsymbol{y = \frac{2}{x}}$$

Проверка: для проверки в искомое дифференциальное уравнение подставим общее (или частное) решение. При этом исходное дифференциальное уравнение превращается в тождество:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x};\quad \frac{d\left(\frac{C}{x}\right)}{dx} = -\frac{\frac{C}{x}}{x};\quad -\frac{C}{x^2} = -\frac{C}{x^2}.}$$

Ответ:

$$y = \boldsymbol{\frac{C}{x}}$$

– **общее решение**;

$$\boldsymbol{y = \frac{2}{x}}$$

– **частное решение**.

Пример 1(б). Найти общее и частное решение уравнения: $\boldsymbol{y' = 4x^3}$ при $\boldsymbol{x = 0, y = 0}$

Решение: так как $\boldsymbol{y' = \frac{dy}{dx}}$, то искомое уравнение можно записать как $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 4x^3}$. Умножаем обе части уравнения на $\boldsymbol{dx}$ и проинтегрируем:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} \cdot dx = 4x^3 dx}$$

$$\boldsymbol{dy = 4x^3 dx;}$$

$$\boldsymbol{\int dy = 4\int x^3\, dx}$$

$$\boldsymbol{y = 4\frac{x^4}{4} + C}$$

;

$$\boldsymbol{y = x^4 + C}$$

– общее решение.

Из начальных условий определяем **С:** $\boldsymbol{0 = 0^4 + C}$**; С=0.** Тогда $\boldsymbol{y = x^4}$ ***– частное решение.***

Ответ: $y = x^4 + C$ *– общее решение;*

$y = x^4$ *– частное решение.*

Пример 2. Найти решение дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами: $\boldsymbol{y'' + 5y' + 4y = 0.}$

Решение: Характеристическое уравнение для данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$\boldsymbol{k^2 + 5k + 4 = 0.}$$

Найдем корни характеристического уравнения:

$$\boldsymbol{k_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2},}$$

т.е. $\boldsymbol{k = -4;\ k = -1.}$

Т.к. корни действительны и различны, то общим решением дифференциального уравнения является функция:

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-x}.$$

Ответ: $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-x}$ **– общее решение**.

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения, не содержащего искомой функции и её производной: $y'' = x$.

Решение: введём новую переменную $p(x)$:

$$y' = \frac{dy}{dx} = p,$$

тогда

$$y'' = \frac{dy}{dx}$$

Искомое уравнение примет вид:

$$\frac{dp}{dx} = x,$$

т.е. получили уравнение 1-го порядка, которое решается методом разделения переменных: $dp = xdx;$

или

$$\int dp = \int xdx,$$

откуда

$$p = \frac{x^2}{2} + C_1$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

В результате мы получили дифференциальное уравнение первого порядка, решаемое методом разделения переменных:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + C_1 | \cdot dx$$

$$dy = \frac{x^2}{2} dx + C_1 dx$$

$$\int dy = \frac{1}{2} \int x^2\, dx + C_1 \int dx$$

.

$$y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

– ***общее решение***.

Ответ:

$$y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

– общее решение.

Пример 4. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$$

Решение: введём новую переменную ***p(x)*** следующим образом:

$$y' = \frac{dy}{dx} = p$$

тогда

$$y'' = \frac{dp}{dx}$$

и исходное уравнение примет вид:

$$(1+x^2)\frac{dp}{dx} = 2xp| \cdot \frac{dx}{(1+x^2)p}.$$

$$\frac{dp}{P} = \frac{2xdx}{(1+x^2)}.$$

Проинтегрировав данное уравнение, получаем:

$$\int \frac{dp}{P} = \int \frac{2xdx}{(1+x^2)}$$

$$\ln|P| = \ln\left|1+x^2\right| + \ln\ |C_1|.$$

Потенцируя, получим

$$P = C_1(1+x^2)$$

или

$$\frac{dy}{dx} = C_1(1+x^2)$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка, решаемое методом разделения переменных:

$$\frac{dy}{dx} = C_1(1+x^2)| \cdot dx$$

$$\int dy = C_1 \int (1+x^2)dx;$$

$$y = C_1 \int dx + C_1 \int x^2 dx$$

$$y = C_1 x + C_1 \frac{x^3}{3} + C_2$$

– ***общее решение***.

Ответ:

$$y = C_1 x + C_1 \frac{x^3}{3} + C_2$$

– ***общее решение.***

Пример 5. Найти общее решение дифференциального уравнения, не содержащего аргумента: $\boldsymbol{y \cdot y'' - (y')^2 = 0.}$

Решение: введём новую переменную ***p(x)*** следующим образом:

$$y' = \frac{dy}{dx} = p$$

и

$$y'' = \frac{dp}{dx}$$

Тогда исходное уравнение принимает вид:

$$y \cdot \frac{dp}{dx} = p^2$$

т.к.

$$dx = \frac{dy}{p}$$

имеем

$$y \cdot \frac{dp}{dx} \cdot p = p^2$$

Полученное дифференциальное уравнение 1-го порядка решаем методом разделения переменных:

$$y \cdot \frac{dp}{dx} \cdot p = p^2 | \cdot \frac{dy}{y \cdot p^2}$$

$$y \frac{dp}{dx} p \cdot \frac{dy}{yp^2} = p^2 \cdot \frac{dy}{yp^2}$$

$$\int \frac{dp}{P} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln|p| = \ln|y| + \ln\ |C_1|.$$

Затем потенцируя, получим

$$y = p \cdot C_1$$

или

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y$$

Это дифференциальное уравнение 1-го порядка, решаемое путем разделения переменных:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y| \cdot \frac{dx}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{y} = C_1 y \cdot \frac{dx}{y}$$

$$\int \frac{dx}{y} = C_1 \int dx$$

$$\ln|y| = C_1 x + lnC_2$$

Потенцируя последнее выражение, получим ***общее решение***

$$y = C_2 e^{C_1 x}$$

Ответ:

$$y = C_2 e^{C_1 x}$$

– *общее решение.*

Задания для самостоятельного решения:

Задание 1. Найти общее и частное решение дифференциальных уравнений 1-го порядка:

а)

$$y' = 6x^3 \text{ при } x = 1, y = 1$$

б)

$$y' tgx - y = 2 \text{ при } x = 0, y = 1$$

в)

$$y' = \frac{y}{3x} \text{ при } x = 16, y = 0$$

г)

$$(x^3 + 2)' - 3xy = 0 \text{ при } x = 1, y = 6$$

д)

$$xy' = \frac{y}{lnx} \text{ при } x = e, y = 1$$

е)

$$y' = \frac{x}{lny} \text{ при } x = 2, y = 0.$$

Задание 2. Найти общие решения дифференциальных уравнений 1-го порядка с разделяющимися переменными:

а) $(x + 2)dy - (y + 3)dx = 0$

б) $ye^{3x}dx - (2 + e^{3x})dy = 0$

в) $y' = y^2 sinx$

г) $cosx \cdot sinydx + cosx \cdot sinydy = 0$

д) $\frac{yy\prime}{x} + e^{2y} = 0$

е) $xy - (x + 1)dx = 0$

Задание 3. Найти общие решения однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка:

а) $2xyy' = y^2 - 4x^2$

б) $ydx - xdy = ydy$

в) $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$

г) $xydx - (y^2 + x^2)dy = 0$

д) $xdy - ydx = xdx$

е) $xy - y^2 = (2x + xy)y'$

Задание 4. Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

а) $y'' - 3y' + 6y = 0$

б) $y'' - y = 0$

в) $y'' - 5y' + 6y = 0$

г) $y'' + 2y' + y = 0$

д) $y'' + 7y' - 5y = 0$

е) $y'' + 5y' + 17y = 0$

Задание 5. Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка, не содержащего искомой функции и ее производной:

а) $y'' = cosx$

б) $y'' = lnx$

в) $y'' = cosxsinx$

г) $y'' = x \cdot e^{-x}$

д) $y'' = e^{3x}$

е) $y'' - \sqrt{x} = 0$

Практическое занятие № 5

Составление дифференциальных уравнений для решения задач физического, химического и медико-биологического содержания

Занятие направлено на достижение таких компетенций студента как ОК-1, СЛК-2, ПК-6 и ПК-7. Для этого студент должен подготовиться к занятию и ***знать*** следующие теоретические вопросы:

- Определение дифференциального уравнения.
- Понятия частного и общего решений дифференциального уравнения.
- Алгоритм решения дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

В ходе занятия студент должен научиться делать следующее, т.е. ***уметь***

- Составлять и решать дифференциальные уравнения для конкретных задач.

В ходе занятия студент должен приобрести и закрепить навыки практического применения соответствующих правил и формул, т.е. ***владеть*** следующими техниками и приемами/методами:

- Составления и решения дифференциальных уравнений для задач физического, химического и медико-биологического содержания.

Примеры решения типовых задач:

Пример 1. **Зависимость числа не распавшихся ядер атомов радиоактивных элементов от времени.** Ядра атомов радиоактивных элементов с течением времени распадаются. Опытным путем установлено, что скорость распада пропорциональна числу не распавшихся в данный момент ядер атомов. В аналитической форме это можно записать так:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \tag{4.8}$$

где N - число не распавшихся в данный момент ядер атомов; t - время; λ - постоянная распада. Минус в уравнении (4.8) означает, что с течением времени число не распавшихся ядер атомов уменьшается.

Установим зависимость числа не распавшихся ядер атомов радиоактивного вещества от времени, если при $t=0$ число не распавшихся ядер атомов $N = N_0$.

В уравнении (4.8) разделим переменные и проинтегрируем левую часть по N, а правую часть по t:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

$$\int \frac{dN}{N} = -\int \lambda dt$$

$$\ln|N| = -\lambda t + lnC;$$

$$\ln|N| = lne^{-\lambda t} + \ln\ |C|$$

$$N = Ce^{-\lambda t}$$

Полагая в последнем уравнении $t = 0$ и $N = N_0$, находим $C = N_0$. Тогда

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{4.9}$$

Формула (4.9) отражает зависимость числа не распавшихся ядер атомов радиоактивного вещества от времени, график этой зависимости показан на рис. 4.2.

Из формулы (4.9) можно определить период полураспада T, т.е. время, в течение которого число ядер атомов уменьшается вдвое. Подставив в формулу (4.9)

$t = T$ и $N = \frac{N_0}{2}$, получим:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda t}$$

Прологарифмируем последнее выражение и получим:

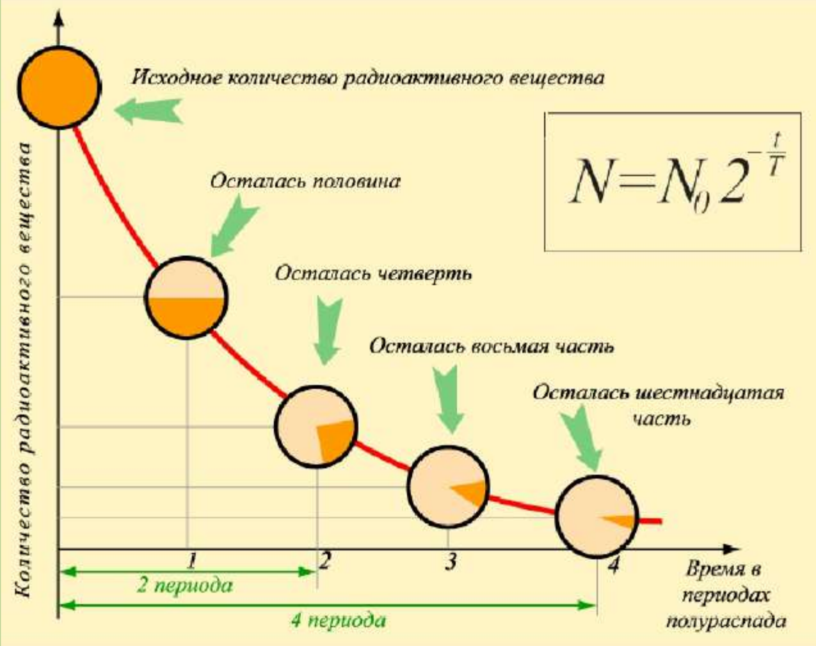

Рис. 4.2. *Зависимость числа не распавшихся ядер атомов радиоактивного вещества от времени*

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda t$$

откуда

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}$$

Из последней формулы видно, что период полураспада связан с постоянной распада и является характеристикой данного радиоактивного вещества.

Пример 2. **Кинетика химических процессов**. В общем случае скорость химической реакции зависит от концентрации реагирующих веществ. Уравнение, выражающее зависимость скорости реакции от концентрации каждого вещества, влияющего на скорость, называется кинетическим дифференциальным уравнением химического процесса. Рассмотрим химические процессы первого порядка.

Скорость, реакции первого порядка выражается уравнением:

$$\boldsymbol{V = \frac{dC}{dt} = -kC} \tag{4.10}$$

где $\boldsymbol{C}$ - концентрация реагирующего вещества: $\boldsymbol{t}$ - время; $\boldsymbol{k}$ - постоянная скорости реакции.

Минус в уравнении (4.10) означает, что концентрация реагирующего вещества с течением времени убывает.

В дифференциальном уравнении (4.10) разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\boldsymbol{\frac{dC}{dt} = -kdt}$$

$$\boldsymbol{\int \frac{dC}{dt} = -k\int dt}$$

$$\boldsymbol{\ln|C| = -kt + \ln\ |a|}$$

$$\boldsymbol{\ln|C| = lne^{-kt} + \ln\ |a|}$$

$$C = ae^{-kt}$$

где a - постоянная интегрирования.

Полагая при $t = 0$ $C = C_0$, получаем $a = C_0$, следовательно,

$$C = C_0e^{-kt} \qquad (4.11)$$

Формула (4.11) выражает закон химической реакции первого порядка в интегральной форме. Пользуясь уравнением (4.11), можно определить время, за которое концентрация исходного вещества уменьшается наполовину. Это время называют *периодом полупревращения* или *полупериодом протекания реакции* и обозначают τ.

Подставив значения $t = \tau$,

$$C = \frac{C_0}{2}$$

в уравнение (4.11), получим

$$\frac{C_0}{2} = C_0e^{-k\tau}$$

откуда

$$\frac{1}{2} = e^{-k\tau}$$

или

$$ln\left(\frac{1}{2}\right) = -k\tau$$

тогда

$$\tau = \frac{ln2}{k} \approx \frac{0,693}{k}$$

Таким образом, период полупревращения не зависит от исходной концентрации вещества, и за равные промежутки времени расходуется одна и та же доля вещества.

***Пример 3.* Закон растворения лекарственных форм вещества из таблеток.** Скорость растворения лекарственных форм вещества из таблеток пропорциональна количеству лекарственных форм вещества в таблетке. Необходимо установить зависимость изменения количества лекарственных форм вещества в таблетке с течением времени.

Обозначим через $\boldsymbol{m}$ количество вещества в таблетке, оставшееся ко времени растворения $\boldsymbol{t}$. Тогда

$$\frac{dm}{dt} = -km \qquad (4.12)$$

где $\boldsymbol{k}$ - постоянная скорости растворения.

Знак минус означает, что количество лекарственных форм вещества с течением времени убывает.

В дифференциальном уравнении (4.12) разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dm}{m} = -kdt$$

$$\int \frac{dm}{m} = -k \int dt$$

$$\ln|m| = lne^{-kt} + \ln |C|$$

$$m = Ce^{-kt}.$$

Полагая, что при $t = 0$; $m = m_0$, получаем $C = m_0$, следовательно,

$$\boldsymbol{m = m_0 e^{-kt}} \tag{4.13}$$

Формула (4.13) выражает закон растворения лекарственных форм вещества из таблеток в интегральной форме. Из уравнения (4.13) находят постоянную скорости растворения $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{k = \frac{1}{t} ln \frac{m_0}{m}}.$$

Период полурастворения таблеток $\boldsymbol{t_{1/2}}$ рассчитывают из формулы (4.13) при $\boldsymbol{t = t_{1/2}, m = \frac{m_0}{2}}$.

Тогда

$$\boldsymbol{\frac{m_0}{2} = me^{-kt_{1/2}}}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{2} = e^{-kt_{1/2}}}$$

$$\boldsymbol{ln\left(\frac{1}{2}\right) = -kt_{1/2}},$$

откуда

$$\boldsymbol{t_{1/2} = \frac{ln2}{k} \approx \frac{0,693}{k}}.$$

Пример 4. **Закон размножения бактерий с течением времени**. Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий в данный момент. Установить зависимость изменения количества бактерий от времени.

Обозначим количество бактерий, имеющихся в данный момент, через $\boldsymbol{x}$. Тогда

$$\frac{dx}{dt} = kx \tag{4.14}$$

где $\boldsymbol{k}$ – коэффициент пропорциональности.

В уравнении (4.14) разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\int \frac{dx}{dt} = kdt;$$

$$\int \frac{dx}{dt} = k \int dt$$

$$\ln|x| = kt + \ln\ |C|;$$

$$\ln|x| = lne^{kt} + \ln\ |C|$$

Потенцируем последнее выражение и получаем:

$$x = C \cdot e^{kt}$$

Полагая, что при $t = 0$, $x = x_0$, получаем $C = x_0$, следовательно:

$$x = x_0 e^{kt}$$

Из этого уравнения следует, что при благоприятных условиях увеличение количества бактерий с течением времени происходит по экспоненциальному закону.

Пример 5. **Закон разрушения клеток в звуковом поле.** Кавитация ультразвуковых волн проявляется в виде разрывов суспензионной среды и образований мельчайших пузырьков и пустот, плотность которых незначительна по сравнению с плотностью воды. Простейшие (бактерии, водоросли, дрожжи, лейкоциты, эритроциты) могут быть разрушены при кавитации, возникающей в интенсивном звуковом поле. Относительные скорости разрушения биологических клеток различных видов остаются постоянными в очень широком диапазоне частот. Эти скорости могут характеризовать относительную хрупкость клеток различных видов. Чтобы выразить это количественно, нужно определить скорость разрушения клеток в постоянном звуковом поле. Изучение этого вопроса показывает, что по крайней мере 1% популяции остаётся не разрушенным. Поэтому можно записать так:

$$\frac{dN}{dt} = -RN \tag{4.15}$$

где N - концентрация клеток; t - время; R - постоянная.

В уравнении (4.15) разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dN}{N} = -Rdt$$

$$\int \frac{dN}{N} = -\int Rdt$$

$$\ln|N| = -Rt + \ln\ |C|;$$

$$\ln|N| = lne^{-Rt} + \ln\ |C|$$
$$N = Ce^{-Rt}$$

Постоянную C найдем из условий, что при

$$t = 0,\ N = N_0,\ C = N_0.$$

Тогда

$$N = N_0 e^{-Rt}$$

т.е. разрушение клеток в постоянном звуковом поле происходит по экспоненциальному закону.

Задания для самостоятельного решения:

1. Скорость укорочения мышцы описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = B(x - x_0),$$

где x - укорочение мышцы в момент времени t; **B** - постоянная, зависящая от нагрузки; x_0 - полное сокращение мышцы. Установить закон сокращения мышцы, если в момент $t = 0$ величина укорочения мышцы равна нулю.

2. Определить период полураспада радия и радона, если постоянные распада данных веществ равны соответственно $1{,}354 \cdot 10^{-11} \cdot c^{-1}$ и $2{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot \text{с}^{-1}$.

3. В реакцию первого порядка вступает 1000 молекул и за одну секунду 400 из них распадаются. Сколько молекул распадается за 2 секунды?

4. Постоянная скорости растворения таблеток стрептоцида по 0,5 грамм составляет 0,05 минут. Вычислить, сколько лекарственного вещества (в%) растворится за 30 минут, если скорость растворения таблеток пропорциональна количеству лекарственного вещества в таблетке.

5. При непрерывном внутрисосудистом введении лекарственного препарата с постоянной скоростью V изменение его в крови описывается уравнением:

$$\frac{dm}{dt} = V - km,$$

где k - постоянная удаления препарата из крови. Определить зависимость количества лекарственного препарата в крови от времени, при условии, что при $t = 0$ $m(0) = 0$.

6. Распределение потенциала вдоль пассивного волокна задается дифференциальным уравнением

$$\lambda \frac{d^2u}{dx^2} = u$$

где λ - постоянная, равная отношению сопротивления протоплазмы и мембраны на единицу длины волокна;
x-длина волокна. Установить зависимость изменения потенциала от длины волокна с учётом того, что потенциал не может неограниченно расти вдоль волокна и при
$x = 0, u = u_0$.

7. Определите напряжение, испытываемое костной тканью за 2 ***сек***, если деформация к ней дана со скоростью

$$\frac{d\varepsilon_{\text{упр}}}{dt} = \frac{1}{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt};$$

где E=196 *МПа* - модуль Юнга компактной костной ткани при сжатии,

$$\frac{d\varepsilon_{\text{упр}}}{dt} = 0,5c^{-1}$$

− скорость деформации.

8. Найти закон поглощения света веществом, если известно, что ослабление интенсивности пропорционально толщине слоя и интенсивности падающего излучения:
$dJ = -cJdl$, где dJ − ослабление интенсивности при прохождении слоя толщиной dl, c − коэффициент пропорциональности.

9. Найти частное решение передачи звуковой волны, если известно уравнение скорости распространения ее:

$$V = 2\cos 0,4t$$

$$x_0 = 1 \text{ при } t_0 = t.$$

10. С какой скоростью распространяется биопотенциал действия, если известно уравнение биопотенциала:

$$\varphi = 0,1l\frac{C_i}{C_0}\cdot t + 2t?$$

11. Какова скорость движения зонда по крови, если он ускоряется по уравнению

$$a = 0,1sin2\pi t + \frac{1}{2}t^2 - 3,7?$$

12. Каково уравнение движения бактерии, если ее мгновенная скорость по крови изменяется по уравнению

$$v_{i\tilde{a}} = 2\sin(3t - 2) + 3,5t?$$

13. С какой скоростью можно уничтожить микроорганизмы, если ускорение действия источника луча на организм имеет уравнение

$$a = t^2 - cos\frac{3t}{2} + \exp\,(2t - 0,1)?$$

14. Какая площадь живой кожи потребуется для пересадки пациенту после ожога периметром, определяемым уравнением

$$y = 3x^2 - 2x + 5, x_1 = 0, x_2 = 3?$$

15. Определить пройденный путь и скорость движения бактерий, если она имеет известное уравнение ускорения движения по биосреде вида

$$y = 0,5\ln(x) - cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot 0,3x$$

16. Определить совершенную работу при перемещении микроорганизма по биожидкости от начала координат до 100 метров, если известно уравнение действующей силы

$$F = 3\cos\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + x^2 + 10,3x.$$

17. Найти общее решение дифференциального уравнения роста клеток со временем, если скорость роста ее

$\frac{dl}{dt}$ прямо пропорциональна длине клетки $\boldsymbol{l}$ в данный момент $\boldsymbol{t}$

$$\frac{dl}{dt} = (\alpha - \beta)l; \quad \alpha, \beta = const.$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Как определить порядок дифференциального уравнения?
3. Сколько постоянных интегрирования имеет дифференциальное уравнение первого порядка? третьего порядка?
4. Можно ли проверить правильность решения дифференциального уравнения? Как это сделать?
5. Чем отличается дифференциальное уравнение от алгебраического?
6. Чем отличается решение дифференциального уравнения от решения алгебраического?
7. В чем заключается задача Коши?
8. Каков геометрический смысл задачи Коши?
9. Чем отличается дифференциальное уравнение с разделенными переменными от дифференциального уравнения с разделяющимися переменными?
10. Как разделяют переменные?
11. Запишите общий вид однородного дифференциального уравнения 1-го порядка.
12. Какой подстановкой решается однородного дифференциального уравнения 1-го порядка?
13. Запишите общий вид линейного дифференциального уравнения 1-го порядка.

14. Запишите порядок решения линейного дифференциального уравнения 1-го порядка.
15. Запишите общий вид неполного дифференциального уравнения 2-го порядка.
16. Какую подстановку следует применить для решения неполного дифференциального уравнения 2-го порядка, не содержащего переменную у?
17. Какую подстановку следует применить для решения неполного дифференциального уравнения 2-го порядка, не содержащего переменную х?
18. Сколько произвольных постоянных входит в общее решение неполного дифференциального уравнения 2-го порядка.
18. Запишите порядок решения уравнения вида
$$\boldsymbol{y'' = f(x; y)}.$$
19. Как составить характеристическое уравнение дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами?
20. Запишите общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами, если корни характеристического уравнения различные действительные числа.
21. Запишите общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами, если корни характеристического уравнения равные действительные числа.
22. Запишите общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами, если корни характеристического уравнения комплексные числа.

Тестовые задания

1.Установите соответствие между записью дифференциальных уравнений первого порядка и их названиями.

1) $(2x-1)\,dy+(3y+2)\,dx=0$

2) $(3x^2+y^2)\,dy+(2x^2-3y^2)\,dx=0$

3) $y'+2xy=e^x$

А) линейное

В) однородное

С) с разделяющимися переменными

2. Разделение переменных в дифференциальном уравнении $\sin x\cos y\,dx+\sin y\cos x\,dy=0$ приведет его к виду …

Варианты ответов:

1) $\frac{\sin x\cos x\,dx}{\sin y}=\frac{dy}{\cos y}$;

2) $\frac{\cos x\,dx}{\sin x}=\frac{\cos y\,dy}{\sin y}$;

3) $\frac{\sin x\,dx}{\cos x}=-\frac{\sin y\,dy}{\cos y}$;

4) $\frac{\cos x\,dx}{\sin x}=-\frac{\cos y\,dy}{\sin y}$.

3. Однородными дифференциальными уравнениями первого порядка являются уравнения…

Варианты ответов:

1) $\frac{x}{y}dy=\ln\frac{y}{x}dx$

2) $y^2dx=e^xdx$;

3) $(x+y)\,dx+x\,dy=0$;

4) $\boldsymbol{x\frac{dy}{dx} = y + cos^2\frac{y}{x}}$.

4. Установите соответствие между начальными условиями и решениями уравнения *$y'-x = 0$*, полученными при данных начальных условиях.

1) $\mathbf{y(0) = 0}$;

2) $\mathbf{y(0) = 1}$;

3) $\mathbf{y(2) = 0}$.

Варианты ответов:

1) $\boldsymbol{y = \frac{x^2}{2} + 1}$;

2) $\boldsymbol{y = \frac{x^2}{2} - 2}$;

3) $\boldsymbol{y = \frac{x^2}{2}}$.

5. Общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y = 0$$

имеет вид…

Варианты ответов:

1) $\boldsymbol{y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}}$;

2) $\boldsymbol{y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x}$;

3) $\boldsymbol{y = e^{2x}(C_1x + C_2)}$;

4) $\boldsymbol{y = e^{2x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)}$.

6. Общее решение линейного однородного

дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y = C_1e^x + +C_2e^{-x} ,$$

тогда корни характеристического уравнения равны …

Варианты ответов:

1) $r_1 = r_2 = 2$; 2) $r_1 = -2, r_2 = 1$;

3) $r_1 = 0, r_2 = -1$; 4) $r_1 = 2, r_2 = -1$.

7. Частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2\,y' - 5y = 3x^2,$$

найденное по виду правой части имеет вид …

Варианты ответов:

1) $y = Ax + B$; 2) $y = A$;

3) $y = Ax^2 + Bx + C$; 4) $y = (Ax + B)x^2$.

8. Определить частное решение дифференциального уравнения $y'' - y = sin2x$, учитывая форму правой части…

Варианты ответов:

1) $y = A\cos 2x + B\sin 2x$;

2) $y = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x$;

3) $y = Ae^{-x} + Be^x$;

4) $y = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x)$.

Литература

1. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. Москва, Изд-во «Астрель» 2011. – 656 с.
2. Зайцев И.Л. Курс высшей математики. Москва, Изд-во «Высшая школа» 2013. – 253 с.
3. Лобоцкая Н.Л. Основы высшей математики. Москва, Изд-во «АльянС» 2016 – 480 с.
4. Павлушков И.В. Основы высшей математики и математической статистики. М.: ГЭОТАР-Медиа, 2009. – 432 с.

ТЕМА 5.
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

5.1. Основные понятия теории вероятностей

Теория вероятностей – область математики, изучающая закономерности в случайных явлениях.

Случайное явление – это явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта может протекать каждый раз несколько по-иному.

Очевидно, что в природе нет ни одного явления, в котором не присутствовали бы в той или иной мере элементы случайности, но в различных ситуациях мы учитываем их по-разному. Так, в ряде практических задач ими можно пренебречь и рассматривать вместо реального явления его упрощенную схему – «модель», предполагая, что в данных условиях опыта явление протекает вполне определенным образом. При этом выделяются самые главные, решающие факторы, характеризующие явление. Именно такая схема изучения явлений чаще всего применяется в физике, технике, механике. Именно так выявляется основная закономерность, свойственная данному явлению и дающая возможность предсказать результат опыта по заданным исходным условиям.

Однако описанная классическая схема так называемых точных наук плохо приспособлена для решения многих задач, в которых многочисленные, тесно переплетающиеся между собой случайные факторы играют заметную (часто определяющую) роль. Здесь на первый план выступает случайная природа явления, которой уже нельзя пренебречь. Это явление необходимо изучать именно с точки зрения закономерностей, присущих ему как случайному явлению. В физике примерами таких явлений служат броуновское движение, радиоактивный распад, ряд квантово-механических процессов и др.

Предмет изучения биологов и медиков – живой организм, зарождение, развитие и существование которого определяется очень многими и разнообразными, часто случайными внешними и внутренними факторами. Именно поэтому явления и события живого мира во многом тоже случайны по своей природе.

Элементы неопределенности, сложности, многопричинности, присущие случайным явлениям, обусловливают необходимость создания специальных математических методов для изучения этих явлений. Разработка таких методов, установление специфических закономерностей, свойственных случайным явлениям, – **главные задачи теории вероятностей.**

Исходным понятием теории вероятностей является испытание.

Испытанием называется осуществление некоторого определенного комплекса условий, который может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз.

Организация одних испытаний зависит от нас самих (например, подбрасывание монеты или игрального кубика, извлечение шаров из ящика), организация других – нет (например, простое наблюдение за средней температурой данного дня года, проводимое в течение многих лет).

Каждое испытание может привести или не привести к некоторому исходу, результату. Исход испытания называется событием.

Например, стрелок стреляет по мишени, разделенной на четыре области. Выстрел – это испытание. Попадание в определенную область мишени – событие.

Случайным событием называется всякий факт, который в результате опыта (испытания) может произойти или не произойти. Различные случайные события обозначаются латинскими буквами $A, B, C, \ldots$

Например, событие A – появление герба при бросании монеты; событие B – попадание в цель при выстреле; событие C – появление цветного шара при извлечении шаров из ящика.

Случайные события зависят от многих причин, имеющих между собой отдаленную связь, проследить которую мы не можем. Так, при бросании игрального кубика мы не знаем заранее, какая из граней окажется сверху, так как это зависит от очень многих обстоятельств (движения руки, положения игрального кубика в момент броска, особенностей поверхности, на которую падает кубик, и т. д.).

Виды случайных событий

Пусть производится опыт, который имеет ряд возможных событий (исходов): $A, B, C, \ldots$ и т. д.

События A, B, C называются **единственно возможными**, если в результате каждого испытания хотя бы одно из них обязательно наступит. Говорят также, что рассматриваемые события образуют **полную группу событий.**

Пример 5.1. При бросании игрального кубика единственно возможные события, состоящие в выпадении одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков, образуют полную группу событий.

Два события называются **несовместными**, если в результате опыта появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Пример 5.2. В ящике находится пять шаров, помеченных номерами: 1, 2, 3, 4, 5. При извлечении шара вскроется только один из пяти номеров, значит, события, состоящие в появлении этого номера при дальнейшем извлечении шаров из ящика, являются несовместными. Два события называются **совместными**, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Пример 5.3. При бросании игрального кубика событие A – появление четырех очков, событие B – появление четного числа очков. В этом случае события A и B совместные. События называются **равновозможными (равновероятными)**, если при испытании не существует никаких объективных причин, вследствие которых одно из них могло бы наступать чаще, чем другое.

Пример 5.4. Появление герба или решки при бросании монеты – события равновозможные. Но если в ящике находится восемь белых и два черных шара, то появления белого или черного шара не могут быть событиями равновозможными. Они носят название событий неравновозможных.

Единственно возможные, несовместные и равновозможные события называются **случаями.**

Два события A и B называются **противоположными,** если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит. Событие, противоположное событию A, обозначают через $\bar{A}$.

Пример 5.5. Попадание и промах при выстреле по цели – противоположные события. Если А – попадание, то $\bar{A}$ – промах.

Событие называется **достоверным**, если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом.

Событие называется **невозможным**, если в данном испытании оно заведомо не может произойти.

Пример 5.6. При извлечении шара из урны, в которой все шары белые, событие A – вынут белый шар – достоверное событие; B – вынут черный шар – невозможное событие.

Заметим, что достоверное и невозможное события в данном испытании являются противоположными.

5.2. Классическое и статистическое определение вероятности

Каждая наука, развивающая общую теорию какого-либо круга явлений, содержит ряд основных понятий, на которых она базируется. Например, в геометрии - это понятие точки, прямой линии; в механике - понятия силы, массы, скорости и т.д. Такие основные понятия существуют и в теории вероятностей. Одно из них - случайное событие.

Основной количественной характеристикой случайного события является его вероятность. Пусть *А* - какое-то случайное событие. **Вероятность случайного события** - это математическая величина, которая определяет возможность его появления. Она обозначается *Р(А)*.

Классическое определение вероятности

Классическое определение вероятности случайного события обычно базируется на результатах анализа умозрительных опытов (испытаний), суть которых определяется условием поставленной задачи. При этом **вероятность случайного события *Р(А)* равна:**

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{m}{n}} \tag{5.1}$$

где m - число случаев, благоприятствующих появлению события *А*; n - общее число возможных случаев.

Пример 5.7. У кабинета дежурного психотерапевта ожидают приема трое больных. Врачу известно по медицинским карточкам, что один из ожидающих, по фамилии Петров, болел в прошлом маниакально-депрессивным психозом. Врач интересуется этим больным, но не хочет вне очереди вызывать его в кабинет.

Обозначим как событие А тот факт, что в кабинет врача входит больной Петров; как событие Б обозначим то, что входит другой больной - Сидоров и как событие С - входит Иванов. События А, Б и С - несовместные и образуют полную группу (предполагается, что к врачу больные входят по одному). Так как появиться, согласно очереди, может равновероятно любой из больных, то до начала приема вероятность появиться первым в кабинете врача для одного из больных, в том числе и для Петрова, равна (1/3).

Пример 5.8. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найдем вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение. Обозначим через A событие – набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных элементарных исходов равно 10. Эти исходы несовместны, равно возможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию лишь один исход (нужная цифра лишь одна). Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{1}{10}}$$

Из приведенного классического определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице. U

Действительно, достоверному событию должны благоприятствовать все n элементарных событий, т.е. $m = n$, следовательно,

$$\boldsymbol{P(U) = \frac{n}{n} = 1}$$

Свойство 2. Вероятность невозможного события V равна нулю.

В самом деле, невозможному событию не может благоприятствовать ни одно из элементарных событий, т. е. $m = 0$, откуда:

$$\boldsymbol{P(V) = \frac{0}{n} = 0}$$

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных событий. Поэтому в этом случае $0 < m < n$ и, значит, $0 < \frac{m}{n} < 1$. Следовательно $0 < P(A) < 1$

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству:

$$\boldsymbol{0 \le P(A) \le 1}$$

Статистическое определение вероятности

Практически в естественнонаучных и технических вопросах пользуются так называемым статистическим определением вероятности.

Следует иметь в виду, что теория вероятностей применима только к массовым (не уникальным) случайным явлениям. Практика показывает, что массовые случайные явления обладают свойством устойчивости частоты их появления – отношения числа появлений случайного события к числу испытаний. Примером может служить выпадение герба или цифры при бросании монеты, которое является простым и наглядным испытанием. Практика человека говорит о том, что при большом числе бросаний примерно в 50% испытаний выпадет герб, а в 50% – цифра. А это уже определенная закономерность. Устойчивость частоты случайного события – это объективное свойство массовых случайных событий реального мира. Отсутствие устойчивости частоты в сериях испытаний свидетельствует о том, что условия испытаний изменяются.

Допустим, что имеется возможность неограниченного повторения испытаний, в каждом из которых при сохранении неизменных условий отмечается появление или непоявление некоторого события A (бросание монеты, извлечение шара из урны, стрельба по цели).

Пусть при достаточно большом числе n испытаний интересующее нас событие A произошло m раз.

Число m называется **абсолютной частотой** (или просто частотой) события A, а отношение

$$\boldsymbol{P^*(A) = \frac{m}{n}} \tag{5.2}$$

называется **относительной частотой события A** в данной серии испытаний.

Результаты многочисленных опытов и наблюдений помогают сделать вывод, что при проведении серии из испытаний, когда число n сравнительно мало, относительная частота $P^*(A)$ принимает значения, которые могут довольно сильно отличаться друг от друга. Но с увеличением числа испытаний m в сериях относительная частота $P^*(A)$ приближается к некоторому числу $P(A)$, стабилизируясь возле него и принимая все более устойчивые значения.

Статистическое определение вероятности: вероятностью события A в данном испытании называется число $P(A)$, около которого группируются значения относительной частоты при больших n

Несмотря на внешнее сходство, формулы

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{m}{n}}$$

и

$$\boldsymbol{P^*(A) = \frac{m}{n}}$$

различны по существу. Первая формула служит для теоретического вычисления вероятности события по заданным условиям опыта. Вторая же – для экспериментального определения частоты события. Чтобы ею воспользоваться, необходим опытный, статистический материал.

Между частотой события и его вероятностью существует некоторая связь: ясно, что более вероятные события происходят чаще, чем маловероятные.

Практически невозможным событием называется событие, вероятность которого весьма близка к нулю, но не равна нулю.

Практически достоверным называется событие, вероятность которого весьма близка к единице, но не равна единице.

С данными понятиями связывается **принцип практической уверенности**, который формулируется следующим образом: если в некотором испытании вероятность случайного события A достаточно близка к единице, то можно быть практически уверенным в том, что при однократном испытании событие *A* произойдет. Если в некотором испытании вероятность случайного события *A* достаточно близка к нулю, то можно быть практически уверенным в том, что при однократном испытании событие *A* не произойдет.

5.3. Теоремы теории вероятностей

Все случайные события можно разделить на три основных вида:

- несовместные события;
- независимые события;
- зависимые события.

Для каждого вида событий характерны свои особенности и теоремы теории вероятностей.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Для несовместных случайных событий справедлива теорема сложения вероятностей:

Вероятность появления одного, все равно какого, из нескольких несовместных событий $A_1, A_2, A_3 \ldots A_k$, равна сумме их вероятностей.

$$\mathbf{P(A_1 \text{ или } A_2, \text{ или } \ldots, \text{ или } A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k).} \qquad (5.3)$$

Пример 5.9. В урне находится 50 шаров: 20 белых, 20 черных и 10 красных. Найдите вероятность появления белого (событие A) или красного шара (событие B), когда шар наугад достают из урны.

Решение. $\mathbf{P\ (A\ \text{или}\ B) = P(A) + P(B);}$

$$\mathbf{P(A) = (20/50) = 0{,}4;\ P(B) = (10/50) = 0{,}2}$$

$$\mathbf{P(A\ \text{или}\ B) = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6 = 60\ \%.}$$

Пример 5.10. В классе 40 детей. Из них в возрасте от 7 до 7,5 лет 8 мальчиков (A) и 10 девочек (B). Найдите Вероятность присутствия в классе детей такого возраста.

Решение. $\mathbf{P(A) = (8/40) = 0{,}2;\ P(B) = 10/\ 40 = 0{,}25.}$

$$\mathbf{P\ (A\ \text{или}\ B) = 0{,}2 + 0{,}25 = 0{,}45 = 45\ \%.}$$

Если несовместные события A1, A2, …, An образуют полную группу, то сумма вероятностей этих событий всегда равна единице.

$$\mathbf{P(A1) + P(A2) + \ldots + P(An) = 1}. \qquad (5.4)$$

Это важное утверждение часто используется при решении многих прикладных задач. Часто возникают ситуации, когда в некоторых испытаниях может происходить лишь одно из двух несовместных событий. Такие события

называют ***противоположными*** и обозначают A и A. Эти два события составляют полную группу, поэтому сумма их вероятностей всегда равна единице:

$$\mathbf{P(A) + P(\ A) = 1}. \qquad (5.5)$$

Пример 5.11. При стрельбе по цели могут произойти лишь два события: A— попадание и A — промах. Эти события несовместны и противоположны. Они образуют полную группу, поэтому сумма их вероятностей равна единице.

Теорема умножения вероятностей независимых случайных событий

Для независимых событий справедлива теорема умножения вероятностей:

Вероятность совместного (одновременного) появления нескольких независимых случайных событий равна произведению их вероятностей.

$\mathbf{P\ (A1 \text{ и } A2, \text{ и } A3, \ldots, \text{ и } Ak) = P(A1) \cdot P(A2) \cdot \ldots \cdot P(Ak)}$. (5.6)

Совместное появление означает, что происходят события и $A1$, и $A2$, и $A3$, …, и Ak.

Пример 5.12. Есть две урны. В одной находится 2 черных и 8 белых шаров, в другой 6 черных и 4 белых шара. Событие $A1$ состоит в появлении белого шара из первой урны, $A2$ - из второй. Найдите вероятность достать одновременно из этих урн по белому шару, то есть найдите $P\ (A1 \text{ и } A2)$.

Решение. Вероятность достать белый шар из первой урны $P(A1) = (8/10) = 0{,}8$, а из второй— $P(A2) = (4/10) = 0{,}4$.

Вероятность достать по белому шару из обеих урн одновременно равна

$P\ (A1 \text{ и } A2) = P(A1)\ P(A2) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32 = 32\ \%$.

Теорема умножения вероятностей для зависимых событий

Если A и B— зависимые события, то вероятность наступления события B первым (т. е. до наступления события A) называется ***безусловной вероятностью*** этого события и обозначается $P(B)$, а вероятность наступления события B при условии, что событие A уже произошло, называется ***условной вероятностью*** события B и обозначается как $P(B/A)$ или $PA(B)$.

Аналогичный смысл имеют безусловная $P(A)$ и условная $P(A/B)$ вероятности для события А.

Теорема умножения вероятностей для двух зависимых событий:

Вероятность одновременного наступления двух зависимых событий A и B равно произведение безусловной вероятности первого события на условную вероятность второго.

$$\boldsymbol{P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B/A)}, \tag{5.7}$$

если первым наступает событие A, или

$$\boldsymbol{P(A \text{ и } B) = P(B) \times P(A/B)}, \tag{5.7а}$$

если первым наступает событие B.

Пример 5.13. В урне есть 3 черных шара и 7 белых. Найдите вероятность того, что из этой урны один за другим (при этом первый шар не возвращают в урну) достанут 2 белых шара.

Решение. Вероятность достать первый белый шар (событие A) равна (7/10). После того, как его вынут, в урне остается 9 шаров, из них 6 белых.

Тогда вероятность появления второго белого шара (событие B) равна $P(B/A)$ = (6/9), и вероятность достать последовательно 2 белых шара равна

$P(A$ и $B) = P(A) \cdot P(B/A) = (7/10) \cdot (6/9) = 0,47 = 47\%$

Приведенная теорема умножения вероятностей для зависимых событий тоже допускает обобщение на любое количество событий. *Например,* для трех событий, связанных друг с другом:

$$\mathbf{P(A \text{ и } B, \text{ и } C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB).}$$

Пример 5.14. В двух детских садах, которые посещают по 100 детей каждый, произошла вспышка инфекционного заболевания. Доли заболевших составляют соответственно 1/5 и 1/4, причем в первом учреждении 70%, а во втором - 60% заболевших - дети младше 3 лет. Случайным образом выбирают одного ребенка. *Определите:*

1) вероятность того, что выбранный ребенок относится к первому детскому саду (событие A) и болен (событие B);

2) вероятность того, что ребенок выбран из второго детского сада (событие C), имеет заболевание (событие D) и старше 3 лет (событие E).

Решение:

1. Вероятность того, что выбранный ребенок относится к первому детскому саду и болен равна

$$\mathbf{P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B/A) = (100/200) \cdot (1/5) = 0,1 = 10\%}$$

2. Вероятность того, что выбран ребенок из второго детского сада, он болен и старше 3 лет:

$$\mathbf{P(C \text{ и } D, \text{ и } E) = P(C) \cdot P(D/C) \cdot P(E/CD) =}$$
$$\mathbf{= (100/200) \cdot (1/4) \cdot (4/10) = 0,05 = 5\%.}$$

Пример 5.15. В терапевтическом отделении больницы 70% пациентов – женщины, а 21% – курящие мужчины. Наугад выбирают пациента. Он оказывается мужчиной. Какова вероятность, что он курит?

Решение. Пусть событие A означает, что пациент – мужчина, а событие B – что пациент курит. Тогда в силу условия задачи $P(A)$ =0,3, а $P(AB)$ = 0,21. Поэтому искомая условная вероятность равна

$$P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0{,}21}{0{,}3}=0{,}7$$

Формула полной вероятности

Следствием теоремы сложения вероятностей для несовместных событий и теоремы умножения вероятностей для зависимых событий является так называемая формула полной вероятности.

Пусть некоторое событие A может произойти при условии, что появляется одно из несовместных событий A_1, A_2, …, A_n, образующих полную группу событий.

Теорема. Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из n попарно несовместных событий A_1, A_2, …, A_n, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую услов-ную вероятность события A:

$$P(A) = P(A_1)\cdot P(A/A_1) + P(A_2)\cdot P(A/A_2) + \ldots + P(A_n)\cdot P(A/A_n)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(Ai) \cdot P(\frac{A}{Ai})$$

Эту формулу называют **формулой полной вероятности**.

Пример 5.16. Даны три одинаковые на вид аптечки. В первой аптечке находится 2 тюбика кодеина и 2 тюбика фталазола, во второй – 4 тюбика кодеина и 2 тюбика фталазола, в третьей 5 тюбиков кодеина и 3 тюбика фталазола. Выбирают наудачу одну из аптечек и вынимают из нее тюбик. Найти вероятность того, что вынутый тюбик будет тюбиком кодеина.

Решение. Здесь событие – появление тюбика кодеина – может произойти с одним из событий: *A1* – выбор первой аптечки, *A*2 – выбор второй аптечки, *A3* – выбор третьей аптечки. *A*

Выбор каждой аптечки равновозможен, поэтому

$$P(A1) = P(A2) = P(A3) = \frac{1}{3}$$

Условные вероятности события A при событиях A1, A2, A3 и соответственно равны

$$\mathbf{P(A/A1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P(A/A2)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \mathbf{P(A/A3)} = \frac{5}{8}$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(A_1) \cdot P\left(\frac{A}{A_1}\right) + P(A_2) \cdot P\left(\frac{A}{A_2}\right) + P(A_3) \cdot P\left(\frac{A}{A_3}\right) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} \approx \mathbf{0,6};$$

т.е. вероятность того, что вынутый тюбик будет тюбиком кодеина, равна 0,6.

Формула Байеса

Если вероятность совместного появления зависимых событий *A* и *B* не зависит от того, в каком порядке они происходят, то

$$\boldsymbol{P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)}.$$

В этом случае условную вероятность одного из событий можно найти, зная вероятности обоих событий и условную вероятность второго:

$$\boldsymbol{P(B/A) = \frac{P(B) \cdot P(A/B)}{P(A)}}$$

Обобщением данной формулы на случай многих событий является формула Байеса.

Пусть n несовместных случайных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу событий. Вероятности этих событий $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_n)$ известны и, так как они образуют полную группу, то $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

Некоторое случайное событие *A* связано с событиями $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Причем известны условные вероятности появления события *A* с каждым из событий A_i, т.е. известны $P(A/A_1), P(A/A_2), \ldots, P(A/A_n)$. При этом сумма условных вероятностей $P(A/A_i)$ может быть не равна единице, т.е. $\sum_{i=1}^{n} P(A/A_i) \neq 1$. Тогда условная вероятность появления события A_i при реализации события *A* (т.е. при условии, что событие *A* произошло) определяется формулой Байеса:

$$P\left(\frac{A_i}{A}\right) =$$

$$= \frac{P(A_i) \cdot P(A/A_i)}{P(A_1) \cdot P(A/A_1) + P(A_2) \cdot P(A/A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(A/A_n)}.$$

Причем для этих условных вероятностей

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i/A) = 1.$$

Формула Байеса нашла широкое применение не только в математике, но и в медицине. Например, она используется для вычисления вероятности тех или иных заболеваний. Так, если $A_1, A_2, \dots, A_n$ – предполагаемые диагнозы для данного пациента, A – некоторый признак, имеющий отношение к ним (симптом, определенный показатель анализа крови или мочи, деталь рентгенограммы и т.д.), а условные вероятности $P(A/A_i)$ проявления этого признака при каждом диагнозе $(i = 1, 2, \dots, n)$ заранее известны, то формула Байеса позволяет вычислить условные вероятности заболеваний (диагнозов) $P(A_i/A)$ после того как установлено, что характерный признак присутствует у пациента.

Пример 5.17. При первичном осмотре больного предполагаются 3 диагноза – A_1, A_2, A_3. Их вероятности, по мнению врача, распределяются так:

$$\boldsymbol{P(A_1) = 0{,}5;\ P(A_2) = 0{,}17;\ P(A_3) = 0{,}33.}$$

Следовательно, предварительно наиболее вероятным кажется первый диагноз. Для его уточнения назначается, например, анализ крови, в котором ожидается увеличение СОЭ (событие А). Заранее известно (на основании результатов исследований), что вероятности увеличения СОЭ при предполагаемых заболеваниях равны:

$$\boldsymbol{P(A/A_1) = 0{,}1;\ P(A/A_2) = 0{,}2;\ P(A/A_3) = 0{,}9.}$$

В полученном анализе зафиксировано увеличение СОЭ (событие A произошло). Тогда расчет по формуле Байеса дает значения вероятностей предполагаемых заболеваний при увеличенном значении СОЭ:

$$\boldsymbol{P(A_1/A) = 0{,}13;\ P(A_2/A) = 0{,}09;\ P(A_3/A) = 0{,}78.}$$

Эти цифры показывают, что с учетом лабораторных данных наиболее реален не первый, а третий диагноз, вероятность которого теперь оказалась достаточно большой.

Приведенный пример – простейшая иллюстрация того, как с помощью формулы Байеса можно формализавать логику врача при постановке диагноза и благодаря этому создать методы компьютерной диагностики

Пример 5.18. Вычислите вероятность, оценивающую степень риска перинатальной смертности ребенка у женщин с анатомически узким тазом.

Решение. Пусть событие A_1 – благополучные роды; согласно клиническим отчетам, $P(A_1) = 0,975 = 97,5\%$, тогда, если A_2 – факт перинатальной смертности, то

$$\boldsymbol{P(A_2) = 1 - 0,975 = 0,025 = 2,5\%.}$$

Обозначим A – факт наличия узкого таза у роженицы. Из проведенных исследований известны:

а) $P(A/A_1)$ – вероятность узкого таза при благоприятных родах, $P(A/A_1) = 0,029$,

б) $P(A/A_2)$ – вероятность узкого таза при перинатальной смертности, $P(A/A_2) = 0,051$.

Тогда искомая вероятность перинатальной смертности при узком тазе у роженицы рассчитывается по формуле Байеса и равна:

$$\boldsymbol{P(A_2/A) = \frac{P(A_2)\cdot P(A/A_2)}{P(A_1)\cdot P(A/A_1) + P(A_2)\cdot P(A/A_2)}}$$

$$\boldsymbol{P\left(\frac{A_2}{A}\right) = \frac{0,025\cdot 0,051}{0,975\cdot 0,029 + 0,025\cdot 0,051} = 0,044 = 4,4\%}$$

Таким образом, риск перинатальной смертности при анатомически узком таза значительно выше (почти вдвое) среднего риска (4,4% против 2,5%)

Подобные расчеты, обычно выполняемые с помощью компьютера, лежат в основе методов формирования групп пациентов повышенного риска, связанного с наличием того или иного отягощающего фактора.

5.4.Случайные величины. Виды случайных величин

Величина, которая принимает различные числовые значения под влиянием случайных обстоятельств, называется случайной величиной. Примеры случайных величин: число больных на приеме у врача, точные размеры внутренних органов людей и т. д.

Случайные величины обозначают прописными буквами латинского алфавита $X, Y, Z, \ldots$, а их возможные значения - соответствующими строчными буквами $x, y, z, \ldots$

Вероятности случайных величин обозначают буквами с соответствующими индексами: $P(X = x_1) = P(x_1) = P_1$ и т.д.

Различают **дискретные и непрерывные случайные величины**.

Случайная величина называется дискретной, если она принимает только определенные, отдельные друг от друга значения, которые можно установить и перечислить.

Примерами дискретной случайной величины являются:

- число студентов в аудитории;
- цифра, которая появляется на верхней грани при бросании игральной кости, которая может принимать лишь целые значения от 1 до 6;
- относительная частота попадания в цель при 10 выстрелах – ее значения: 0; 0,1; 0,2; …, 1.

Случайная величина называется непрерывной, если она может принимать любые значения внутри некоторого интервала, который иногда имеет резко

выраженные границы, а иногда и нет. К непрерывным случайным величинам относятся, например, масса тела и рост взрослых людей, масса и объем мозга, количественное содержание ферментов у здоровых людей, размеры форменных элементов крови, pH крови и т. п.

Если случайная величина зависит от времени, то можно говорить о случайном процессе.

Понятие случайной величины играет определяющую роль в современной теории вероятностей, разработавшей специальные приемы перехода от случайных событий к случайным величинам.

5.5. Закон распределения дискретной случайной величины

Чтобы дать полную характеристику дискретной случайной величины, необходимо указать все ее возможные значения и их вероятности.

Соответствие между возможными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями называется **законом распределения** этой величины.

Обозначим возможные значения случайной величины X через x_i, а соответствующие им вероятности – через p_i . Тогда закон распределения дискретной случайной величины можно задать тремя способами: в виде таблицы, графика или формулы.

В таблице, которая называется **рядом распределения**, перечисляются все возможные значения дискретной случайной величины X и соответствующие этим значениям вероятности p:

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

При этом сумма всех вероятностей pi должна быть равна единице (условие нормировки):

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

Пример 5.19. В денежной лотерее выпушено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 рублей и 10 выигрышей по 1 рублю. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение. Возможные значения для X: $x_1 = 50$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$. Вероятности этих значений:

$$p_1 = \frac{1}{100} = 0,01, \qquad p_2 = \frac{10}{100} = 0,1,$$

$$p_3 = 1 - (p_2 + p_1) = 1 - (0,01 + 0,1) = 0,89.$$

Закон распределения выигрыша задан в виде таблицы:

X	50	1	0
p	0,01	0,1	0,89

Контроль: 0,01 + 0,1 + 0,89 = 1

5.6. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Полную характеристику дискретных и непрерывных случайных величин можно получить, зная законы их распределения. Однако во многих практически значимых ситуациях пользуются так называемыми **числовыми характеристиками** случайных величин. Главное назначение этих характеристик – выразить в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения случайных величин. Важно, что данные параметры представляют собой конкретные (постоянные) значения, которые можно оценивать с помощью данных, полученных в опытах.

В теории вероятностей и математической статистике используется достаточно много различных характеристик, но мы рассмотрим только наиболее употребляемые.

Рассмотрим **характеристики положения** - математическое ожидание и моду. Они характеризуют положение случайной величины на числовой оси, т. е. указывают некоторое ее ориентировочное значение, около которого группируются все другие возможные значения случайной величины. Среди них важнейшую роль играет математическое ожидание $M(X)$.

Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех возможных значений величины X на вероятности этих значений:

$$\boldsymbol{M(X) = \mu = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i}$$

Отметим, что при большом числе испытаний среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины приближается к ее математическому ожиданию.

$$\boldsymbol{M(X) \approx \bar{X}}.$$

Математическое ожидание случайной величины есть величина неслучайная.

Физический смысл математического ожидания как характеристики положения центра распределения можно проиллюстрировать рядом примеров. Так, при многократных измерениях некоторой величины в одних и тех же условиях математическое ожидание можно рассматривать как «истинное» значение этой величины. При наблюдении колебаний массы отдельных таблеток, изготовленных на фармацевтическом заводе, математическое ожидание имеет смысл массы, на которую настроена таблеточная машина.

Свойства математического ожидания дискретной случайной величины

1. Математическое ожидание постоянной величины C равно этой постоянной, т.е.

$$\boldsymbol{C = const,\ M(C) = C}.$$

Постоянную C можно рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую лишь одно значение C

с вероятностью *p=1*. Поэтому

$$\boldsymbol{M(C) = C \cdot 1 = C}.$$

2. Постоянный множитель С можно выносить за знак математического ожидания, т.е.

$$\boldsymbol{M(CX) = CM(X)}.$$

3. Математическое ожидание алгебраической суммы случайных величин равно алгебраической сумме их математических ожиданий, т.е.

$$\boldsymbol{M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)}.$$

4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий, т.е.

$$\boldsymbol{M(XY) = M(X) \cdot M(Y)}.$$

5. Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А постоянна и равна p, тогда математическое ожидание M(X) числа появления события А в n независимых испытаниях $M(X) = np$.

Пример 5.20. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = X + 2Y$, если известны математические ожидания случайных величин X и Y: $M(X) = 5, M(Y) = 3$.

Решение. Используя свойства 2 и 3 математического ожидания, получаем:

$$\boldsymbol{M(Z) = M(X + 2Y) = M(X) + M(2Y) = M(X) + 2M(Y) = 5 + 2 \cdot 3 = 11}.$$

Модой *$M_o(X)$* дискретной случайной величины называют ее наиболее вероятное значение.

Пример 5.21. Пусть дана случайная величина X с известным законом распределения, заданным следующей таблицей:

X	0	1	2	3	4
p	0,1	0,2	0,4	0,1	0,2

Из этой таблицы видно, что мода случайной величины X равна 2, так как этому значению соответствует наибольшая вероятность $P(2) = 0{,}4$.

При составлении годичного плана потребности населения в каком-то лекарственном препарате определяют не ее математическое ожидание, а моду, т.е. месяц, в котором чаще всего требуется данный препарат.

В микробиологии для закона распределения вероятностей появления колонии микроорганизмов в пробах также определяют обычно не математическое ожидание, а моду, т.е. пробу, которой соответствует наибольшая вероятность появления колонии микроорганизмов.

В медицине знание среднего возраста детей, заболевших ангиной, менее интересно, чем знание возраста, в котором чаще всего происходит заболевание (в частности, при решении вопроса о том, где должны быть сосредоточены главные профилактические условия: в школах или дошкольных учреждениях).

Кроме характеристик положения – средних, типичных значений случайной величины, – употребляется еще ряд характеристик, каждая из которых описывает то или иное свойство распределения.

Характеристики рассеяния – это дисперсия и стандартное отклонение (среднее квадратическое отклонение).

Дисперсией $D(X)$ дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания μ:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{M}((\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^{\mathbf{2}}).$$

Свойства дисперсии дискретной случайной величины

1. Дисперсия дискретной случайной величины X равна разности между математическим ожиданием квадрата величины X и квадратом ее математического ожидания:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{X}^{\mathbf{2}}) - [\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X})]^{\mathbf{2}}.$$

2. Дисперсия постоянной величины С равна нулю: $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{C}) = \mathbf{0}$.
3. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{CX}) = \mathbf{C}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}).$$

4. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин X и Y равна сумме дисперсий этих величин:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{D}(\boldsymbol{Y}).$$

5. Дисперсия разности двух независимых случайных величин X и Y равна сумме дисперсий этих величин:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{D}(\boldsymbol{Y}).$$

6. Дисперсия числа появления события A в n независимых

испытаниях, в каждом из которых вероятность события *A* постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании:

$$\boldsymbol{D(X) = \mathbf{npq}}.$$

Пример 5.22. Найти дисперсию случайной величины $Z = 4X + 3$, если известно, что дисперсия случайной величины X равна $D(X) = 3$.

Решение. Используя свойства дисперсии, получаем:

$$\mathbf{D(Z) = D(4X + 3) = D(4X) + D(3) = 4^2 D(X) + 0 = 16 \cdot 3 = 48.}$$

Дисперсия характеризует рассеяние, разбросанность значений случайной величины *X* относительно ее математического ожидания. Само слово «дисперсия» означает «рассеяние».

Однако дисперсия $D(X)$ имеет размерность квадрата случайной величины, что весьма неудобно при оценке разброса в физических, биологических, медицинских и других приложениях. Поэтому обычно пользуются параметром, размерность которого совпадает с размерностью *X*. Это – среднее квадратическое (стандартное) отклонение.

Средним квадратическим отклонением случайной величины называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{M((X-\mu)^2)}}$$

Приведем формулу для среднего квадратического отклонения суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин:

$$\boldsymbol{\sigma(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sqrt{D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n)}}.$$

Пример 5.23. Закон распределения случайной величины *X* задан таблицей. Определить дисперсию *D(X)*.

X	1	2	5
P	0,3	0,5	0,2

Решение. По определению $\boldsymbol{D(X) = \sigma^2 = M((X-\mu)^2)}$. Вычислим математическое ожидание величины *X*:

$$\boldsymbol{\mu = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,2 = 2,3.}$$

Найдем квадраты всех возможных отклонений величины *X* от μ:

$$\boldsymbol{[x_1 - \mu]^2 = (1 - 2,3)^2 = 1,69,}$$
$$\boldsymbol{[x_2 - \mu]^2 = (2 - 2,3)^2 = 0,09,}$$
$$\boldsymbol{[x_3 - \mu]^2 = (5 - 2,3)^2 = 7,29.}$$

Напишет закон распределения квадрата отклонения:

$[X-\mu]^2$	1,69	0,09	7,29
P	0,3	0,5	0,2

Тогда дисперсия равна:

$$\boldsymbol{D(X) = 1,69 \cdot 0,3 + 0,09 \cdot 0,5 + 7,29 \cdot 0,2 = 2,01.}$$

Пример 5.24. Закон распределения случайной величины *X* задан следующей таблицей:

X	0	1	2	3	4
P	0,13	0,35	0,35	0,15	0,02

Вычислить ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Сначала находим математическое ожидание случайной величины X:

$$\boldsymbol{M(X) = 0 \cdot 0,13 + 1 \cdot 0,35 + 2 \cdot 0,35 + 3 \cdot 0,15 + 4 \cdot 0,02 = 1,58.}$$

Далее запишем закон распределения X^2:

X^2	0	1	4	9	16
P	0,13	0,35	0,35	0,15	0,02

Математическое ожидание случайной величины X^2:

$$\boldsymbol{M(X^2) = 0 \cdot 0,13 + 1 \cdot 0,35 + 4 \cdot 0,35 + 9 \cdot 0,15 + 16 \cdot 0,02 = 3,42.}$$

Находим дисперсию:

$$\boldsymbol{D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 3,42 - 1,58^2 = 0,92.}$$

Отсюда находим среднеквадратические отклонение

$$\delta(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,92} \approx 0,96$$

5.7. Распределение непрерывной случайной величины. Плотность вероятности распределения

Для непрерывных случайных величин невозможно применить закон распределения в виде таблицы, так как непрерывная величина имеет бесчисленное («несчетное») множество возможных значений, сплошь заполняющих некоторый интервал. Поэтому составить таблицу, в которой были бы перечислены все ее возможные значения, или построить многоугольник распределения нельзя. Кроме того, вероятность какого-либо ее конкретного значения очень мала (близка к 0). При этом различные области (интервалы) возможных значений непрерывной случайной величины обычно не являются одинаково вероятными.

Таким образом, и здесь существует некий закон распределения.

Рассмотрим непрерывную случайную величину X, возможные значения которой сплошь заполняют некоторый интервал $[a, b]$ (Если точные значения a и b неизвестны, то рассматривают весь интервал $(-\infty, +\infty)$). Закон распределения вероятностей такой величины должен позволять найти вероятность попадания ее значений в любой заранее заданный интервал (x_1, x_2),

лежащий внутри $[a, b]$ (рис. 5.1).

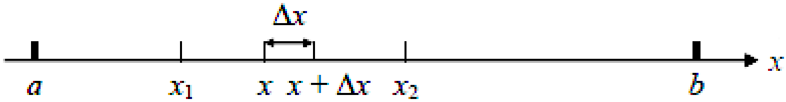

Рис. 5.1. *Значения непрерывной случайной величины* x, *определенные в интервале [*a, b*]*

Обозначим эту вероятность как $P(x_1 < X < x_2)$ или $P(x_1 \le X \le x_2)$.

Рассмотрим сначала очень малый интервал значений от x до $(x + \Delta x)$ (рис. 5.1). Малая вероятность dP того, что случайная величина X примет какое-то значение из этого малого интервала $(x,\ x + \Delta x)$, будет пропорциональна величине этого интервала Δx: $dP \sim \Delta x$. Введем коэффициент пропорциональности $f(x)$, который сам может зависеть от x, и получим:

$$\boldsymbol{dP = f(x) \cdot \Delta x} \qquad (5.8)$$

Введенная здесь функция $f(x)$ называется ***плотностью распределения вероятностей*** случайной величины X или, коротко, ее ***плотностью вероятности*** (плотностью распределения). Уравнение (5.8) можно рассматривать как дифференциальное уравнение, и тогда искомая вероятность попадания величины X в заданный интервал (x_1, x_2) равна

$$\boldsymbol{P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx} \tag{5.9}$$

Графически эта вероятность $P(x_1 \leq X \leq x_2)$ равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, кривой $f(x)$ и прямыми $X = x_1$ и $X = x_2$ (рис. 5.2), что следует из геометрического смысла определенного интеграла (5.9). Кривая $f(x)$ при этом называется ***кривой распределения***.

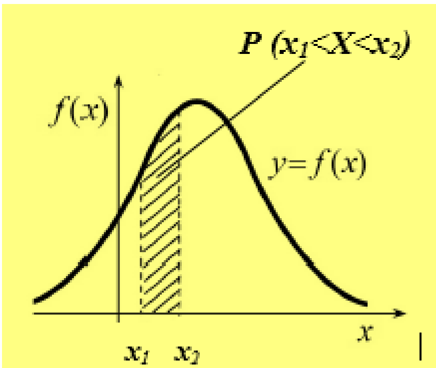

Рис. 5.2. *Графическое представление вероятности попадания случайной величины X в заданный интервал (x_1, x_2) при известной функции распределения $f(x)$*

Из (5.9) видно, что если известна функция $f(x)$, то изменяя пределы интегрирования, можно найти вероятность принятия случайной величиной X любого значения из интересующего интервала. Поэтому именно *задание функции f(x) полностью определяет закон распределения для непрерывных случайных величин X.*

Плотность вероятности $f(x)$ распределения непрерывной случайной величины подчиняется *условию нормировки*:

$$\int_a^b f(x)dx = 1 \tag{5.10}$$

если известно, что все значения X лежат в интервале $[a, b]$, или же в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \tag{5.10а}$$

Условия нормировки (5.10) или (5.10а) являются следствием того, что значения случайной величины X достоверно принадлежат интервалу $[a, b]$ или $(-\infty, +\infty)$ и означают, что ***площадь, ограниченная кривой распределения f(x) и осью абсцисс, всегда равна 1.***

Для описания распределения вероятностей дискретной случайной величины дифференциальная функция не применима.

Плотность вероятности – неотрицательная функция:

$\underline{\boldsymbol{f(x) > 0.}}$

Пример 5.25. Для плотности вероятности случайной величины *X*

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} ax^2 \text{ при } 0 \le x \le 1 \\ 0 \text{ при } x < 0 \text{ или } x > 1 \end{cases}}$$

найти коэффициент *a* и вероятность попадания случайной величины *X* в интервал $\left(0;\frac{1}{4}\right)$.

Решение. Так как все значения данной случайной величины принадлежат интервалу (0;1), то, согласно условию нормировки, плотность распределения

$$\boldsymbol{\int_0^1 ax^2dx = 1,\quad \frac{ax^2}{3}\Big|_0^1 = 1,\quad \frac{a}{3} = 1,}\quad \text{откуда}\quad \boldsymbol{a = 3}$$

Вероятность того, что *X* примет значение из заданного интервала, равна приращению функции распределения вдоль этого интервала, т.е.

$$\boldsymbol{P(a < X < b) = F(a) - F(b)}.$$

В нашем случае $a = 0$ и $b = \frac{1}{4}$, поэтому

$$\boldsymbol{F(x) = \int 3x^2dx = \frac{3x^3}{3} = x^3}$$

$$\boldsymbol{P\left(0 < X < \frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{1}{4}\right) - F(0) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}}$$

.

5.8. Характеристики распределения непрерывных случайных величин

Под основными числовыми характеристиками непрерывной случайной величины понимают, как и в случае дискретной случайной величины, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Как и для дискретной величины, математическое ожидание представляет собой среднее значение этой величины, а дисперсия и среднее квадратическое отклонение являются усредненными характеристиками степени разброса возможных значений этой величины относительно ее математического ожидания.

Однако формулы, определяющие математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X) = \sigma^2$ непрерывной случайной величины, отличаются от соответствующих формул для дискретной величины.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a,b]$, называют величину определенного интеграла:

$$\boldsymbol{M(X) = \mu = \int_a^b xf(x)dx,}$$

где $f(x)$ –плотность вероятности случайной величины X.
Если возможные значения принадлежат всей оси Ox, то

$$\boldsymbol{M(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx}$$

По аналогии с дисперсией дискретной величины определяется и дисперсия непрерывной величины.

Дисперсией непрерывной случайной величины *X*, возможные значения которой принадлежат отрезку *[a,b]*, называют величину определенного интеграла

$$\boldsymbol{D(X) = \sigma^2 = \int_a^b (x-\mu)^2 f(x)dx,}$$

где μ– математическое ожидание, *f(x* – плотность вероятности случайной величины.

Если возможные значения *X* принадлежат всей оси *Ox*, то

$$\boldsymbol{D(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx}$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется, как и для величины дискретной, равенством

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{D(X)}.}$$

Свойства математического ожидания и дисперсии дискретных величии сохраняются и для непрерывных величин.

Для вычисления дисперсии более удобны формулы:

$$\boldsymbol{D(X) = \sigma^2 = M(X^2) - [M(X)]^2,}$$

$$\boldsymbol{D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2,}$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2.$$

5.9. Нормальное распределение случайной величины

Нормальный закон распределения (закон Гаусса) играет исключительно важную роль в теории вероятностей. Во-первых, это наиболее часто встречающийся на практике закон распределения непрерывных случайных величин. Во-вторых, он является предельным законом в том смысле, что к нему при определенных условиях приближаются другие законы распределения.

Закон распределения вероятностей непрерывной случайной величины *X* называют нормальным, если плотность вероятности определяется формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где *x* – значение случайной величины *X*;
μ и σ - математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

Из формулы видно, что если случайная величина распределена по нормальному закону, то достаточно знать только два числовых параметра - μ и σ, чтобы полностью знать закон ее распределения.

График функции *f(x)* называется **нормальной кривой распределения** или **кривой Гаусса**. Он имеет симметричный вид относительно ординаты $x = \mu$.

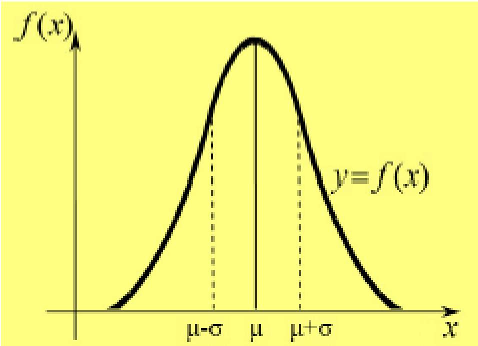

Рис. 5.3. *Нормальная кривая распределения или кривая Гаусса*

Максимальное значение плотности вероятности, равное

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sigma}\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}} \approx \frac{\mathbf{0,4}}{\boldsymbol{\sigma}}$$

соответствует математическому ожиданию $\mu = \bar{X}$; по мере удаления точки x от μ значение плотности *f(x)* приближается к нулю (рис. 5.3).

Величина μ называется также центром рассеяния. Среднее квадратическое отклонение σ характеризует ширину кривой распределения.

Установим, как влияют параметры μ и σ на форму кривой Гаусса. При изменении значения μ нормальная кривая не меняется по форме, но сдвигается вдоль оси абсцисс (рис. 5.4). Параметр σ определяет форму кривой нормального распределения. С возрастанием σ максимальная ордината кривой убывает, а сама кривая, становясь более пологой, растягивается вдоль оси абсцисс; при уменьшении σ кривая вытягивается вверх, одновременно сжимаясь с боков. Вид кривой распределения при разных значениях показан на рис. 5.5.

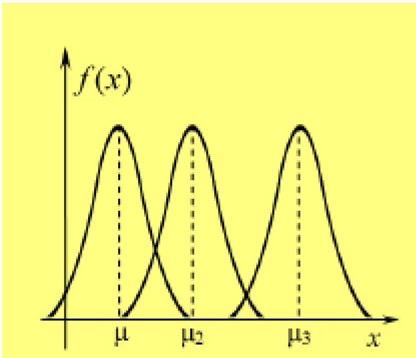

Рис. 5.4

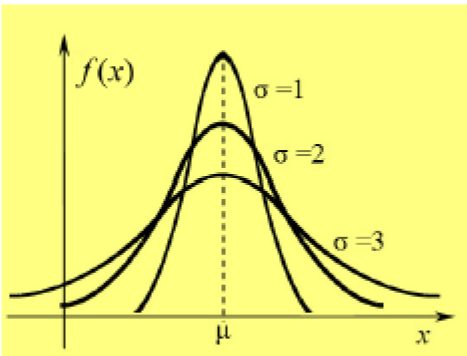

Рис. 5.5.

Естественно, что при любых значениях μ и σ площадь, ограниченная нормальной кривой и осью *X*, остается равной

1 (условие нормировки):

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1$$

или

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Вероятность попадания значений случайной величины X в интервал (x_1, x_2), т.е. $P(x_1 < X < x_2)$равна:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

или

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right),$$

где Ф(x)– функция Лапласа (https://100task.ru/sample/119.aspx Таблица значений функции Лапласа).

На практике часто приходиться вычислять вероятности попадания значений нормально распределенной случайной величины на участки, симметричные относительно μ. В частности, рассмотрим следующую, важную в прикладном отношении задачу. Отложим от μ вправо и влево отрезки, равные σ, 2σ и 3σ (рис. 5.6) и проанализируем результат вычисления вероятности попадания X в соответствующие интервалы:

$$\boldsymbol{P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0,6827 = 68,27\%};$$
$$\boldsymbol{P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0,9545 = 95,45\%};$$
$$\boldsymbol{P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0,9973 = 99,73\%}.$$

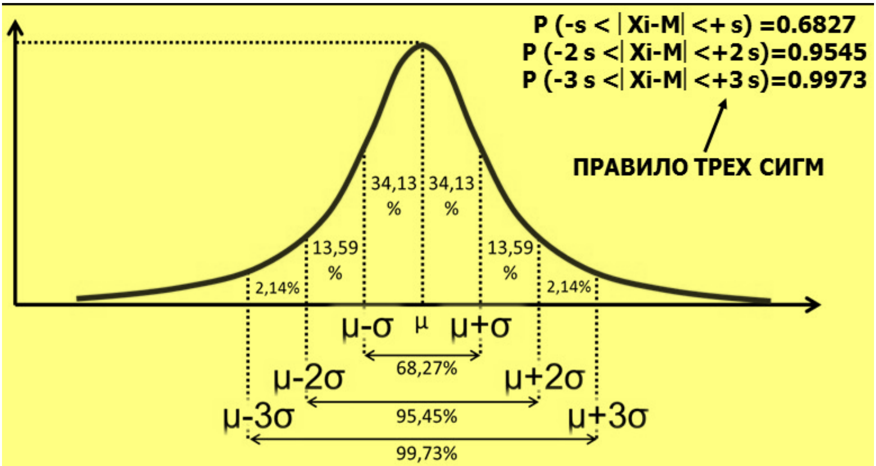

Рис. 5.6.

Из последнего неравенства следует: практически достоверно, что значения нормально распределенной случайной величины X с параметрами μ и σ лежат в интервале μ±3σ. Иначе говоря, зная μ = и σ, можно указать интервал, в который с вероятностью P = 99,73% попадают значения данной случайной величины. Такой способ оценки диапазона возможных значений X известен как **«правило трех сигм»**.

Другими словами, вероятность того, что абсолютная величина отклонения превысит утроенное среднее квадратическое отклонение, очень мала, а именно равна 0,0027. Это означает, что лишь в 0,27% случаев так может произойти. Такие события, исходя из принципа невозможности маловероятных событий, можно считать практически невозможными. В этом и состоит сущность правила трех сигм: если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

На практике правило трех сигм применяется так: если распределение изучаемой случайной величины неизвестно, но условие, указанное в приведенном правиле, выполняется, то имеются основания предполагать, что изучаемая величина распределена нормально; в противном случае она не распределена нормально.

Пример 5.26. Известно, что для здорового человека pH крови является нормально распределенной величиной со средним значением (математическим ожиданием) 7,4 и стандартным отклонением 0,2. Определите диапазон значений этого параметра.

Решение. Для ответа на данный вопрос воспользуемся «правилом трех сигм»; с вероятностью, равной 99,73%, можно утверждать, что диапазон значений pH для здорового человека составляет [6,8; 8].

Пример 5.27. Случайная величина X подчинена нормальному закону с математическим ожиданием $\mu = 375$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 25$. Найти вероятность того, что значение этой случайной величины будет заключено в пределах от 300 до 425.

Решение. Запишем вначале закон распределения. Общая формула имеет вид:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}}.$$

Подставляя $\mu = 375$ и $\sigma = 25$, после вычислений:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{25\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-375)^2}{1250}}}.$$

Вероятность того, что X примет значение из интервала $x_1 < X < x_2$, имеет вид:

$$\boldsymbol{P(x_1 < X < x_2 = \Phi\left(\frac{x_{2-\mu}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)},$$

где $\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \boldsymbol{e^{-x^2/2} dx}$ функция Лапласа. Эта функция определяется с помощью таблиц. В нашем случае:

$$\boldsymbol{P(300 < X < 425 = \Phi\left(\frac{425 - 375}{25}\right) - \Phi\left(\frac{300 - 375}{25}\right)}$$
$$\boldsymbol{= \Phi(2) - \Phi(-3) = \Phi(2) + \Phi(3)}.$$

По таблице находим:

$\boldsymbol{\Phi(2) = 0,4772; \Phi(3) = 0,49865}$, следовательно:

$$\boldsymbol{P(300 < X < 425 = 0,4772 + 0,49865 = 0,97585.}$$

Нормально распределенные случайные величины широко встречаются в природе, на практике. Выдающимся русским математиком А.М. Ляпуновым была доказана центральная предельная теорема теории вероятностей, из которой вытекает следующее следствие: если случайная величина представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то эта случайная величина имеет распределение, близкое к нормальному.

Практическое занятие № 6.

Решение задач по математической статистике

Занятие направлено на достижение таких компетенций студента как ОК-1, СЛК-2, ПК-6 и ПК-7. Для этого студент должен подготовиться к занятию и ***знать*** следующие теоретические вопросы:

- Основные определения математической статистики и теории вероятностей.

В ходе занятия студент должен научиться делать следующее, т.е. ***уметь***

- Составлять и решать задачи математической статистики.

В ходе занятия студент должен приобрести и закрепить навыки практического применения соответствующих правил и формул, т.е. ***владеть*** приемами/методами решения задач матстатистики физического, химического и медико-биологического содержания.

Примеры решения типовых задач:

Пример 1. Лабораторная крыса помещена в лабиринт и должна выбрать один из пяти возможных путей, так как лишь один из них ведет к поощрению в виде пищи. В предположении равно возможности выбора пути определите вероятность выбора пути, ведущего к пище.

Решение. По условию задачи, из пяти равновозможных случаев ***(n = 5)*** событию ***A*** − *«крыса находит пищу»* − благоприятствует один из них, т. е. $\boldsymbol{m} = 1$. Тогда

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P}(\text{крыса находит еду}) = \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} = \mathbf{0{,}2} = \mathbf{20\%}$$

Пример 2. При врачебном обследовании 500 человек у 5 нашли опухоль в легких (о. л.). Определите относительную частоту и вероятность этого заболевания.

Решение. По условию задачи ***M*** = *5*, ***N*** = *500*, относительная частота

P * (о. л.) = M/N = 5/500 = 0,01.

В этой задаче ***N*** велико и можно с достаточной точностью считать, что

P(о. л.) = P * (о. л.) = 0,01 = 1%.

Пример 3. Отдел технического контроля обнаружил пять бракованных книг в партии из случайно отобранных 100 книг. Найти относительную частоту появления бракованных книг.

Решение. Относительная частота события ***A*** *(появление бракованных книг)* равна отношению числа испытаний, в которых появилось событие ***A***, к общему числу произведенных испытаний:

$$\boldsymbol{W(A) = \frac{5}{100} = 0,05}$$

Задания для самостоятельного решения:

1. Среди 500 ампул, проверенных на герметичность, оказалось 10 ампул с трещинами. Вычислить относительную частоту появления ампул, имеющих трещины.
2. Среди 300 пробирок, изготовленных на автоматической линии, оказалось 15 не отвечающих стандарту. Найти частоту появления стандартных пробирок.
3. Примерно 1 ребенок из 700 рождается с синдромом Дауна. В больнице большого города в год рождается 3500 детей. Каково ожидаемое число новорожденных с синдромом Дауна?
4. В коробке 30 таблеток: 10 красных, 5 желтых, 15 белых. Найти вероятность появления цветной таблетки (т.е. или красной или желтой).
5. Опухоль – «мишень» разделена на три области. При использовании радионуклидного препарата вероятность поражения первой области равна 0,45; второй - 0,35. Найти вероятность того, что при однократном использовании радионуклид попадет либо в первую, либо во вторую мишень.
6. В коробке имеется 7 желтых и несколько белых таблеток. Какова вероятность извлечь белую таблетку,

если вероятность извлечь желтую таблетку равна? Сколько белых таблеток в коробке?

7. В картотеке имеются истории болезней 8 пациентов. Если наугад взять первую, затем вторую, третью и т.д. истории болезней, то какова вероятность в каждом случае изъятия нужной истории болезни? Предполагается, что искомая история болезни имеется в картотеке. Рассмотрите 2 варианта:

a) взятые истории болезней не возвращаются в картотеку;
b) взятые истории болезней каждый раз возвращаются в картотеку и хаотически располагаются в ней.

8. С первого предприятия поступило 200 пробирок, из которых 190 стандартных, а со второго – 300, из которых 280 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу взятая пробирка будет стандартной.
9. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием **С**, 30% - с заболеванием **L**, 20% - с заболеванием **М**. Вероятность полного излечения болезни **К** равна 0,7; для болезней **L** и **М** эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием **К**.
10. Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие дало попадание, если вероятности попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями соответственно равны $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}5$.
11. Во время эпидемии в одном из населенных пунктов 60% жителей оказались больными. Из каждых 100

больных 10 требуют срочной медицинской помощи. Найти вероятность того, что любому взятому наугад жителю необходима срочная медицинская помощь.

12. Три врача независимо друг от друга осмотрели одного и того же больного. Вероятность того, что первый врач допустит ошибку при установлении диагноза, равна 0,01. Для второго и третьего врачей эта вероятность соответственно 0,015 и 0,02. Найти вероятность того, что при осмотре больного хотя бы один из врачей допустит ошибку в диагнозе.
13. Одна вакцина формирует иммунитет по отношению к краснухе в 95% случаев. Предположим, что вакцинировались 30% населения и что вероятность заболеть краснухой у вакцинированного человека без иммунитета такая же, как и у не вакцинированного. Какова вероятность того, что человек, заболевший краснухой, был вакцинирован?
14. Некоторое заболевание, встречающееся у 5% населения, с трудом поддается диагностике. Один грубый тест на это заболевание дает положительный результат (указывает на наличие заболевания) в 60% случаев, когда пациент действительно болен, и в 30% случаев, когда у пациента этого заболевания нет. Пусть для конкретного пациента этот тест дает положительный результат. Какова вероятность того, что у него есть данное заболевание?
15. Пациенты разбиты на две группы одинаковой численности. Одна группа придерживалась специальной диеты с высоким содержанием ненасыщенных жиров, а контрольная группа питалась

по обычной диете, богатой насыщенными жирами. После 10 лет пребывания на этих диетах возникновение сердечно-сосудистых заболеваний в группах составило соответственно 31% и 48%. Случайно выбранный из обследуемых человек страдает сердечно-сосудистым заболеванием. Какова вероятность того, что он принадлежит к контрольной группе?

16. Установлено, что курящие мужчины в возрасте свыше 40 лет умирают от рака легких в 10 раз чаще, чем некурящие. Предположим, 60% мужчин курят. Найдите вероятность того, что мужчина, умерший от рака легких, был курящим.
17. Установлено, что в среднем один из 700 детей мужского пола рождается с лишней Y-хромосомой и что среди таких детей крайне агрессивное поведение встречается в 20 раз чаще. Опираясь на эти данные, представьте, что у мальчика крайне агрессивное поведение. Какова вероятность того, что ребенок имеет лишнюю Y-хромосому?
18. На одном производстве было установлено, что 3% рабочих являются алкоголиками с показателем прогулов втрое выше, чем у остальных. Если случайно выбранный рабочий отсутствует на работе, то какова вероятность того, что он алкоголик?

Вопросы для самоконтроля

1) Что изучает теория вероятности?
2) Назовите основные задачи теории вероятностей.
3) Дайте определение событию. Приведите примеры.
4) Что называют случайным событием? Приведите примеры.
5) Перечислите виды случайных событий.
6) Какое событие называют достоверным? Приведите примеры.
7) Какое событие называют невозможным? Приведите примеры
8) Что такое вероятность?

10. Приведите классическое определение вероятности.
11. Приведите статистическое определение вероятности.
12. Перечислите основные свойства вероятности.
13. Сформулируйте теоремы сложения вероятностей для совместных и несовместных событий.
14. Сформулируйте классическое определение вероятности события
15. Перечислите свойства вероятности события
16. Сформулируйте статистическое определение вероятности события
17. Дайте определение условной вероятности события
18. Дайте определение дискретной случайной величины. Приведите пример
19. Дайте определение непрерывной случайной величины. Приведите пример

Тестовые задания

1. Что означает операция A+B?

а) событие A влечет за собой событие B;

б) произошло хотя бы одно из двух событий A или B;

в) совместно осуществились события A и B.

2. Выберите неверное утверждение:

а. Событие, противоположное достоверному, является невозможным;

б. Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице;

в. Если два события единственно возможны и несовместны, то они называются противоположными;

г. Вероятность появления одного из противоположных событий всегда больше вероятности другого.

3. Вероятность события - это

а. Число, характеризующее степень возможности появления событий при многократном повторении событий

б. Событие, состоящее из исходов, входящих в множество ***A***, но не входящих в множество ***B***

в. Событие, которое состоит в совместном наступлении всех событий в результате испытания

г. Единственно возможный исход испытания

4. Указать верное определение. Суммой двух событий называется:

а. Новое событие, состоящее в том, что происходят оба события одновременно;
б. Новое событие, состоящее в том, что происходит или первое, или второе, или оба вместе;
в. Новое событие, состоящее в том, что происходит одно но не происходит другое.

5. Указать верное определение. Вероятностью события называется:

а. Произведение числа исходов, благоприятствующих появлению события на общее число исходов;
б. Сумма числа исходов, благоприятствующих появлению события и общего числа исходов;
в. Отношение числа исходов, благоприятствующих появлению события к общему числу исходов

6. Указать верное утверждение. Вероятность невозможного события:

а) больше нуля и меньше единицы;

б) равна нулю;

в) равна единице

7. Указать верное утверждение. Вероятность достоверного события:

а) больше нуля и меньше единицы;

б) равна нулю;

в) равна единице

8. Указать верное свойство. Вероятность случайного события:

а) больше нуля и меньше единицы;

б) равна нулю;

в) равна единице

9. **Указать правильный ответ. Дискретную случайную величину задают:**

а) указывая её вероятности;

б) указывая её закон распределения;

в) поставив каждому элементарному исходу в соответствие действительное число.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Панченко Е.И., Литвинова Т.Н. Роль математического компонента в подготовке студентов медицинского ВУЗА // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2017. – № 4-1. – С. 208-211.
   URL: https://applied-research.ru/ru/article/view?id=11351 (дата обращения: 16.12.2021).
2. Баврин И.И. Курс высшей математики для химико-биологических и медицинских специальностей. Москва, 2012. – 380 с.
3. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. Москва, 2011. – 656 с.
4. Зайцев И.Л. Курс высшей математики. Москва, 2013. - 253 с.
5. Лобоцкая Н.Л. Основы высшей математики. Москва, Изд-во «АльянС» 2016 – 480 с. 5. Павлушков И.В. Основы высшей математики и математической статистики. М.: ГЭОТАР-Медиа, 2009. – 432 с.
6. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов/В. Е. Гмурман. — 9-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2004. — 404 с.
7. Голёнова И.А Основы медицинской статистики с элементами высшей математики: пособие / И.А. Голёнова. – Витебск: ВГМУ, 2017. – 362 с.