



**Современный  
Гуманитарный  
Университет**

**Дистанционное образование**

---

---

Рабочий учебник

Фамилия, имя, отчество \_\_\_\_\_

Факультет \_\_\_\_\_

Номер контракта \_\_\_\_\_

## **ТЕОРИЯ ОРГАНИЗАЦИИ**

### **ЮНИТА 6**

**МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ  
И ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА**

**МОСКВА 1999**

Разработано С.Г. Рыбкиной, канд. техн. наук

Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений

## **КУРС: ТЕОРИЯ ОРГАНИЗАЦИИ**

- Юнита 1. Основные концептуальные положения теории организации.
- Юнита 2. Законы и принципы организации. Организационная культура.
- Юнита 3. Организация промышленного производства.
- Юнита 4. Планирование производства.
- Юнита 5. Планирование труда и заработной платы.
- Юнита 6. Методы прогнозирования и планирования производства.

### **ЮНИТА 6**

Рассматриваются основные методы прогнозирования и планирования показателей деятельности организации.

Для студентов Современного Гуманитарного Университета

Юнита соответствует профессиональной образовательной программе № 4

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН .....	5
ЛИТЕРАТУРА .....	6
ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ .....	7
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР .....	13
Прогнозирование. Типы моделей, количественные и качественные методы прогнозирования .....	13
Типы моделей .....	13
Процесс построения моделей .....	13
Проблемы моделирования .....	13
Методы прогнозирования .....	14
Источники .....	16
Анализ временных рядов .....	18
Тренд .....	18
Циклы .....	19
Сезонные колебания .....	20
Ошибки .....	20
Построение временных рядов .....	20
Исходные данные .....	20
Методы расчетов .....	21
Метод линейной экстраполяции и интерполяции .....	21
Определение прогнозирующих функций методом наименьших квадратов .....	22
Экспоненциальная (показательная) функция .....	25
Метод простой средней .....	28
Метод скользящей средней .....	30
Сглаживание функций .....	33
Экспоненциальное сглаживание .....	33
Прогнозирование на основе нелинейной регрессии .....	35
Совместное (или комбинированное) использование различных типов прогнозирующих функций .....	35
Помесячные и кумулятивные прогнозы спроса .....	36
Планирование. Составление календарных планов-графиков методом Джонсона .....	37
Выбор порядка обработки деталей на двух станках .....	37
Индикаторный метод .....	38
Графики Гантта .....	40
Линейное программирование .....	44
Определение оптимальной комбинации двух изделий .....	44
Планирование производства как задача линейного программирования .....	47
Принятые обозначения .....	48
Представление задачи управления производством в виде линейного программирования .....	48
Применение метода линейного программирования .....	50
Другой подход к планированию производства .....	51

Транспортная задача .....	52
Первоначально допустимое решение. Метод аппроксимации Фогеля	55
Оптимизация при решении транспортной задачи .....	56
Метод “ступенек” .....	56
Нерегулярно встречающиеся аспекты проблем транспортировки ..	59
Издержки перемещения. Модифицированный метод .....	65
Сетевое планирование .....	68
Методология построения сетевых моделей .....	68
Основные характеристики и расчет сети .....	75
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ .....	84
ТРЕНИНГ УМЕНИЙ .....	86
ГЛОССАРИЙ*	

---

\* Глоссарий расположен в середине учебного пособия и предназначен для самостоятельного заучивания новых понятий.

## **ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН**

Прогнозирование. Типы моделей, количественные и качественные методы прогнозирования.

Анализ временных рядов. Тренд, циклы, сезонные колебания временных рядов. Метод линейной экстраполяции и интерполяции. Определение прогнозируемой функции методом наименьших квадратов.

Метод простой средней - частный случай метода наименьших квадратов. Метод скользящей средней. Сглаживание функций.

Планирование. Составление календарных план-графиков методом Джонсона. Индикаторный метод. Линейное программирование. Транспортная задача. Оптимизация при решении транспортной задачи. Сетевое планирование.

## ЛИТЕРАТУРА

### Базовая

1. Федосеев В.В. Экономико-математические методы и модели маркетинга. М., 1996.

\*2. Шляпин В.Н., Серов Д.М. Сетевое моделирование в деятельности УСВ ТПП // Вопросы теории и практики выставочного дела. Вып. 6. М., 1981.

### Дополнительная

3. Менеджмент организации / Под ред. З.П.Румянцевой, Н.А.Саломатина. М., 1995.

4. Экономика, организация и планирование промышленного производства / Под ред. Н.А.Лисицына. 2-е изд. Минск, 1990.

\*5. Бигель Дж. Управление производством. Количественный подход. М., 1973.

\*6. Риггс Дж. Производственные системы: планирование, анализ и контроль: Пер. с англ. М., 1972.

\*7. Сацков Н.Я. Методы и приемы деятельности менеджеров и бизнесменов. Белая церковь, 1993.

8. Экономическая стратегия фирмы / Под ред. А.П.Градова. СПб., 1995.

9. Буров В.П. Коллективные методы выработки решений: Учебн. пособие. М., 1995.

10. Статистика рынка товаров и услуг / Под ред. И.К. Беляевского. М., 1995.

---

Примечание. Знаком (\*) отмечены работы, использованные при составлении тематического обзора.

Современный Гуманитарный Университет

## ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ

№ п/п	Умения	Алгоритмы
1	<p>Расчет простой средней:</p> $Y_F = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{N},$ <p>где <math>Y_i</math> – величина показателя <math>i</math>-го отчетного периода;  <math>N</math> – количество отчетных периодов;  <math>i = 1, 2, 3, \dots, n</math> – номер отчетного периода</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Определение количества всех отчетных периодов.</li> <li>2. Определение величины показателя по каждому отчетному периоду.</li> <li>3. Суммирование величин показателей по всем отчетным периодам.</li> <li>4. Расчет простой средней (<math>Y_F</math>) по формуле.</li> </ol>
2	<p>Расчет средневзвешенного:</p> $X_{\text{взв.}} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i X_i}{N},$ <p>где <math>X_i</math> – величина показателя <math>i</math>-го отчетного периода;  <math>k_i</math> – удельный весовой коэффициент (<math>0 &lt; k_1 &lt; k_2 &lt; \dots &lt; k_n</math>);  <math>N</math> – количество отчетных периодов;  <math>i = 1, 2, 3, \dots, n</math> – номер отчетного периода</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Определение количества одинаковых по длительности отчетных периодов, непрерывно следующих друг за другом.</li> <li>2. Нумерация отчетных периодов с ростом по направлению к прогнозируемому периоду.</li> <li>3. Определение величины показателей по каждому отчетному периоду.</li> <li>4. Определение удельного весового коэффициента для показателя по каждому отчетному периоду (чем ближе отчетный период к прогнозируемому, тем более значим удельный весовой коэффициент).</li> <li>5. Определение суммарной величины показателей по всем отчетным периодам с учетом удельных весовых коэффициентов.</li> <li>6. Расчет средневзвешенного показателя (<math>X_{\text{взв.}}</math>) по формуле.</li> </ol>

№ п/п	Умения	Алгоритмы
3	<p>Определение тренда по фактическому развитию  <math>T = T(\sigma_{\min})</math>, где  <math>\sigma</math> - среднее отклонение</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Классификация фактического развития, т.е. отнесение фактических данных к одному из известных типов развития.</li> <li>2. Определение всех имеющихся способов усреднения, применяемых к классифицируемому типу.</li> <li>3. Расчет вариантов линии долгосрочного развития по данным фактического развития для каждого способа усреднения.</li> <li>4. Расчет среднего отклонения для каждой из полученных линий долгосрочного развития в прошлом.</li> <li>5. Упорядочивание полученных средних отклонений.</li> <li>6. Принятие за тренд варианта линии долгосрочного развития с наименьшим средним отклонением от фактического развития <math>T(\sigma_{\min})</math>.</li> </ol>
4	<p>Определение величины сезонных колебаний</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Ограничение отчетного периода статистически значимым количеством полных календарных лет.</li> <li>2. Определение всех изменений, происходящих на определенный отрезок времени отчетного периода.</li> <li>3. Сравнение значений показателей в аналогичные отрезки времени отчетного периода.</li> <li>4. Принятие за сезонное колебание снижение значения показателя в одном из отрезков времени по сравнению с остальными.</li> </ol>



№ п/п	Умения	Алгоритмы
5	<p>Расчет линейно экстраполируемого перспективного показателя:</p> $W_{n+m} = W_n + \frac{W_n - W_1}{N} \cdot m,$ <p>где <math>W_1</math> – величина показателя первого отчетного периода;  <math>W_n</math> – величина показателя последнего отчетного периода;  <math>N</math> – количество всех отчетных периодов;  <math>m</math> – количество отчетных периодов между прогнозируемым и последним периодом;  <math>i = 1, 2, 3, \dots, n</math> – номер отчетного периода</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Определение количества одинаковых по длительности отчетных периодов.</li> <li>2. Нумерация отчетных периодов по направлению к прогнозируемому периоду.</li> <li>3. Определение величин показателей по каждому отчетному периоду.</li> <li>4. Определение количества отчетных периодов между последним и первым отчетными периодами.</li> <li>5. Определение количества отчетных периодов между прогнозируемым и последним отчетным периодом.</li> <li>6. Расчет линейно экстраполируемого показателя (<math>W_{n+m}</math>) по формуле.</li> </ol>
6	<p>Расчет интерполируемого показателя:</p> $W_{\text{интер.}} = W_1 + \frac{W_n - W_1}{N} \cdot m,$ <p>где <math>W_1</math> – величина показателя в отчетном периоде;  <math>W_n</math> – величина показателя в интерполируемом периоде;  <math>N</math> – количество интерполируемых отчетных периодов;  <math>m</math> – количество отчетных периодов между первым и последним интерполируемым периодом;  <math>i = 1, 2, 3, \dots, n</math> – номер отчетного периода</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Определение количества интерполируемых отчетных периодов.</li> <li>2. Нумерация всех интерполируемых отчетных периодов.</li> <li>3. Определение величины показателя первого отчетного периода.</li> <li>4. Определение величины последнего показателя интерполируемого периода.</li> <li>5. Определение количества отчетных периодов между первым и последним интерполируемым периодом.</li> <li>6. Расчет интерполируемого показателя (<math>W_{\text{интер.}}</math>) по формуле.</li> </ol>

№ п/п	Умения	Алгоритмы
7	<p>Проверка применимости метода наименьших квадратов к конкретным условиям</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Определение стандартных отклонений фактических данных от эмпирических данных при различных способах прогнозирования.</li> <li>2. Сравнение полученных стандартных отклонений.</li> <li>3. Проверка применимости метода наименьших квадратов к конкретным условиям по правилу: метод наименьших квадратов применим к конкретным условиям тогда и только тогда, когда стандартное отклонение – наименьшее из всех возможных.</li> </ol>
8	<p>Расчет прогнозируемого показателя в период сезонных колебаний:</p> $P_{\text{сез.}} = \frac{Y_F}{Y_{\Sigma}},$ <p>где <math>Y_F</math> – простая средняя прогнозируемого периода;  <math>Y_{\Sigma}</math> - сумма средних</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Определение простой средней прогнозируемого периода.</li> <li>2. Определение суммы средних.</li> <li>3. Расчет прогнозируемого показателя в период сезонных колебаний (<math>P_{\text{сез.}}</math>) по формуле.</li> </ol>
9	<p>Расчет индекса сезонных колебаний:</p> $I_{\text{сез.}} = \frac{V_{\text{факт.}}}{Y_{\text{центр.}}},$ <p>где <math>V_{\text{факт.}}</math> – величина объема фактического спроса в период сезонных колебаний;  <math>Y_{\text{центр.}}</math> – величина центрированной скользящей средней в период сезонных колебаний</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Определение объема фактического спроса в период сезонных колебаний.</li> <li>2. Определение величины центрированной скользящей средней в период сезонных колебаний.</li> <li>3. Расчет индекса сезонных колебаний (<math>I_{\text{сез.}}</math>) по формуле</li> </ol>

№ п/п	Умения	Алгоритмы
10	<p>Расчет кумулятивного спроса:</p> $d_{\text{кум.}} = \sum_{i=1}^n d_i,$ <p>где <math>d_i</math> – прогностическая оценка спроса в <math>i</math>-ом интервале отчетного периода;  <math>i = 1, 2, 3, \dots, n</math> – номер отчетного периода</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Определение длительности интервала прогнозирования.</li> <li>2. Определение длительности отчетных периодов в интервале прогнозирования.</li> <li>3. Определение количества отчетных периодов в интервале прогнозирования путем деления длительности интервала прогнозирования на длительность отчетных периодов в интервале прогнозирования, причем начало первого интервала прогнозирования совпадает с началом отчетного периода в интервале прогнозирования.</li> <li>4. Определение прогностических оценок спроса для каждого из отчетных периодов в интервале прогнозирования, включая и текущие период.</li> <li>5. Расчет кумулятивного спроса (<math>d_{\text{кум.}}</math>) по формуле.</li> </ol>
11	<p>Реализация алгоритма Джонсона для выбора порядка обработки деталей на двух станках</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Нумерация всех обрабатываемых деталей.</li> <li>2. Определение длительности обработки каждой из деталей на станке А.</li> <li>3. Определение длительности обработки каждой из деталей на станке В.</li> <li>4. Выбор порядка обработки на двух станках последовательно для каждой из деталей.</li> </ol>

№ п/п	Умения	Алгоритмы
12	<p>Расчет продолжительности выполнения всех работ по двум экспертным оценкам:</p> $t = \frac{2t_{\max} + 3t_{\min}}{5},$ <p>где <math>t_{\min}</math> – экспертная оценка продолжительности выполнения всех работ при наиболее благоприятном стечении обстоятельств;</p> <p><math>t_{\max}</math> – экспертная оценка продолжительности выполнения всех работ при наиболее неблагоприятном стечении обстоятельств</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Определение экспертной оценки продолжительности выполнения всех работ при наиболее благоприятном стечении обстоятельств.</li> <li>2. Определение экспертной оценки продолжительности выполнения всех работ при наиболее неблагоприятном стечении обстоятельств.</li> <li>3. Расчет продолжительности выполнения всех работ по двум экспертным оценкам (t) по формуле.</li> </ol>
13	<p>Реализация алгоритма нумерации событий в сетевом графике</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Определение исходного события сети, в которое не входит ни одна операция.</li> <li>2. Присвоение найденному исходному событию номера.</li> <li>3. Определение всех выходящих из нумерованного события операции и вычеркивание их.</li> <li>4. Определение события, в которое не входит ни одна операция.</li> <li>5. Присвоение найденному в предыдущем действии событию номера, на единицу большего, чем номер последнего события.</li> <li>6. Возвращение на шаг №3 до нумерации всех событий сети.</li> </ol>
14	<p>Расчет критического пути в сетевом графике</p> $r = \max (t_{\text{пол.}}),$ <p>где <math>t_{\text{пол.}}</math> – один из возможных полных путей</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Определение количества полных путей</li> <li>2. Определение продолжительности всех полных путей.</li> <li>3. Сравнение продолжительности полных путей.</li> <li>4. Определение критического пути (принятие за критический путь тот, у которого продолжительность больше, чем у всех остальных)</li> </ol>

## ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР\*

### ПРОГНОЗИРОВАНИЕ. ТИПЫ МОДЕЛЕЙ, КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ И КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Эффективное принятие решений необходимо для выполнения управленческих функций.

Наука управления старается повысить эффективность организации путем увеличения способности руководства к принятию объективных решений в ситуациях исключительной сложности с помощью моделей и количественных методов.

Модели и методы науки управления используются для решения таких задач, как регулирование транспортных потоков в городах, оптимизация графиков оборота самолетов, оптимизация графиков работы аудиторий и лабораторий в учебных заведениях, управление запасами на производстве, распределение расходов на рекламу, распределение инструментов, оборудования, материальных и трудовых ресурсов на производстве.

Сегодня можно встретить понятия “наука управления”, “наука о принятии решений”, “системный анализ”, “наука о системах” и “исследование операций”, которые используются как взаимозаменяемые.

Независимо от предпочитаемой терминологии, отличительные особенности науки управления как подхода следующие:

- использование научного метода;
- системная ориентация;
- использование моделей.

#### Типы моделей

1. **Физическая модель** - исследуется копия объекта или системы (увеличенная или уменьшенная).

2. **Аналоговая модель** - модель ведет себя как исследуемый объект или система, но не выглядит как таковой (графики, показывающие соотношения и взаимосвязи). Например: производство и расходы; организационные схемы.

3. **Математическая (символическая) модель** - используются символы для описания свойств или характеристик объекта или события. Например:  $y = ax + b$ .

#### Процесс построения моделей

1. Постановка задачи - диагностирование проблемы.
2. Построение моделей - цель модели, исходная информация, алгоритм действия, выходные данные и варианты их использования.
3. Проверка модели на достоверность - соответствие реальному миру. Опробование ее на ситуации из прошлого.
4. Применение модели.
5. Обновление модели.

#### Проблемы моделирования

1. Некорректные исходные допущения и предпосылки.
2. Информационные ограничения - невозможность получения информации, быстроизменяющаяся среда.

\* Жирным шрифтом выделены новые понятия, которые необходимо усвоить. Знание этих понятий будет проверяться при тестировании.

3. Страх пользователя и слабое использование на практике.

4. Чрезмерная стоимость.

Говоря о **коммерческом прогнозе**, мы будем иметь в виду оценку ожидаемых уровней спроса на выпускаемую продукцию в течение некоторого отрезка времени в будущем. Поскольку речь идет о будущем спросе, прогноз, по существу, является догадкой; однако при использовании определенной методики анализа состояния рынков сбыта в прогнозе может содержаться нечто большее, чем простая догадка. Можно утверждать, что прогноз - это догадка, подкрепленная знанием. Естественное требование, предъявляемое к прогнозу, заключается в том, чтобы в пределах человеческих возможностей минимизировать погрешности в соответствующих оценках. Для повышения роли прогноза в процессе управления производством необходимо формировать прогностические оценки с ориентацией на их непосредственное использование при составлении долгосрочных и календарных планов выпуска продукции; при этом длительность периода, ассоциированного с прогнозом, должна быть, по меньшей мере, достаточной для выработки соответствующего управляющего решения и претворения этого решения в жизнь. Практически совершенно бесполезно разрабатывать прогнозы на слишком короткие отрезки времени, в течение которых принятие сколь-нибудь эффективных организационно-управленческих мер оказывается невозможным.

## Методы прогнозирования

Методы прогнозирования в основном используют накопленный опыт за прошлые периоды деятельности фирм (организаций, предприятий), определяют текущие допущения насчет будущего с целью его определения. Методы прогнозирования делятся на две основные группы: количественные и качественные.

### I. Количественные методы.

#### 1. Анализ временных рядов.

##### а) Прогнозы, основанные на усреднении ретроспективных данных.

Прогнозирование, основанное на усреднении данных в предыдущие периоды времени, опирается на предположение о правомерности “судить о будущем, располагая информацией о прошлом”. Обоснованность такого допущения может быть проверена с помощью так называемых “следящих диаграмм”. При этом используются самые разнообразные методы усреднения ретроспективных данных. Один из вариантов усреднения заключается в вычислении арифметического среднего на всей совокупности данных за прошлые периоды.

Если усреднение производится лишь на совокупности данных за последние периоды, то говорят о так называемом **динамическом (или скользящем) усреднении**. Совершенно очевидно, что точность прогноза (особенно в части выявления общих тенденций) зависит от того, насколько правильно выбрана длительность периода, на котором осуществляется ретроспективный анализ.

В ряде случаев используется **методика определения “взвешенного среднего”**. В этом случае данным за последний период придается больший вес, нежели данным за предшествующие периоды. Путем подбора весовых коэффициентов удается достичь известной степени эластичности (сглаженности) прогностических оценок.

При правильном применении метода усреднения ретроспективных данных и при надлежащей корректировке полученных результатов удается получать вполне удовлетворительные прогнозы. Однако существуют более надежные способы прогнозирования, основанные на использовании статистических методов анализа.

**б) Прогнозирование методом статистического анализа.**

Прогноз, основанный на использовании методов статистического анализа ретроспективных данных, внушает наибольшее доверие, если между “прошлым” и “будущим” имеется определенная причинно-следственная связь. Однако не следует забывать, что прогностические оценки, полученные методом статистического анализа, подлежат корректировке всякий раз, когда заранее известны те или иные факторы, с той или иной вероятностью в будущем.

Разработка фирмой точных прогнозов с помощью статистического анализа ретроспективных данных может быть сопряжена со значительными затратами; однако эти затраты полностью оправдывают себя за счет обеспечения более эффективного функционирования системы в целом.

**2. Причинно-следственные модели (многофакторное моделирование).**

Точность прогноза при разработке причинно-следственных моделей зависит как от характера и особенностей принимаемых в расчет факторов, так и от степени корреляции между значениями этих факторов и фактическими данными исследуемого показателя.

Например, фирма, выпускающая оборудование коммунально-бытового назначения, может исходить при составлении прогнозов сбыта своей продукции из валового национального дохода, объема жилищно-коммунального строительства, среднего бюджета семьи и т.д. Функциональную зависимость показателя от нескольких факторов можно записать в виде:

$$\varphi = f(x, y, k, \dots z).$$

Точность прогноза гарантирована наличием определенной корреляции между принимаемыми в расчет факторами (x, y, k, . . . z) и прогнозируемым показателем  $\varphi$ .

Для обеспечения надежности прогноза коэффициент корреляции должен принимать значение, близкое к 0,95. Кроме того, существуют многочисленные псевдокорреляции, т.е. иллюзорные взаимосвязи между прогнозируемыми значениями тех или иных параметров и внешними факторами и обстоятельствами. Следовательно, прежде чем учитывать те или иные факторы в ходе прогнозирования, необходимо убедиться в том, что рассматриваемые взаимосвязи стабильны во времени.

**II. Качественные методы.**

Качественные методы прогноза предполагают сбор и обработку субъективных мнений групп людей, подобранных определенным образом, относительно ожидаемых в ближайшем или отдаленном будущем тенденций исследуемого показателя. Эти мнения систематизируются и тщательно обрабатываются. Результаты такой обработки превращаются в прогноз. Такой способ прогнозирования имеет свои преимущества. Поскольку опрашиваемые лица непосредственно заняты в исследуемой сфере и, таким образом, относятся к прогнозированию весьма ответственно, они способны “чувствовать” наиболее вероятные тенденции исследуемых показателей, что повышает точность прогноза. Недостатком является субъективность мнения эксперта, которое зависит от его опыта и квалификации. Если страдает погрешностью само экспертное заключение, то, к сожалению, рассматриваемый нами метод не способен вскрыть источник ошибки и оценить эту ошибку количественно. При коммерческих прогнозах используются различные подходы к формированию моделей прогноза:

- мнение экспертов;
- мнение жюри (мозговой штурм);
- совокупное мнение бытовиков;
- модель ожидания потребителя.

Качественные методы прогноза применяются в следующих ситуациях:

- 1) отсутствие статистических данных за прошедший период по исследуемому показателю;
- 2) трудность количественного определения факторов, влияющих на исследуемый показатель, и установления взаимосвязей показателей;
- 3) ограничение по времени или по затратам на сбор и обработку информации;
- 4) быстроменяющаяся внешняя среда, в результате которой использование статистического банка данных за прошедший период не целесообразно;
- 5) появление новых факторов, влияющих на деятельность фирм (предприятий).

Получение информации для прогнозирования можно осуществлять тремя способами:

- 1) получение официальной вербальной информации;
- 2) получение официальной письменной информации;
- 3) промышленный шпионаж.

### **Источники**

Многие компании не могут содержать штат специалистов по прогнозированию. Как правило, в таких компаниях вопросами производственного планирования занимается один человек. Предполагается, что он обеспечит также разработку необходимых прогнозов. Однако для того чтобы этот специалист мог выполнять свои обязанности, он должен знать имеющуюся статистику, уметь анализировать и интерпретировать статистическую информацию, а также иметь полное представление о внешних и внутренних аспектах своей деятельности.

Специалисты по прогнозированию используют в своей работе большой объем доступной им информации. Обобщенные данные о состоянии национальной экономики, индексы цен, данные о динамике потребительских расходов и т.д. часто публикуются в различного рода журналах, газетах и специальных изданиях торговых ассоциаций и правительственных учреждений. От различных издателей поступает даже специальная информация о развитии отдельных отраслей промышленности.

Более сложные методы находят применение в тех случаях, когда это вполне оправдано. Их можно использовать как отдельно, так и в различных комбинациях; последнее позволяет добиваться лучших результатов.

**Мнение потребителей.** С помощью различного рода анкет и интервью можно опросить непосредственно потребителя продукта. Его мнение сопоставляется с точкой зрения производителя. Обе точки зрения меняются чуть ли не каждый день. Намерения потребителя могут полностью не соответствовать его поведению. Сравнительно высокие затраты, связанные с определением мнения потребителя, могут быть сокращены за счет создания таких обзоров, которые включали бы всю пригодную информацию, получаемую из различных источников.

**Мнение покупателей.** Каждый покупатель может быть опрошен относительно того, почему он приобрел именно этот, а не какой-нибудь иной товар. Ответы обычно получают уже после совершения покупки, так как анкета прикрепляется либо к гарантийному талону, либо к инструкции об использовании приобретаемого товара.

**Обзоры сбыта.** Одним из источников получения оценок объема будущих продаж является анализ данных розничной торговли и обзора, подготавливаемых работниками сбытовой сети компании. Розничные торговцы при оценке перспектив могут быть более объективными, чем торговые агенты



(коммивояжеры). Однако маловероятно, чтобы они добросовестно тратили время на получение достоверных оценок. Информация из этих источников в большей мере пригодна для разработки краткосрочных прогнозов (на год или меньший период времени).

**Мнение руководства.** Руководство компании (в большей степени, чем работников сбытовой сети) интересуют прежде всего проблемы формирования общей политики, а не мнение конкретного покупателя. Как и в случае с работниками сбытовой сети, на мнении руководства сказываются личные предубеждения. С мнением руководства знакомятся либо при личных встречах, либо в ходе какого-либо общего совещания. Рассмотрение различных точек зрения позволяет избежать возможных ошибок. Оно обычно обеспечивает всестороннее обоснование подготавливаемых оценок.

Широкое распространение получили прогнозы, подготавливаемые руководством на базе согласования существующих точек зрения. Они подготавливаются сравнительно быстро; дополнительные расходы на них незначительны. Главный недостаток этих прогнозов в том, что ими, как правило, не выявляются основные экономические факторы. Мнение руководства крайне ценно для интерпретации рыночной информации, но оно никоим образом не заменяет ее количественного анализа.

**Рыночные тесты.** Особую проблему представляет собой разработка и внедрение на рынок новой продукции. Если она заменяет или модифицирует существующие продукты, то для предвидения того, что может ожидать новые образцы, достаточно иметь информацию о старой продукции. При появлении на рынке принципиально новых продуктов возникает необходимость и в новой информации.

В рассматриваемом случае полезным окажется производство для рынка опытной партии новой продукции. Рыночный тест (marketing trials) принимает характер контролируемого эксперимента, при помощи которого тщательно выбирается и контролируется как сам рынок, так и методы ознакомления рынка с новым продуктом. Как и в любом эксперименте, здесь существует опасность совершить ошибку при выборе переменных в результате неправильных действий или установления несовершенного контроля. Затраты, направленные на предотвращение возможных ошибок, зачастую весьма велики, что, конечно, ограничивает возможности проведения рыночных тестов в широком масштабе.

**Изучение рынка.** В ряде случаев для целей прогнозирования составляются программы изучения рынка, проводимого как силами самой компании, так и других организаций. В последнем случае заключаются соответствующие соглашения. Исследование рынка проводится прежде всего по новым видам продукции. Однако рынок может изучаться и по старой продукции, если требуется собрать более обширную информацию. Цель исследования рынка состоит в установлении характера потребления. Изучение рынка позволяет определить, как изменяются объем и структура продаж в целом в зависимости от местонахождения и рода занятий покупателя, складывающихся цен, количества и качества предлагаемых товаров, уровня доходов потребителя и других факторов. Подобная информация собирается по каждому конкретному продукту, поступающему на рынок. Затем на ее основе разрабатывается прогноз продаж. Для повышения качества прогностических оценок целесообразно проводить изучение рынка одновременно с использованием других методов.

**Информация о развитии в прошлом.** Обоснование оценок деловой активности в перспективе отчетными данными о выпуске продукции в прошлом является в настоящее время одним из самых распространенных и надежных методов прогнозирования. Его преимущества - высокий уровень объективности и строгая количественная определенность. Однако и этот метод не безупречен.

В расчеты могут вкратиться неточности и ошибки, если в будущем не будут действовать экономические факторы, преобладавшие в прошлом. Умение анализировать полученные данные остается необходимой составной частью любого метода прогнозирования.

## АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Анализ временных рядов отражает изменения во времени индикаторов производства. В качестве такового рассматривается объем продаж за год. Изменение объема прослеживается в течение продолжительного периода времени в прошлом. Затем определяется метод, с помощью которого фиксируются изменения физического объема продаж за ряд последовательных лет (рис. 1). Результирующий вывод, устанавливающий зависимость объема продаж от времени, используется для разработки прогностических оценок.

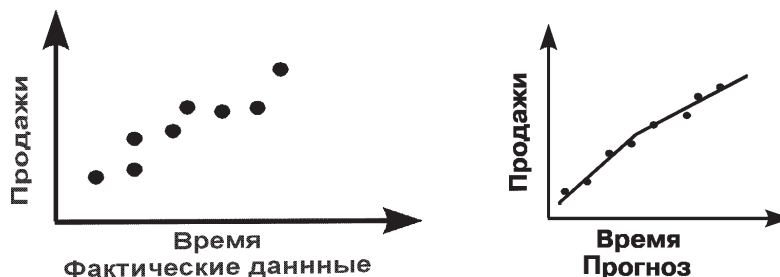


Рис. 1. Изменение объема продаж за отчетный период

Анализ должен проводиться в несколько этапов и включать в себя ряд компонентов. Проведение тщательной аналитической работы на каждом этапе и с каждым компонентом позволяет улучшить конечные результаты, а отсюда и повысить надежность прогноза. В прогностических расчетах чаще всего используется следующая зависимость:

$$Y = TCSR,$$

где  $Y$  - прогнозируемый объем,

$T$  - основной тренд,

$C$  - циклические колебания вокруг тренда,

$S$  - сезонные колебания внутри тренда,

$R$  - остаточные или остающиеся необъясненными отклонения.

Указанная зависимость позволяет объяснить воздействие на прогнозируемую переменную. На рис. 2 графически отображаются существующие взаимозависимости.

### Тренд

Из анализа основного уравнения  $Y = TCSR$  вытекает, что тренд (на рис. 2 - пунктирная линия) соответствует линии долгосрочного развития в прошлом. Среднее отклонение сглаженного тренда от фактического развития (на рис. 2 - кружки) характеризует степень соответствия этих показателей друг другу. Лишь в весьма редких случаях имеет место полное совпадение линий тренда и фактического развития.

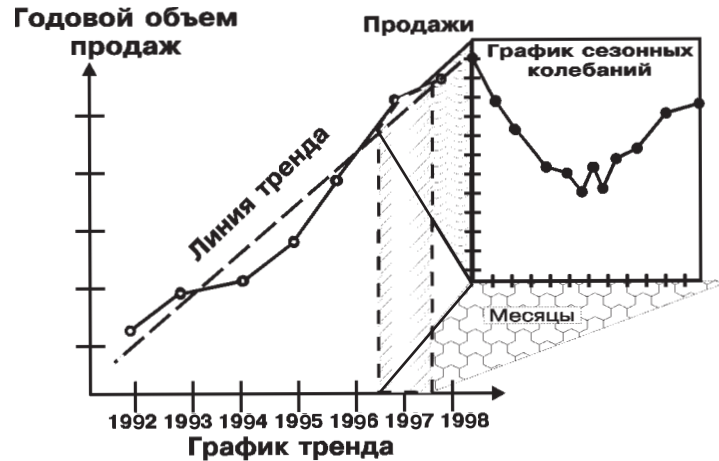


Рис. 2. Циклические, сезонные и прочие колебания

Циклические колебания на схеме имеют продолжительность 1 год, сезонные – 1 месяц. Кружочками отмечен фактический объем продаж. Линии, соединяющие кружочки, показывают динамику объема продаж в прошлом. Анализируя эту динамику, мы пытаемся найти местонахождение следующей точки. Наряду с имеющимися данными полученная оценка объема продаж становится той основой, на которой подготавливается следующий прогноз объема продаж.

## Циклы

**Циклические колебания** являются одной из причин расхождений, имеющих место между трендом и фактическим развитием. Волнообразный характер присущ только небольшому числу циклических колебаний. Это объясняется тем, что на рассчитываемую переменную оказывают воздействие любые изменения общих условий деятельности компании. Отдельные отрасли промышленности и, по-видимому, отдельные компании, относящиеся к одной и той же отрасли промышленности, по-разному реагируют на колебания, происходящие в экономическом развитии. Положение усложняется тем, что фирмы порой принимают совершенно противоположные решения. Например, появление первых признаков того, что начался период оживления деловой активности и что в связи с этим ожидается увеличение объема продаж, может в одном случае послужить сигналом для разработки планов расширения производства, а в другом - те же самые симптомы заставят компанию занять выжидательную позицию.

Размах, время и форма циклических колебаний изменяются в столь широком диапазоне и обуславливаются столь многочисленными причинами, что, как правило, нет никакого смысла предсказывать их. Тем не менее при построении прогноза по меньшей мере необходимо принимать во внимание возможные последствия циклических колебаний. На рис.3 приводится диаграмма цикла, построенная на базе сопоставления фактических и расчетных данных. Складывающиеся между ними пропорции позволяют определить отклонения в цикле. При разработке диаграммы цикла исходили из предположения, что линия тренда отражает "нормальное" состояние, относительно которого происходят циклические колебания.



**Рис. 3. Сопоставление фактических и расчетных данных (фактический объем продаж: прогнозируемый объем продаж) x 100%**

### **Сезонные колебания**

**Сезонные колебания** - это те изменения, которые происходят на протяжении одного года и повторяются каждый год. Спрос на многие продукты сохраняется только в течение определенного периода времени в году. Обычно это бывает связано с колебаниями погодно-климатических условий. В соответствии с этим разрабатывают ежемесячные или даже еженедельные прогнозы.

### **Ошибки**

Последний член основного уравнения прогнозирования (R) отражает случайные колебания, которые нельзя объяснить изменениями тренда, циклическими или сезонными изменениями. Принято считать, что остаточные колебания не могут быть спрогнозированы. Причиной их возникновения могут быть непредвиденные стихийные бедствия или внезапные изменения в политике.

### **Построение временных рядов**

В математике имеется много различных технических приемов и методов для анализа имеющейся информации: от простейших арифметических расчетов до сложнейших статистических методов. Выбор наиболее приемлемого метода - далеко не простая задача. Здесь прежде всего надлежит установить традиционное равновесие между затратами, связанными с применением того или иного метода, и той выгодой, которую можно получить от этого применения. Предварительное изучение проблемы может и не дать подробного анализа, поскольку исследование всего нового, которому присущи элементы риска, требует использования исключительно точных аналитических методов.

### **Исходные данные**

Приступая к расчетам, в первую очередь надлежит решить, какие данные будут использоваться при разработке прогноза. Не менее важно установить соответствующие функциональные зависимости. В данном разделе предполагается, что временные ряды соответствуют поставленной цели.

## Методы расчетов

Установив, что собранная информация вполне репрезентативна, можно приступить к выбору расчетного метода, с помощью которого эта информация превращается в прогностические оценки. Данные наносятся на график. Поскольку основное назначение графика состоит в том, чтобы дать общую картину развития, он может и не быть абсолютно точным. Исходя из общих представлений, можно сделать выбор в пользу того или иного метода расчетов. Не меньшее значение для выбора имеет знание самих методов.

### МЕТОД ЛИНЕЙНОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ И ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Этот метод применяется, когда необходимо определить показатели перспективного плана и когда не предвидится кардинальных изменений в характере и условиях деятельности предприятия.

Сущность метода заключается в том, что перспективные величины определяются методом линейной экстраполяции на основе среднего прироста (или снижения) искомого показателя на протяжении определенного промежутка времени.

**Пример 1.** Требуется определить возможный объем пассажирских перевозок авиапредприятия  $W_i$  на 2003 г., если известен их фактический объем за 1988-1998 гг.:

Год	Объем $W_i$ (тыс.чел.)	Прирост $\Delta W_i$ (тыс.чел.)	$\Delta W = W_i - W_{i-1}$
1988	16,0	-	$\Delta \bar{W} = \frac{\sum \Delta W_i}{N} = 5,42 \text{ тыс. чел.}$ <p>где N - кол-во интервалов, N = 10</p> $W_n = W_{\text{баз}} + \Delta \bar{W}_{n_i}$ <p><math>n_i</math> - период прогноза</p> $W_{2003} = W_{1998} + \Delta \bar{W} \cdot 5 =$ $= 98,3 \text{ тыс. чел.}$
1989	21,8	5,8	
1990	27,0	5,2	
1991	32,0	5,0	
1992	35,8	4,8	
1993	42,1	5,3	
1994	47,2	5,1	
1995	55,1	7,9	
1996	60,6	5,5	
1997	68,0	7,4	
1998	71,2	3,2	
		$\Sigma 54,2$	

В случае, когда известны показатели базисного и конечного перспективного периодов и требуется определить годовые промежуточные показатели, может использоваться метод линейной интерполяции.

**Пример 2.** Перспективный план авиапредприятия предусматривает увеличение объема перевозок до 850 тыс.чел. в 2002 г., в 1998 г. он составил 500 тыс.чел.

Необходимо определить объемы перевозок с 1998 г. по 2002 г. по годам. Прирост объема перевозок составит:

$$\Delta \bar{W}_n = \frac{W_{2002} - W_{1998}}{N} = \frac{850 - 500}{5} = 70 \text{ тыс. чел.}$$

$$W_{1999} = W_{1998} + \Delta \bar{W}_n = 500 + 70 \times 1 = 570 \text{ тыс. чел.}$$

и так далее.

**Недостаток метода.** Средний прирост искомого показателя считается равномерным, что, как правило, на практике не бывает.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОГНОЗИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Метод наименьших квадратов позволяет “подогнать” функцию под некоторый набор численных данных или, другими словами, построить график функции по некоторой ограниченной совокупности точек. Пусть требуется определить функцию

$$d'_t = f(t),$$

где  $d'_t$  - прогнозируемое значение некоторой зависимой переменной,  
 $t$  - независимая переменная.

Выбор этой функции считается наилучшим в том случае, когда оказывается сведенным к минимуму так называемое стандартное отклонение, определяемое формулой:

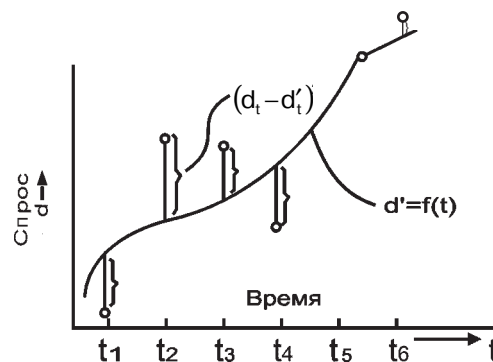
$$S_{\text{от}} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (d_t - d'_t)^2}{(n - t)}},$$

где  $d_t$  - фактический спрос, наблюдаемый в  $t$ -й период (отрезок времени),  
 $n$  - число периодов (или наблюдений),  
 $t$  - число “степеней свободы”.

Минимизация  $S_{\text{от}}$  эквивалентна минимизации

$$E = \sum_1^n (d_t - d'_t)^2.$$

Действительно, задача сводится к минимизации суммы квадратов разностей между фактическим значением спроса в момент  $t$  и тем значением, которое принимает в данный момент прогнозирующая функция  $d'_t = f(t)$ . Это утверждение иллюстрируется графически на рис. 4.



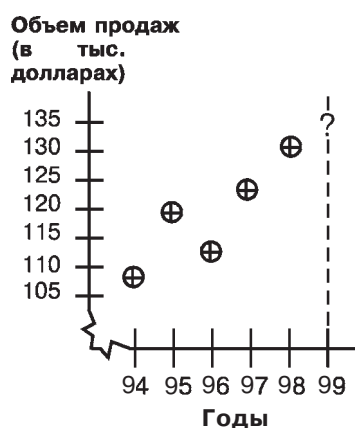
**Рис. 4.** Построение аппроксимирующей кривой методом наименьших квадратов

**Пример 3.** Компания в течение 5 лет производила машины-гвоздодоры с ручным управлением. Последние 2 года предприятие работало почти на пределе своих производственных мощностей. Требуется разработать прогноз объема производства в наступающем году и подготовить данные, необходимые для планирования расширения производства в перспективе. Данные о квартальных продажах за 5 лет приведены в таблице 1. Графически динамика объема продаж показана на рис. 5.

Таблица 1

**Годовые объемы продаж с разбивкой на кварталы  
(в тыс. дол.)**

Квартал	1994 г.	1995 г.	1996 г.	1997 г.	1998 г.
I	190	280	270	300	320
II	370	420	360	430	440
III	300	310	280	290	320
IV	220	180	190	200	220
Итого	1080	1190	1100	1220	1300



**Рис. 5. Динамика объема продаж**

Когда точки на графике, соответствующие данным за прошлые периоды, имеют тенденцию располагаться по прямой, целесообразнее для расчета линии наилучшего соответствия теоретических знаний эмпирическим применять метод наименьших квадратов (the least squares method). При построении этой линии на графике учитывается местонахождение всех точек. Иными словами, с ее помощью минимизируются разности между данными теоретической линии и соответствующими им эмпирическими данными каждой точки<sup>1</sup>.

Прямая линия рассчитывается с помощью равенства  $Y = a + bX$ , где  $Y$  является прогнозируемой величиной для периода времени  $X$ . Задача состоит в том, чтобы определить значения  $a$  (величина  $Y$  в базисном периоде) и  $b$  (угол наклона прямой).

Для определения значений  $a$  и  $b$  используются два уравнения. Первое получают, умножая вышеприведенное равенство на коэффициент и суммируя затем все члены. При коэффициенте  $a=1$  и числе точек (эмпирических данных), равном  $N$ , уравнение приобретает вид:

$$\sum Y = Na + b\sum X.$$

<sup>1</sup>  $\sum (Y - Y_f)^2 = \min$ ,  
где  $Y$  - эмпирическая величина (данные фактических продаж),  
 $Y_f$  - теоретическая величина (данные, полученные путем расчета методом наименьших квадратов).

$$\sum (Y - Y_f) = 0.$$

Во втором случае проводятся те же операции. При коэффициенте  $b = X$  можно записать

$$\sum XY = a \sum X + b \sum X^2.$$

Полученные таким путем уравнения называют *нормальными уравнениями* (normal equations)<sup>1</sup>.

Четыре суммы ( $\sum Y$ ,  $\sum X$ ,  $\sum XY$ ,  $\sum X^2$ ), которые необходимы для решения этих уравнений, можно получить путем составления таблиц соответствующих данных. Можно упростить расчеты, если правильно выбрать необходимый базисный период. Так как  $X$  равняется числу интервалов времени от базисного периода, то, считая среднюю точку во временном ряду базисной, мы тем самым приравниваем  $\sum X$  нулю:

Год	X
1994	- 2
1995	- 1
1996	0*
1997	1
1998	2
$\sum X$	0

\* Базисная точка

Кроме того, расположение базисного периода в середине временного ряда облегчает проведение расчетов, так как числа становятся меньше.

После того как все четыре суммы будут получены, их вводят в нормальные уравнения и приступают к расчету коэффициентов  $a$  и  $b$ . Затем полученные значения подставляются в уравнение

$$Y_f = a + bX.$$

**Пример 4.** Расчет прямой, соответствующей общему тренду, методом наименьших квадратов. Для данных, приведенных на рис. 5, наиболее приемлемой линией, по-видимому, является прямая наклонная линия. Чтобы показать различные варианты метода наименьших квадратов, мы вначале в качестве базисного установим 1994 г., а затем 1996 г. Чтобы получить значения сумм  $\sum Y$ ,  $\sum X$ ,  $\sum X^2$ ,  $\sum XY$ , возьмем величину  $Y$  из данных табл. 1. Для облегчения расчетов данные таблицы делим на 1000 долл., а полученные результаты сведем в следующую таблицу:

Год	Y	X	X <sup>2</sup>	XY
1994	108	0	0	0 базисный период
1995	119	1	1	119
1996	110	2	4	220
1997	122	3	9	366
1998	130	4	16	520
Итого	589	10	30	1225

<sup>1</sup> Эти уравнения можно также вывести из выражения  $\sum (Y - Y_f)^2$  путем дифференцирования последнего относительно  $a$  и  $b$ .



Подставляя итоговые данные в нормальные уравнения, получаем:

$$589 = 5a + 10b,$$

$$1225 = 10a + 30b.$$

И, наконец, решая уравнения, определяем значения коэффициентов:

$$a = 108,4, \text{ или } 108400 \text{ долл.},$$

$$b = 4,7, \text{ или } 4700 \text{ долл.}$$

Установим теперь в качестве базисного 1996 г. С изменением базисного года изменились и данные таблицы:

Год	Y	X	X <sup>2</sup>	XY
1994	108	- 2	4	- 216
1995	119	- 1	1	- 119
1996	110	0	0	0 базисный период
1997	122	1	1	122
1998	130	2	4	260
Итого	589	0	10	47

Отсюда

$$a = \frac{\sum Y}{N} = \frac{589}{5} = 117,8 \text{ или } 117800 \text{ долл.},$$

$$b = \frac{\sum XY}{\sum X^2} = \frac{47}{10} = 4,7 \text{ или } 4700 \text{ долл.}$$

Для того чтобы определить объем продаж в перспективе (в нашем примере - в 1999 г.), достаточно подставить полученные значения коэффициентов a и b в исходное уравнение  $Y = a + bX$ . Горизонт прогноза для первого варианта устанавливается равным 5 годам (базисный год - 1994 г.), для второго - 3 годам (базисный год - 1996 г.). Таким образом,

$$F_{1999(1)} = 108400 \text{ долл.} + 4700 \text{ долл.} \times 5 = 131900 \text{ долл.},$$

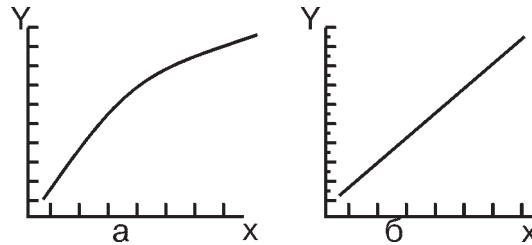
$$F_{1999(2)} = 117800 \text{ долл.} + 4700 \text{ долл.} \times 3 = 131900 \text{ долл.}$$

Сравнение обоих вариантов прогноза показывает, что объем вычислений сократится, если расположить базисный период в середине временного ряда. Результат при этом получают один и тот же.

### Экспоненциальная (показательная) функция

В отдельных случаях лучшего соответствия теоретических данных эмпирическим можно достичь путем вычерчивания по точкам кривой сглаживания (the smooth curve). В этом случае форме кривой соответствует уравнение  $Y = ab^x$  (см. рис. 6).

Если экспоненциальное уравнение логарифмировать, то значения коэффициентов a и b можно определить методом наименьших квадратов:



**Рис. 6. Кривые сглаживания**

- а) графическое изображение уравнения получено с помощью арифметической шкалы,  
 б) графическое изображение уравнения получено с помощью полулогарифмической шкалы

$$\log Y = \log a + X \log b.$$

Это уравнение может быть линеаризовано посредством использования полулогарифмической шкалы; на одной оси графика откладываются логарифмические значения  $Y$ , а на другой - арифметические значения  $X$ . Свойства полулогарифмической шкалы дают нам возможность получить нормальные уравнения, аналогичные тем, которые были описаны в вышеприведенном примере 4. Таким образом, нормальные уравнения

$$\sum (\log Y) = N (\log a) + \sum X (\log b),$$

$$\sum (X \log Y) = \sum X (\log a) + \sum X^2 (\log b)$$

могут быть решены путем составления таблицы данных, необходимых для определения  $\sum (\log Y)$ ,  $\sum X$ ,  $\sum (X \log Y)$ ,  $\sum X^2$ .

Если базисный период выбран с таким расчетом, чтобы  $\sum X = 0$ , то решение будет сводиться к определению коэффициентов

$$\log a = \frac{\sum (\log Y)}{N} \text{ и } \log b = \frac{\sum (X \log Y)}{\sum X^2}.$$

**Пример 5.** Расчет экспоненциальной кривой, соответствующей тренду. Пока нам не известно, какая из форм графического отображения (прямая или кривая) дает более точное приближение теоретических данных к эмпирическим. Поэтому целесообразно вначале проверить с этой точки зрения также и кривую сглаживания. Здесь применяются те же методы, что и в случае с прямой. Отличие сводится к использованию логарифмов  $Y$ :

Год	$Y$	$X$	$X^2$	$\log Y$	$X \log Y$
1994	108	-2	4	2,0334	-4,0668
1995	119	-1	1	2,0755	-2,0755
1996	110	0	0	2,0414	0
1997	122	1	1	2,0864	2,0864
1998	130	2	4	2,1139	4,2278
Итого		0	10	10,3506	0,1719

Так как  $\sum X = 0$ , мы можем получить значения  $a$  и  $b$  следующим образом:

$$\log a = \frac{\sum (\log Y)}{N} = \frac{10,3506}{5} = 2,0701$$

и, следовательно,  $a = 117,5$  или  $117500$  долл.

$$\log b = \frac{\sum (X \log Y)}{\sum X^2} = \frac{0,1719}{10} = 0,0172.$$

Откуда коэффициент  $b = 1,0405$ . Последнее означает, что по прошествии каждого установленного периода времени объем продаж возрастает на 4,05%. Таким образом, уравнение, с помощью которого получают оценки объема продаж в будущем, принимает вид

$$\log Y = 2,0701 + 0,0172X$$

или

$$Y_F = 1175000 \text{ долл.} \times 1,0405^X.$$

Чтобы определить, какой же подход дает более надежные результаты, необходимо провести сопоставительный анализ. Данные табл. 2 свидетельствуют о том, что в нашем примере в обоих случаях достигается вполне удовлетворительное приближение теоретических данных к эмпирическим. Различие станет более очевидным, если период, на который разрабатывается прогноз, будет более продолжительным. Начиная с 1999 г. использование экспоненциальной зависимости позволит получать более высокие оценки предполагаемого объема продаж.

Пяти наблюдений недостаточно для того, чтобы на их основе можно было бы отдать предпочтение какому-либо из этих методов. На этой стадии анализа специалист, разрабатывающий прогнозы, должен в большей мере полагаться

Таблица 2

**Сопоставление прогностических оценок,  
полученных путем использования линейной  
и экспоненциальной функций**

Год	X	Фактические данные Y	Оценки, полученные с помощью линейной функции $Y_F = 117,8 + 4,7X$	Оценки, полученные с помощью экспоненциальной функции $Y_F = 117,5(1,0405)^X$
1994	- 2	108	108,4	108,5
1995	- 1	119	113,1	112,9
1996	0	110	117,8	117,5
1997	1	122	122,5	122,3
1998	2	130	127,2	127,2
1999	3		131,9	132,3
2000	4		136,6	137,7

на логические выводы. Если он оптимист, он, вероятно, выбрал бы экспоненциальную функцию, которая дает возможность получить более высокие оценки. По мере накопления информации о развитии в прошлом и увеличения числа наблюдений тренд должен становиться более очевидным. Именно тогда при сопоставлении отклонений расчетных оценок от фактических данных выявляются преимущества той или иной техники прогнозирования.

### МЕТОД ПРОСТОЙ СРЕДНЕЙ

Рассмотрим случай, когда в уравнении линейной зависимости  $Y = a + bX$  коэффициент  $b$  будет равен нулю. При таком условии графическое построение функции будет сводиться к вычерчиванию прямой, идущей параллельно горизонтальной оси графика, а прогноз будет состоять в исчислении простой средней из всех имеющихся значений:

$$Y_F = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{N}.$$

Это частный случай метода наименьших квадратов.

Расчеты средней часто бывают связаны с сезонными колебаниями, происходящими внутри общего тренда. Как мы уже отмечали выше, сезонные колебания ограничиваются изменениями в течение одного года. Следовательно, для определения сезонной структуры необходимо собрать информацию за несколько временных периодов в пределах года. Обычно это месячные или квартальные данные. При наличии информации, охватывающей значительное число лет, арифметическая средняя каждого периода в пределах каждого года уменьшает амплитуду циклических колебаний, отмечавшихся на протяжении ряда лет.

После соответствующей обработки информации и установления временных периодов (месяц, квартал и т.д.), по которым должно фиксироваться изменение объема продаж, проводят суммирование значений  $Y$ , соответствующих каждому из этих периодов. Затем полученная сумма делится на расчетное число лет  $N$ . Полученное таким путем среднее значение для каждого периода явится в то же время и оценкой следующего периода при отсутствии серьезных изменений в общем тренде. Если изменения будут существенными, то простая средняя может быть скорректирована исходя из имевшего место общего роста или снижения.

Показатели сезонных колебаний нередко остаются относительно постоянными даже при изменениях тренда. Они могут быть легко рассчитаны путем деления значения простой средней каждого периода на сумму средних. Полученное частное представляет собой оценку (в %) объема продаж, ожидаемых в течение соответствующего периода.

**Пример 6.** Расчет простой средней применительно к индексу сезонных колебаний. При анализе квартальных данных возникает ряд вопросов, связанных с продажами продукции в первый год ее производства. Стадии внедрения на рынок новой продукции присущи специфические показатели продаж. Существенную роль играют здесь первоначальное рекламирование данной продукции и реакция потребителей. Лишь по прошествии определенного времени сезонные колебания становятся более стабильными. Поскольку квартальные продажи 1994 г. по своим характеристикам заметно не отличаются от квартальных продаж других лет, они включаются в анализ на равных правах с другими данными; затем определяются тренды (по каждому периоду). Если

окажется, что линии трендов в первом приближении проходят параллельно друг другу, то это будет означать отсутствие по периодам конкретных изменений в спросе. При наличии значительных отклонений необходимо скорректировать средние тех периодов, в которых замечены отклонения. Иногда показатель средней периода, в котором отмечено отклонение, может быть увеличен или уменьшен на сумму, соответствующую в первом приближении величине отклонения. В исключительных случаях формула спроса рассчитывается по каждому периоду.

Линии трендов объемов продаж по кварталам, приведенные на графике (см. рис. 7), представляются нам почти параллельными. Поэтому, не прибегая ни к каким корректировкам, можно определить средний объем продаж по каждому кварталу и за год в целом (таблица 3).

**Объем продаж  
(в тыс. долларов)**



**Рис.2.6. Тренды продаж (квартальные объемы), построенные визуальным методом**

На следующем этапе расчетов квартальные средние преобразуются в индекс сезонных колебаний. Квартальный индекс представляет собой частное от деления простой средней каждого квартала на среднюю всех кварталов:

$$I_{\text{I кв.}} = \frac{272}{294,5} = 0,92 \quad I_{\text{II кв.}} = \frac{404}{294,5} = 1,37$$

$$I_{\text{III кв.}} = \frac{300}{294,5} = 1,02 \quad I_{\text{IV кв.}} = \frac{202}{294,5} = 0,69$$

Рассчитанный индекс используется для оценки объемов квартальных продаж в прогнозируемом году. Используя данные прогноза объема продаж

Таблица 3

**Фактические объемы продаж**

Год	I кв.	II кв.	III кв.	IV кв.	В целом за год
1994	190	370	300	220	1080
1995	280	420	310	180	1190
1996	270	360	280	190	1100
1997	300	430	290	200	1220
1998	320	440	320	220	1300
Итого	1360	2020	1500	1010	5890
Средний объем	272	404	300	202	294,5

на 1999 г., рассчитанного на основе учета линейных зависимостей, мы получаем:

$$F_{I\text{кв.}} = \frac{1319000 \text{ долл.}}{4} \cdot 0,92 = 303000 \text{ долл.}$$

$$F_{II\text{кв.}} = \frac{1319000 \text{ долл.}}{4} \cdot 1,37 = 452000 \text{ долл.}$$

$$F_{III\text{кв.}} = \frac{1319000 \text{ долл.}}{4} \cdot 1,02 = 336000 \text{ долл.}$$

$$F_{IV\text{кв.}} = \frac{1319000 \text{ долл.}}{4} \cdot 0,69 = 228000 \text{ долл.}$$

**МЕТОД СКОЛЬЗЯЩЕЙ СРЕДНЕЙ**

При подготовке прогноза методом скользящей средней число периодов, по которым производится суммирование фактических объемов продаж, несколько больше того числа, которое было установлено и которое желательно иметь для проведения нужных расчетов. Необходимость выравнивания сезонных колебаний требует, чтобы суммарная продолжительность всех периодов составляла 1 год. Выравнивание сезонных колебаний происходит в силу того, что крайние значения тренда (высокие и низкие показатели) имеют тенденцию и к взаимному погашению. Вовлечение в расчет скользящей средней большего числа временных периодов увеличивает эффект сглаживания и одновременно уменьшает чувствительность прогноза к данным последних периодов.

Последовательность проведения расчетов при определении скользящей средней иная, чем при определении простой средней: движение скользящей средней во времени дает возможность учесть самую последнюю информацию и отказаться от использования более старых данных. Если заданная скользящая средняя (за 12-месячный период) представляет средний спрос с января 1998 г. по декабрь 1998 г., то следующая скользящая средняя будет отражать спрос уже с февраля 1998 г. по январь 1999 г.

Использование скользящей средней, определенной посредством вовлечения в расчеты наиболее свежей информации, позволит подготовить качественный прогноз, лишь если данные, отражающие фактическое развитие в прошлом, будут относительно стабильны. Индекс сезонных колебаний, вычисленный на основе скользящей средней, дает возможность улучшить качество прогноза. Индекс получают путем деления показателя объема фактического спроса в соответствующем периоде на величину центрированной скользящей средней за тот же период. Повысить надежность индекса можно за счет усреднения значений нескольких индексов общих временных периодов.

**Пример 7.** Расчет скользящей средней применительно к индексу сезонных колебаний. Для разработки прогноза объема продаж на 1999 г. используем данные о квартальных продажах. Скользящая средняя определяется исходя из разбивки года на кварталы. Величина первой скользящей средней - 1/4 объема продаж в 1994 г. По времени она приходится на точку, лежащую в периоде между концом II и началом III квартала. Для того чтобы определить вторую скользящую среднюю, суммируют продажи трех последних кварталов 1994 г. и первого квартала 1995 г., а результат делят на четыре. По времени она относится к периоду между концом III и началом IV

Таблица 4

**Расчет значений скользящих средних  
и индексов сезонных колебаний**

Год	Квартал	Объем продажи (в тыс. дол.)	Скользящая средняя по четырем кварталам	Центриро- ванная скользящая средняя	Индекс сезонных колебаний
1994	I	190			
	II	370	270		
	III	300	292	281	1,07
	IV	220	305	298	0,74
1995	I	280	307	306	0,91
	II	420	297	302	1,39
	III	310	295	296	1,04
	IV	180	280	287	0,63
1996	I	270	273	276	0,98
	II	360	275	274	1,32
	III	280	283	279	1,00
	IV	190	300	286	0,66
1997	I	300	303	301	1,00
	II	430	305	304	1,42
	III	290	310	307	0,94
	IV	200	312	311	0,64
1998	I	320	320	316	1,01
	II	440	325	322	1,37
	III	320			
	IV	220			

квартала 1994 г. Среднее значение двух рассчитанных только что величин представляет собой скользящую среднюю, центрированную по III кварталу. Эта операция повторяется по всем кварталам, а полученные данные затем сводятся в таблицу (табл. 4).

Индекс сезонных колебаний получают путем деления фактического объема продаж на величину центрированной скользящей средней. Усреднив значения индекса одного и того же периода за разные годы, мы повысим его надежность (табл. 5).

Таблица 5

**Расчет скорректированного индекса сезонных колебаний**

Год	I кв.	II кв.	III кв.	IV кв.
1994			1,07	0,74
1995	0,91	1,39	1,04	0,63
1996	0,98	1,32	1,00	0,66
1997	1,00	1,42	0,94	0,64
1998	1,01	1,37		
Итого	3,90	5,50	4,05	2,67
Средний индекс сезонных колебаний	0,975	1,375	1,0125	0,6675
Скорректированный индекс сезонных колебаний	0,97	1,37	1,00	0,66

Полученные индексы надлежит проверить на точность расчета еще до того, как они будут использованы при разработке прогноза:

1. Средняя всех квартальных индексов не должна превышать 1,0. В нашем примере она равняется

$$\frac{0,9750 + 1,3750 + 1,0125 + 0,6675}{4} = \frac{4,03}{4} = 1,0075$$

Поскольку индекс больше 1, его следует скорректировать, в противном случае суммарный объем продаж квартальных прогнозов будет превышать объем продаж по годовому прогнозу на 0,75%.

2. При работе с индексами особое внимание должно быть обращено на очевидные тренды квартальных индексов. По данным табл. 5, индекс I кв. имеет тенденцию к увеличению, а индексы III кв. – к снижению.

Эти замечания нашли свое отражение в корректировке индекса сезонных колебаний. Среднее значение всех индексов уменьшается на значение дроби (4,00/4,03), а полученные результаты были округлены относительно тренда III кв.

Завершающая стадия – получение непосредственной прогностической оценки (произведение рассчитанных по последним данным центрированных скользящих средних и соответствующих им индексов сезонных колебаний). Для примера ниже приводится расчет оценки объема продаж в первых двух кварталах 1999 г.:

$$\begin{aligned} \text{объем продаж I кв.} &= 316 \times 0,97 = 307 \text{ или } 307000 \text{ долл.}, \\ \text{объем продаж II кв.} &= 322 \times 1,37 = 441 \text{ или } 441000 \text{ долл.} \end{aligned}$$



## СГЛАЖИВАНИЕ ФУНКЦИЙ

### Экспоненциальное сглаживание

Любой количественный метод расчетов прогностических оценок может быть использован для выравнивания имеющихся в собранной информации колебаний величины спроса. При экспоненциальном сглаживании (exponential smoothing) в равенства вводится постоянный коэффициент сглаживания  $\alpha$ , придающий больший вес последним данным, характеризующим величину спроса. Экспоненциальное сглаживание применимо ко всем рассмотренным методам разработки прогностических оценок. Ниже оно будет проанализировано применительно к выведению средних значений.

Уравнение прогноза, учитывающее экспоненциальное сглаживание, записывается в следующем виде:

$$F_n = \alpha Y_{n-1} + (1 - \alpha)F_{n-1}$$

или

$$F_n = F_{n-1} + \alpha(Y_{n-1} - F_{n-1}),$$

где  $F_n$  - прогноз объема продаж в предстоящем периоде,

$F_{n-1}$  - прогноз объема продаж в предыдущем периоде,

$\alpha$  - коэффициент сглаживания ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ),

$Y_{n-1}$  - фактический объем продаж в предыдущем периоде.

Если в нашем распоряжении имеются данные за прошлый период, то исходным значением  $F_{n-1}$  может быть простая средняя из самых близких к нам  $N$  наблюдений. Принятие решения о числе используемых для прогноза точек имеет в основном те же самые особенности, что и принятие решения в отношении скользящей средней; когда значение  $N$  велико, получаемая оценка весьма устойчива. Но она не отражает изменений, происшедших в самое последнее время. Если же подобной информации не имеется, то значение  $F_{n-1}$  может быть получено логическим путем с учетом происходящих изменений. В разделе, посвященном анализу вопросов вычисления скользящей средней, мы познакомились с методами установления необходимого для расчетов числа периодов  $N$ . Аналогичным образом обосновывается выбор коэффициента  $\alpha$ . Обычно значение  $\alpha$  колеблется между 0,1 и 0,3. Чувствительность к происходящим изменениям повышается с увеличением коэффициента сглаживания и уменьшением значения  $N$ . Повышение чувствительности достигается за счет имеющихся возможностей выравнивания случайных отклонений.

Связь, существующая между  $\alpha$  и  $N$ , описывается выражением  $\alpha = 2/N+1$ .

Поэтому, если нас вполне удовлетворяет найденное значение  $N$ , мы можем без особых затруднений рассчитать и величину коэффициента  $\alpha$ .

Убедиться в том, что экспоненциальное сглаживание представляет собой средневзвешенное значение, можно, проанализировав ряд прогнозов. Если мы обозначим первый прогноз через  $F_0$ , а последующие через  $F_1$ ,  $F_2$  и т.д., то ряд прогнозов будет выглядеть следующим образом:

$$\text{Период 1: } F_1 = \alpha Y_0 + (1 - \alpha) F_0,$$

$$\text{Период 2: } F_2 = \alpha Y_1 + (1 - \alpha) F_1 = \alpha Y_1 + (1 - \alpha)[\alpha Y_0 + (1 - \alpha) F_0],$$

$$\text{Период 3: } F_3 = \alpha Y_2 + (1 - \alpha) F_2 = \alpha Y_2 + \alpha (1 - \alpha) Y_1 + (1 - \alpha)^2 [\alpha Y_0 + (1 - \alpha) F_0]$$

или в общем виде:

$$F_n = \alpha Y_{n-1} + (1 - \alpha) F_{n-1} = \alpha Y_{n-1} + \alpha (1 - \alpha) Y_{n-2} + \alpha (1 - \alpha)^2 Y_{n-3} + \dots + (1 - \alpha)^n Y_{n-n},$$

где  $F_n$  - прогноз объема продаж в периоде  $n$ ,  
 $Y_n$  - данные о развитии в прошлом,  
 $Y_{n-n}$  - исходный прогноз =  $F_0$ .

Эта функция является линейной комбинацией данных о развитии в прошлом, взвешенных по константе сглаживания  $\alpha$ . Если  $\alpha = 0$ , то не потребуются никаких дополнительных данных для получения необходимых оценок, так как исходный прогноз не изменяется. При  $\alpha = 1$  прогнозируемый на следующий период объем продаж равен фактическому объему продаж в последнем (отчетном) периоде.

**Пример 8.** Учет экспоненциального сглаживания в разрабатываемых прогнозах. Формула экспоненциального сглаживания ограничивает прогноз одним периодом в будущем. Мы можем использовать этот метод при разработке прогноза тренда (табл. 1) как средней взвешенной имеющихся данных. Конечная цель этих расчетов - получить оценку объема продаж в 1999 г. Вначале нами используется коэффициент сглаживания, равный 0,2. Это дает нам возможность определить

$$F_{1969} = (0,2) 130 + (0,2)(0,8) 122 + (0,8)^2 110 + (0,2) (0,8)^3 119 + (0,8)^4 108 = \\ = (0,2) 130 + (0,16)122 + (0,13) 110 + (0,10) 119 + \\ + (0,21)108 = 116 \text{ или } 116000 \text{ долл.}$$

Затем мы можем взять  $\alpha = 0,8$ . Это делает формулу более чувствительной к изменению спроса в последующих периодах. Отсюда

$$F_{1969} = (0,8) 130 + (0,8) (0,2) 122 + (0,8)(0,2)^2 110 + (0,8)(0,2)^3 119 + (0,2)^4 108 = \\ = (0,8)130 + (0,16) 122 + (0,33) 110 + (0,01)119 + \\ + (0,0) 108 = 128 \text{ или } 128000 \text{ долл.}$$

Две различные прогностические оценки объема продаж наглядно показывают важность тщательного выбора значения  $\alpha$ .

Исходный для экспоненциального сглаживания прогноз  $F_n$  может быть получен также путем использования другой техники усреднения. Можно прогнозировать объем продаж для I кв. 1999 г. исходя либо из простой средней, либо из скользящей средней для I кв. 1997 г.; при этом предполагается, что  $\alpha = 0,15$  обеспечивает необходимое равновесие между устойчивостью и чувствительностью.

Как видно, разница в конечных результатах весьма велика (табл. 6). Это является наглядной иллюстрацией воздействия выбора исходного прогноза

Таблица 6

**Экспоненциальное сглаживание, учитываемое  
в квартальных прогнозах, разрабатываемых путем  
вычисления средних значений**

Уравнение прогноза: $F_n = F_{n-1} + 0,15 (Y_{n-1} - F_{n-1})$		
	Простая средняя	Скользящая средняя
$F_{n-1} = F_{\text{I кв. 1997}}$	$\frac{190+280+270+300}{4} = 260$	301 (нескорректированная центрированная скользящая средняя по данным табл. 4)
$Y_{n-1} = Y_{\text{I кв. 1998}}$	320	320
$F_n = F_{\text{I кв. 1999}}$	$260 + 0,15(320 - 260) = 269$ или 269000 долл.	$301 + 0,15(320 - 301) = 304$ или 304000 долл.

для разработки последующего прогноза. Последовательное применение экспоненциального сглаживания к данным временных рядов дает возможность приходить почти к одним и тем же результатам прогнозирования объема продаж различными методами.

### Прогнозирование на основе нелинейной регрессии

Если предположить, что данные относительно спроса аппроксимируются некоторой нелинейной функцией (отличающейся, вообще говоря, от линейно-циклической функции), то перед нами возникнет гораздо более сложная (по сравнению с предыдущими случаями) задача вычислительного характера. Удобнее всего начать с рассмотрения  $q = 1$  в уравнении (1) и попытаться определить линию регрессии и сумму квадратов отклонений от этой линии. То же самое придется проделать и для  $q = 2, 3$  и т.д. Вычислительная процедура на такой схеме должна продолжаться до тех пор, пока имеющиеся данные не будут удовлетворительным образом аппроксимированы некоторой кривой (или до тех пор, пока дальнейшие вычисления не начнут ухудшать полученные на определенном этапе результаты).

Воспользуемся вновь методом наименьших квадратов. Функция, численное значение которой подлежит минимизации, имеет вид

$$E = \sum (d - b_0 - b_1 t - b_2 t^2 - \dots - b_q t^q)^2. \quad (1)$$

Если вычислить  $\frac{\partial E}{\partial b_i}$  для каждого значения  $j$  и приравнять все частные производные к нулю, мы получим систему  $j$  уравнений. Для решения этой системы составляется соответствующий детерминант. Мы имеем

$$\begin{vmatrix} d' & 1 & t \dots t^q \\ \mu_{01} & \mu_0 & \mu_1 \dots \mu_q \\ \mu_{11} & \mu_1 & \mu_2 \dots \mu_{q+1} \\ \mu_{q1} & \mu_q & \mu_{q+1} \dots \mu_{2q} \end{vmatrix}, \quad (2)$$

где  $\mu_j$  –  $j$ -й момент  $t$ , а  $\mu_{j1} = \sum (dt^j)$ . Решение (2) позволяет определить искомую кривую, описывающую в  $q$ -м “приближении” поведение спроса.

### Совместное (или комбинированное) использование различных типов прогнозирующих функций

В реальных условиях может возникнуть такая ситуация, когда ни одна из рассмотренных выше прогнозирующих функций не сможет адекватным образом аппроксимировать поведение уровней спроса. В таких случаях приходится пользоваться несколькими прогнозирующими функциями, каждая из которых предназначается для получения прогностических оценок лишь на ограниченном интервале времени.

## Помесячные и кумулятивные прогнозы спроса

Необходимость прогнозирования будущих уровней спроса определяется, вообще говоря, тем обстоятельством, что потребности клиентуры в той или иной продукции, как правило, не удается удовлетворить только за счет текущего выпуска продукции соответствующими предприятиями фирмы. Задача заключается в том, чтобы минимизировать затраты, связанные со сбытом готовой продукции, правильно “сбалансировать” уровень производственной активности и уровень запасов на рассматриваемый вид продукции. При решении этой задачи может возникнуть необходимость как в составлении помесечных прогнозов, так и в оценке кумулятивного (совокупного) объема сбыта на заданном интервале времени, состоящем из определенного числа отрезков времени меньшей “длины”. Ясно, что определение кумулятивного спроса за тот или иной период прогнозирования при известных помесечных прогнозах не представляет большого труда: для этого достаточно просуммировать все прогнозические оценки, полученные для рассматриваемых месяцев, включая текущий (таблица 7). В обозначениях, которые мы уже использовали ранее, будем иметь

$$d_m^c = \sum_{n=1}^m d_n^t,$$

где  $m > n$ .

Таблица 7

### Кумулятивные и помесечные прогнозы спроса

Месяц	Порядковый номер отрезка времени t	Прогноз							
		пример 1		пример 2		пример 3		пример 4	
		M <sub>t</sub>	K <sub>t</sub>	M	K	M	K	M	K
I	13	99	99	232	232	82	82	523	523
II	14	99	198	235	467	87	169	534	1057
III	15	99	297	238	705	95	264	546	1603
IV	16	99	396	241	946	103	367	556	2159
V	17	99	495	244	1190	110	477	564	2723
VI	18	99	594	247	1437	114	591	569	3292
VII	19	99	693	250	1687	114	705	571	3863
VIII	20	99	792	253	1940	109	814	571	4434
IX	21	99	891	256	2196	101	915	570	5004
X	22	99	990	259	2455	93	1008	571	5575
XI	23	99	1089	262	2717	86	1094	575	6150
XII	24	99	1188	265	2982	82	1176	581	6731

M - прогноз на месяц, K - кумулятивный прогноз

## ПЛАНИРОВАНИЕ. СОСТАВЛЕНИЕ КАЛЕНДАРНЫХ ПЛАНОВ-ГРАФИКОВ МЕТОДОМ ДЖОНСОНА

Если, изучая проблемы планирования, мы пытались заглянуть в будущее с целью определить возможные пути развития, то теперь нам предстоит рассмотреть вопросы, связанные с использованием ресурсов в соответствии с тем планом, который был утвержден.

Предполагается, что распределение ресурсов всегда конкретно. Это означает, что при заданных условиях, которые считаются наиболее реалистичными, потребности плана анализируются с целью обеспечить оптимальное распределение ресурсов, необходимое для достижения поставленных задач. Иногда имеется всего один-единственный путь развития. В этом случае распределения, как такового, нет. Но обычно мы сталкиваемся с широкой взаимозаменяемостью ресурсов, и при умелом планировании такая гибкость ресурсов может принести большую пользу.

После утверждения определенной производственной программы необходимо составить календарный план работы предприятия, обеспечивающий выпуск заданной продукции. Эта функция обычно называется **оперативно-календарным планированием**. Степень детализации календарного плана-графика зависит от типа производства. В случае поточного производственного процесса с конвейерной сборкой при сравнительно небольшой номенклатуре изделий можно составить план-график работы конвейера для всего объема выпуска. Если на предприятии принят индивидуальный или мелкосерийный тип производства, то, как правило, экономически целесообразно составлять подробный пооперационный план-график на каждую деталь, каждый узел, а также на сборку узлов и изделий. В сущности все операции можно спланировать для отдельных станков или групп станков.

### Выбор порядка обработки деталей на двух станках

Основной задачей оперативно-календарного планирования является выбор порядка и моментов времени начала обработки деталей на станках. В случае двух станков предполагается, что оптимальный план-график обеспечивает минимизацию общего времени простоя обоих станков, т.е. сумма времени простоя станка А и станка В должна быть минимальной. Это требование, очевидно, является обоснованным.

Алгоритм решения этой задачи был предложен Джонсоном в 1954 г. При допущении, что известно время обработки детали на каждом станке и что каждая деталь должна быть сначала обработана на станке А, а затем на станке В, алгоритм Джонсона работает следующим образом.

1. Найти наименьшее время обработки детали; если это время относится к станку А, то включить эту деталь в первую очередь для обработки на станке А; если же это время принадлежит станку В, то поставить деталь в последнюю очередь для обработки на станке В.

2. Исключить деталь из дальнейшего рассмотрения и вернуться к шагу 1. Если порядок обработки всех деталей определен, то получается оптимальный план-график. Если время обработки двух различных деталей на одном станке совпадает (при условии, что это время меньше времени обработки на другом станке), то порядок обработки этих деталей произволен.

Пусть имеется, например, 6 деталей, которые должны быть обработаны на двух станках. Время (час.) обработки составляет:

Деталь	1	2	3	4	5	6
Станок А	8	6	5	7	3	9
Станок В	4	7	5	4	6	8

В соответствии с алгоритмом Джонсона порядок обработки деталей должен быть следующим:

- 1) деталь 5 - на станке А;
- 2) деталь 1 - на станке В;
- 3) деталь 4 - на станке В;
- 4) деталь 3 - на станке А;
- 5) деталь 2 - на станке А;
- 6) деталь 6 - на станке В.

Соответствующий календарный план-график показан на рис. 8.



**Рис. 8. Порядок обработки деталей на двух станках**  
(штриховкой показано время простоя)

Общая продолжительность обработки всех деталей равна 42 час. Существуют другие оптимальные решения этой задачи, поскольку время обработки некоторых деталей может совпадать. Если в начале для станка А применять последовательность 5, 3, 2, 6, 4, 1, то возможны и другие упорядочения 5, 2, 6, 3, 1, 4 или 5, 3, 2, 6, 1, 4. Эти планы-графики приведены на рис. 9.



**Рис. 9. Дополнительные распределения работ на двух станках**

Необходимо отметить, что алгоритм Джонсона дает оптимальное решение для любого числа деталей, но только для двух станков. Выбор порядка обработки деталей более чем на двух станках значительно усложняет задачу, которая в общем случае решается только методом полного перебора.

## ИНДИКАТОРНЫЙ МЕТОД

В условиях многономенклатурного производства, когда одни и те же изделия можно обрабатывать на различных станках, могут возникнуть задачи

распределения заказов по станкам. Целевой функцией при этом является минимизация общих затрат. Для точного решения подобной задачи требуется большой объем информации, значительные затраты времени и большой объем вычислений, особенно если задача решается вручную. Однако если предположить, что затраты на изделие пропорциональны времени его обработки, то можно применить простой метод решения задачи, получивший название “индикаторного”.

Поясним этот метод вновь на примере. Предположим, что цех должен выполнить следующие четыре заказа:

- заказ 1 – 100 изделий,
- заказ 2 – 200 изделий,
- заказ 3 – 50 изделий,
- заказ 4 – 70 изделий.

Изделия любого заказа можно обрабатывать на любом из четырех станков, но при этом время выполнения заказов будет различным. Каждый из четырех станков, естественно, располагает ограниченным ресурсом времени для выполнения заказа. Исходные данные задачи приведены в табл. 8.

Таблица 8

**Нормативы часовой обработки изделий по каждому заказу на каждом станке**

Заказ	Станок			
	A	B	C	D
1	1	2/3	4/5	1/3
2	2	1	10/11	5/3
3	2	4/6	1	5/2
4	1	4/5	2/3	5/4
Ресурс, станко-часы	80	150	250	100

Рассмотрим решение задачи распределения заказов по станкам. Прежде всего определяется время, требующееся для выполнения каждого заказа на определенном станке. Эти данные приведены в табл. 9 в столбце “Затраты времени на заказ”.

Далее нужно выбрать критерий эффективности для каждого станка при выполнении каждого заказа. Этот критерий определяется с помощью специальной оценки (индикатора). Станку, имеющему наибольшую производительность при обработке изделий данного заказа, приписывается оценка 1,00. Следующему станку в порядке убывания производительности приписывается оценка, равная отношению числа часов работы рассматриваемого станка к числу часов работы по выполнению данного заказа станком с максимальной производительностью. Для заказа 1 станок D является наилучшим, поэтому ему присваивается оценка 1,00, станок A получает оценку 1,33 и т.д. Эти данные приведены в соответствующих столбцах табл. 9. Заказы должны распределяться по станкам в соответствии с минимальными оценками при условии, что станки имеют достаточные ресурсы времени.

Анализ табл. 9 показывает, что некоторые варианты распределения заказов по станкам недопустимы (если предполагать, что заказ должен быть выполнен только на одном станке). Заказы 1 и 2 не могут быть выполнены на станке A. Их выполнение требует 100 час. на каждый, а ресурс машинного времени составляет всего 80 час. Аналогично заказ 2 нельзя выполнять ни на станке

Таблица 9

**Пример индикаторного метода распределения заказов по станкам**

Заказ	Объем заказа	Станок А			Станок В			Станок С			Станок D		
		Норматив часовой обработки изделий	Оценка (индикатор)	Затраты времени на заказ, час	Норматив часовой обработки изделий	Оценка (индикатор)	Затраты времени на заказ, час	Норматив часовой обработки изделий	Оценка (индикатор)	Затраты времени на заказ, час	Норматив часовой обработки изделий	Оценка (индикатор)	Затраты времени на заказ, час
1	100	1	1,33	100	2/3	2,00	150	4/5	1,67	125	4/3	1,00	75
2	200	2	1,00	100	1	2,00	200	10/11	2,20	220	5/3	1,20	120
3	50	2	1,25	25	4/3	1,88	37 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	1	2,50	50	5/2	1,00	20
4	75	1	1,25	75	4/5	1,56	93 <sup>3</sup> / <sub>4</sub>	2/3	1,87	112 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	5/4	1,00	60
Ресурс времени станка, час.			80			150			250			100	
Использованное время работы станка, час.			75			0			220			95	

В, ни на станке D. Следовательно, заказ 2 приходится выполнять на станке С, несмотря на то, что этому станку соответствует наиболее высокая (наименее выгодная) оценка. Если станок выбран, то требуемое число часов на выполнение заказа должно быть зафиксировано (например, 220 час. для выполнения заказа 2 на станке С). Заказ 1 нельзя выполнять на станке А, поскольку после закрепления заказа 2 за станком С для выполнения заказа 1 на станке С не хватает времени. Но заказ 1 для станка D имеет оценку 1,00 и закрепляется за этим станком. Заказ 3 можно также закрепить за станком D. Теперь заказ 4 можно закрепить как за станком А, так и за станком В. Поскольку оценка этого заказа для станка А меньше, заказ 4 закрепляется именно за этим станком. Таким образом, все заказы распределены. Составление таблицы распределения заканчивается определением данных для строки "использованное время работы станка". При полученном распределении заказов по станкам суммарное время работы станков составляет 390 час. При любом другом распределении потребуется большее время.

Индикаторный метод прост и его можно легко реализовать на практике, но в нем не учитываются непосредственно затраты на обработку деталей на станках. Косвенно эти затраты учитываются, поскольку принятые оценки определяют относительную эффективность работы станков по выполнению каждого заказа.

**Графики Гантта**

В 1917г., работая во Фрэнкфорском арсенале, Генри Л.Гантт пришел к выводу о необходимости формальной схематизации для решения проблем планирования производственных процессов. Разработанная им схема представляла собой графики различных видов деятельности по выпуску продукции, вычерченные в виде диаграммы. Графики подобного типа используются, по существу, для тех же целей и в настоящее время.

Основное достоинство графика Гантта заключается в его простоте. Не нужно делать никаких чрезмерных усилий, для того чтобы увидеть наступление ситуации, связанной с риском, или признать необходимость альтернативных действий. Осуществление деятельности предусматривается с разбивкой по периодам в соответствии с требованиями плана. Отклонения от ожидаемых календарных сроков фиксируются, с тем чтобы показать текущее состояние дел. На основе этого рабочим даются производственные задания,



обнаруживаются задержки и фиксируются изменения в распределении производственных мощностей (по уровням их загрузки).

На рис. 10, 11 и 12 даны три различных графика Гантта. Графики применимы к трем типам производственных процессов: непрерывному, дискретному и по специальным проектам. Здесь могут использоваться различные условные обозначения и символы, излишняя детализация в графиках Гантта нецелесообразна, так как нужно сохранить простоту; чрезмерная загруженность их различной информацией может ограничить возможности графиков регистрировать данные и показывать ход выполнения работы.

*Разработка календарных графиков, обеспечивающих постоянную загрузку оборудования (perpetual loading schedule), осуществляется путем проверки состояния всех видов работ. Показатели затрат времени, необходимого для выполнения всех видов работ по каждому подразделению, машине или виду оборудования, могут быть включены в форму, подобную той, что приведена на рис. 10. Обычно это делается еженедельно. Горизонтальные полосы показывают “зарезервированное” время по каждому виду оборудования, необходимое для завершения работы по заказу. График дает четкое представление о соответствующей загрузке каждого вида оборудования и производственных мощностей предприятия в целом; оборудование с меньшей загрузкой может быть использовано для оказания помощи тем подразделениям, где ощущается нехватка мощностей. Обновление данных графика каждую неделю также способствует изменению уровня рабочей загрузки. Графические методы отображения уровня загрузки полезны при нахождении путей совершенствования: в методах распределения заданий, при выборочных капитальных вложениях, для персонала по прогнозированию, а также для нужд эксплуатации.*



**Рис. 10. Загрузочный график Гантта, вариант 1 (планирование непрерывной загрузки оборудования)**

В дискретном производстве разрабатываются календарные графики, позволяющие контролировать ход выполнения работы, которая должна быть завершена к определенному сроку при использовании соответствующего оборудования (periodic scheduling) (рис. 11). Виды работ, необходимые для завершения выполнения конкретных заказов, распределяются по отдельным видам оборудования с целью соблюдения установленных сроков. Длина полос на графике соответствует продолжительности запланированного периода по каждой единице оборудования. Линия ниже полосы показывает рабочую загрузку оборудования нарастающим итогом. В то же время невыполнимость работы, выявленная по каждой единице оборудования, позволяет планировать сразу же изменять характер загрузки оборудования и сконцентрировать внимание на перегрузках. На рис. 11 показано, что оборудование В загружено на период, равный примерно 4 неделям, что позволяет предположить возможность возникновения определенных трудностей при выполнении будущих обязательств.



**Рис. 11. Загрузочный график Гантта, вариант 2  
(планирование периодической загрузки оборудования)**

График Гантта также полезен при разработке календарных графиков, обеспечивающих реализацию специальных проектов. Наипростейшая форма - использование полос, длина которых показывает время, необходимое для завершения работы по заказу. Полосы располагаются в ряду определенного оборудования, сопровождаются большим числом дополнительных обозначений и пролонгируются по временной шкале в соответствии с графиком завершения работ. Уделяется внимание пригодности оборудования и последовательности операций, характерных для каждого заказа; график завершения работ соответствует срокам, предусмотренным графиком сборки.

Ценность графика Гантта заключается также и в том, что благодаря фиксированию данных видно фактическое положение дел по мере выполнения работ. После составления первоначальных планов, отраженных в виде полос на временной шкале, на график наносятся знаки и символы, отражающие завершение каждого этапа работ.

Условные обозначения	Значение
V	V На шкале времени указанным знаком обозначается данный момент (V)
[0-101]	Линия, ограниченная квадратными скобками, показывает время, отведенное на завершение выполнения конкретного заказа (цифра внутри скобок - № заказа)
[0-101]	Двойная линия (или линия в цвете), проводимая ниже скобок, показывает ту часть работы, которая выполнена на данный момент (V)
⌞X⌞	Знаком (X), помещаемым между квадратными скобками, обозначается резервное время на случай различного рода задержек или с целью увеличения гибкости графика
▭	Этим знаком обозначается время ремонта оборудования (при поломках или проведении профилактического ремонта)
○	Показывает задержки, вызванные отсутствием материалов или их низким качеством
Ⓣ	Показывает задержки, вызванные отсутствием или низким качеством рабочих инструментов
Ⓟ	Показывает задержки, вызванные нехваткой энергии или низкой производительностью труда рабочего (неопытность, медлительность, отсутствие соответствующего инструктажа)
Ⓞ	Показывает задержки в результате того, что рабочий совершает ошибки

**Рис. 12. Условные обозначения,  
используемые при построении графиков Гантта**

Возможности графика Гантта регистрировать данные и отображать ход работы показаны на рис. 13. График отражает положение дел на конец недели (настоящий момент). Оборудование А используется для выполнения планового задания по заказу 101. По оборудованию В и D наблюдается нарушение графика вследствие поломки инструмента при выполнении заказа 104 на оборудовании D и из-за отсутствия материалов, необходимых для работы оборудования В. Так как работа над заказом 104 на оборудовании D должна быть закончена раньше, то работа над тем же заказом могла бы продолжаться на оборудовании В, на что указывают данные экспедиторского контроля. Заказ 106 на оборудовании С выполняется с опережением плана. Данные на эту дату настоятельно требуют, чтобы был составлен новый график: возможно введение сверхурочной работы, дополнительного оборудования, проведение многочисленных перемещений операций.

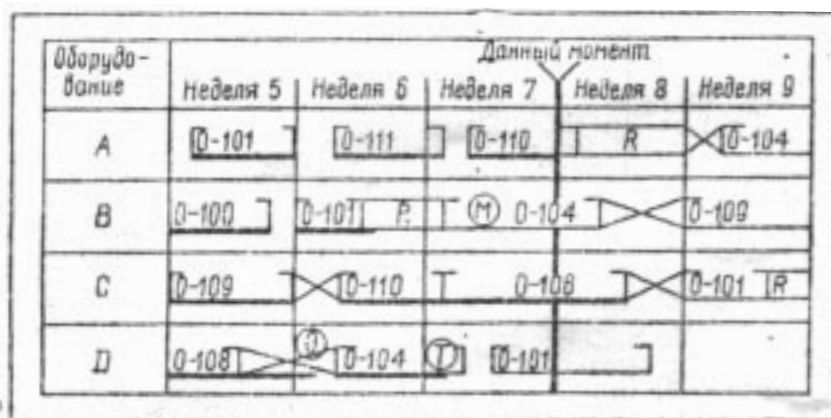


Рис. 13. График Гантта, используемый при планировании процесса заказов

Приведенные примеры с графиком Гантта показывают лишь часть тех возможностей, которые открываются при использовании этого графического метода календарного планирования. В него могут включаться данные о выполнении заданий рабочими, а на временной шкале вместо часов или дней могут быть указаны недели. Допускается использование других обозначений, которые позволяют передавать информацию в более сжатом виде. Цветовая окраска полос часто используется для того, чтобы выделить определенные характеристики. Применение больших, детально разработанных на основе графика Гантта наглядных щитов экономически оправданно. Для их подготовки применяют шрифтовой трафарет, вращающиеся диски, цветные нити, пластмассовые передвижные вкладыши и другие приспособления, что позволяет улучшить наглядность подаваемого материала.

Но применение таких графиков не дает возможности делать аналитические расчеты. Их прекрасные информационные свойства не помогают решению других задач контроля. Если же на график внести дополнительно данные об издержках производства и имеющихся взаимосвязях, то тогда график будет сильно загроможден. Диаграмма в виде столбцов удовлетворительна в таких простых случаях, как планирование заданий для небольших комплексов оборудования. Для решения более сложных проблем мы располагаем календарными графиками планирования предельных сроков завершения работы.

## ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Проблемы распределения дефицитных ресурсов между отдельными конкурирующими видами деятельности решаются **методами линейного программирования (ЛП)**. Их применение возможно при наличии между переменными линейных зависимостей. Наибольшее распространение линейное программирование получило в промышленности. В отдельных случаях использование техники линейного программирования позволяло добиваться значительной экономии средств.

Решение проблем методами ЛП обычно требует соблюдения следующих условий.

1. Необходимо иметь перед собой ясную и конкретную цель расчетов. Например, такая цель, как “получить наилучшее производственное оборудование”, слишком широка и расплывчата. Включать ее в расчеты неразумно. Равным образом установление цели “приобрести самое лучшее оборудование по самой низкой цене” также сбивает с толку своей неопределенностью. Еще до того, как целевая функция будет представлена в математическом виде, надлежит отказаться от подобных противоречивых и расплывчатых формулировок цели.

2. Необходимо иметь альтернативы поведения. Если есть только один способ выполнить поставленную задачу, то ее можно выполнить именно этим способом или не выполнить вообще. Однако, когда сталкиваешься с выбором Гобсона<sup>1</sup>, следует, по крайней мере, обратить внимание на формулировку проблемы. По всей видимости, приложение определенных творческих усилий или привлечение дополнительной информации позволило бы обнаружить и другие варианты.

3. Ресурсы должны быть ограничены. Очень редко имеются неограниченные возможности поставки ресурсов. Но обычно весьма трудно установить реальную дефицитность ресурсов. Для включения реальных ограничений в переменные необходимо иметь немного воображения и большое желание проводить необходимые исследования.

4. Между переменными предполагается наличие линейной зависимости. Отсюда, естественно, следует, что переменные должны быть количественно определяемы. Взаимосвязь между переменными описывается неравенствами, которые показывают, что “объем распределяемого ресурса 1 плюс объем распределяемого ресурса 2 не может превышать определенного значения”, или равенствами, которые устанавливают, что “продажа определенного объема продукции А плюс определенного объема продукции В приносит прибыль”.

### Определение оптимальной комбинации двух изделий

При производстве на одном станке нескольких изделий возникают проблемы определения наиболее выгодного соотношения между ними. При построении графика для двух изделий показатели по одному из них откладываются на оси ординат (Y), а по другому - на оси абсцисс (X). В табл. 10 приводятся ограничительные условия, которые надлежит учитывать при установлении оптимальной комбинации двух изделий.

Технологией предусмотрено прохождение обоими изделиями механической обработки на всех трех станках. Эту обработку изделия могут проходить в любом порядке. Данные таблицы позволяют составить уравнение прибыли

$$Z = 12 \text{ долл.} \times \text{колич.изд. А} + 8 \text{ долл.} \times \text{колич.изд. В}$$

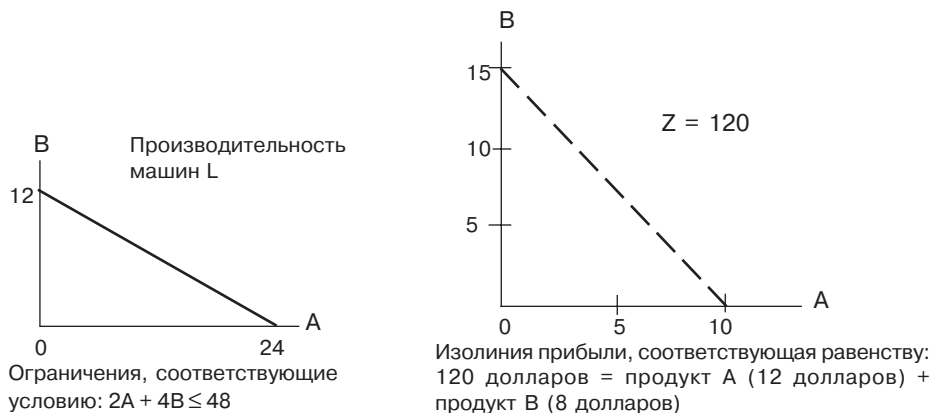
<sup>1</sup> Выбор без вариантов иногда называют выбором Гобсона по имени владельца конюшен. От лица, обращавшегося к нему с просьбой предоставить на время лошадь, Гобсон требовал, чтобы тот брал животное, которое ближе всего находится к выходу.

Таблица 10

**Ограничительные условия**

	Затраты времени на производство одного изделия, час.		Фонд машинного времени, час.
	Изделие А	Изделие В	
Станок J	3	2	до 42
Станок К	2	2	до 30
Станок L	2	4	до 48
Общий доход от производства и реализации одного изделия	12 долл.	8 долл.	

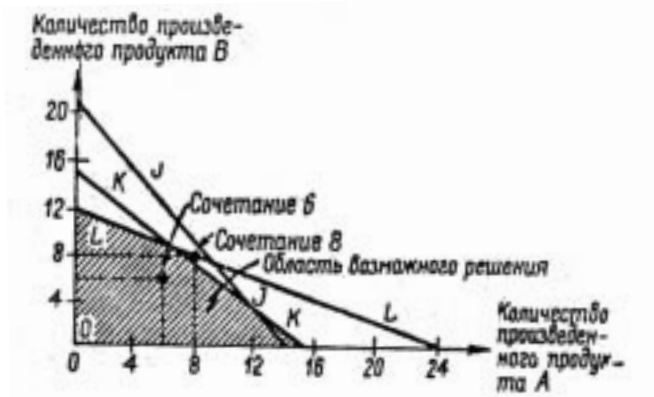
Это математическое выражение прибыли есть целевая функция, которую мы пытаемся максимизировать. На графике она представлена в виде нескольких наклонных линий, именуемых **изопрофитами**, или изолиниями прибыли. Пунктирными линиями обозначены те комбинации двух изделий, которые обеспечивают получение общей прибыли в размере 120 долл.:



Из данных табл. 10 видно, что наибольший фонд машинного времени (48 час.) имеет станок L. За это время можно произвести 24 изделия А, 12 изделий В или какое-то количество того и другого изделия (например, 8 изделий А и 8 изделий В). Последнее условие описывается неравенством  $2A + 4B \geq 48$ , которое показывает, что общая сумма времени, необходимого для производства определенного количества изделий, должна быть меньше или равной 48 часам. Линия, отображающая это ограничение, приводится на рис. 14. Любая комбинация двух изделий, соответствующая точке на линии или слева от нее, не противоречит данному условию. Производство изделий в комбинации, соответствующей любой точке справа от линии, требует таких затрат времени, которые превышают имеющийся фонд машинного времени.

Приступая к построению графика (рис. 14), мы должны записать два условия:

- а)  $3A + 2B \leq 42$  для станка J,  
 $2A + 2B \leq 30$  для станка K,  
 $2A + 4B \leq 48$  для станка L;  
 б)  $A \geq 0$  и  $B \geq 0$ .



**Рис. 14. Область допустимых решений для заданных ограничений использования станков**

Второе условие означает, что мы не можем производить “отрицательную” продукцию ради экономии машинного времени. Заштрихованная часть графика (рис. 14) соответствует области допустимых решений. Эта область содержит все возможные комбинации двух изделий, которые не противоречат имеющимся ограничительным условиям. Например, комбинация N 6 (производится по 6 изделий А и В) хорошо вписывается в лимиты времени, предусмотренные для всех станков. Этого нельзя сказать о комбинации N 8 (производится по 8 изделий А и В), поскольку нарушается ограничительное условие, предусмотренное для станка К:

$$(2 \text{ час./изд.} \times 8 \text{ изд.}) + (2 \text{ час./изд.} \times 8 \text{ изд.}) = 32 \text{ час.} \leq 30 \text{ час.}$$

После того как на графике будут отмечены все допустимые варианты комбинаций двух изделий, нам остается лишь выбрать тот вариант, который будет обеспечивать максимум прибыли. Естественно в этих условиях предположить, что, выпуская большее количество изделий, можно получить и больший объем прибыли. Это подтверждается тем, что протяженность изопродит возрастает по мере удаления от их исходной точки 0. Отсюда логически вытекает: изопродита, наиболее удаленная от 0, но проходящая внутри области допустимых решений, и дает нам комбинацию изделий, приносящую максимальную прибыль.

Как видно из рис. 15, последняя изопродита (величина прибыли - 168 долл.), проходящая по касательной к периметру многоугольника допустимых решений, показывает нам комбинацию двух изделий, которая обеспечивает получение максимальной прибыли. Комбинация может быть определена либо непосредственно из самого графика (если используется достаточно крупный масштаб), либо путем алгебраических расчетов, учитывающих наличие ограничительных условий. Последние отображены на графике линиями (J, K), пересекающимися в одной точке. Поскольку каждая из точек пересечения означает полное использование всего фонда машинного

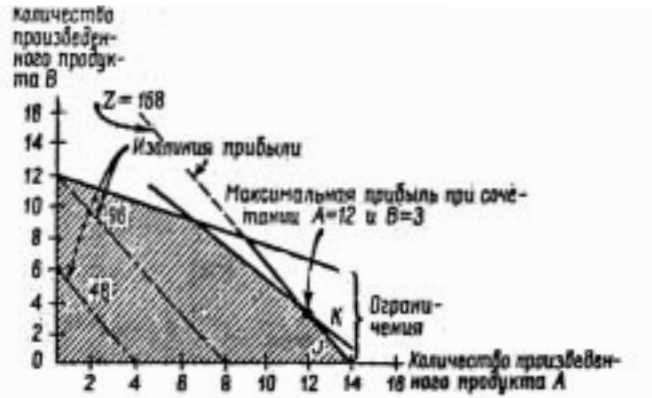


Рис. 15. Определение наиболее выгодной комбинации изделий, производимых одновременно, с помощью изопродит

времени по каждому станку, то координаты могут быть определены в результате одновременного решения уравнений, соответствующих ограничительным условиям, описываемым пересекающимися линиями:

$$3A + 2B = 42 \text{ для станка J,}$$

$$2A + 2B = 30 \text{ для станка K,}$$

Изделие А = 12 единиц, изделие В = 3 единицы

Таким образом, чтобы получить объем прибыли, равный 168 долл., весь фонд машинного времени станков J и K используется для выпуска 12 изделий А и 3 изделий В. Хотя фонд машинного времени станка L и недоиспользуется [148 час. - (2 час./изд. × 12 изд.) + (4 час./изд. × 3 изд.) = 12 час], никакое иное соотношение в производстве 2 изделий не может дать большей прибыли.

### Планирование производства как задача линейного программирования

В предыдущих разделах рассматривалась задача планирования производства при условиях, когда численность штатов была известна и постоянна, а дефицит не допускался. Таким образом, единственной переменной в задаче было количество производимой продукции и минимизировалась сумма производственных затрат и издержек содержания запасов в течение планового периода.

В дальнейшем переменными являются не только количество производимой продукции, но и численность рабочих. Таким образом, в новой задаче будут две переменные:  $q_j$  - планируемый выпуск продукции и  $\mu_j$  - число рабочих. Снимем также ограничение, касающееся отсутствия дефицита. Дефицит теперь будет разрешен. В этих условиях ставится задача минимизации суммы следующих затрат:

- 1) зарплаты за основное рабочее время;
- 2) сверхурочных доплат;

- 3) издержек содержания запасов;
- 4) потерь дефицита;
- 5) затрат, связанных с наймом;
- 6) затрат, связанных с увольнением.

Рассматриваемую задачу можно сформулировать несколькими способами, но здесь она ставится как задача линейного программирования, которую можно решить с помощью симплексного алгоритма.

### Принятые обозначения

- $d_j$  - ожидаемое потребление в  $j$ -й период;
- $m$  - трудозатраты на выпуск единицы продукции, чел-час.;
- $q_j$  - запланированный выпуск на  $j$ -й период;
- $M_j$  - производственные мощности в  $j$ -й период, чел-час.;
- $l_j$  - запасы на конец  $j$ -го периода;
- $r$  - стоимость человеко-часа основного времени;
- $a$  - затраты найма на человеко-час;
- $f$  - затраты увольнения на человеко-час;
- $s$  - стоимость человеко-часа сверхурочного времени;
- $i$  - издержки содержания запасов на единицу продукции в единицу времени;
- $h$  - издержки дефицита на единицу продукции в единицу времени.

### Представление задачи управления производством в виде линейного программирования

Прежде чем перейти к дальнейшему рассмотрению, выделим два вида переменных. Эти переменные могут быть представлены в виде<sup>1</sup>

$$V^+ = \begin{cases} V, & \text{если } V \geq 0, \\ 0, & \text{если } V < 0, \end{cases}$$

и

(3)

$$V^- = \begin{cases} 0, & \text{если } V > 0, \\ |V|, & \text{если } V \leq 0. \end{cases}$$

Затраты, которые в сумме должны быть минимизированы, включают:

- 1) зарплату за основное время =  $rM_j$ ;
- 2) зарплату за сверхурочное время =  $s(mq_j - M_j)^+$ ;
- 3) издержки содержания запасов =  $il_j^+$ ;
- 4) потери дефицита =  $hl_j^-$ ;
- 5) затраты найма =  $a(M_j - M_{j-1})^+$ ;
- 6) затраты увольнения =  $f(M_j - M_{j-1})^-$ .

Суммарные затраты за планируемый период, содержащий  $n$  интервалов, равны:

$$C(q_j, M_j) = \sum_{j=1}^n \left[ rM_j + s(mq_j - M_j)^+ + il_j^+ + hl_j^- + a(M_j - M_{j-1})^+ + f(M_j - M_{j-1})^- \right], \quad (4)$$

где  $q_j, M_j \geq 0$ .



Для формулировки этой задачи как задачи линейного программирования необходимо преобразовать некоторые переменные так, чтобы гарантировалась их неотрицательность. Примем

$$\begin{aligned}U_j &= (mq_j - M_j)^+, \\V_j &= (mq_j - M_j)^-, \\W_j &= (M_j - M_{j-1})^+, \\X_j &= (M_j - M_{j-1})^-, \\Y_j &= I_j^+, \\Z_j &= I_j^-, \end{aligned}$$

где  $U_j, V_j, W_j, X_j, Y_j, Z_j \geq 0$ .

Теперь можно показать, что

$$M_j = mq_j - (U_j - V_j).$$

Используя уравнение баланса запасов

$$I_j = I_{j-1} + q_j - d_j,$$

получаем следующее выражение:

$$Y_j - Z_j = (Y_{j-1} - Z_{j-1}) + q_j - d_j,$$

которое можно переписать в виде

$$q_j = (Y_j - Z_j) - (Y_{j-1} - Z_{j-1}) + d_j. \quad (5)$$

Теперь производственные мощности можно описать выражением

$$M_j = m[(Y_j - Z_j) - (Y_{j-1} - Z_{j-1}) + d_j] - (U_j - V_j) \quad (6)$$

или в виде разности

$$M_j - M_{j-1} = m[(Y_j - Z_j) - 2(Y_{j-1} - Z_{j-1}) + (Y_{j-2} - Z_{j-2}) + (d_j - d_{j-1})] - (U_j - V_j) + (U_{j-1} - V_{j-1}). \quad (7)$$

Переменные в приведенных выше уравнениях подчиняются следующим ограничениям:

$$\begin{aligned}q_j &\geq 0, \\M_j &\geq 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$M_j - M_{j-1} = W_j - X_j.$$

Физический смысл первых двух неравенств состоит в том, что не могут быть отрицательными величинами ни количество выпускаемой продукции, ни число работающих на предприятии.

Подставляя эти условия в уравнения (6), (7) и (8), получаем

$$\begin{aligned}m[(Y_j - Z_j) - (Y_{j-1} - Z_{j-1}) + d_j] - (U_j - V_j) &\geq 0, \\m[(Y_j - Z_j) - 2(Y_{j-1} - Z_{j-1}) + (Y_{j-2} - Z_{j-2}) - (U_j - V_j) + (U_{j-1} - V_{j-1}) - (W_j - X_j)] &= m(d_{j-1} - d_j), \\(Y_j - Z_j) - (Y_{j-1} - Z_{j-1}) + d_j &\geq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Минимизируемая функция затрат приобретает вид

$$C(U_j, V_j, W_j, X_j, Y_j, Z_j) = \sum_1^n \{rm[(Y_j - Z_j) - (Y_{j-1} - Z_{j-1}) + d_j] - r(U_j - V_j) + sU_j + iY_j + hZ_j + aW_j + fX_j\} \quad (10)$$

Теперь можно следующим образом сформулировать задачу линейного программирования: минимизировать (10) при ограничениях (9) и

$$U_j, V_j, W_j, X_j, Y_j, Z_j \geq 0. \quad (11)$$

### Применение метода линейного программирования

Для иллюстрации сформулированной задачи предположим, что известны следующие данные:

$d_1 = 1000$ ед./мес.,	$f = 5,00$ долл./чел-час.,
$d_2 = 1200$ ед./мес.,	$s = 6$ долл./час.,
$d_3 = 1080$ ед./мес.,	$i = 1,00$ долл./(ед.мес.),
$m = 8$ ч/ед.,	$h = 2,00$ долл./(ед.мес.),
$l_0 = 200$ ед.,	$M_0 = 8000$ чел-час.,
$r = 4$ долл./ч,	$l_3 = 300$ ед.
$a = 3,00$ долл./чел-час.,	

В каноническом виде задача запишется так:

$$\begin{aligned} 8 [(Y_1 - Z_1) - 200 + 1000] - (U_1 - V_1) &\geq 0, \\ 8 [(Y_2 - Z_2) - (Y_1 - Z_1) + 1200] - (U_2 - V_2) &\geq 0, \\ 8 [(300) - (Y_2 - Z_2) + 1080] - (U_3 - V_3) &\geq 0, \\ 8 (Y_1 - Z_1) - (U_1 - V_1) - (W_1 - X_1) &= 8 [-(1000-200)], \\ 8 [(Y_2 - Z_2) - 2(Y_1 - Z_1) + 200] - (U_2 - V_2) + (U_1 - V_1) - (W_2 - X_2) &= 8[1000 - 1200], \\ 8 [(300) - 2(Y_2 - Z_2) + (Y_1 - Z_1)] - (U_3 - V_3) + (U_2 - V_2) - (W_3 - X_3) &= 8 [1200 - 1080], \\ Y_1 - Z_1 - 200 + 1000 &\geq 0 \\ (Y_2 - Z_2) - (Y_1 - Z_1) + 1200 &\geq 0 \\ 300 - (Y_2 - Z_2) + 1080 &\geq 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} -8Y_1 + 8Z_1 + U_1 - V_1 &\leq 6400, \\ -8Y_2 + 8Z_2 + 8Y_1 - 8Z_1 + U_2 - V_2 &\leq 9600, \\ -8Y_2 - 8Z_2 + U_3 - V_3 &\leq 11040, \\ -8Y_1 + 8Z_1 + U_1 - V_1 + W_1 - X_1 &= 6400, \\ -8Y_2 + 8Z_2 + 16Y_1 - 16Z_1 + U_2 - V_1 - U_1 + V_1 + W_2 - X_2 &= 3200, \\ 16Y_2 - 16Z_2 - 8Y_1 + 8Z_1 + U_3 - V_3 - U_2 + V_2 + W_3 - X_3 &= 1440, \\ -Y_1 + Z_1 &\leq 800, \\ -Y_2 + Z_2 - Y_1 - Z_1 &\leq 1200, \\ Y_2 - Z_2 &\leq 1380 \end{aligned}$$

и

$$C = 108460 + 2(U_1 + U_2 + U_3) + 4(V_1 + V_2 + V_3) + 3(W_1 + W_2 + W_3) + 5(X_1 + X_2 + X_3) + (Y_1 + Y_2) + 2(Z_1 + Z_2).$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$W_1 = 9013 \frac{1}{3}, Y_1 = 326 \frac{2}{3}, Y_2 = 253 \frac{1}{3}.$$

Полученное решение можно объяснить следующим образом.

1. Необходимо довести производственные мощности до  $9013 \frac{1}{3}$  к началу первого интервала и поддерживать их на постоянном уровне.

2. Конечные запасы должны составлять  $326 \frac{2}{3}$  ед. продукции в конце первого интервала и  $253 \frac{1}{3}$  ед. в конце второго.

Результат решения рассмотренной задачи становится ясным, если обратиться к предпосылкам ее постановки, способу решения и выбранным числовым значениям переменных величин. Интерпретация этого решения сводится к следующему: поскольку требуемые трудозатраты возрастают на каждом периоде, можно начать с определения числа рабочих, обеспечивающих необходимые производственные мощности в трех интервалах планируемого периода:  $8(1000-200 + 1200 + 1080 + 300)/3 = 9013 \frac{1}{3}$ . При этом запас на конец первого интервала составит  $(9013 \frac{1}{3} - 6400) / 8 = 326 \frac{2}{3}$  ед. Запасы на конец второго интервала будут равны  $(9013 \frac{1}{3} - 9600) / 8 + 326 \frac{2}{3} = 253$  ед., и запасы на конец третьего интервала составят  $(9013 \frac{1}{3} - 8640) / 8 + 253 \frac{1}{3} = 300$  ед., что соответствует требуемому запасу.

Эту задачу можно далее расширить, включив в нее численность рабочих в качестве переменной, определяемой, исходя из планируемого числа часов в основе, и сверхурочное время в течение месяца.

В тех случаях, когда нужно получить целочисленное решение задачи о требуемой рабочей силе, должны использоваться методы целочисленного программирования.

Формулировка задачи, представленная в форме, удобной для применения симплексного алгоритма, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} X_j = W_j = Z_j &= 0, \\ Y_j - Y_{j-1} + d_j &\geq 0, \\ m[(Y_j - Y_{j-1} + d_j) - (U_j - V_j)] &\geq 0, \\ m[Y_j - 2Y_{j-1} + Y_{j-2}] - (U_j - V_j) + (U_{j-1} - V_{j-1}) &= m[d_{j-1} - d_j], \\ C = \sum_{j=1}^n [rm(Y_j - Y_{j-1} + d_j) - r(U_j - V_j) + sU_j + iY_j]. \end{aligned}$$

Размерность задачи уменьшилась, так как некоторые решения принимают-ся вне постановки задачи линейного программирования. Поэтому окончательное решение, разумеется, будет также зависеть от этих “внешних” решений.

### Другой подход к планированию производства

Можно подойти к задаче планирования производства с других позиций. Предположим, что штат рабочих, занятых производством продукции, составляет 8 человек. Производственная программа показана в табл. 11. Столбец “Первая разность” равен разности между суммарными производственными мощностями в человеко-часах и суммарным прогнозируемым спросом. От этого столбца можем перейти к требуемым запасам (предполагая, что используется сверхурочное время). Рассматривая полученные данные, нетрудно заметить, что в декабре первая разность больше, чем в ноябре. Это свидетельствует о превышении имеющихся производственных мощностей над прогнозируемым спросом, поэтому на конец ноября отпадает надобность в запасах. Подобное

Таблица 11

**Производственная программа, обеспечивающая минимизацию затрат при использовании запасов при штате в 8 человек**

Месяц	Суммарные производственные мощности, чел-час.	Суммарный прогнозируемый спрос, ед.	Первая разность, ед.	Требуемый запас, ед.	Суммарный планируемый выпуск, ед.
I	1408	1250	158	76	1326
II	2624	2500	124	42	2542
III	3968	3750	218	136	3886
IV	5376	5000	376	294	5294
V	6784	6250	534	452	6702
VI	8064	7500	564	482	7982
VII	8832	8750	82	0	8750
VIII	10240	10000	240	0	10000
IX	11520	11250	270	0	11250
X	12992	12500	492	34	12534
XI	14208	13750	458	0	13750
XII	15552	15000	552	0	15000

же сравнение ноября и октября показывает, что имеет место уменьшение первой разности. Это означает, что в ноябре прогнозируемый спрос превышает производственные мощности. Значение разности определяет запасы, необходимые на конец октября (34 ед.). Рассматривая столбец первых разностей, обнаруживаем следующее уменьшение от июня к июлю (482 ед.). Однако не все необходимое количество продукции может быть произведено в июне, поэтому должен быть некоторый запас (452 ед.) к концу мая. Если далее продолжить такое рассмотрение, то получим столбец "Требуемый запас". Общий планируемый выпуск равен сумме общего прогнозируемого спроса и требуемых запасов. Этот выпуск никогда не бывает меньше суммарного прогнозируемого спроса, поскольку дефицит не допускается.

Следует отметить, что в проведенном рассмотрении не учитывались затраты. Поэтому полученная программа основана на том, что осуществимо, но не на соображениях экономической эффективности.

### ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

По сравнению с графическим общий метод более гибок, а компактность делает его общепризнанным инструментом проведения вычислительных операций вручную. Широкое применение общий метод находит в тех случаях, когда возникает необходимость определить оптимальные маршруты транспортировки материалов от производителя к потребителю.

Формой решения является *матрица*, с помощью которой определяются: 1) величина спроса и предложения, местонахождение производителя и потребителя; 2) издержки или прибыль, связанные с перемещением одного

изделия от производителя к потребителю. Число производителей и потребителей, включаемых в матрицу, не ограничивается. **Первым этапом нахождения оптимального распределения** является разработка предварительного решения. Затем осуществляется проверка, пересмотр, улучшение первоначального решения и разработка на этой основе следующего решения. Операции повторяются до тех пор, пока нельзя будет вносить улучшения в решение. В ходе нахождения оптимального решения могут быть установлены также альтернативные возможности.

**Пример 9.** Предположим, что компания, выпускающая торты, пирожные, печенье, пироги и т.п., планирует построить новую пекарню, которая должна стать также центром по распределению продукции. У компании уже есть две пекарни в крупных городах, которые снабжают своей продукцией соседние более мелкие населенные пункты. Эти предприятия хотя и загружены полностью, тем не менее не могут удовлетворить текущий спрос. Если только не появится конкурент, емкость рынка по продукции компании должна в принципе расти. Для удовлетворения потенциального спроса новую пекарню необходимо построить в одном из двух предлагаемых мест. При таком условии дополнительные мощности позволят удовлетворить спрос в городе, в котором разместится пекарня, а также в соседних с ним населенных пунктах. Проблема состоит в том, чтобы построить новое предприятие в таком месте, где расходы на распределение продукции будут минимальными.

Идея географического расположения и схема распределения продукции показаны на рис. 16. Прямоугольниками изображены пекарни, являющиеся одновременно и центрами распределения продукции; кружками – города, где продается данная продукция. Размер условных обозначений дает приблизительную оценку производственных мощностей. Дугообразными линиями обозначена возможная система распределения. Сплошные линии отражают существующие маршруты и систему распределения. Пунктирными линиями отображены варианты размещения новых пекарен и связанная с этим новая схема распределения.

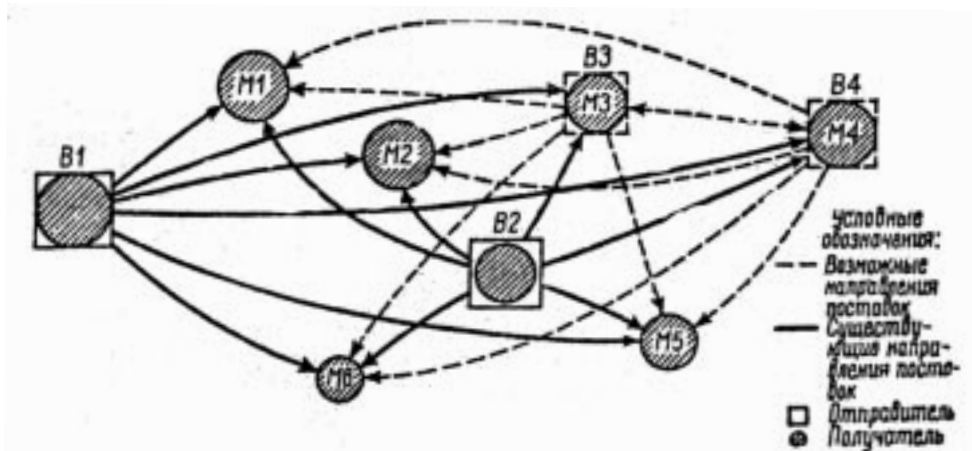


Рис. 16. Существующая и возможная схема поставок продукции от производителя к потребителю

Задача состоит в выборе одного из двух вариантов. Таким образом, если В4 является пунктом, выбранным для строительства пекарни, то местный рынок М4 логически будет снабжаться пекарней, расположенной в В4. Если же этим пунктом будет В3, то соответствующий местный рынок – М3.

Готовая продукция пекарен доставляется собственными машинами компании в соседние населенные пункты. Комбинация отдельных видов выпекаемой продукции определяется в зависимости от существующего на рынке спроса. Общие доходы являются функцией комбинации видов продукции, а транспортные издержки – функцией перевозимого количества. Поэтому объем предложения, спроса и величина транспортных издержек исчисляются в единицах загруженных машин. Необходимая информация относительно издержек снабжения и имеющихся мощностей содержится в табл. 12.

Таблица 12

**Данные, необходимые для решения транспортной задачи**

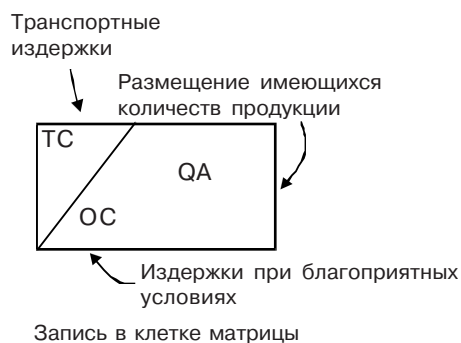
Суточные мощности (в загруженных машинах)				Расходы распределения в расчете на 1 загруженную машину, долл.						
пекарни	предложение	рынок	спрос		М1	М2	М3	М4	М5	М6
В1	22	М1	16	В1	14	24	30	50	44	16
В2	18	М2	18	В2	20	14	16	32	16	14
В3	29	М3	15	В3	16	11	-	18	26	45
В4	24	М4	20	В4	35	26	18	-	20	50
		М5	10							
		М6	5							

Предложение по каждой пекарне представляет собой остающийся после удовлетворения спроса на местном рынке объем продукции, который отправляется в соседние города. Отсюда производственные мощности пекарни В4 составляют 44 загруженные машины в день.



Рис. 17. Транспортная матрица для варианта В3

Все данные табл. 12, касающиеся деятельности пекарни В3, целиком включаются в транспортную матрицу. Как показано на рис. 17, наличные и требующиеся количества по каждому производителю и каждому потребителю заносятся в нижнюю строку и правый крайний столбец матрицы. Эти записи, представляющие собой ограничительные условия, соответствуют прямым ограничениям при использовании графического метода расчетов. Каждая клетка матрицы соответствует возможному маршруту поставки готовой продукции. По каждому маршруту предусмотрены свои издержки или прибыль, которые показываются в левом углу клетки. Часть клетки справа оставлена для записи перевозимых количеств или величины издержек при данных вариантах перевозок:



Рассматривая условия данной проблемы с точки зрения требований, предъявляемых к решениям методами ЛП, мы имеем:

- 1) конкретную задачу – минимизировать общие издержки распределения продукции пекарен между отдельными рынками;
- 2) несколько вариантов маршрутов перевозок продукции;
- 3) величину ограниченного предложения пекарен – центров распределения и удовлетворяемого ими ограниченного спроса;
- 4) наличие между переменными линейных зависимостей.

### **Первоначально допустимое решение. Метод аппроксимации Фогеля**

**Первоначальное решение** представляет собой первую попытку сбалансировать предложение и спрос путем нахождения оптимальной комбинации маршрутов доставки готовой продукции. Для того чтобы решение стало допустимым, оно должно соответствовать следующим требованиям.

1. Ограничительные условия транспортной матрицы должны быть соблюдены: суммарное количество поставляемой продукции, фиксируемое в клетках матрицы, по строке и столбцу должно быть равным количеству продукции, поставка которой осуществляется с учетом ограничительных условий.

2. Число заполненных клеток должно быть на единицу меньше общего числа производителей (O) и потребителей (D):  $O + D - 1$ .

3. Заполненные клетки должны соответствовать независимости пунктов друг от друга. В противном случае это будет означать перемещение на матрице по кругу: от заполненной клетки прямо по горизонтали или вертикали с поворотом на  $90^\circ$  у другой заполненной клетки и возвращение к исходной:

	D1	D2	D3
01	X $\Gamma$ — —	— —	—X $\Gamma$
02	X $\Gamma$ — —	— —	—X $\Gamma$

Зависимое расположение

	D1	D2	D3
01	X	X	
02		X	X

Независимое расположение

Проверка первоначально допустимого решения на оптимальность методом ступенек (the stepping-stone technique) делает очевидной необходимость установления строго определенного числа заполненных клеток, а также включения условия независимости.

Желательным, но не обязательным качеством решения является его близость к оптимальному решению. Интерактивная проверка на оптимальность требует определенных затрат времени. Незначительные дополнительные затраты времени на подготовку предварительного решения окупаются экономией времени на последующих стадиях проводимых расчетов. По этой причине мы будем находить первоначально допустимое решение методом аппроксимации Фогеля (МАФ).

В основе **метода аппроксимации Фогеля** лежит концепция штрафов, взимаемых за выбор не самого оптимального с точки зрения транспортных издержек маршрута. Величина штрафа по каждой строке и каждому столбцу определяется из анализа маршрутов с различными показателями издержек (на разность двух различных уровней транспортных издержек). Первой заполняется клетка матрицы, в которой фиксируется самый крупный штраф. После заполнения клеток штрафы пересчитываются и вновь делаются последовательные записи, цель которых элиминировать самые крупные штрафы. При наличии двух одинаковых по величине штрафов вопрос решается логическим путем. Все рассмотренные нами операции повторяются до тех пор, пока не будут соблюдены условия допустимого решения.

Более подробно порядок использования матрицы, приведенной на рис. 17, показан на рис. 18. Для наглядности здесь предусмотрено применение отдельных матриц распределения и штрафов. На практике целесообразнее применять упрощенную форму.

Проверка окончательного распределения на основе решения, принятого по методу аппроксимации Фогеля, показывает, что ограничительные условия соблюдены; имеется  $3+5-1=7$  точек размещения, расположенных независимо друг от друга. Следовательно, данное первичное решение служит базой для принятия оптимального решения.

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

### Метод “ступенек”

**Оптимальное решение** – это “наилучший из возможных” способ действия при наличии определенных ограничений. Если ставится задача минимизировать издержки, то оптимальное решение обеспечивает достижение самого низкого уровня расходов. **Проверка оптимальности в транспортной задаче** состоит в определении наиболее выгодных с точки зрения издержек маршрутов распределения продукции. Каждой незаполненной клеткой матрицы первоначально допустимого решения обозначается новый маршрут. Рассчитывая транспортные расходы по каждому новому маршруту и сравнивая их с транспортными расходами по маршрутам, установленным первоначально



решением, мы можем определить, обеспечат ли вносимые изменения создание более выгодной схемы распределения. Метод “ступенек” позволяет выявить, где следует внести необходимые изменения и какой будет экономия от внесения данных изменений.

Название этот метод получил по способу нахождения оптимальности. Матрицу можно представить себе в виде ряда взаимосвязанных горизонталь-

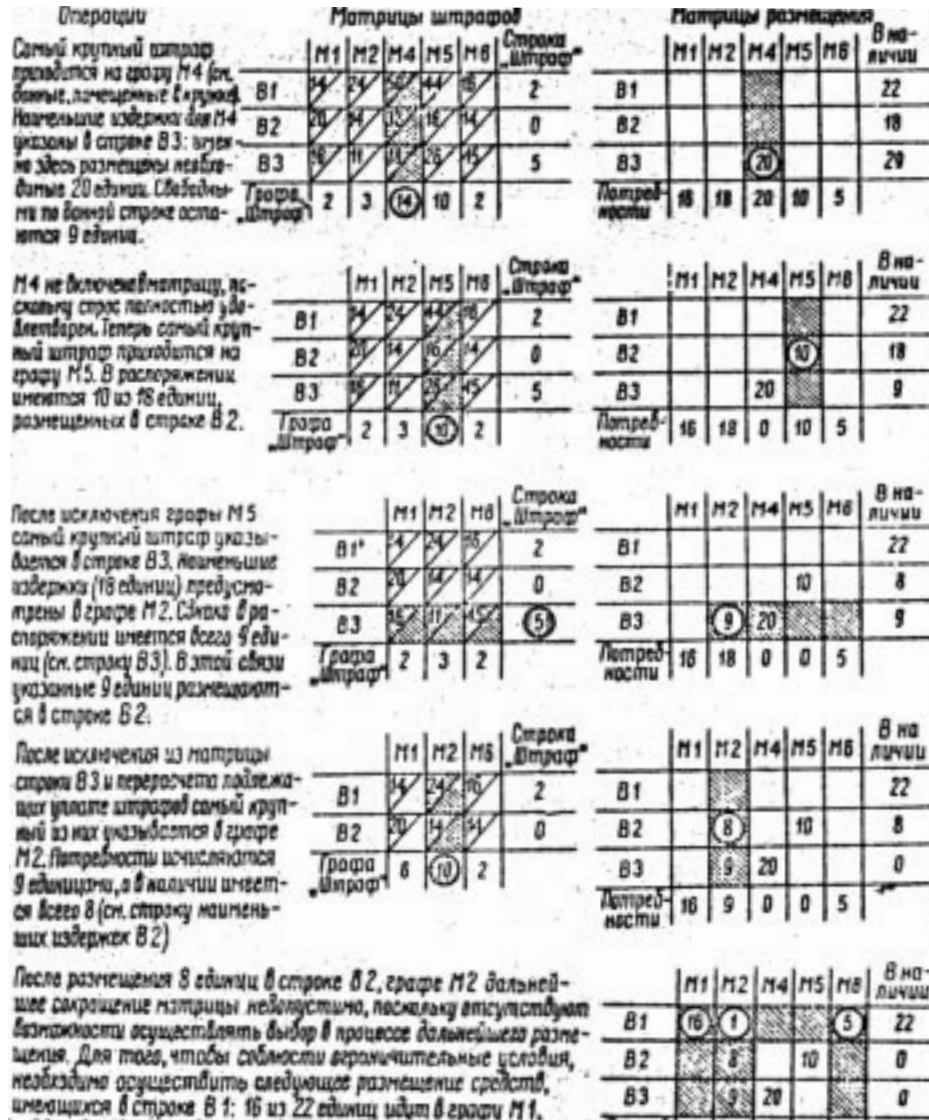


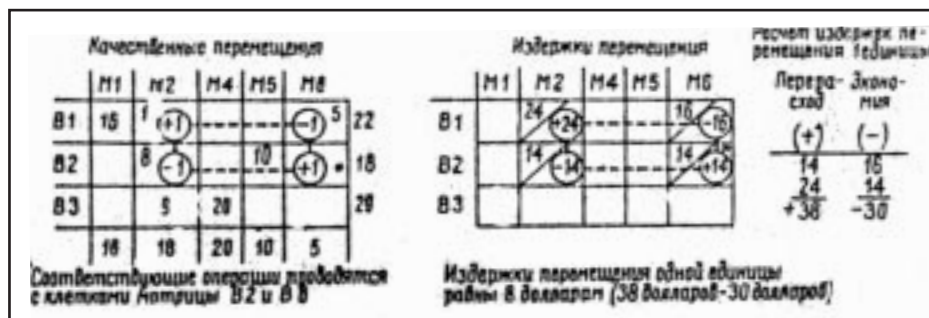
Рис. 18. Пример использования метода аппроксимации Фогеля

ных и вертикальных путей. Именно по этим направлениям идут потоки материалов. Эти потоки, однако, не могут пересекаться. Поворот под прямым углом при изменении направления потока может иметь место только на заполненных клетках матрицы. Точки поворота (заполненные клетки) являются своего рода теми “ступеньками”, с которых осуществляется переход к следующему этапу. На каждой “ступеньке” мы по мере выявления альтернатив распределения проверяем величину издержек, связанных с использованием “ступенек”.

Практика использования метода “ступенек” дает возможность выявить логику его построения.

**Пример 10.** В качестве отправной точки используем первоначально допустимое решение (рис. 18). На данной матрице мы можем выбрать для первой проверки любую из свободных клеток. По-видимому, низкие транспортные издержки, величина которых соответствует записи в клетках В2 и М6 (14 долл.), вполне могут служить основанием для выбора более выгодного с точки зрения транспортных расходов маршрута. Проверка осуществляется путем расчета величины затрат, необходимых для внесения изменений, цель которых увязать перемещение одной единицы продукции (полностью загруженная машина) из пункта В2 в пункт М6. Добавление одной единицы к В2, М6 нарушает ограничительные условия. Для того чтобы опять привести в соответствие спрос и предложение, мы должны вычесть единицу из поставок продукции в В1, М6 и В2, М2. В результате строка В2 оказывается сбалансированной. Однако в столбце М2 не хватает одной единицы. Добавляя ее к В1, М2, мы тем самым соблюдаем все ограничительные условия. Как видно, мы использовали заполненные клетки в качестве переходных “ступенек”, чтобы осуществить полный цикл перемещений. Начало цикла – заполненная клетка (рис. 19).

После идентификации самого цикла перемещения рассчитываются чистые издержки перемещения одной единицы продукции.



**Рис. 19. Схема цикла перемещения, построенная методом ступенек”, и соответствующий ей порядок расчета издержек**

Увеличение записи в клетки на единицу означает рост транспортных издержек по данной клетке на величину, которая соответствует транспортным издержкам данной единицы продукции. И наоборот, уменьшение записи на единицу дает возможность сэкономить на издержках. Увеличение или уменьшение транспортных издержек рассчитывается либо непосредственно из матрицы, либо путем составления таблицы (рис. 19). В том и другом случае окончательный результат дается в виде одной цифры, показывающей, стоит ли включать проверяемую клетку в схему распределения или нет. Если

дополнительные расходы в полном цикле превышают экономию, схему распределения менять не следует. В том случае, если экономия больше дополнительных расходов, проверяемая клетка учитывается в пересматриваемом решении.

Улучшить решение можно также путем перемещения такого числа единиц в пустую клетку, которое позволит получить самую большую экономию. Максимально возможное число единиц перемещения определяется наименьшим значением записи в отрицательной клетке общего цикла перемещения. Все клетки в данном цикле проходят аналогичную обработку, а показатель клетки увеличивается или уменьшается на эту лимитирующую величину. Общая экономия от таких перемещений равна количеству перемещаемых единиц, умноженному на величину экономии, получаемой от перемещения одной единицы.

Результаты проверки в данном примере приведены на рис. 20. Произвольный порядок проверки пустых клеток обозначен в матрице числами, обведенными кружками; соответствующие клетки указываются и в проверочном цикле, причем проверяемая клетка стоит в начале цикла. В этом примере для решения, полученного методом аппроксимации Фогеля, не требуется никакого уточнения. Минимальный объем ежедневных транспортных расходов, связанных со строительством новой пекарни в пункте В3, составляет 1059 долл.

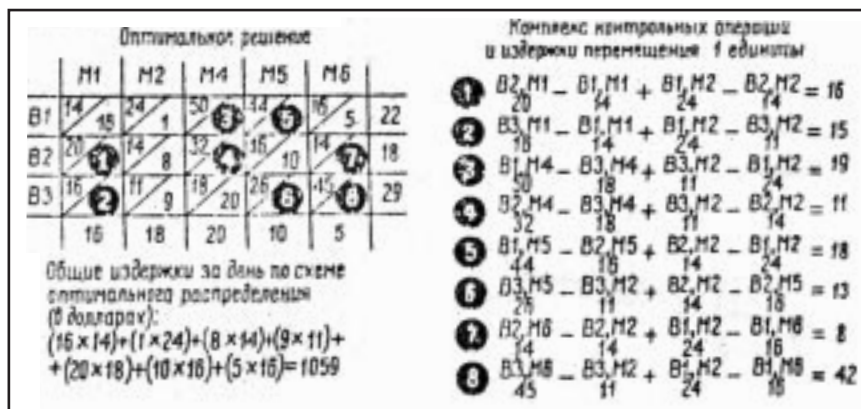


Рис. 20. Расчет минимальных издержек распределения для варианта В3

## Нерегулярно встречающиеся аспекты проблем транспортировки

Имеется лишь незначительное число проблем транспортировки продукции, по которым может быть получено такое ясное и прямое решение и с которым мы познакомились в предыдущем разделе. Нередко уже сама проблема не может быть сформулирована в сжатом виде. В других случаях в процессе ее решения возникают противоречия. В настоящем разделе рассматриваются те аспекты транспортных проблем, с которыми приходится сталкиваться только от случая к случаю.

**Зависимость.** Изучение метода “ступенек” и использование замкнутого цикла перемещений делают очевидной необходимость независимого размещения в первоначальной схеме распределения. Если зависимое размещение и проскользнет при анализе первоначального решения, оно,

несомненно, будет обнаружено во время последующих пере проверок; цикл перемещения, который содержит пустую клетку плюс четное число заполненных клеток, является контрольным доказательством того, что пункты размещения зависимы. Один из путей устранения зависимости – проведение перегруппировки в существующей системе распределения продукции путем осмотра, а позднее – осуществление обычных проверок пустых клеток матрицы.

**Вырождение.** Решение является **вырожденным**, если оно имеет менее  $O + D - 1$  распределений. По своим симптомам и методам “лечения” вырождение аналогично зависимости. Неудачные попытки замкнуть цикл перемещений являются признаком вырождения; сумма занятых клеток может служить проверкой. Вырождение может быть устранено, если в пустую клетку записать бесконечно малую величину  $\epsilon$ . Эта величина обладает необычными свойствами:

1) она достаточно велика, чтобы считать клетку, в которую она вводится, заполненной;

2) она настолько мала, что ее присутствие в клетке не может изменить ограничительные условия.

Вырождение может проявиться как в первоначальном, так и в пересмотренном решениях. В обоих случаях оно трактуется одинаково. Чтобы сделать общее число заполненных клеток равным  $O + D - 1$ , в одну или несколько клеток записывается значение  $\epsilon$ . Следует тщательно выбирать клетки, в которые записывается значение  $\epsilon$ , чтобы оно не попадало на клетки цикла перемещения, имеющие отрицательную величину; дело в том, что в данном случае нельзя вычитать единицу из бесконечно малой величины. Поэтому бесконечно малые величины следует записывать в такие клетки, которые соответствуют условиям решения.

Второй вариант размещения пекарен, который описан в предыдущем разделе, показывает наличие вырождения уже в первоначально допустимом решении. Метод аппроксимации Фогеля применяется к матрице, предполагающей иной вариант размещения пекарни В4. В данном примере не предусматривается использование для определения размера штрафа приведенной матрицы (the reduced matrix), подобной той, с которой мы познакомили читателя в предыдущем разделе (рис. 18). Штрафы рассчитываются вне ограничительных условий (рис. 21). Обведенные кружком числа в клетках матрицы обозначают порядок, в котором производится распределение. Например, после цикла распределения 3 строка В4 будет иметь наивысший показатель штрафа (17) в цикле 4 расчетов штрафов. Следовательно, остающиеся 14 единиц (10 единиц из клетки В4 были распределены в клетку М5 в цикле распределения 3) передаются в клетку М3 в цикле 5. После этого распределения дальнейших расчетов штрафов не потребуются, так как остающиеся единицы должны быть распределены исходя из факта несоблюдения ограничительных условий.

Первоначальное решение вырождено вследствие несоответствия числа строчек и столбцов числу заполненных клеток: 6 вместо 7 ( $3+5-1$ ). Логически улучшить положение можно путем исключения маршрута с высокими транспортными издержками (В1, М3). Незаполненная клетка В2, М3 является началом цикла перемещения. При существующих условиях вырождения на В2, М3 невозможно замкнуть цикл перемещения без введения величины  $\epsilon$ . Для того, чтобы замкнуть цикл перемещения, нужно было бы этот показатель суммировать с показателем записи в клетке В2, М1 (рис. 22а). Но запись в данной клетке имеет для данного цикла отрицательное значение, в связи с чем она допускает только несущественное (непоследовательное) перемещение. После того как значение  $\epsilon$  будет придано клетке В1, М2, знак минус в данном цикле перемещений заменяется знаком плюс:  $[(+ (В2, М3) - (В1, М3) + (В1, М2) - (В2, М3)]$ , или в количественном выражении  $(+16 - 30 +$

		Порядок размещения										
		M1	M2	M3	M4	M5	1	2	3	4	5	
B1	14	16	24	30	44	16	22	2	2	16	16	-
B2	20	14	18	10	16	14	18	0	-	-	-	-
B4	35	26	18	20	50	24	2	2	2	17	17*	
	16	18	15	10	5							
1	8	10*	2	4	2							
2	21	-	12	24	34*							
3	21	-	12	24*	-							
4	21*	-	12	-	-							
5	-	-	12	-	-							

\* Самый крупный штраф в каждом цикле расчетов

Рис. 21. Пример вырожденного первоначального решения, полученного методом аппроксимации Фогеля

24 – 14). В итоге от перемещения одной единицы продукции мы имеем экономию 4 долл. на транспортных расходах или увеличение на те же 4 долл. транспортных издержек (рис. 22b). Благодаря этому перемещению число заполненных клеток увеличивается, а вырождение устраняется.

	M1	M2	M3	M5
B1	14	24	30	1
B2	20	14	18	16
B4				

(a)

	M1	M2	M3	M5
B1	14	24	30	1
B2	20	14	18	15
B4				

(b)

Рис. 22. Пример введения показателя  $\epsilon$  в матрицу с целью элиминировать вырождение: а) неправильное, б) правильное

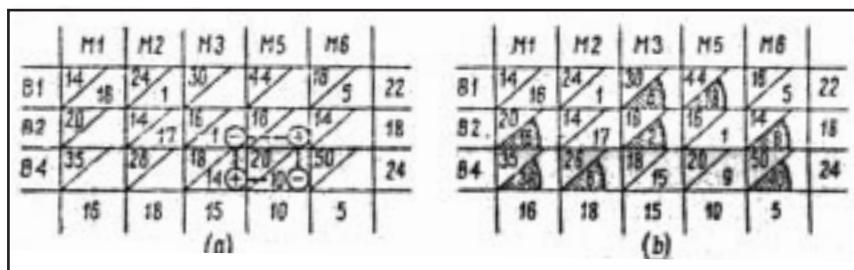
Проведение очередного пересмотра системы распределения требует внесения, если это возможно, дополнительных улучшений. После того как была изменена схема распределения (рис. 22), оказалось, что маршрут B2, M5 все же обеспечивает дополнительную экономию:

$$[+ (B2, M5) - (B4, M5) + (B4, M3) - (B2, M3)],$$

или

$$(+ 16 - 20 + 18 - 16) = - 2 \text{ долл.}$$

Этот цикл и максимально возможное перемещение одной единицы продукции показаны на рис. 23.



**Рис. 23. Пересмотренное и оптимальное решение проблемы размещения пекарни: а) схема распределения, подготовленная в результате первого пересмотра данных, и цикл перемещения для следующего пересмотра; б) размещение пекарен, определенное по результатам второго пересмотра данных, и оптимальная схема распределения**

Второй и окончательный пересмотр системы распределения приводит к нахождению оптимального решения; все остающиеся маршруты дают нам более высокие расходы, связанные с перемещениями. Показатели этих расходов заносятся в нижний левый угол каждой незаполненной клетки итоговой матрицы. Общие транспортные издержки, возникающие в связи с размещением новой пекарни в пункте В4, составят 1032 долл. = (14x16 долл.) + (1 x 24 долл.) + (17 x 14 долл.) + (1 x 16 долл.) + (15 x 18 долл.) + (9 x 20 долл.) + (5x16 долл.). Размещение новой пекарни в пункте В4, а не в пункте В3 дает возможность сэкономить 27 долл. в день (1059 долл.– 1032 долл.) на транспортных расходах.

**Варианты оптимальных решений.** В некоторых случаях одна или несколько клеток матрицы будут содержать записи, свидетельствующие о том, что транспортные издержки будут равны 0 и что никакой экономии фактически нет. Такое положение означает наличие вариантов перемещения с одинаковым уровнем транспортных расходов. Включение одного из таких вариантов в схему распределения зависит от факторов, трудно поддающихся количественной оценке. Предпочтительный выбор того или иного маршрута может зависеть от удобства погрузки у производителя, надежности транспортных средств или ожидаемого обслуживания у потребителя. Ценность эквивалентных оптимальных вариантов заключается в гибкости, которую они допускают при принятии решений.

**Проблемы максимизации.** В случаях использования функции прибыли задача будет сводиться к максимизации прибыли. Наиболее целесообразно решать эту проблему путем превращения показателя прибыли в показатель относительных издержек (relative costs). Превращение осуществляется путем вычитания величины прибыли по каждой клетке матрицы из показателя наибольшей прибыли в матрице. Показателю наибольшей прибыли соответствуют нулевые относительные расходы; задача заключается, следовательно, в минимизации этих относительных расходов. Решение задачи по минимизации относительных расходов происходит таким же образом, как

было описано выше. После нахождения оптимального решения имеет место обратное превращение относительных расходов в показатель прибыли. Общая сумма прибыли определяется исходя из схемы оптимального распределения.

**Несоответствие спроса предложению.** Лишь в редких случаях наличные производственные мощности соответствуют существующему уровню спроса. Помимо величины издержек на выбор того, спрос каких групп потребителей должен удовлетворяться в первую очередь или какие производственные мощности подлежат консервации, оказывает воздействие и ряд других факторов. Действие таковых может проявиться при реализации определенных тактических или стратегических соображений и использоваться для сбалансирования спроса и предложения. При отсутствии воздействия этих факторов математический аппарат процесса принятия решений поможет установить узкие места (излишки или нехватка производственных мощностей) и минимизировать общие издержки распределения.

Как показано на рис. 24, избыток предложения учитывается в транспортной матрице путем включения показателя фиктивного спроса. **Объем фиктивного спроса** равен разности между объемом наличного предложения и объемом требующегося предложения. Предполагается, что расходы на перевозки продукции от любого производителя к фиктивному потребителю равны нулю. Избыток спроса трактуется аналогичным же образом: в матрицу вводится показатель фиктивного производства. Фиктивному предложению соответствуют нулевые транспортные издержки. После того как мощности производителя и спрос потребителей будут сбалансированы, матрица становится пригодной для прохождения традиционного процесса решения. Решение проблемы, представленной на рис. 24, показывает, что фиктивному потребителю выделяются 100 единиц продукции из источника (2). Интерпретация решения в натуральном выражении заключается в следующем: производитель (O2) отправляет 250 единиц фиктивному потребителю (D1), 150 единиц – фиктивному потребителю (D2), а последние 100 единиц оставляет у себя.

	Предложение (по поставкам)		200	500
	D1	D2		
O1	2	3		
O2	2	4		
Спрос (на поставки)	250	350		

(a)

	Предложение (по поставкам)		200	500	Фиктивные по- ставки (по месту искажения)	200	700
	D1	D2					
O1	2	3			0		
O2	2	4			0		
Потребности (по месту назначения)	250	350	100			700	

(b)

Рис. 24. Пример взаимосвязки объемов спроса и предложения путем использования фиктивных поставок:

а) несбалансированные; б) сбалансированные ограничительные условия

**Пример 11.** Решение транспортной проблемы для частного случая, когда спрос превышает предложение и стоит задача максимизировать прибыль. Для трех супермаркетов (M1, M2, M3) можно получать свежие яблоки из четырех холодильников (C1, C2, C3, C4). Для M1 требуется 200 ящиков, для M2 – 600 ящиков, для M3 – 400 ящиков. Сезон сбора яблок кончается, и предложение ограничено. В холодильниках C1, C3, C4 хранится по 400 ящиков яблок, а в C2 – 300. Качество яблок, оптовые цены и транспортные издержки

отражены в приводимых ниже показателях прибыли (в долл.), которую ожидают получить с каждого ящика, поступающего из того или иного холодильника:

	C1	C2	C3	C4
M1	8	3	2	7
M2	9	11	5	2
M3	6	10	6	4

Из постановки задачи и предварительного расчета вытекает, что показатель прибыли должен быть превращен в показатель относительных расходов, а также введен показатель фиктивного спроса (фиктивный рынок), который позволил бы свести на нет избыток предложения яблок. Порядок учета нерегулярно повторяющихся аспектов проблемы показан при нахождении первичного решения методом аппроксимации Фогеля (рис. 25).

	C1	C2	C3	C4		Штраф			
M1	3	8	9	4	200	1	1	1	5*
M2	2	0	6	9	600	2	2	4*	3
M3	5	1	5	7	400	4	4*	0	2
Md	0	0	0	0	300	0	-	-	-
	400	300	400	400	1500				
Штраф	2	0	5*	4					
	1	1	1	3					
	1	-	1	3					
	-	-	1	3					

\* Самый крупный штраф по каждому циклу расчетов.

**Рис. 25. Нахождение первичного решения методом аппроксимации Фогеля**

Проверка незаполненных клеток в первоначально допустимом решении обнаруживает два цикла перемещений, которые дают 3 долл. экономии на каждый ящик в пересчете на показатель относительных расходов.

Для 1-й проверки мог бы быть использован любой из циклов, потому что оба они приводят к одинаковым результатам. Выбор клетки M2, C3 ведет к выбору цикла перемещения и распределения, которые показаны для 2-й проверки в матрице последовательного решения, приведенной выше. Указанный цикл перемещения для M3, C3 является 2-й проверкой, которая в свою очередь ведет к схеме распределения для 3-й проверки. После того как в соответствии с данными 3-й проверки 200 ящиков будут направлены в M3 из C4, а не из C3, мы получим окончательное решение; оптимальность подтверждается дополнительными транспортными издержками, связанными со всеми незаполненными клетками. В заключение определяют размер фактической прибыли путем обратного пересчета показателя относительных издержек. Общая прибыль (из схемы оптимального распределения и функции прибыли) составляет 10000 долл.:



200 ящиков из холодильника С4 поставлены М1 с прибылью  
7 долл. на 1 ящик - 1400 долл.  
400 ящиков из холодильника С1 поставлены М2 с прибылью  
9 долл. на 1 ящик - 3600 долл.  
200 ящиков из холодильника С2 поставлены М2 с прибылью  
11 долл. на 1 ящик - 2200 долл.  
100 ящиков из холодильника С2 поставлены М3 с прибылью  
10 долл. на 1 ящик - 1000 долл.  
300 ящиков из холодильника С3 поставлены М3 с прибылью  
6 долл. на 1 ящик - 1800 долл.

### Издержки перемещения. Модифицированный метод

Модифицированный метод представляет собой аббревиацию термина “метод модифицированного распределения” (the modified-distribution). Он находит широкое применение в расчетах издержек перемещения (transfer costs). Обычно считается, что расчеты с его помощью проводятся более быстро и в более удобной форме, чем проверка оптимальности решения на основе метода “ступенек”. Время экономится за счет того, что транспортные издержки вычисляются вне зависимости от циклов перемещения:

	C1	C2	C3	C4	
M1	3 6	8 10	9 8	4 200	200
M2	2 400	0 -3	6 -100	9 -100	600
M3	5 5	1 300	5 -1	7 -100	400
Md	0 4	0 3	0 300	0 -3	300
	400	300	400	400	

1-я проверка: 300 долларов экономии

	C1	C2	C3	C4	
M1	3 3	8 10	9 5	4 200	200
M2	2 400	0 100	6 -100	9 3	600
M3	5 2	1 200	5 -2	7 200	400
Md	0 4	0 6	0 300	0 0	300
	400	300	400	400	

2-я проверка: 200 долларов экономии

	C1	C2	C3	C4	
M1	3 3	8 10	9 5	4 200	200
M2	2 400	0 200	6 2	9 3	600
M3	5 2	1 100	5 100	7 -200	400
Md	0 2	0 4	0 300	0 -2	300
	400	300	400	400	

3-я проверка: 200 долларов экономии

	C1	C2	C3	C4	
M1	3 1	8 8	9 5	4 200	200
M2	2 400	0 200	6 2	9 5	600
M3	5 2	1 100	5 300	7 2	400
Md	0 2	0 4	0 100	0 200	300
	400	300	400	400	

Оптимальное решение: размер общих относительных издержек = 3200 долл.

Использование метода модифицированного распределения (МОДИ-метод) начинается с выработки первоначально допустимого решения. На первой стадии применения МОДИ-метода разрабатывается специальный числовой шифр для каждой строки и столбца. Установление шифра зависит от издержек распределения, которые указываются в матрице, и первичного размещения распределяемой продукции. Предположим, что R и K обозначают место соответствующей строки и столбца матрицы. Применение индексов i, j дает нам числовой шифр:

$R_i$  - шифр i-й строки ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ),

$K_j$  - шифр j-го столбца ( $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ).

Те же самые индексы используются и при определении транспортных издержек:  $C_{ij}$  - транспортные издержки по каждому маршруту (для клетки, находящейся в строке i и столбце j).

Отсюда мы получаем следующее уравнение

$$R_i + K_j = C_{ij}$$

Исходя из постановки первоначальной задачи можно определить набор числовых шифров. На рис. 26 повторено первоначально допустимое решение

Первичное допустимое решение на основе использования метода аппроксимации Фогеля (МАФ)					Основные числовые уравнения метода модифицированного распределения (ММР)	
	C1	C2	C3	C4		
M1	3 1	8 8	9 5	4 200	200	$R_1 + K_4 = 4$ Клетка M1, C4
M2	2 400	0 200	6 2	9 5	600	$R_2 + K_1 = 2$ M2, C1 $R_2 + K_3 = 6$ M2, C3
M3	5 2	1 300	5 100	7 100	400	$R_2 + K_4 = 9$ M2, C4 $R_3 + K_2 = 1$ M3, C2
Md	0 2	0 4	0 300	0 200	300	$R_3 + K_4 = 7$ M3, C4 $R_4 + K_3 = 0$ Md, C3
	400	300	400	400		

Рис. 26. Первоначально допустимое решение (пример 11), полученное путем использования уравнений, в основу которых положены специальные числовые шифры

(пример 11) и перечислены все уравнения, построенные с помощью шифров. Большинство значений для R и K соответствуют условиям этого уравнения.

Величины чисел интереса не представляют; основное внимание обращается на связи между R и K. Чтобы упростить произвольный выбор величин, допустим, что числа R и K в строке или столбце, в которых отмечается наибольшее число заполненных клеток, равны нулю. На рис. 26 больше всего заполненных клеток находится в строке 2 (M2). Поэтому мы допускаем, что  $R_2 = 0$ . Отсюда находят значения всех K:

$$K_1 = C_{21} - R_2 = 2 - 0 = 2,$$

$$K_3 = C_{23} - R_2 = 6 - 0 = 6,$$

$$K_4 = C_{24} - R_2 = 9 - 0 = 9.$$

Зная  $K_4$ , можно определить и значения шифров ряда:

$$R_1 = C_{14} - K_4 = 4 - 9 = -5,$$

$$R_3 = C_{34} - K_4 = 7 - 9 = -2.$$

Следовательно,

$$K_2 = C_{32} - R_3 = 1 - (-2) = 3$$

и

$$R_4 = C_{43} - K_3 = 0 - 6 = -6.$$

При небольшой практике значение числового шифра можно вычислять в уме, не прибегая к формальному составлению уравнений.

На следующей стадии расчетов с помощью МОДИ-метода числовые шифры используются в качестве заголовков соответствующей строки или столбца (рис. 27). Эти заголовки можно использовать в качестве вспомогательного справочного материала при расчете издержек перемещения по незаполненным клеткам, руководствуясь основным уровнем:

$$\text{Издержки перемещения единицы} = C_{ij} - (R_i + K_j).$$

	$K_1=2$	$K_2=3$	$K_3=6$	$K_4=9$	Незаполненные клетки	Уровень	Издержки из перемещенной клетки	Незаполненные клетки	Уровень	Издержки перемещения
$R_1=-5$	3	8	8	4	200	200	11	$C_{11} - (R_1 + K_1) = 3 - (-5 + 2) = 6$	33	$C_{33} - (R_3 + K_3) = 3 - (-2 + 6) = 1$
$R_2=0$	2	400	3	8	100	800	12	$C_{12} - (R_1 + K_2) = 8 - (-5 + 3) = 10$	41	$C_{41} - (R_4 + K_1) = 8 - (-6 + 2) = 4$
$R_3=-2$	5	5	300	1	100	400	13	$C_{13} - (R_1 + K_3) = 3 - (-5 + 6) = 8$	42	$C_{42} - (R_4 + K_2) = 8 - (-6 + 3) = 3$
$R_4=-6$	8	4	3	300	-3	300	22	$C_{22} - (R_2 + K_2) = 8 - (0 + 3) = 5$	44	$C_{44} - (R_4 + K_4) = 8 - (-6 + 9) = -3$
	400	300	400	400			31	$C_{31} - (R_3 + K_1) = 3 - (-2 + 2) = 5$		

Рис. 27. Расчет издержек перемещения с помощью модифицированного метода

Уравнение, применяемое к каждому новому маршруту распределения, также приводится на рис. 27. Как и ожидалось, объемы издержек перемещения, рассчитанных МОДИ-методом и методом "ступенек", идентичны. Их величина свидетельствует о том, что использование клетки 22 (маршрут M2, C2) или

клетки 44 (маршрут Md, C4) будет способствовать снижению общих издержек распределения. На завершающем этапе определяется цикл перемещения, замыкающийся на клетке, в которой фиксируется максимально возможный объем экономии на транспортных расходах. Наибольшее число перемещаемых единиц располагается в этой клетке (рис. 28).

	$K_1=2$	$K_2=0$	$K_3=4$	$K_4=4$			Издержки перемещения
$R_1=0$	3 1	8 8	8 5	4 200	200	11	$3 - (0+2) = 1$
$R_2=0$	2 400	0 200	9 2	4 5	600	12	$8 - (0+0) = 8$
$R_3=1$	5 2	1 100	5 300	7 2	400	13	$9 - (0+4) = 5$
$R_4=-4$	0 2	0 4	0 100	0 200	200	23	$6 - (0+4) = 2$
	400	300	400	400		24	$9 - (0+4) = 5$
						31	$5 - (1+2) = 2$
						34	$7 - (1+4) = 2$
						41	$0 - (-4+2) = 2$
						42	$0 - (-4+0) = 4$

Рис. 28. Проверка оптимального решения (пример 11) с помощью модифицированного метода

После каждой проверки числовые шифры следует пересчитывать. Новая схема распределения изменит некоторые или все значения R и K. Перепроверка повторяется до тех пор, пока не будут проанализированы все дополнительные маршруты, которые позволяют снизить издержки, связанные с транспортировкой продукции.

## СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Разработка планов выполнения сложных проектов в области научных исследований, опытно-конструкторских разработок строительства и др. весьма эффективно осуществляется методами, получившими название **методов критического пути МКП и ПЕРТ**. Оба метода используются для решения детерминированных задач планирования. Как МКП, так и ПЕРТ основаны на использовании сетевых моделей. Разница между ними заключается в подходе к оценке продолжительности операций работ: в ПЕРТ используются вероятностные оценки в МКП - детерминированные.

### Методология построения сетевых моделей

**Сетевая модель** - наглядное графическое изображение последовательности и взаимной связи всех работ, выполняемых в процессе осуществления комплекса операций и получаемых при этом результатов вплоть до достижения поставленной цели (нескольких целей).

В сетевой модели весь комплекс мероприятий по достижению цели расчленяется на четко определенные операции, которые располагаются в технологической последовательности их выполнения, во взаимной связи и завершаются промежуточными и конечными результатами.

Структурная сеть составляется с требуемой степенью детализации, зависящей от природы рассматриваемого комплекса мероприятий и

конкретных задач планирования.

В зависимости от целей использования сетевая модель изображается ориентированной на работы либо на события, либо иным способом (например, в виде матрицы).

При различных способах изображения сети неизменными остаются три ее базовых понятия: работа, событие и путь.

**Работа** - прием, действие, естественный процесс, логическая зависимость, выполняемые в неизменных условиях и приводящие к однозначно понимаемому результату.

Термин "работа" используется здесь в широком смысле и может иметь следующее содержание:

а) "**действительная работа**" - процесс, требующий затрат времени, трудовой энергии и других ресурсов: "разработка тематического плана выставки" или "изготовление стенда" и т.п. При формулировании работ особое внимание следует обратить на требование неизменности условий протекания, т.е. количество исполнителей, место и характер выполнения работы должны быть стабильными в рамках принятых допущений;

б) "**ожидание**" - процесс, не требующий затрат труда и/или иных ресурсов, но занимающий некоторое время. Чаще всего это ожидание какого-либо документа, разрабатываемого внешней организацией или другим отделом (подразделением) и необходимого для продолжения последующих работ, а также наблюдение и выполнение контрольных функций;

в) "**зависимость**" или "**фиктивная работа**" - логическая связь (2-3 на рис. 29) между двумя событиями, не требующая затрат времени, труда и материальных ресурсов, но указывающая, что возможность выполнения последующей работы, начинающейся со второго события, непосредственно зависит от итогов предыдущей, которая оканчивается первым событием. Продолжительность фиктивной работы всегда равна нулю, в сетевом графике она изображается пунктирной линией.

Действительные работы и ожидания на сетевом графике изображаются сплошными линиями (1-3, 1-2 и 3-4 на рис. 29).

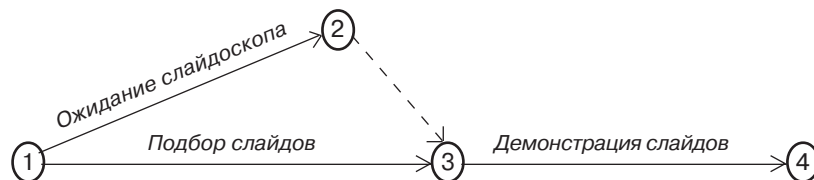


Рис. 29. Изображение действительных работ и ожиданий

Событие представляет однозначно понимаемый всеми результат выполнения одной или нескольких предшествующих работ (на рис. 29 изображено в виде кружка с порядковым номером).

Всякая работа, изображенная на графике, соединяет два события: начальное (непосредственно предшествует данной работе) и конечное (событие непосредственно за ней следует). Если каждому событию присвоить номер или цифровой шифр, то работу можно обозначить шифрами ее начального и конечного событий.

Шифр (код) работы принято записывать в виде пар индексов, обозначаемых в общем случае как  $i-j$ , где  $i$  представляет собой шифр начального события, а  $j$  - шифр конечного события данной работы:



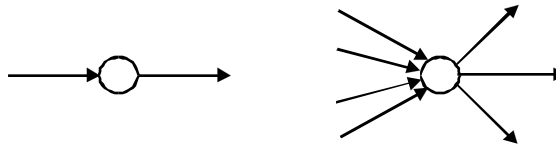
Всякая работа (кроме логической связи) является действием, которое нужно выполнить, чтобы перейти от начального события к конечному. Следовательно, она может иметь характеристику затрат времени, труда, материальных и финансовых ресурсов и др. В сетях типа PERT **главным показателем работы** является затраченное на нее время, т.е. длительность ее выполнения.

Рассматриваемые нами понятия, изложенные далее методы построения и расчета сетевых графиков относятся к наиболее простым, **детерминированным сетям**, в которых четко установлена топологическая взаимосвязь работ и их характеристики имеют точное количественное значение. Существуют также **стохастические сетевые модели**, работа в которых имеет вероятные характеристики условий и времени их выполнения. Если в сети вероятностной является только совокупность взаимосвязей работ, то такая сетевая модель получает наименование **многокритериальной**.

В связи с тем, что всякая работа выполняется для достижения какого-либо результата и процесс этот необратим, в сетевом графике направленность работы отображается стрелкой, которая, однако, не имеет векторного смысла. Длина стрелки, угол наклона и конфигурация (прямая или кривая линия) могут быть произвольными, вычерчиваются в соответствии с требованием наглядности и удобства изображения.

В отличие от работы событие не является процессом, оно не имеет продолжительности во времени. Свершение события есть момент времени, которое соответствует завершению последней из всей цепочки (цепочек) работ, предшествующих данному событию. **Событие** - это итог всех непосредственно предшествующих ему работ и одновременно готовность к началу выполнения непосредственно следующих за ним работ. Для первых оно является конечным, а для последующих - начальным событием.

В зависимости от числа работ, которые заканчиваются данным событием, и количества работ, начинающихся с него, событие может быть *простым* и *сложным* (узловым):



**Изображение простого события**

**Изображение сложного события**

Крайне важно правильно формулировать названия работ и событий.

Точная формулировка работ и событий способствует тому, что внимание руководителей и исполнителей направляется не только на достижение конечной цели, но и на то, чем должна завершаться каждая работа, каков конкретно ее результат для того, чтобы могла начаться следующая за ней работа. Особенно это важно тогда, когда последующая работа выполняется другим исполнителем или отделом.

В сетевом графике существуют события особого вида, которые являются начальными и конечными для всего комплекса операций. **Исходное событие** - то, с которого начинается сеть. Оно представляет собой формулировку условия для начала всех работ по данному комплексу. Оно обозначается нулем,

единицей или символом I (от английского Initial - исходный) и не имеет предшествующих работ.

**Завершающее событие сети** представляет собой формулировку цели всего комплекса работ. Оно не является условием начала ни одной из работ, входящих в данную сеть, и иногда обозначается буквой С (от английского слова complete - законченный). Для многоцелевых сетей характерно наличие нескольких завершающих событий -  $C_1, C_2, C_3, \dots C_n$ .

**Путь** - непрерывная технологическая последовательность (цепь) работ в сети. Конечное событие каждой работы в цепочке совпадает с начальным событием одной следующей за ней работы, и путь часто задается последовательным перечислением номеров лежащих на нем событий.

Следует различать полный и неполный (укороченный) путь. Если последовательная цепочка работ или путь соединяет исходное и завершающее события сети, то такой путь называется **полным**.

**Неполные пути** соединяют рассматриваемое событие с исходным или завершающим событием, а также два любых заданных события сетевого графика.

На практике в основном производится анализ и расчет полных путей, и именно к ним относится общеупотребительное название "путь".

Очевидно, ввиду того что условия и длительность выполнения работ различны, продолжительность полных путей сети также имеет разное значение. Сравнением всех путей сетевого графика выявляется такой, продолжительность которого имеет максимальное значение.

**Критический путь** - это последовательность работ с наибольшей суммарной продолжительностью. Все работы критического пути являются потенциально "узкими местами", требуют наибольшего внимания руководителя. Работы критического пути выделяют жирными или двойными линиями для наглядного представления той последовательности действий, которая определяет общий срок выполнения всего комплекса работ.

В сложных и стохастических сетях могут существовать несколько полных путей, имеющих одинаковую или незначительно отличающуюся от максимальной общую продолжительность. Такие пути называются **субкритическими**. Именно на них акцентируется внимание руководителя.

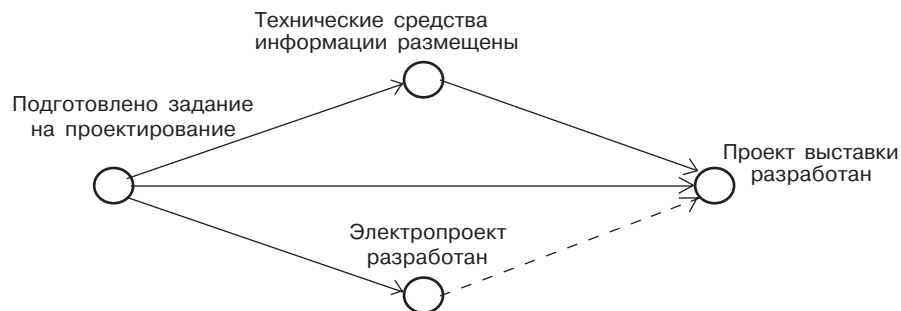
Выделение критического пути является основой оптимизации сетевой модели. Работы, не лежащие на критическом пути, обладают **резервами времени**, т.е. допустимыми сдвигами сроков их выполнения, не меняющими срока наступления завершающего события или даже сроков выполнения других работ сетевого плана.

Наличие запаса времени имеет большое значение, так как позволяет руководителям маневрировать внутренними ресурсами. По ходу выполнения программы в пределах имеющегося запаса времени можно увеличивать продолжительность некритических работ и переводить освободившиеся людские ресурсы и технические средства на работы, находящиеся на критическом пути, от которых в данный момент зависит выполнение всего комплекса.

Следует иметь в виду, что сокращение сроков выполнения критических работ может привести к возникновению нового критического пути, в то время как первоначальный путь перестает быть критическим.

Возможно построение сетевого графика по комбинационной схеме, когда работы ближайшего периода детализируются с большей степенью, а отдаленного периода - с меньшей. Существуют также и различные модификации графического изображения сетей. Основной способ, уже рассмотренный нами (рис. 29) - **комбинированный**, при котором стрелки изображают работы, имеющие наименования, а кружки - события с порядковыми номерами.

При втором способе изображения сеть ориентирована на события, которые также отображаются кружками. Но стрелки в таком сетевом графике отображают скорее не работы, а этапы, служат лишь для указания последовательности свершения событий во времени. Моделируется не процесс выполнения всех работ, а его этапность, последовательность получения результатов (рис. 30).



**Рис. 30. Сетевой график, ориентированный на события**

Сетевые графики, ориентированные на события, концентрируют внимание на том, какие результаты должны быть получены при выполнении этих работ. При этом, естественно, подразумевается, что переход от одного события к последующему возникает лишь по выполнении каких-то работ. Но сами эти работы подразумеваются, а не отображаются на сетевом графике.

Сети, ориентированные на события, целесообразно применять для укрупненного изображения процесса, когда детальное изображение затруднено или не нужно. Практически производят укрупнение составленной ранее комбинированной сети, оставляя только наиболее важные узловые события. Укрупненные сети, ориентированные на события, применяют для общего контроля за процессом, который осуществляется вышестоящим органом или руководителем.

*Третий способ изображения сети, ориентированной на работы,* заключается в показе работ кружками, стрелки отражают взаимные связи между работами. Такие сети обычно составляются на начальном этапе и характерны для несложных процессов. Применяются они редко.

Приступая к построению сети, необходимо прежде всего четко сформулировать работы и определить результаты, которыми они должны завершаться. Для каждой работы следует установить:

- какие работы должны быть завершены ранее, чем начнется данная работа;
- какие работы могут быть начаты после завершения данной работы;
- какие работы могут выполняться одновременно с данной работой.

На основе тщательного анализа последовательности выполнения и взаимосвязи работ между собой составляется таблица (табл. 13), которая содержит все необходимые исходные данные для построения сетевого графика.

При построении сетевого графика следует придерживаться некоторых общих положений.

Сеть вычерчивается слева направо. Каждое событие с большим порядковым номером изображается правее предыдущего. Нумерацию событий целесообразно осуществлять после построения сети.



Таблица 13

**Исходные данные для построения сетевого графика**

N п/п	Код работы	Наименование работы	Работы, пред- шест- вующие данной работе	Работы, следующие непос- редственно за данной работой	Продолжитель- ность работы	
					min	max
1	2	3	4	5	6	7

При построении детерминированных сетей следует учитывать следующие правила (рис. 31):

- 1) следует избегать взаимного пересечения стрелок (рис. 31а);
- 2) в сети не должно быть событий (кроме завершающего и “тупиковых”), из которых не выходит ни одной работы;
- 3) в сети не должно быть событий (кроме исходного и “хвостовых”), в которые не входит ни одной работы;
- 4) в сети не должно быть работ и/или событий, имеющих одинаковые шифры; если работы выполняются параллельно с одинаковым началом и результатом, то вводится фиктивная работа (рис. 31б);
- 5) если какие-либо работы в сети (2-3 рис. 31в) могут быть начаты до полного окончания непосредственно предшествующей работы (1-2), то последняя должна быть расчленена на такие последовательно выполняемые работы (1-2 и 2-4), результаты которых необходимы и достаточны для возможности начать интересующие нас работы (2-3 и 4-5);
- 6) если для выполнения какой-либо работы (3-5 рис. 31г) необходимо получить результаты не всех входящих в ее начальное событие работ, а только части из них (2-3), то для нее (3-5) нужно ввести в сеть новое начальное событие, которое являлось бы результатом только для указанной части работ, и соединить новое событие фиктивной работой (3-4) – этот прием часто называют правилом изображения дифференцированно зависимых работ;
- 7) в сети не должно быть путей, соединяющих какое-либо событие с ним же самим, т.е. циклов, замкнутых контуров, если только этот путь не содержит альтернативного события (событие 4 на рис. 31д).

Обычно первоначально составляется черновой вариант сети, часто неупорядоченный и неполный, в котором допускаются взаимные пересечения стрелок. В процессе упорядочения сети в нее добавляются все неучтенные работы и взаимосвязи, устанавливается их рациональное расположение. При этом вводятся фиктивные связи при параллельном выполнении каких-либо работ. Иногда приходится процесс выполнения какой-либо работы разбивать на этапы, для подключения дополнительной связи вводить условные события.

Еще раз следует напомнить, что длина отрезка работы не зависит от продолжительности ее выполнения, сетевой график изображается не в масштабе, что позволяет расположить в наиболее удобном виде всю последовательность работ. Но необходимо указывать направленность работы с помощью стрелки, так как даже направленность фиктивной работы (холостой связи) непосредственно влияет на формирование путей, их длительность, в том числе и на наиболее важный критический путь (рис. 32).

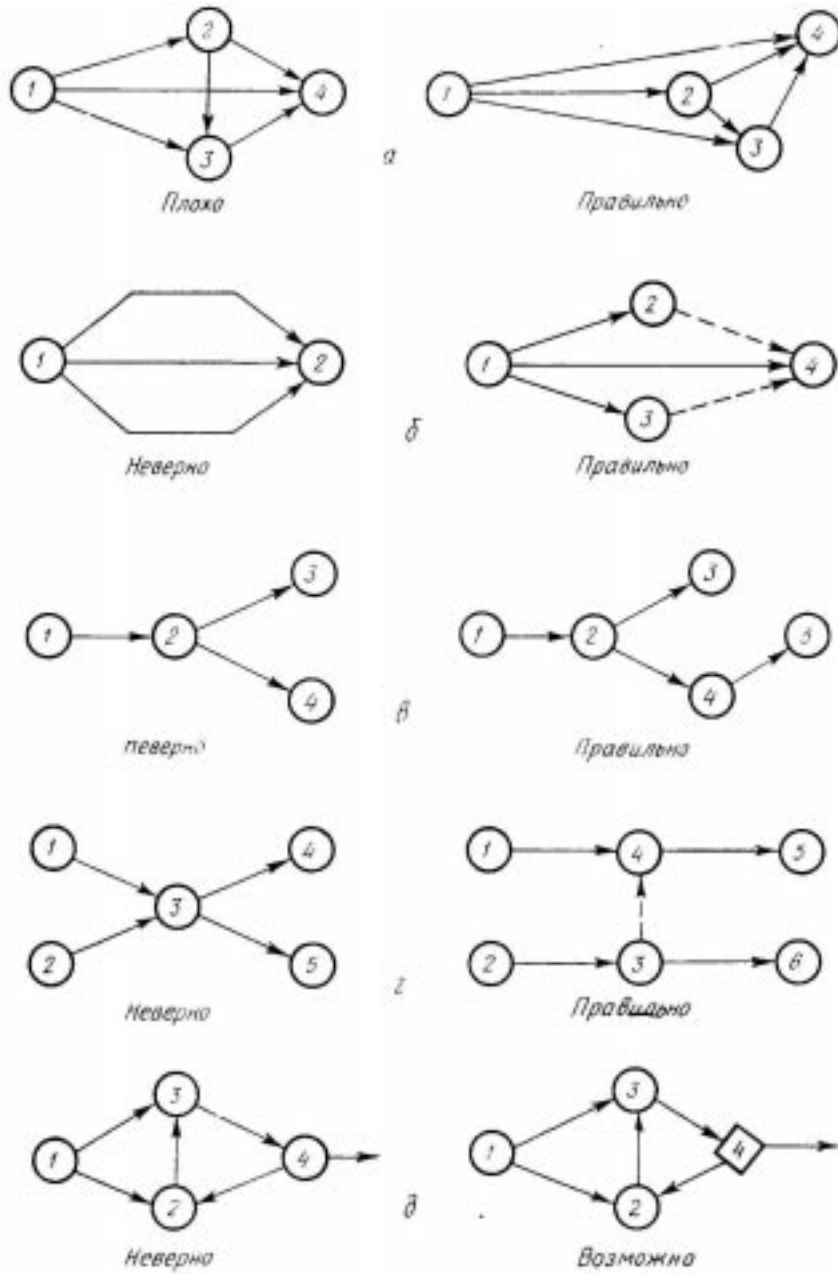


Рис. 31. Элементы построения детерминированных сетей

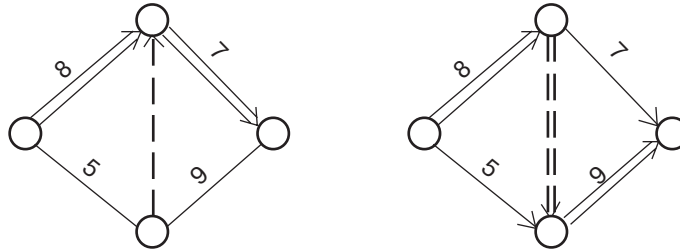


Рис. 32. Алгоритм нумерации событий

Чтобы уменьшить время вычислений при определении критического пути, Фалкерсон предложил **алгоритм нумерации**, который работает следующим образом:

- а) найти исходное событие сети, в которое не входит ни одна операция, присвоить ему номер;
- б) вычеркнуть все операции, выходящие из перенумерованных событий. При этом появляется по крайней мере одно новое исходное событие, т.е. событие, в которое не входит теперь ни одна операция. Присвоить такому событию очередной номер 2, 3 и т.д. Повторять этот шаг, пока все события не будут пронумерованы (рис. 33).

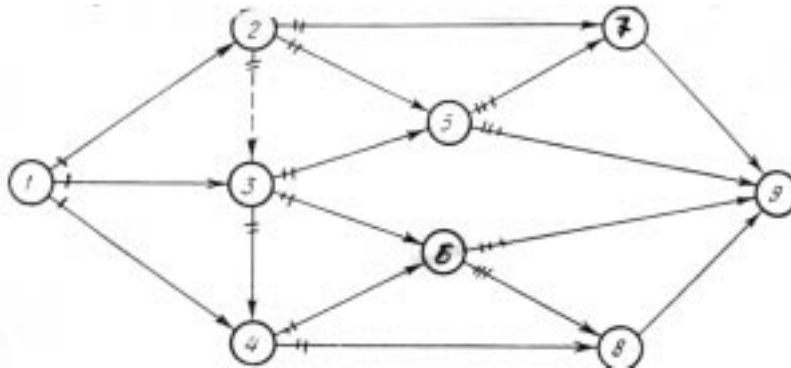


Рис. 33. Сеть с правильной нумерацией событий

### Основные характеристики и расчет сети

Главным исходным показателем в СПУ является продолжительность каждой работы  $t_{ij}$ . Как уже говорилось выше, сети, в которых продолжительность всех работ можно однозначно установить заранее, называются детерминированными. Однако сети применяются чаще для моделирования новых или постоянно меняющихся процессов, и для большинства работ отсутствует расчет трудовых норм, нормативы продолжительности, стоимости. Длительность выполнения работы может оценить только эксперт на основе своего практического опыта.

Задача состоит в том, чтобы создать детерминированную сеть, т.е. дать однозначные оценки продолжительности выполнения всех работ. Для этого первоначально производится экспертная оценка длительности выполнения работы при наиболее благоприятном стечении обстоятельств  $t_{\min}$ , а затем оценка длительности выполнения работы в наихудших условиях  $t_{\max}$ . В соответствии с нормальным законом распределения вероятная продолжительность работы на основе двух экспертных оценок принимается равной:

$$t_{ij} = \frac{3t_{ij\min} + 2t_{ij\max}}{5}.$$

Значительно реже продолжительность работы оценивается тремя экспертными показателями:

$$t_{\min}, t_{\max} \text{ и } t_{\text{нв}},$$

где  $t_{\text{нв}}$  - наиболее вероятная длительность выполнения работы при нормальных, типичных условиях протекания производственного процесса. Среднее значение продолжительности работы при наличии трех экспертных оценок будет

$$t_{ij} = \frac{t_{ij\min} + 4t_{ij\text{нв}} + t_{ij\max}}{6}.$$

Продолжительность работ, как и всех других временных параметров сети, измеряется в единицах времени: часах, днях (сутках), неделях и т.д.

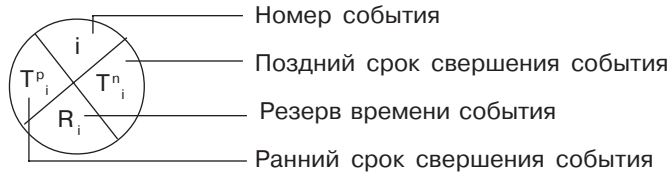
После того как определены продолжительности всех работ сетевого графика или средние их значения на основе экспертных оценок, можно приступить к расчету остальных временных параметров сети, чтобы обеспечить руководителю возможность маневрирования при составлении календарного плана работ. Методы определения параметров сети рассматриваются на условном сетевом графике (рис. 34), нумерация событий которого произведена выше, а цифры над линиями работ указывают продолжительность ее выполнения в днях.

Следует подчеркнуть, что во время расчета временных параметров сети “тупиковые” и “хвостовые” работы, как правило, не принимаются во внимание, кроме особых случаев, рассматриваемых ниже.

При расчете сети прежде всего необходимо определить возможно более ранний срок достижения цели, т.е. наступление завершающего 9-го события сети.

Ранний срок завершения всего комплекса работ зависит от продолжительности критического пути, т.е. максимальной суммарной длительности цепочки работ, соединяющих исходное 1-е и завершающее 9-е события.

Непосредственно на сетевом графике можно рассчитать параметры каждого события  $i$ , а именно: наиболее ранний из возможных сроков его совершения  $T_i^p$ , наиболее поздний из допустимых сроков его наступления  $T_i^n$  и резерв времени свершения события  $R_i$ . Для этого каждое событие на графике изображается кружком, разделенным на секторы следующим образом:



Подобно тому как раннее свершение завершающего события определяется длительностью критического пути, так же и раннее свершение любого события зависит от максимального по продолжительности пути из всех путей, соединяющих его с исходным событием 1. Событие не может свершиться раньше, чем будут выполнены все работы на всех путях, соединяющих это событие с исходным. Но среди этих предшествующих событию  $i$  путей всегда есть наибольший по продолжительности  $L_{(1-i)\max}$

$$T_i^p = t[L_{(1-i)\max}]$$

*Ранний срок свершения любого события  $i$  равен суммарной продолжительности работ, лежащих на максимальном из путей, ведущих к данному событию от исходного события сети.*

Для события 2 ранний срок его свершения наступит после окончания единственно предшествующей работы 1-2, т.е.

$$T_2^p = T_1^p + t_{1-2} = 0 + 5 = 5$$

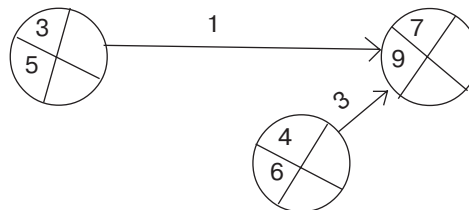
Однако уже для события 3 ранний срок свершения наступит после окончания трех предшествующих ему работ: 1-2, 2-3, 1-3. Из этих работ складываются два пути: 1-2-3 и 1-3, максимальный по продолжительности из них - 1-2-3 ( $L_{1-2-3} = 5 > L_{1-3} = 1$ ), и поэтому

$$T_3^p = \max L_{1...3} = 5$$

Для события 4 из трех предшествующих ему путей ("хвостовая" работа 4<sup>1</sup>-4 не принимается во внимание) максимальный  $L_{1-2-3-4} = 6$  и  $T_4^p = 6$ .

Практически же мы сравниваем  $T_3^p + t_{3-4} > T_1^p + t_{1-4}$ , т.е. суммы ранних сроков свершения предшествующих событий и продолжительностей работ, соединяющих их с данным событием. Поэтому при нахождении на сетевом графике ранних сроков свершения событий расчет производят последовательно слева направо, начиная с исходного события; для каждого события рассматриваются все входящие в него работы, сравниваются суммы ранних сроков наступления непосредственно предшествующих событий и длительностей соединяющих с ними работ и выбирается из этих сумм наибольшая, которая и будет ранним сроком свершения рассматриваемого события.

Для события 7 сравниваем  $T_3^p + t_{3-7} = 5 + 1 = 6$  и  $T_4^p + t_{4-7} = 6 + 3 = 9$  и выбираем максимальное из них  $T_7^p = 9$ , которое записываем в левый сектор кружка события 7:



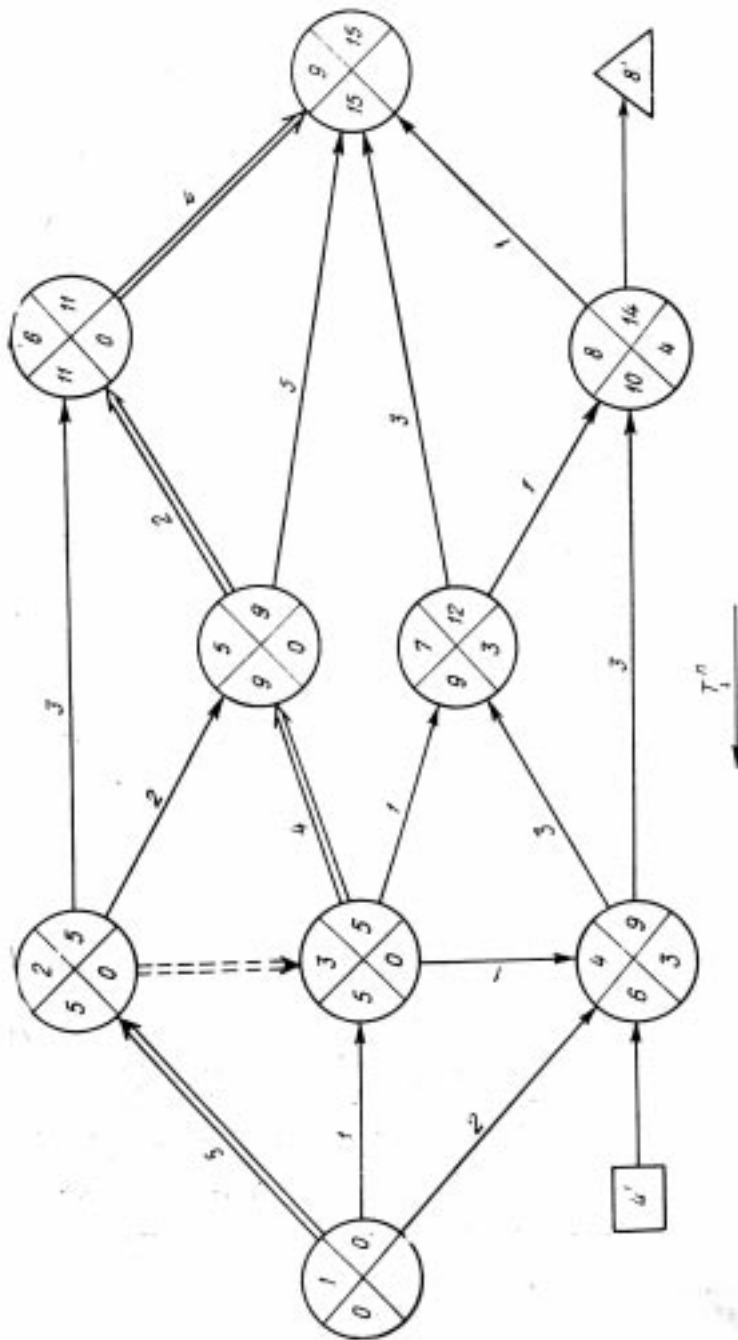


Рис. 34. Расчет временных параметров на сетевом графике

После нахождения ранних сроков свершения всех событий сети, в том числе и завершающего события, для последнего в соответствии с требованием достижения цели в кратчайшие сроки принимается, что наиболее ранний из возможных сроков его свершения является одновременно и наиболее поздним допустимым сроком его свершения, т.е.

$$T_9^p = T_9^n = 15$$

Поздние сроки свершения всех остальных событий сети определяются, исходя из требования выполнения данного условия, т.е. свершения завершающего события сети в найденный срок  $T_9^p = T_9^n$ . Для этого, очевидно, необходимо, чтобы после свершения любого события  $i$  осталось достаточно времени для выполнения всех работ, лежащих на путях, ведущих от данного события к завершающему событию сети.

Поэтому *поздний срок свершения любого события  $i$*  равен разности между продолжительностью критического пути и суммарной продолжительностью работ, составляющих максимальный из всех последующих путей, ведущих от данного события к завершающему событию сети

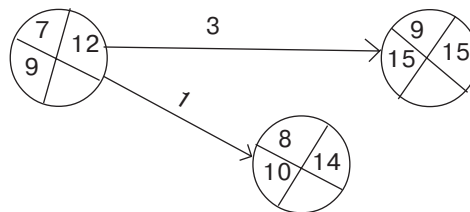
$$T_i^n = t_{кр} - t[L_{i-c \max}]. \quad (12)$$

Для события 8 имеется единственный последующий путь: работа 8-9 (“тупиковая” работа 8-8<sup>1</sup> во внимание не принимается) и позднее свершение события 8:

$$T_8^n = t_{кр} - t_{8-9} = 15 - 1 = 14.$$

Практически мы рассматриваем все выходящие из события работы, сравниваем между собой разности поздних сроков свершения событий, непосредственно последующих за данным, и продолжительностей соответственно соединяющих с ними работ и выбираем наименьший результат, который и будет поздним сроком свершения рассматриваемого события. Такой расчет на сетевом графике производится справа налево для всех событий, начиная с завершающего.

Для события 7 сравниваем  $T_9^n - t_{7-1} = 15 - 3 = 12$  и  $T_8^n - t_{7-8} = 14 - 1 = 13$ , выбираем наименьшее из них  $T_7^n = 12$  и записываем в правый сектор кружка события 7:



Заметим, что для событий критического пути (1-2-3-5-6-9) ранние и поздние сроки их свершения совпадают, что вытекает из сравнения формул 2 и 3, так как для этих событий сумма максимального предшествующего пути и максимального последующего равна критическому  $t_{кр} = t[L_{j-i \max}] + t[L_{i-c \max}]$ .

События, не лежащие на критическом пути, имеют резерв времени  $R_i$ , который показывает, насколько можно задержать свершение этого события, не влияя на продолжительность критического пути, т.е. не задерживая общего срока достижения цели:

$$R_i = T_i^n - T_i^p. \quad (14)$$

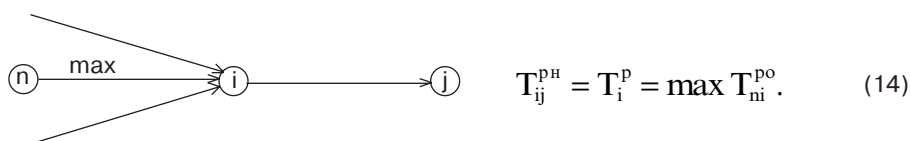
Резерв времени события показывает резерв пути в данной точке сети, который равен разности критического пути и максимального по продолжительности из путей, проходящих через данное событие

$$R_i = t_{кр} - t[L_{i\max}].$$

Изложенный метод расчета на графике сетевой модели наиболее прост и позволяет определить все необходимые характеристики времени для событий сети. Такой сетевой график удобен для анализа общей картины процесса и контроля за его осуществлением со стороны руководителя, так как известны "узкие места" и надежность своевременного получения результата на каждом участке. Однако при планировании руководителю и исполнителю работ должны быть известны временные характеристики каждой отдельной работы, которые при расчете непосредственно на сетевом графике не выявляются.

К основным параметрам времени, характеризующим отдельную работу, относятся:

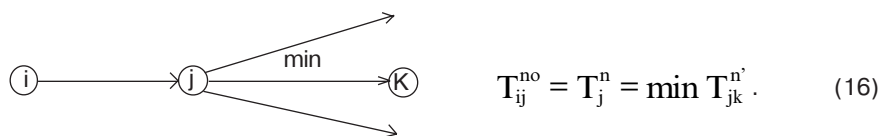
1. Раннее начало работы  $T_{ij}^{pn}$  возможно после наиболее раннего окончания всех предшествующих ей работ и определяется ранним сроком свершения начального для работы события  $i$ :



2. Раннее окончание работы  $T_{ij}^{po}$  равно сумме раннего начала и продолжительности работы:

$$T_{ij}^{po} = T_{ij}^{pn} + t_{ij}. \quad (15)$$

3. Позднее окончание работы  $T_{ij}^{no}$  требуется совершить до самого минимального из всех поздних начал непосредственно последующих за ней работ и определяется поздним сроком свершения конечного для работы события  $j$ :



4. Позднее начало работы  $T_{ij}^{nn}$  равно разности ее позднего окончания и продолжительности:

$$T_{ij}^{nn} = T_{ij}^{po} - t_{ij}. \quad (17)$$



5. Полный резерв времени работы  $R_{ij}$  - предельное время, на которое можно увеличить продолжительность данной работы или сместить во времени ее выполнение, не влияя при этом на срок свершения завершающего события, т.е. не изменяя продолжительность критического пути:

$$R_{ij} = T_j^n - T_j^p - t_{ij} = T_{ij}^{no} - T_{ij}^{pn} - t_{ij} = T_{ij}^{no} - T_{ij}^{po} = T_{ij}^{nn} - T_{ij}^{pn} . \quad (18)$$

Полный резерв времени работы определяется резервом времени максимального из путей, проходящих через данную работу, т.е. показывает, насколько она может быть увеличена, чтобы продолжительность этого максимального из проходящих через нее путей не превысила  $t_{кр}$ . Отсюда вытекает, что для всех работ критического пути:

$$R_{ij} = 0.$$

6. Свободный (частный) резерв времени работы  $r_{ij}$  - предельное время, на которое можно увеличить продолжительность работы либо сместить ее выполнение, не изменяя ранних сроков начала непосредственно последующих за ней работ. Свободный резерв работы равен разности между ранним сроком свершения ее конечного события и ранним сроком окончания этой работы:

$$r_{ij} = T_j^p - T_{ij}^{po} = T_{ik}^{pn} - T_{ij}^{po} . \quad (19)$$

Заметим, что ранние начала всех выходящих из событий  $j$  работ равны между собой и максимальному из всех ранних окончаний входящих в событие работ.

Сроки начала и окончания работ детерминированной сети, а также их резервы времени удобно находить табличным способом. В табл. 14 заполняются прежде всего первые три колонки (графы 1,2,3), причем сеть должна быть правильно пронумерована и работы в таблице расположены сверху вниз в порядке возрастания номеров событий. Необходимо тщательно проверить наличие всех работ сети и правильность их расположения в таблице, так как от этого зависит правильность и удобство расчета.

Следующий этап – нахождение ранних сроков начала и окончания работ (графы 4 и 5). Раннее начало работ, начинающихся с исходного события 1, принимают равным нулю, если нет других дополнительных условий (директивного указания о времени начала процесса или данных смежной сети):

$$T_{1-2}^{pn} = T_{1-3}^{pn} = T_{1-4}^{pn} = 0 .$$

Зная раннее начало, легко найти раннее окончание работы по формуле (15), или графа 5 = графа 4 + графа 3.

Напомним, что в соответствии с формулой (14) ранние начала последующих работ 3-4, 3-5, 3-7 приравниваются к максимальному из ранних окончаний взаимосвязанных предыдущих работ, поэтому сравнивают ранние окончания работ 1-3 и 2-3, выбирая наибольшее из них  $T_{2-3}^{po} = 5$ .

$$T_{3-4}^{pn} = \max T_{n-3}^{po} = T_{2-3}^{po} = 5 .$$

Рассчитав подобным образом ранние сроки начала и окончания всех работ (сравните расчет ранних сроков свершения событий на сетевом графике), выбирают максимальное из полученных ранних окончаний работ, оканчивающихся завершающим событием сети, и приравнивают его к позднему окончанию этой работы:

Таблица 14

## Расчет сети

Код работы		Продолжительность	Раннее		Позднее		Резервы		
			начало	окончание	начало	окончание	Время	Свободное	
$N_{\text{вх}}$	$i$	$j$	$t_{ij}$	$T^{\text{ран}}$	$T^{\text{поз}}$	$T^{\text{ран}}$	$T^{\text{поз}}$	$R$	$Z$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1-2	5	0	5	0	5	0	-	
2	1-3	1	0	1	4	5	4	4	
3	1-4	2	0	2	7	9	7	4	
4	2-3	0	5	5	5	5	0	-	
5	2-5	2	5	7	7	9	2	2	
6	2-6	3	5	8	8	11	3	3	
7	3-4	1	5	6	8	9	3	0	
8	3-5	4	5	9	5	9	0	-	
9	3-7	1	5	6	11	12	6	3	
10	4'-4	-	-	≤6	-	9	-	-	
11	4-7	3	6	9	9	12	3	0	
12	4-8	3	6	9	11	14	5	1	
13	5-6	2	9	11	9	11	0	-	
14	5-9	5	9	14	10	15	1	1	
15	6-9	4	11	15	11	15	0	-	
16	7-8	1	9	10	13	14	4	0	
17	7-9	3	9	12	12	15	3	3	
18	8-8'	-	10	-	≥14	-	-	-	
19	8-9	1	10	11	14	15	4	4	

$$\max T_{6-9}^{po} = T_{6-9}^{po} = 15.$$

У всех работ, конечное событие которых является завершающим, позднее окончание допускается также на 15-й день. Так начинают заполнять графу 7. Позднее начало работы вычисляют по формуле (17), или графа 6 = графа 7 - графа 3.

Далее поздние окончания предыдущих работ в соответствии с формулой (16) приравниваются к минимальному из поздних начал взаимосвязанных последующих работ, т.е. позднее окончание работы 4-7 равно минимальному из поздних начал работ 7-8 и 7-9:

$$T_{4-7}^{po} = \min T_{7-8}^{pn} = T_{7-9}^{pn} = 12.$$

Таким образом последовательно снизу вверх в таблице рассматриваются поздние сроки начала и окончания всех работ сети.

Для “хвостовых” работ (4<sup>1</sup>-4) рассчитывают только допустимые ранние и поздние сроки их окончания, а для “тупиковых” (8-8<sup>1</sup>) - возможные ранние и поздние сроки их начала.

После нахождения ранних и поздних сроков начала и окончаний всех работ нетрудно определить резервы времени каждой работы сети. Полный резерв времени  $R_{ij}$  работы вычисляется по формуле (18), или

$$\text{графа 8} = \text{графа 7} - \text{графа 5} = \text{графа 6} - \text{графа 4}.$$

Для определения частного резерва времени работы  $r_{ij}$  сравнивают ее раннее окончание с ранним началом непосредственно следующих за ней работ и вычисляют по формуле (19).

Например, для нахождения частного резерва работы 1-3 сравнивают ее раннее окончание с ранним началом работы 3-4:

$$r_{1-3} = T_{3-4}^{pn} - T_{1-3}^{po} = 5 - 1 = 4.$$

Аналогично для работы 1-4:

$$r_{1-4} = T_{4-7}^{pn} - T_{1-4}^{po} = 6 - 2 = 4.$$

Заметим, что по определению частный (свободный) резерв времени работы всегда меньше или равен полному резерву времени:  $r_{ij} \leq R_{ij}$ . Поэтому свободный резерв (графа 9) вычисляется только для тех работ, которые имеют полные резервы времени  $R_{ij} > 0$ .

Работы, лежащие на одном пути, могут иметь разные по величине полные резервы времени, но максимальный из них не превышает резерв времени данного пути. При этом, естественно, сумма полных резервов всех работ пути может быть больше резерва времени данного пути. В то же время сумма частных (свободных) резервов времени работ равна резерву пути, который они образуют. Если конечное событие работы принадлежит критическому пути, то полный резерв работы равен ее свободному резерву времени  $R_{ij} = r_{ij}$  (работы 1-3, 2-5, 7-9 и др.).

## **ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ**

*1. Составьте логическую схему базы знаний по теме юниты.*

2. Решите ситуацию.

### Ситуация

Компания «Гамма» в течение 5 лет производит аудио- и видеокассеты. Годовые объемы продаж (тыс. долл. США) приведены в табл.1. Используя материалы тематического обзора, подготовьте прогноз объема продаж аудио- и видеокассет на 2000-2001 гг. Прогнозирование выполните по схеме:

1. Постройте график динамики объема продаж за указанный период.
2. Подготовьте прогноз на 2000-2001 гг. при помощи линейной и экспоненциальной функций с использованием табл.2 методом наименьших квадратов.
3. Сопоставьте данные прогноза, полученные в обоих вариантах, с фактическими данными.

Таблица 1

Годы	1995	1996	1997	1998	1999
Объем продаж компании «Гамма»	208	219	210	222	230

Таблица 2

Год	Y (тыс.дол. США)	X	Линейная функция $Y = a + bx$		Экспоненциальная функция $Y = ab^x$	
			$x^2$	XY	$\log Y$	$x \log Y$
1995	208					
1996	219					
1997	210					
1998	222					
1999	230					
ИТОГО	1089					

## ТРЕНИНГ УМЕНИЙ

### 1. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №1.

#### Задание

Работая в первую смену, рабочий производит за 2 часа 1 деталь. Работая во вторую смену 6 часов, рабочий производит 38 деталей. Начиная работать в третью смену, он за сутки производит 41 деталь. Сделайте прогноз на следующую 5-часовую работу, используя метод простой средней.

#### Решение

Заполните таблицу, подобрав к алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретные данные из задания
1.	Определение количества всех отчетных периодов	$2 + 6 + 24 = 32$ часа
2.	Определение величины показателя по каждому отчетному периоду	1 деталь; 38 деталей; 41 деталь
3.	Суммирование величин показателей по всем отчетным периодам	$1 + 38 + 41 = 80$ деталей
4.	Расчет простой средней по формуле: $Y_F = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{N}$	$(80 : 32) \cdot 5 \approx 12$ деталей

Таким образом, рабочий в следующие 5 часов работы произведет не менее 12 деталей.

*Решите самостоятельно следующие задания:*

#### Задание 1.1

Первые полгода агрегат пробыл в ремонте 4 дня, а в последующие – соответственно 31 и 17 дней. Рассчитайте методом простой средней, сколько дней агрегат будет в ремонте следующие полгода.

### *Задание 1.2*

В партии из 100 деталей было 6 бракованных деталей, в партии из 50 деталей было 8 бракованных, а в партии из 120 деталей – 7. Определите методом простой средней, сколько деталей нужно взять наугад, чтобы там прогностически достоверно присутствовала бракованная деталь.

## 2. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 2.

### Задание

За отчетное полугодие первые четыре месяца объем продаж неуклонно снижался от базового уровня на 10%, после чего вернулся к исходному и в последнем месяце перекрыл его еще на 50%. Нынешнее состояние рынка коренным образом изменило стратегию этой фирмы. Найдите средневзвешенное значение продаж, если базовый уровень продаж был 1000 телевизоров.

### Решение

Заполните таблицу, подобрав к алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретные данные из задания
1.	Определение количества одинаковых по длительности отчетных периодов, непрерывно следующих друг за другом	6 месяцев
2.	Нумерация отчетных периодов с ростом по направлению к прогнозируемому периоду	Первый месяц полугодия – период № 1, ... последний месяц полугодия – период № 6
3.	Определение величины показателей по каждому отчетному периоду	1000, 900, 800, 700, 1000, 1500 телевизоров
4.	Определение удельного весового коэффициента для показателя по каждому отчетному периоду (чем ближе отчетный период к прогнозируемому, тем более значим удельный весовой коэффициент)	0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,1; 1,4
5.	Определение суммарной величины показателей по всем отчетным периодам с учетом удельных весовых коэффициентов	$1000 \times 0,6 + 900 \times 0,7 + 800 \times 0,8 + 700 \times 0,9 + 1000 \times 1,1 + 1500 \times 1,4 = 5700$ телевизоров
6.	Расчет средневзвешенного показателя по формуле: $X_{\text{взв.}} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i X_i}{N}$	$5700 : 6 = 950$ телевизоров

Таким образом, средневзвешенное значение продаж составляет 950 телевизоров.



*Решите самостоятельно следующие задания.*

*Задание 2.1*

Производительный агрегат в течение полугода потерял 5% своей мощности. Рассчитайте средневзвешенную производительность агрегата, если изначально агрегат имел производительность 1500 деталей в месяц, а коэффициенты производительности за каждый месяц, начиная со значения 0,1, увеличивались каждый месяц на 0,01.

*Задание 2.2*

Рассчитайте средневзвешенную величину, если  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 2$ ,  $X_3 = 3$ , а  $k_1 = 0,6$ ,  $k_2 = 0,8$ ,  $k_3 = 0,5$ .

### 3. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 4.

#### Задание

Определите сезонные колебания по таблице поквартальных объемов продаж (в тыс. долларах).

	1995 г.				1996 г.				1997 г.				1998 г.			
	1-й	2-й	3-й	4-й	1-й	2-й	3-й	4-й	1-й	2-й	3-й	4-й	1-й	2-й	3-й	4-й
Объем продаж	200	190	250	230	230	160	240	210	240	170	230	190	220	180	180	250

#### Решение

Заполните таблицу, подобрав к алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретные данные из задания
1.	Ограничение отчетного периода статистически значимым количеством полных календарных лет	1995 – 1998 гг.
2.	Определение всех изменений, приходящихся на определенный отрезок времени отчетного периода	1-й квартал: $(200 + 230 + 240 + 220) : 4 = 222,5$ тыс. долл. 2-й квартал: $(190 + 160 + 170 + 180) : 4 = 175$ тыс. долл. 3-й квартал: $(250 + 240 + 230 + 180) : 4 = 225$ тыс. долл. 4-й квартал: $(230 + 210 + 190 + 250) : 4 = 220$ тыс. долл.
3.	Сравнение значений показателей в аналогичные отрезки времени отчетного периода	Объем продаж во втором квартале наиболее отличается от других
4.	Принятие за сезонное колебание снижение значения показателя в одном из отрезков времени по сравнению с остальными (т.е. снижение объема продаж во втором квартале)	$(222,5 + 225 + 220) : 3 - 175 = 47,5$ тыс. долларов

Следовательно, сезонные колебания объемов продаж составляют 47,5 тыс. долларов.

*Решите самостоятельно следующее задание*

### **Задание 3.1**

Найдите сезонные колебания по таблице поквартальных объемов продаж в млн. рублях.

	1996 г.				1997 г.				1998 г.				1999 г.			
	1-й	2-й	3-й	4-й	1-й	2-й	3-й	4-й	1-й	2-й	3-й	4-й	1-й	2-й	3-й	4-й
Объем продаж	310	175	219	222	320	200	380	325	330	135	170	326	310	420	420	319

## **4. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 5.**

### **Задание**

Определите возможный объем продаж в 2000 году, если фактический объем в период с 1991 г. по 1996 г. включительно составил соответственно 36, 21, 22, 30, 39, 48 тыс. долларов.

### Решение

Заполните таблицу, подобрав к алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретные данные из задания
1.	Определение количества одинаковых по длительности отчетных периодов	1991 г., 1992 г., ... , 1996 г.
2.	Нумерация отчетных периодов по направлению к прогнозируемому периоду	1-й период – 1991 г.; 2-й период – 1992 г.; ... 6-й период – 1996 г.
3.	Определение величин показателей по каждому отчетному периоду	36, 21, 22, 30, 39, 48 тыс. долларов
4.	Определение количества отчетных периодов между последним и первым отчетными периодами	6 лет
5.	Определение количества отчетных периодов между прогнозируемым и последним отчетным периодом	4 года
6.	Расчет линейно экстраполируемого показателя ( $W_{n+m}$ ) по формуле: $W_{n+m} = W_n + \frac{W_n - W_1}{N} \cdot m$	$48 + \frac{48 - 36}{6} \cdot 4 = 56$ тыс. долларов

Следовательно, возможный объем продаж в 2000 г. составит 56 тыс. долларов.

*Решите самостоятельно следующие задания:*

#### Задание 4.1

Определите возможный объем грузоперевозок в 2003 году, если фактический их объем в период с 1993 г. по 1997 г. включительно составил соответственно 120, 370, 160, 150 тонн.

#### *Задание 4.2*

Определите возможное количество осадков в сентябре 2005 года по наблюдениям с 1988 г. по 1997 г. включительно, если величина осадков в сентябре месяце, начиная с 1988 г., составляла соответственно 40, 13, 14, 37, 30, 42, 17, 28, 27, 19 мм.

## 5. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 6.

### Задание

Перспективный план автокомбината предусматривал увеличение объема перевозок до 2000 тыс.тонн в 1999 г. В 1995 г. он равнялся 1200 тыс.тонн. Определите объем перевозок в 1998 г.

### Решение

Заполните таблицу, подобрав к алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретные данные из задания
1.	Определение количества интерполируемых отчетных периодов	4 года (4 периода)
2.	Нумерация всех интерполируемых отчетных периодов	1-й период – 1996 г.; 2-й период – 1997 г.; 3-й период – 1998 г.; 4-й период – 1999 г.
3.	Определение величины показателя первого отчетного периода	1200 тыс. тонн
4.	Определение величины последнего показателя интерполируемого периода	2000 тыс. тонн
5.	Определение количества отчетных периодов между первым и последним интерполируемым периодом	3 года
6.	Расчет интерполируемого показателя ( $W_{\text{интер.}}$ ) по формуле: $W_{\text{интер.}} = W_1 + \frac{W_n - W_1}{N} \cdot m$	$1200 + \frac{2000 - 1200}{4} \cdot 3 = 1800$ тыс. тонн

Следовательно, объем перевозок автокомбината в 1998 г. составил 1800 тыс.тонн.

*Решите самостоятельно следующие задания:*

#### Задание 5.1

В пробирке было 10 млн. размножающихся бактерий. Ученый забыл о них, а когда пересчитал через 8 часов, их оказалось уже 110 млн. Рассчитайте интерполируемый показатель количества бактерий через 6 часов после начала эксперимента.

### *Задание 5.2*

Издательство в 1998 г. выпустило 230 наименований книг, а к 2002 году намеревается выпускать 500 наименований. Рассчитайте, сколько наименований будет выпускаться в 2000 году.

## 6. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 9.

### Задание

Рассчитайте индекс сезонных колебаний, если фактический спрос на микроволновые печи составил 206 штук, а центрированная скользящая средняя за тот же период - 210 печей.

### Решение

Заполните таблицу, подобрав к алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретные данные из задания
1.	Определение объема фактического спроса в период сезонных колебаний	206 микроволновых печей
2.	Определение величины центрированной скользящей средней в период сезонных колебаний	210 микроволновых печей
3.	Расчет индекса сезонных колебаний ( $I_{сез.}$ ) по формуле: $I_{сез.} = \frac{V_{факт.}}{Y_{центр.}}$	$\frac{206}{210} = 0,981$

Следовательно, индекс сезонных колебаний спроса составляет 0,981.

*Решите самостоятельно следующее задание:*

### Задание 6.1

Рассчитайте индекс сезонных колебаний курса доллара по понедельникам (в момент всплеска деловой активности), когда спрос на доллар был на 105% больше предложения; предложение составляло 317 млн. долларов, и центрированная скользящая средняя на понедельник равнялась 306 млн. долларов.



## 7. Пример выполнения тренинга на умение 10.

### Задание

Каждый месяц в 1998 г. спрос увеличивался на 120 автомобилей. Рассчитайте кумулятивный спрос на автомобили за второе полугодие, если в начале года спрос равнялся 1500 автомобилей.

### Решение

Заполните таблицу, подобрав к алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретные данные из задания
1.	Определение длительности интервала прогнозирования	6 месяцев
2.	Определение длительности отчетных периодов в интервале прогнозирования	1 месяц
3.	Определение количества отчетных периодов в интервале прогнозирования путем деления длительности интервала прогнозирования на длительность отчетных периодов в интервале прогнозирования	6 мес. : 1 мес. = 6 отчетных периодов
4.	Определение прогностических оценок спроса для каждого из отчетных периодов в интервале прогнозирования, включая и текущий период	$1500 + 7 \times 120 = 2340 \text{ а/м;}$ $1500 + 8 \times 120 = 2460 \text{ а/м;}$ $1500 + 9 \times 120 = 2580 \text{ а/м;}$ $1500 + 10 \times 120 = 2700 \text{ а/м;}$ $1500 + 11 \times 120 = 2820 \text{ а/м;}$ $1500 + 12 \times 120 = 2940 \text{ а/м;}$
5.	Расчет кумулятивного спроса ( $d_{\text{кум.}}$ ) по формуле: $d_{\text{кум.}} = \sum_{i=1}^n d_i,$	$2340 + 2460 + 2580 + 2700 +$ $+ 2820 + 2940 = 15840 \text{ авто-}$ мобилей

Следовательно, кумулятивный спрос на автомобили во втором полугодии 1998 г. составил 15840 автомобилей.

*Решите самостоятельно следующее задание:*

### **Задание 7.1**

Две партии нового тренажера в 600 и 800 штук соответственно нашли своего покупателя, на третью партию в 110 шт. упал спрос и 512 тренажеров так и остались невостребованными. Рассчитайте кумулятивный спрос на тренажеры за указанные три месяца.

## **8. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 12.**

### **Задание**

Фермер должен собрать урожай. Если будут идти дожди, продолжительность сбора урожая составит 9 дней. Если дождей не будет, фермер соберет урожай за 6 дней. Определите вероятную продолжительность сбора урожая.

### **Решение**

Заполните таблицу, подобрав к алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретные данные из задания
1.	Определение экспертной оценки продолжительности выполнения работ при наиболее благоприятном стечении обстоятельств	6 дней
2.	Определение экспертной оценки продолжительности выполнения работ при наиболее неблагоприятном стечении обстоятельств	9 дней
3.	Расчет продолжительности выполнения всех работ по двум экспертным оценкам (t) по формуле: $t = \frac{2t_{\max} + 3t_{\min}}{5},$	$\frac{2 \cdot 9 + 3 \cdot 6}{5} = 7 \text{ дней}$

Таким образом, вероятная продолжительность сбора урожая составит 7 дней.

*Решите самостоятельно следующее задание*

#### *Задание 8.1*

При неблагоприятном стечении обстоятельств (отсутствие запасных деталей, болезнь рабочих и др.) ремонт агрегата после поломки составит 14 дней. При благоприятном стечении обстоятельств на ремонт потребуется 8 дней. Рассчитайте вероятную продолжительность ремонта агрегата.

## 9. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 14.

### Задание

Постройте и рассчитайте сетевой график подготовки выставочной экспозиции двух экспонатов продукции фирмы. Перечень и продолжительность работ даны в таблице. Определите порядок выполнения работ, количество полных путей и критический путь.

№ п/п	Наименование работ	Исходные данные	Расчетные данные
		Продолжительность работ (в днях)	Порядок выполнения работ
1	2	3	4
1	Определение места экспозиции на выставке	1	1-я работа
2	Подготовка места экспозиции	2	после 1-й работы
3	Подведение источника тока	1	после 1-й работы
4	Подвоз 1-го экспоната экспозиции	1	после 2-й и 3-й работы
5	Подвоз 2-го экспоната экспозиции	1	после 2-й и 3-й работы
6	Монтаж 1-го экспоната экспозиции	2	после 4-й работы
7	Монтаж 2-го экспоната экспозиции	4	после 5-й работы
8	Подключение к источнику тока и опробование 1-го экспоната экспозиции	1	после 6-й работы
9	Подключение к источнику тока и опробование 2-го экспоната экспозиции	2	после 7-й работы
10	Заключительные работы по 1-му экспонату экспозиции	1	после 8-й работы
11	Заключительные работы по 2-му экспонату экспозиции	1	после 9-й работы
12	Подготовка доклада и печатного материала экспозиции	4	после 1-й работы
13	Приемка экспозиции	1	после 10, 11, 12-й работ

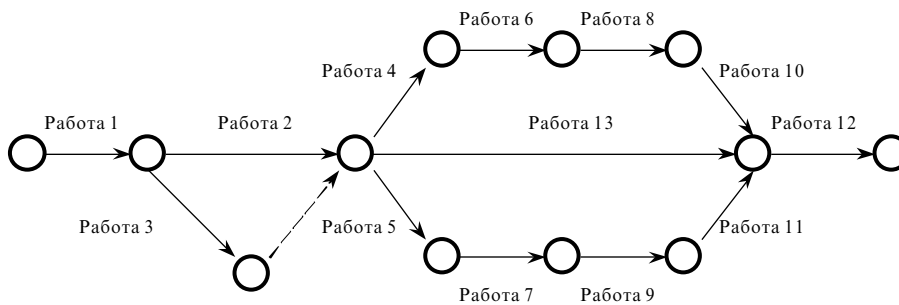
### Решение

Предварительно проведем ряд подготовительных действий.

1. Установление взаимосвязи работ.
2. Установление порядка выполнения работ.

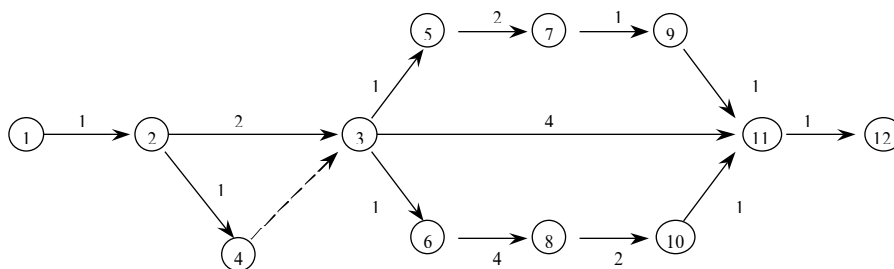
Результаты этих этапов заносятся в 4-ую графу таблицы.

3. Определение действительных и фиктивных работ.
4. Построение сетевого графика:



5. Нумерация всех событий (в соответствии с умением 13).

6. Указание продолжительности работ (в днях) на сетевом графике (над стрелками работ):



Затем заполним таблицу, подобрав к алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретные данные из задания
1.	Определение количества полных путей	1-й путь проходит через следующие события: 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 12 2-й путь - через 1, 2, 3, 11, 12 3-й путь - через 1, 2, 3, 6, 8, 10, 11, 12 4-й путь - через 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12 5-й путь - через 1, 2, 3, 4, 11, 12 6-й путь - через 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 11, 12
2.	Определение продолжительности полных путей $L_i$ : $L_i = \sum t_j,$ где $t_j$ - продолжительность $i$ -й работы	$L_1 = 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 9$ дней $L_2 = 1 + 2 + 4 + 1 = 8$ дней $L_3 = 1 + 2 + 1 + 4 + 2 + 1 + 1 = 12$ дней $L_4 = 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 8$ дней $L_5 = 1 + 1 + 4 + 1 = 7$ дней $L_6 = 1 + 1 + 1 + 4 + 2 + 1 + 1 = 11$ дней
3.	Сравнение продолжительности полных путей	$L_5 < L_2 < L_4$ ; $L_1 < L_6 < L_3$
4.	Определение критического пути	Путь $L_3$ является самым длинным и трактуется как критический путь

Таким образом, продолжительность критического пути ( $L_3$ ) составляет 12 дней.

Решите самостоятельно следующее задание:

#### Задание 9.1

Постройте и рассчитайте сетевой график строительства одноэтажного дома. Перечень и продолжительность работ представлены в таблице. Определите порядок выполнения работ, количество полных путей, критический путь.

№ п/п	Наименование работ	Исходные данные	Расчетные данные
		Продолжительность работ (в днях)	Порядок выполнения работ
1	2	3	4
1	Утверждение проекта на строительство	7	
2	Подготовка строительной площадки	2	
3	Подвоз материала	3	
4	Строительство фундамента	5	

№ п/п	Наименование работ	Исходные данные	Расчетные данные
		Продолжительность работ (в днях)	Порядок выполнения работ
1	2	3	4
5	Возведение стен	8	
6	Подвод коммуникаций	4	
7	Подвод электричества	2	
8	Возведение крыши	4	
9	Установка окон и дверей	3	
10	Внутренняя отделка	10	
11	Подключение коммуникаций и электричества	3	
12	Приемка дома	1	

**ТЕОРИЯ ОРГАНИЗАЦИИ**

**ЮНИТА 6**

**МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ И ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА**

Редактор Н.И. Лебедева  
Оператор компьютерной верстки Д.В. Федотов

---

Изд. лиц. ЛР № 071765 от 07.12.1998	Сдано в печать
НОУ “Современный Гуманитарный Институт”	
Тираж	Заказ

---

Современный Гуманитарный Университет