

**Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра статистики и ЭММ**

*Ю.Н. Пивоваров
А.Г. Реннер
В.Н. Тарасов*

МЕТОДЫ ОПЕРАТИВНОЙ ОБРАБОТКИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Учебное пособие

часть 1

Оренбург 1998

ББК 22.172 Я7
П 32
УДК 519.2(075.8)

1 Статистические методы и модели

1.1 Математическое описание динамических систем

Динамическая система — это любая система, выполняющая преобразование сигналов.

То преобразование, которое осуществляется системой, называется оператором системы. Если система имеет оператор A , то

$$Y(t) = A\{X(t)\}.$$

Все операторы можно разделить на:

- линейные, производящие линейные преобразования входных сигналов;

- нелинейные. Линейные, в свою очередь, подразделяются на:

- линейно-однородные:

- линейно-неоднородные.

Линейно-однородными называются операторы, удовлетворяющие условию:

$$L\left\{\sum_{i=1}^N b_i X_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^N L\{b_i X_i(t)\}.$$

Линейно-неоднородные операторы имеют вид

$$- L\{X(t)\} = L\{X(t)\} + \Psi(t),$$

то есть, любой такой оператор представляют собой сумму линейно-однородного оператора с некоторой функцией времени.

Примеры линейно-однородных операторов:

$$Y(t) = K * X(t),$$

$$Y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$Y(t) = \int_0^t X(u)du$$

Самый общий случай любого линейного преобразования — это решение дифференциального уравнения. Системы, осуществляющие линейные преобразования, называют *линейными и динамическими системами*, а системы, имеющие нелинейные операторы, — *нелинейными и динамическими системами*.

В зависимости от того, изменяются ли параметры и характеристики системы во времени, различают стационарные и нестационарные системы.

Стационарной называется система, характеристики и параметры которой неизменны во времени. В противном случае система называется *нестационарной*.

В зависимости от того, непрерывно или дискретно сигнал поступает на вход системы и выдается с ее выхода, различают *аналоговые* и *цифровые* системы.

Идеальной называется система с *постоянными* параметрами, обладающая свойством *линейности* сигналов в двух определенных точках — на входе и на выходе, в точке определения реакции системы. Говорят, что система имеет постоянные параметры, если все свойства системы инвариантны во времени (то есть система стационарна). Например, простая пассивная электрическая цепь является системой постоянными параметрами, если сопротивления, емкости и индуктивности всех ее элементов не меняются во времени. Система линейна, если ее частотные характеристики обладают свойствами аддитивности и однородности. Понятие аддитивности означает, что реакция системы на сумму входных сигналов равна сумме реакций на каждый отдельно взятый сигнал. Понятие однородности означает, что реакция системы на любой сигнал, умноженный на некоторую постоянную, равна этой постоянной, умноженной на реакцию системы на входной сигнал.

Запишем эти утверждения в аналитической форме. Пусть $Y(t)$ — это реакция системы на входной сигнал $X(t)$. Система линейна, если для двух любых входных сигналов $X_1(t)$ и $X_2(t)$ и постоянной C справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}L\{X_1(t) + X_2(t)\} &= L\{X_1(t)\} + L\{X_2(t)\}, \\L\{C \cdot X(t)\} &= C \cdot L\{X(t)\}.\end{aligned}$$

Первая из этих формул выражает свойство аддитивности, а вторая - однородности.

Гипотеза о постоянстве параметров вполне приемлема для многих физических систем, встречающихся на практике. Например, обычно не наблюдается заметных изменений основных характеристик электрических цепей или механических устройств в пределах любых представляющих практический интерес интервалов времени. Хотя такие системы встречаются далеко не всегда. Сопротивление электрического резистора может меняться вследствие сильного нагрева, а прочность сооружения может изменяться при повреждении, вызванном усталостью металла под воздействием непрерывной вибрации. Кроме того, некоторые физические системы конструируют именно как системы с переменными параметрами.

Большие ограничения накладывает гипотеза о линейности реальных систем. При наличии экстремальных условий на входе передаточные характеристики всех реальных физических систем нелинейны. Тем не менее, не рискуя допустить больших ошибок, передаточные свойства многих физических систем можно считать, по крайней мере в некотором ограниченном диапазоне приложенного на входе воздействия, линейными.

Математическое описание ЛДС

Описать динамическую систему — это значит отыскать ее оператор, то есть найти соотношения, связывающие входной и выходной сигналы. Эти соотношения могут задаваться во временной, частотной областях, при помощи изображений Лапласа или Z-преобразований (в случае дискретных систем).

1.1.1 Математическое описание ЛДС во временной области

Пусть имеем линейную динамическую систему с оператором преобразования L . На ее вход подается сигнал $X(t)$, который может являться процессом любой физической природы (но преобразованный для обработки именно данной системой) и обладать любыми свойствами. С выхода системы снимается сигнал $Y(t)$, свойства и характеристики которого определяются свойствами входного сигнала и параметрами системы.

Дать обобщенное описание системы - это значит указать вид взаимосвязи между ее входным и выходным сигналами.

$$Y(t) = L\{X(t)\} \quad (1.1)$$

Если вид взаимосвязи известен, то свойства системы определены полностью.

Для описания систем во временной области вводится ряд характеристик, из которых наиболее распространенными являются:

- импульсная переходная характеристика;
- переходная функция.

Импульсная переходная характеристика системы - это ее реакция на сигнал в виде δ -функции:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

то есть, бесконечно короткий импульс, имеющий бесконечно большую амплитуду и площадь, равную единице.

$$X(t) = \delta(t) ; Y(t) = L\{\delta(t)\} = h(t).$$

Переходная функция - это реакция системы на единичный скачок (функцию Хевисайда):

$$X(t) = 1(t) ; Y(t) = L\{1(t)\} = H(t).$$

Так как свойства системы не зависят от того, что подавать ее вход, то эти характеристики можно однозначно связать между собой:

$$H(t) = \int_0^t h(u)du + \Psi(t) \text{ (зависит от начальных условий):}$$

$$h(t) = \frac{dH(t)}{dt} + \varphi(t) \text{ (производная от } \Psi(t)\text{)}.$$

Подадим на вход системы сигнал $X(t) = \delta(t - \tau_0)$ (в соответствии с рисунком 1):

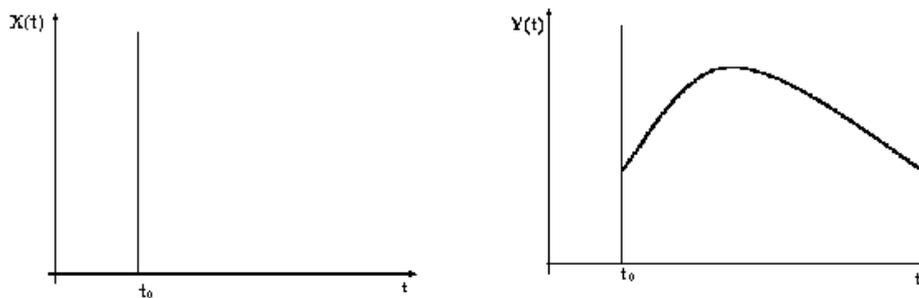


Рисунок 1 - График ИПХ динамической системы

Из графика видно, что система не является генератором, и ее выходной сигнал рано или поздно устремится к нулю.

Импульсная переходная характеристика ЛДС будет зависеть как от текущего времени, так и от момента подачи на вход системы δ -функции.

Удобно записать форму этой зависимости несколько иначе:

$$h(t, \tau_0) = h(t - \tau_0, \tau_0) = h(t - \tau_0, t).$$

Для стационарных систем справедливо:

$$h(t, \tau_0) = h(t - \tau_0),$$

то есть ИПХ системы не зависит от начального состояния, а лишь от

момента подачи на ее вход импульса (τ_0) и момента рассмотрения t :

$$h(t, \tau_0) = h(t - \tau_0) = h(\tau). \quad (1.2)$$

Для нестационарных динамических систем ИПХ является функцией двух аргументов.

В дальнейшем станем рассматривать и описывать только стационарные ДС, для описания которых существует общая методика решения. На рисунке 2 изображены различные виды импульсных характеристик.

У генераторных систем (рисунок 2в) ИПХ носит незатухающий характер, такие системы неустойчивы в отличие от систем с затухающими импульсными характеристиками (рисунок 2а и 2б).

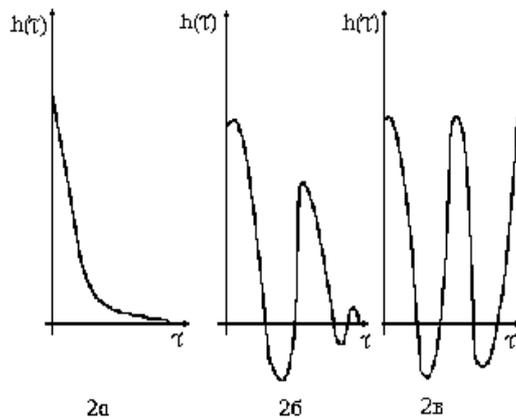


Рисунок 2 - Различные виды импульсных переходных характеристик

ИПХ устойчивой системы должна представлять абсолютно интегрируемую функцию, то есть она должна обладать следующими свойствами:

- 1) $\int_0^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty,$
- 2) $\lim_{\tau \rightarrow \infty} h(\tau) = 0.$

Зная ИПХ, можно составить суждение о быстродействии системы. Действительно, ИПХ существенно отличается от нуля не во всем диапазоне своего аргумента, а лишь в некоторой его части. Тот интервал, после которого ИПХ можно считать практически равной нулю, называется *длительностью* импульсной переходной характеристики и обозначается τ_u .

Способы определения длительности ИПХ

Существует несколько способов определения величины.

Первый из них заключается в следующем (в соответствии с рисунком 3а).

Проводим две прямые, параллельные оси абсцисс.

Длительность импульсной характеристики - это интервал времени, начиная с которого ИПХ, войдя в дифференциальный коридор, ограниченный этими прямыми, уже не покидает его.

$$h(\tau) = \Delta.$$

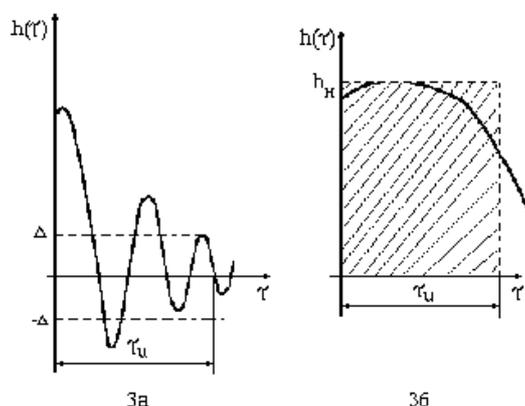


Рисунок 3 - К вопросу об определении длительности ИПХ

Это уравнение может иметь несколько корней, в качестве τ_u следует брать наибольший.

h_n - наибольшее значение ИПХ,

$$\frac{h(\tau)}{h_n} = \frac{\Delta}{h_n} = \gamma, \quad \gamma \ll 1. \quad (1.3)$$

Согласно второму способу, (в соответствии с рисунком 3б) за длительность импульсной переходной характеристики принимается основание прямоугольника, построенного на оси времени, имеющего высоту, равную наибольшему значению ИПХ и площадь, равную площади фигуры, ограниченной сверху ИПХ, снизу осью времени, а слева - осью ординат.

$$\tau_u = \frac{1}{h_n} \int_0^{\infty} h(\tau) d\tau \quad (1.4)$$

Но если ИПХ носит колебательный характер, то значение τ_u , вычисленное по этой формуле, окажется заниженным, поэтому этот способ применяют только для монотонных импульсных

характеристик.

Третий и четвертый способы отыскания длительности ИПХ аналогичны второму, но предназначены для знакопеременных характеристик:

$$\tau_u = \frac{1}{h_H} \int_0^{\infty} |h(\tau)| d\tau \quad (1.5)$$

$$\tau_u = \frac{1}{h_H^2} \int_0^{\infty} h^2(\tau) d\tau \quad (1.6)$$

Разные способы определения длительности ИПХ дают разный результат, поэтому сравнения системы по этой характеристике, следует использовать один и тот же способ.

Пример 1.

Найти длительность ИПХ системы, если эта характеристика имеет вид

$$h(\tau) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right).$$

$$1) \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) = \gamma; -\frac{\tau}{T} = \ln \gamma; \tau = -T * \ln \gamma; \tau_{u_1} = T * \frac{\ln 1}{\gamma}.$$

$$2) \tau_{u_2} = T \int_0^{\infty} \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) d\tau = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) d\tau = T = \tau_{u_2}.$$

$$3) \tau_{u_3} = \tau_{u_2} = T.$$

$$4) \tau_{u_4} = T^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{T^2} \exp\left(-\frac{2\tau}{T}\right) d\tau = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{2\tau}{T}\right) d\tau = \frac{T}{2} = \tau_{u_4}.$$

1.1.2 Определение взаимосвязей между входным и выходным сигналами системы через ИПХ (нахождение оператора системы)

Пусть входной и выходной сигналы системы связаны друг с другом соотношением

$$Y(t) = L \{X(t)\}.$$

Представим сигнал $X(t)$ в виде

$$\begin{aligned} X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \delta(t - \tau) d\tau = X(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau = \\ &= \left. \begin{array}{l} u_{\text{во}} = -\infty \\ du = -d\tau \\ u_{\text{в}} = \infty \end{array} \right| X(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) du = X(t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Соотношение (1.7) определяет фильтрующее свойство δ -функции.

$$\begin{aligned}
Y(t) &= L \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} L \{ X(\tau) \delta(t-\tau) \} d\tau = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) L \{ \delta(t-\tau) \} d\tau
\end{aligned}$$

Но $L \{ \delta(t) \}$ — не что иное, как импульсная переходная характеристика системы, следовательно,

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Независимая переменная всегда неотрицательна, и в качестве нижнего предела используем нуль, кроме того, $t-\tau \geq 0$, так как реакция не может появиться раньше воздействия, то есть $\tau \leq t$ — верхний предел ($0 \leq \tau \leq t$).

$$\begin{aligned}
Y(t) &= \int_0^t X(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^t h(u) X(t-u) du = \int_0^t h(\tau) X(t-\tau) d\tau. \\
&\left| \begin{array}{l} t-\tau = u; \quad \tau = t-u; \quad d\tau = -du \\ u_{\text{в}} = 0; \quad u_{\text{н}} = t \end{array} \right|
\end{aligned}$$

Выходной сигнал связан со входным и ИПХ интегралом Дюамеля

$$Y(t) = \int_0^t h(t-\tau) X(\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) X(t-\tau) d\tau. \quad (1.8)$$

t — текущее время, прошедшее со времени подачи на вход сигнала.

В зависимости от того, на каком интервале времени необходимо рассматривать работу ЛДС, различают два режима работы:

- 1) переходный (динамический) режим;
- 2) установившийся (статический).

Переходный режим соответствует работе системы на участке,

где ИПХ практически отлична от нуля.

Установившийся режим — это работа на участке, где ИПХ можно считать равной нулю:

- 1) $0 \leq t \leq \tau_u$ — переходный режим;
- 2) $t > \tau_u$ — установившийся режим.

В установившемся режиме выражение (1.8) принимает вид

$$Y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)X(t - \tau)d\tau. \quad (1.9)$$

1.1.3 Определение ИПХ по дифференциальному уравнению, связывающему входной и выходной сигналы системы

Пусть входной и выходной сигналы ЛДС связаны дифференциальным уравнением

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \dots + b_0 x(t), \quad n \geq m$$

Положим $X(t) = \delta(t)$, $Y(t) = h(t)$:

$$a_n h^{(n)}(t) + a_{n-1} h^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 h(t) = b_m \delta^{(m)}(t) + \dots + b_0 \delta(t).$$

Найдем преобразование Фурье от левой и правой частей L :

$$\begin{aligned} a_n L_{\phi} \{h^{(n)}(t)\} + \dots + a_1 L_{\phi} \{h^{(1)}(t)\} + a_0 L_{\phi} \{h(t)\} &= \\ = b_m L_{\phi} \{\delta^{(m)}(t)\} + \dots + b_0 L_{\phi} \{\delta(t)\} \end{aligned}$$

Обозначим

$$L_{\phi} \{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-j\omega t) dt = W(j\omega)$$

$$L_{\phi} \{h^{(n)}(t)\} = (j\omega)^n W(j\omega);$$

$$L_{\phi} \{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-j\omega t) dt = 1; \quad L_{\phi} \{\delta^{(k)}(t)\} = (j\omega)^k.$$

$$a_n (j\omega)^n W(j\omega) + \dots + a_0 W(j\omega) = b_m (j\omega)^m + \dots + b_0;$$

$$W(j\omega) \{a_n (j\omega)^n + \dots + a_0\} = b_m (j\omega)^m + \dots + b_0.$$

$$W(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + a_0} \quad (1.10)$$

Соотношение (1.10) определяет *частотную характеристику* системы, получить которую можно непосредственно из дифференциального уравнения, связывающего входной и выходной

сигналы системы.

Импульсную переходную характеристику можно найти по имеющейся частотной с помощью обратного преобразования Фурье:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (1.11)$$

Пример 2.

ЛДС описывается дифференциальным уравнением первого порядка

$$T \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = X(t),$$

найти его ИПХ.

Импульсную переходную характеристику найдем по частотной:

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}; \quad h(t) = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \frac{\exp(-1/T)}{T};$$

Проверяем:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{T}\right) \exp(-j\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{T} - j\omega t\right) dt = \\ &= \frac{1}{T\left(\frac{1}{T} + j\omega\right)} = \frac{1}{j\omega T + 1} \end{aligned}$$

1.1.4 Математическое описание ЛДС в частотной области

Полное описание линейной динамической системы в частотной области дает рассмотренная выше частотная характеристика :

$$W(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-j\omega t) dt .$$

Воспользуемся подстановкой Эйлера:

$$\exp(-j\omega t) = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

$$W(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \sin \omega t dt ; \quad (1.12)$$

Первое из этих двух слагаемых представляет *вещественную*, а второе — *мнимую частотную* характеристики. Вещественная частотная характеристика (ВЧХ) представляет собой четную, а мнимая частотная (МЧХ) — нечетную функции частоты, то есть :

$$\operatorname{Re} W(j\omega) = \int_0^{\infty} h(t) \cos \omega t dt ; \quad \operatorname{Im} W(j\omega) = \int_0^{\infty} h(t) \sin \omega t dt ;$$

$$\operatorname{Re} W(j\omega) = \operatorname{Re} W(-j\omega) ; \quad \operatorname{Im} W(j\omega) = -\operatorname{Im} W(-j\omega).$$

Частотная характеристика системы $W(j\omega)$ может быть записана и в показательной форме:

$$W(j\omega) = |W(j\omega)| \exp(-j\varphi(\omega)),$$

$$|W(j\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2(j\omega) + \operatorname{Im}^2(j\omega)} ; \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(j\omega)}{\operatorname{Re}(j\omega)}$$

где: $|W(j\omega)|$ — амплитудно-частотная (АЧХ),
а $\varphi(\omega)$ — фазочастотная (ФЧХ) характеристики системы.

Рассмотрим динамическую систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \dots + x(t)$$

Подадим на ее вход гармонический сигнал

$$X(t) = A \exp(j\omega t) = A \cos \omega t + j \sin \omega t ,$$

на выходе будет наблюдаться сигнал $Y(t) = \Phi(j\omega) A \exp(j\omega t)$:

$$a_n (j\omega)^n \Phi(j\omega) A \exp(j\omega t) + \dots + \Phi(j\omega) A \exp(j\omega t) =$$

$$= b_m (j\omega)^m A \exp(j\omega t) + \dots + A \exp(j\omega t)$$

$$y^{(k)}(t) = (j\omega)^k \Phi(j\omega) A \exp(j\omega t)$$

$$x^{(k)}(t) = (j\omega)^k A \exp(j\omega t) ,$$

тогда

$$a_n (j\omega)^n \Phi(j\omega) + \dots + \Phi(j\omega) = b_m (j\omega)^m + \dots + 1 ,$$

$$\Phi(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + 1}{a_n(j\omega)^n + \dots + 1} = W(j\omega),$$

то есть, частотная характеристика ЛДС численно равна коэффициенту преобразования системы, если на ее вход подается гармонический сигнал:

$$\begin{aligned} X(t) &= A \exp(j\omega t). \\ Y(t) &= W(j\omega)A \exp(j\omega t) = \\ &= \{\operatorname{Re} W(j\omega) - j \operatorname{Im} W(j\omega)\}(A \cos \omega t + j \sin \omega t) = \\ &= \operatorname{Re} W(j\omega)A \cos \omega t + \operatorname{Im} W(j\omega)A \sin \omega t - \\ &- j\{\operatorname{Re} W(j\omega)A \sin \omega t - \operatorname{Im} W(j\omega)A \cos \omega t\} \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая :

$$\begin{aligned} \text{а) } X(t) &= A \cos \omega t, \\ Y(t) &= \operatorname{Re} W(j\omega) A \cos \omega t + \operatorname{Im} W(j\omega) A \sin \omega t, \end{aligned}$$

то есть, вещественная частотная характеристика показывает как преобразуется амплитуда входного сигнала в амплитуду выходного, синфазного с ним, а мнимая частотная характеристика показывает то же преобразование, но в амплитуду выходного сигнала, находящегося в квадратуре со входным;

$$\begin{aligned} \text{б) } X(t) &= A \sin \omega t, \\ Y(t) &= \operatorname{Re} W(j\omega) A \sin \omega t - j \operatorname{Im} W(j\omega) A \cos \omega t. \end{aligned}$$

Если на вход подается произвольный гармонический сигнал

$$X(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

то на выходе появляется сигнал, описываемый соотношением

$$Y(t) = A|W(j\omega)| \sin[\omega t + \psi - \varphi(\omega)] \quad (1.13)$$

То есть, амплитудно-частотная характеристика показывает, как преобразуется амплитуда входного сигнала в амплитуду выходного, а ФЧХ показывает, какой фазовый сдвиг осуществляется системой на частоте ω .

Чтобы получить более ясное представление о частотных характеристиках обычных физических систем, следует рассмотреть

некоторые простые примеры.

Механические системы

В качестве примера простой механической конструкции рассмотрим систему с сосредоточенными параметрами, состоящую из массы, пружины и демпфера, причем движение груза совершается только в одном направлении (в соответствии с рисунком 4).

Здесь величина K - коэффициент жесткости пружины, C - коэффициент торможения, m - масса.

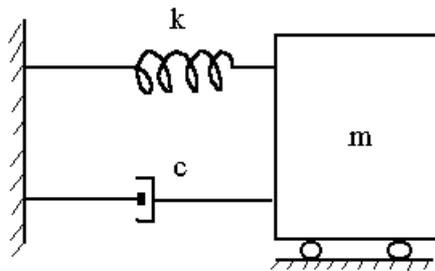


Рисунок 4 - Простая механическая система

Прежде чем перейти к нахождению частотной характеристики, необходимо четко определить характер процессов на входе и выходе системы.

Зададим в качестве входного сигнала изменение силы, приложенной к массе, а в качестве выходного — смещение массы (в соответствии с рисунком 5).

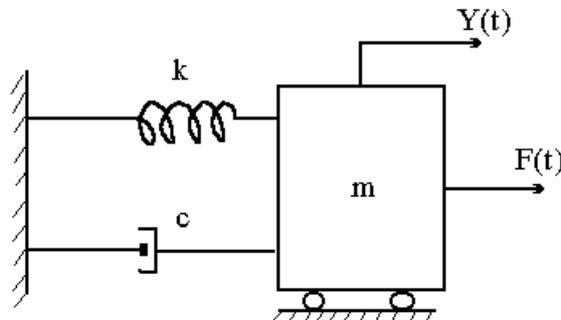


Рисунок 5 - Механическая система с вынуждающей силой на входе

Чтобы определить частотную характеристику изучаемой системы, следует вначале вывести уравнение движения. Согласно одному из основных законов механики сумма всех сил, приложенных к массе, равна нулю, то есть

$$F(t) + F_k(t) + F_c(t) + F_m(t) = 0, \quad (1.14)$$

где:

$$F_k(t) = -KY(t) \text{ — упругая сила,}$$

$F_c(t) = -C\dot{Y}(t)$ — сила торможения,

$F_m(t) = -m\ddot{Y}(t)$ — сила инерции,

$\dot{Y}(t) = \frac{dY(t)}{dt}$ — скорость,

$\ddot{Y}(t) = \frac{d^2Y(t)}{dt^2}$ — ускорение.

Следовательно, уравнение движения системы может быть записано в виде

$$m\ddot{Y}(t) + C\dot{Y}(t) + KY(t) = F(t) \quad (1.15)$$

Выше говорилось, что частотная характеристика системы определяется как преобразование Фурье на δ -функцию. В данном случае реакция системы — это смещение $Y(t)$, преобразование Фурье которого

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} Y(t) \exp(j\omega t) dt = W(j\omega), \quad (1.16)$$

отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \dot{Y}(j\omega) &= j\omega W(j\omega), \\ \ddot{Y}(j\omega) &= -\omega^2 W(j\omega). \end{aligned}$$

Вычисляя преобразование Фурье от обеих частей, получим

$$\begin{aligned} [-\omega^2 m + j\omega C + K] W(j\omega) &= 1, \\ W(j\omega) &= \frac{1}{K - \omega m + j\omega C} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Уравнение (1.17) целесообразно переписать в другой форме, принимая обозначения

$$\xi = \frac{C}{2\sqrt{km}} \quad (1.18)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.19)$$

Величина ξ в формуле (1.18) безразмерна и называется

коэффициентом *затухания*. Величина w в формуле (1.19) называется *собственной частотой незатухающих колебаний*. С учетом этих обозначений формула (1.17) переписется в виде

$$W(jw) = \frac{\frac{1}{K}}{1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2 + j2\xi \frac{w}{w_n}} \quad (1.20)$$

Записав соотношение (1.20) в показательной форме, можно представить частотную характеристику $W(jw)$ как функцию амплитудной $|W(jw)|$ и фазовой $\varphi(w)$ частотных характеристик, как это уже описывалось выше :

$$W(jw) = |W(jw)| \exp(-j\varphi(w)), \quad (1.21)$$

где

$$|W(jw)| = \frac{\frac{1}{K}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \frac{w}{w_n}\right]^2}} \quad (1.22)$$

$$\varphi(w) = \text{arctg} \left[\frac{2\xi \frac{w}{w_n}}{1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2} \right] \quad (1.23)$$

Электрические системы

Предположим, что простая электрическая цепь может быть представлена системой с сосредоточенными параметрами, состоящей из индуктивности, сопротивления и емкости. Пусть процесс на входе системы — это разность потенциалов (в соответствии с рисунком б)

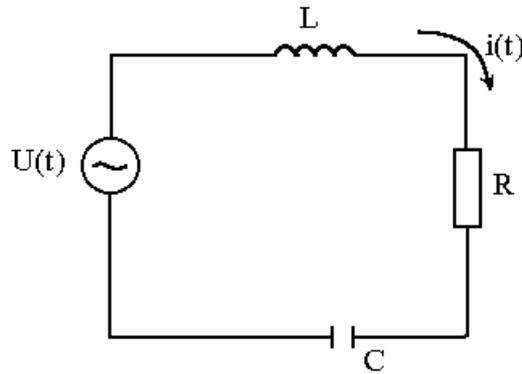


Рисунок 6 - Электрическая система с колебаниями напряжения на входе

На рисунке 6 R - сопротивление, C - емкость, L - индуктивность, $U(t)$ - приложенное напряжение, $i(t)$ - результирующий процесс — сила тока. Напомним, что $i(t) = dq/dt$, где $q(t)$ — заряд.

В качестве входного процесса задается приложенное напряжение, в качестве процесса на выходе — результирующий заряд.

Для того, чтобы найти соответствующую частотную характеристику, необходимо сначала получить дифференциальное уравнение, описывающее данную систему. По закону Кирхгофа сумма всех падений напряжения в элементах цепи равна нулю:

$$U(t) + U_C(t) + U_R(t) + U_L(t) = 0, \quad (1.24)$$

где:

$$U_C(t) = -\frac{1}{C} * q(t) \text{ — падение напряжения на емкости,}$$

$$U_R(t) = -R * \dot{q}(t) \text{ — падение напряжения на сопротивлении,}$$

$$U_L(t) = -L * \ddot{q}(t) \text{ — падение напряжения на индуктивности.}$$

Отсюда находим дифференциальное уравнение, описывающее систему:

$$L * \ddot{q}(t) + R * \dot{q}(t) + \frac{1}{C} q(t) = U(t). \quad (1.25)$$

Между этим уравнением и уравнением, описывающим механическую систему (1.15) существует аналогия. Поэтому, используя приведенную выше методику, сразу получим частотную характеристику данной системы

$$W(j\omega) = \left[\frac{1}{C} - \omega^2 L + j\omega R \right]^{-1}. \quad (1.26)$$

Величина $W(j\omega)$ имеет размерность кулон/вольт. Индекс обозначает, что ЧХ связывает напряжение на входе с зарядом на выходе.

Коэффициент затухания и собственная частота ω незатухающих колебаний определяются равенствами

$$\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Чаще используют частотные характеристики, связывающие напряжение как входной процесс с силой тока на выходе:

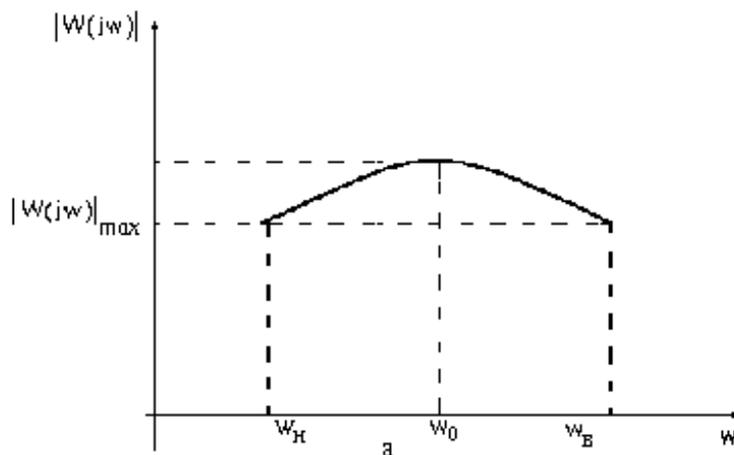
$$W(j\omega) = \frac{1}{R + j\omega L - \frac{1}{j\omega C}}, \quad (1.27)$$

где $W(j\omega)$ имеет размерность ампер/вольт. Функция, обратная величине (1.27), которую можно обозначить $W_{i-u}(j\omega)$, называется *импедансом*

$$W_{i-u}(j\omega) = R + j\omega L - \frac{1}{j\omega C}. \quad (1.28)$$

Полоса пропускания ЛДС и способы её определения

Область частот, внутри которой АЧХ системы почти неизменна и близка к своему максимальному значению, называется *полосой пропускания* системы (в соответствии с рисунком 7а).



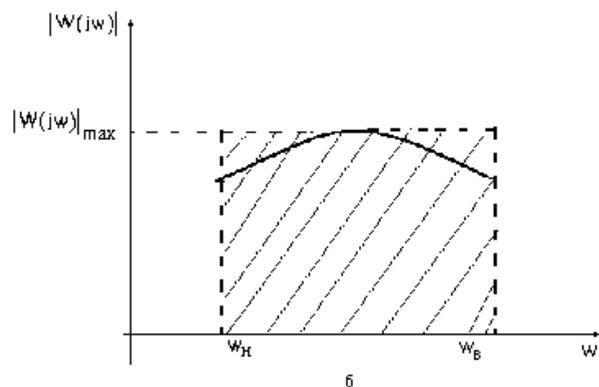


Рисунок 7 - К вопросу об определении полосы пропускания ЛДС

w_0 — основная частота системы, при которой АЧХ принимает наибольшее значение. Ширина полосы пропускания

$$\Delta w_c = w_B - w_H .$$

Один из способов определения полосы пропускания сводится к тому, что находится основная частота w_0 и проводится линия, параллельная оси частот на расстоянии, достаточно малом от $|W(jw)|_{\max}$. w_B, w_H — абсциссы точек пересечения этой прямой с кривой АЧХ (в соответствии с рисунком 7а).

$$1 - \frac{|W(jw)|_{\max} - \delta}{|W(jw)|_{\max}} = \frac{|W(jw)|}{|W(jw)|_{\max}} = 1 - \gamma \quad (1.29)$$

Второе слагаемое в левой части (1.29) обычно называют амплитудно-частотной погрешностью, а величину принимают равной 5%.

По второму способу на оси частот как на основании строится прямоугольник (в соответствии с рисунком 7б), имеющий высоту, равную максимальному значению АЧХ и площадь, равную площади фигуры, ограниченной кривой АЧХ. Величина основания принимается равной ширине полосы пропускания.

$$\Delta w_c = \frac{\int_0^{\infty} |W(jw)| dw}{|W(jw)|_{\max}} \quad (1.30)$$

или, так как интеграл в правой части выражения (1.30) часто расходится, для определения ширины полосы пропускания используют следующее соотношение

$$\Delta w_c = \frac{\int_0^{\infty} |W(jw)|^2 dw}{|W(jw)|_{\max}^2}. \quad (1.31)$$

В зависимости от того, в каком соотношении находятся между собой Δw_c и основная частота w_0 , различают два класса систем:

- 1) широкополосные, у которых ширина полосы пропускания намного превышает значение основной частоты;
- 2) узкополосные, у которых $w_0 \gg \Delta w_c$.

Пример 3.

ЛДС описывается дифференциальным уравнением

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t),$$

её частотная характеристика :

$$W(jw) = \frac{1}{1 + jwT} = \frac{1 - jwT}{1 + w^2T^2} = \frac{1}{1 + w^2T^2} - j \frac{wT}{1 + w^2T^2};$$

$$|W(jw)| = \frac{1}{\sqrt{1 + w^2T^2}}.$$

Определим верхнюю граничную частоту w_B :

$$1) 1 - \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + w^2T^2}}; \quad 1 + w^2T^2 = \frac{1}{(1 - \gamma)^2};$$

$$w_B = \frac{1}{T} \sqrt{\frac{1}{(1 - \gamma)^2} - 1}.$$

2)

$$\Delta w_c = \frac{\int_0^{\infty} |W(jw)| dw}{|W(jw)|_{\max}} = \int_0^{\infty} \frac{dw}{\sqrt{1 + w^2T^2}} \text{ — расходится.}$$

3)

$$\Delta w_c = \frac{\int_0^{\infty} |W(jw)|^2 dw}{|W(jw)|_{\max}^2} = \int_0^{\infty} \frac{dw}{1 + w^2 T^2};$$

$$wT = \operatorname{tg} \varphi, \quad w = \frac{1}{T} \operatorname{tg} \varphi, \quad dw = \frac{1}{T} * \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi};$$

$$\Delta w_c = \frac{1}{T} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \cos^2 \varphi} = \frac{1}{T} \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{1}{T} * \frac{\pi}{2}.$$

Обобщим:

$$\Delta w_c = C_1 * \frac{1}{T}. \quad (1.32)$$

Для этой же системы $\tau_u = C_2 * T$:

$$\tau_u * \Delta w_c = \operatorname{const}.$$

То есть, произведение ширины полосы пропускания ЛДС на длительность импульсной переходной характеристики есть величина постоянная, которая зависит от способа задания этих характеристик.

1.2 Математическое описание процессов (сигналов)

1.2.1 Основные характеристики процессов и их классификация

Процессом или *сигналом* называется любая функция времени. Все наблюдаемые процессы в самом общем виде можно классифицировать как детерминированные и случайные. К детерминированным относятся процессы, которые можно описать точными математическими соотношениями. Рассмотрим, например, твердое тело, подвешенное на упругой пружине к неподвижной основе. Пусть m - масса тела (оно предполагается абсолютно жестким), а k - коэффициент жесткости пружины. Масса пружины полагается равно нулю. Предположим, что тело получает начальное смещение X из положения равновесия и освобождается в момент времени $t=0$. На основании законов механики можно указать соотношение

$$x(t) = X \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t, \quad t \geq 0 \quad (1.33)$$

которое точно описывает положение тела в любой момент времени в будущем. Следовательно, физический процесс, характеризующий положение тела, является детерминированным.

На практике встречается немало физических явлений, которые с высокой степенью точности могут быть описаны точными математическими соотношениями. Однако, можно назвать множество и других физических процессов, имеющих недетерминированный, случайный характер. Например, изменение высоты волн на поверхности моря, изменения напряжения на выходе генератора, помехи в канале связи - все это процессы, которые не могут быть описаны точными математическими соотношениями. Точное значение такого процесса в некоторый момент времени в будущем предсказать невозможно. Эти процессы случайны по своей природе и должны описываться не точными уравнениями, а при помощи осредненных статистических характеристик.

Классификация детерминированных процессов

Процессы, описывающие детерминированные явления, могут быть периодическими и непериодическими. В свою очередь периодические процессы можно разделить на гармонические и полигармонические. К непериодическим относятся процессы, удовлетворяющие условию абсолютной интегрируемости и не удовлетворяющие этому условию. Кроме перечисленных типов процессов на практике могут встречаться и любые их комбинации.

1.2.2 Математическое описание детерминированных сигналов

Гармонические процессы

Гармоническими называются периодические процессы, которые могут быть описаны функцией времени

$$x(t) = X \sin(2\pi f_0 t + \theta) \quad (1.34)$$

где

X - амплитуда;

f_0 - циклическая частота, измеряемая в циклах на единицу времени;

θ - начальная фаза, измеряемая в радианах;

$x(t)$ - значение функции в момент t .

Описываемое формулой (1.34) гармоническая функция времени называется обычно гармоническим колебанием. На практике при анализе гармонического процесса начальной фазой часто пренебрегают. Тогда имеем

$$x(t)=X\sin(2\pi f_0 t) \quad (1.35)$$

Соотношение (1.35) можно представить графически в функции времени или в амплитудно-частотном изображении, как это показано на рисунке 8.

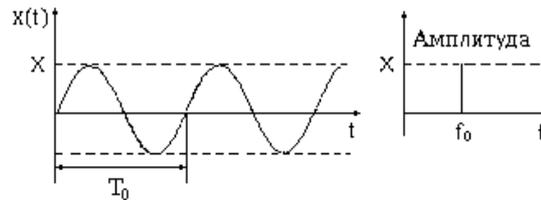


Рисунок 8 - Гармонический сигнал и его спектр

Интервал времени, в течение которого происходит одно полное колебание, называется периодом T . Число циклов в единицу времени называется частотой f . Частота и период связаны соотношением

$$T_0 = \frac{1}{f_0} \quad (1.36)$$

Отметим, что представленный на рисунке 8 частотный спектр состоит только из одной составляющей амплитуды на данной частоте. Такой спектр называют *дискретным* или *линейчатым*. Примерами гармонических процессов являются колебания напряжения на выходе идеального генератора переменного тока, вибрации несбалансированного ротора и пр.

Полигармонические процессы

К полигармоническим относятся такие типы периодических сигналов, которые могут быть описаны функцией времени, точно повторяющей свои значения через одинаковые интервалы

$$x(t)=x(t+nT), n=1,2,3,\dots \quad (1.37)$$

Как и в случае гармонического процесса, интервал времени, в течение которого происходит одно полное колебание, называется *периодом* T . Число циклов в единицу времени называют *основной частотой* f . Очевидно, что гармонический процесс является частным случаем полигармонического при совпадении основной частоты последнего с частотой гармонического сигнала. Как правило, полигармонические процессы могут быть представлены рядом Фурье.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi nft + b_n \sin 2\pi nft),$$

где $f = \frac{1}{T}$;

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos 2\pi nft + dt, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.38)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin 2\pi nft + dt, n = 0, 1, 2, \dots$$

Возможен и другой способ записи ряда Фурье для полигармонического процесса:

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(2\pi nf - \theta_n), \quad (1.39)$$

где $X_0 = \frac{a_0}{2}$;

$$X_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, n=1, 2, 3, \dots$$

$$\theta_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}, n=1, 2, 3, \dots$$

Как видно из формулы (1.39), полигармонические процессы состоят из постоянной компоненты X_0 и бесконечного числа синусоидальных компонент, называемых гармониками, с амплитудами X_n и начальными фазами θ . Частоты всех гармоник кратны основной частоте f .

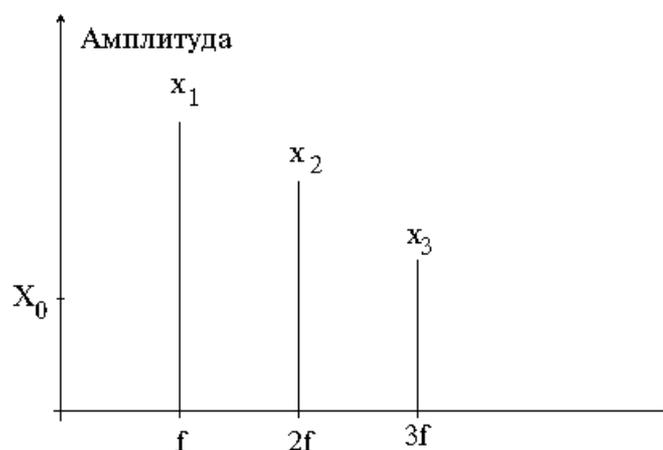


Рисунок 9 - Спектр полигармонического процесса

На практике при анализе периодических процессов начальные фазы часто не принимаются во внимание. В этом случае формуле (1.39) соответствует дискретный спектр, изображенный на рисунке 9. Иногда полигармонические процессы состоят всего из нескольких компонент. В других случаях компонента с основной частотой может отсутствовать.

Центрированным называют сигнал, лишенный постоянной составляющей

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) \quad (1.40)$$

Полная энергия сигнала описывается соотношением

$$A = \int_0^T X^2(t) dt$$

$$A = \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \sin^2(k\omega t + \varphi_k) dt = \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \quad (1.41)$$

то есть энергия сигнала пропорциональна сумме квадратов бесконечного ряда гармоник.

Часто в качестве модели сигнала используется усеченный ряд Фурье

$$X_m(t) = \sum_{k=1}^N (a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t), \quad (1.42)$$

причем N определяется в предположении, что энергия модели составляет 95% энергии самого сигнала, что эквивалентно отысканию верхней граничной частоты и, следовательно, нахождению частотного диапазона сигнала.

Физические явления, которым соответствуют полигармонические процессы, встречаются гораздо чаще явлений, описываемых простой гармонической функцией. В действительности когда тот или иной процесс относят к типу гармонических, то зачастую при этом имеют в виду только приближенное представление процесса, который на самом деле является полигармоническим. Например, при тщательном исследовании колебаний напряжения на выходе генератора переменного тока можно обнаружить гармоники высших порядков.

Математическое описание непериодических сигналов

Как уже говорилось выше, все непериодические сигналы условно можно подразделить на два класса:

1) сигналы, удовлетворяющие условию абсолютной интегрируемости

$$\int_0^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

2) сигналы, не удовлетворяющие этому условию. Вторые из них можно рассматривать и как процессы, которые формируются суммированием двух или более волн с произвольными частотами. Эти процессы обладают свойством

$$\int_0^{\infty} |x(t)| dt = \infty$$

Как видим, интегрирование по времени здесь производится в пределах $0 \leq t < \infty$. На практике же мы всегда ограничены некоторым конечным временем измерения $0 \leq t < t_u$. Но чаще приходится давать описание сигналов на участке времени, значительно превосходящем время измерения $t_u \ll T$. Сигнал $x(t)$ также может быть представлен в виде ряда Фурье

$$x(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t)$$

Такие процессы так же обладают линейчатым спектром (в соответствии с рисунком 10), однако, в этом случае спектр не носит убывающего характера

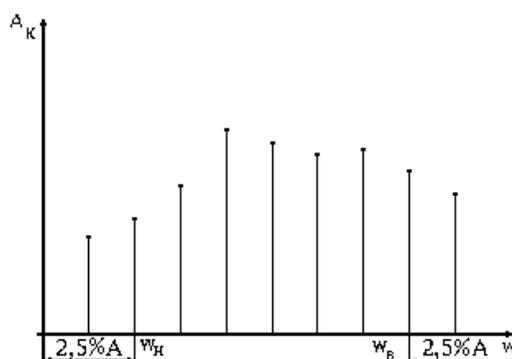


Рисунок 10 - Спектр непериодического сигнала, не

удовлетворяющего условию абсолютной интегрируемости

Модель центрированного сигнала строим точно так же, как и в случае полигармонического процесса

$$\overset{0}{X}_m(t) \sum_{k=m}^N A_k \sin(kwt + \varphi_k), \quad (1.43)$$

однако здесь частота w имеет совершенно другой смысл, так как T в данном случае не есть период сигнала, а лишь интервал наблюдения. Энергия модели так же принимается равной 95% энергии сигнала. Нижняя и верхняя границы частотного диапазона определяются отсечением 5% энергии, как это показано на рисунке 10.

$$A_m = 0.95A; \quad (1.44)$$

$$\frac{T}{2} = \sum_{k=1}^m A_k^2 = 0.025A; \quad \frac{T}{2} = \sum_{k=m}^{\infty} A_u^2 = 0.025A; \quad \text{или} \quad \frac{T}{2} = \sum_{k=1}^N A_k^2 = 0.975A$$

$$w_h = mw$$

$$w_b = Nw$$

Обратимся теперь к вопросам математического описания детерминированных процессов, удовлетворяющих условию абсолютной интегрируемости

$$\int_0^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Для описания таких сигналов используют прямое и обратное преобразования Фурье, то есть сигналы этого типа обладают не линейчатым, а непрерывным, гладким спектром

$$x(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.45)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Фурье - образ сигнала $x(t)$ - его спектр или частотная характеристика $X(j\omega)$. Для удобства частотную характеристику представляют в нескольких формах:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt \quad (1.46)$$

$\text{Re}X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt$ - вещественная частотная характеристика, четная функция частоты;

$\text{Im}X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt$ - мнимая частотная характеристика, нечетная функция частоты.

$$X(j\omega) = \text{Re}X(j\omega) - j\text{Im}X(j\omega) = \sqrt{R^2 + I^2} \exp\left[-j \arctg \frac{\text{Im} X(j\omega)}{\text{Re} X(j\omega)}\right]$$

$\arctg \frac{\text{Im} X(j\omega)}{\text{Re} X(j\omega)}$ - фазо-частотная характеристика;

$\sqrt{R^2 + I^2}$ - амплитудно-частотная характеристика.

Амплитудно-частотная характеристика может быть найдена и без предварительного определения вещественной и мнимой частотных характеристик:

$$|x(j\omega)| = \sqrt{|x(j\omega)|^2} = \sqrt{x(j\omega)x(-j\omega)}$$

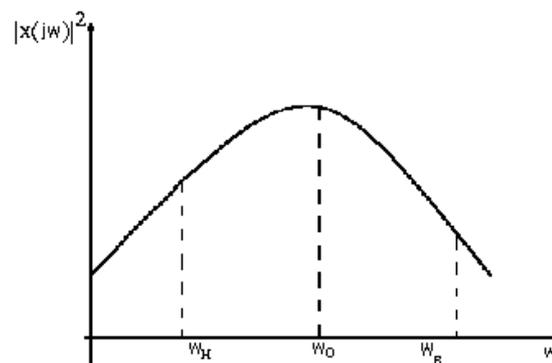


Рисунок 11 - Амплитудно-частотная характеристика детерминированного сигнала с гладким спектром

На рисунке 11 изображена АЧХ сигнала рассматриваемого типа. То значение частоты, при котором АЧХ имеет максимум,

Диапазон частот, в котором амплитудно-частотный спектр имеет значения, близкие к максимальному, называется частотным диапазоном сигнала. Его границы $-w_n, w_b$. $\Delta w = w_b - w_n$ - ширина спектра сигнала.

Существует несколько способов определения частотного диапазона. Рассмотрим эти способы.

Основным является энергетический подход к определению частотного диапазона. Вычислим энергию сигнала в предположении, что время изменяется в бесконечных пределах.

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

Перепишем выражение для энергии

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(jw)e^{jw t} dw \right\} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(jw) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{jw t} dt \right\} dw, \end{aligned}$$

но выражение в скобках равно $X(-jw)$, тогда

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x(jw)|^2 dw$$

то есть энергия сигнала зависит только от амплитудно-частотного спектра и не зависит от фазо-частотного спектра. Вклад в энергию дают все частоты. Соотношение

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x(jw)|^2 dw \quad (1.47)$$

называют равенством Парсеваля. Под частотным диапазоном сигнала понимают полосу частот, в которой сосредоточено 95% всего сигнала (в соответствии с рисунком 12).

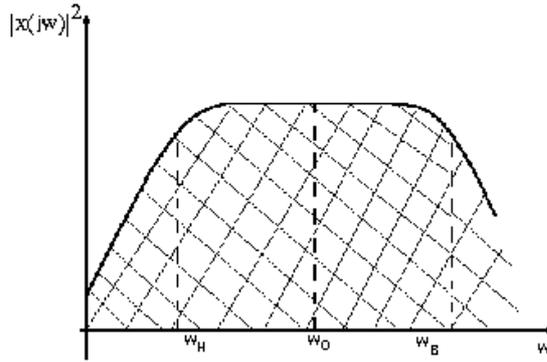


Рисунок 12 - Определение частотного диапазона сигнала по энергетическому критерию

Запишем уравнения для определения границ частотного диапазона

$$\int_{w_H}^{w_B} |x(jw)|^2 dw = 0.95 \int_0^{\infty} |x(jw)|^2 dw \quad (1.48)$$

Отсюда находят верхнюю и нижнюю границы полосы частот. Однако, уравнение одно, а неизвестных два. Поэтому логично воспользоваться следующим подходом:

$$\begin{cases} \int_0^{w_H} |x(jw)|^2 dw = 0.025 \int_0^{\infty} |x(jw)|^2 dw \\ \int_{w_B}^{\infty} |x(jw)|^2 dw = 0.025 \int_0^{\infty} |x(jw)|^2 dw \end{cases} \quad (1.49)$$

Оба эти уравнения имеют единственное решение. Далее можно найти ширину полосы частот $\Delta w = w_B - w_H$. Или, при известной основной частоте сигнала, можно предположить, что частотный диапазон симметричен относительно основной частоты w :

$$\begin{cases} w_H = w_0 - \frac{\Delta w}{2} \\ w_B = w_0 + \frac{\Delta w}{2} \end{cases} \quad (1.50)$$

Полученные значения верхней и нижней граничных частот подставляем в равенство Парсеваля:

$$\int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} |x(j\omega)|^2 d\omega = 0.95 \int_0^{\infty} |x(j\omega)|^2 d\omega \quad (1.51)$$

При известной основной частоте это - уравнение с одним неизвестным и единственным решением.

Рассмотрим теперь некоторые другие подходы к определению частотного диапазона. Согласно первого из них, называемому метрологическим(в соответствии с рисунком 13), под полосой частот понимают координаты пересечения кривой АЧС с некоторой прямой, проведенной параллельно оси частот.

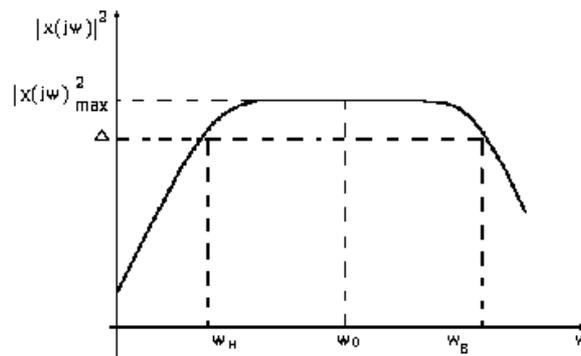


Рисунок 13 - Метрологический подход к определению частотного диапазона сигнала

$$|X(j\omega)|^2 = |X(j\omega)|^2 - \Delta \approx |X(j\omega)|_{\max}^2 \quad (1.52)$$

$$\frac{|X(j\omega)|^2}{|X(j\omega)|_{\max}^2} = 1 - \frac{\Delta}{|X(j\omega)|_{\max}^2} = 1 - j \quad (1.53)$$

Часто выбирают $j=0.05$, а вообще j назначают, исходя из конкретных технических условий, например, в радиотехнике принято считать $j=0.5$.

Следующий, и последний подход позволяет определять ширину спектра по формуле:

$$\Delta\omega_c = \frac{\int_0^{\infty} |x(j\omega)|^2 d\omega}{|x(j\omega)|_{\max}^2} \quad (1.54)$$

нижняя и верхняя границы частотного диапазона определяются в предположении их симметричности относительно w_0 :

$$\begin{cases} w_H = w_0 - \frac{\Delta w_c}{2} \\ w_B = w_0 + \frac{\Delta w_c}{2} \end{cases}$$

На практике все сигналы подразделяются на две группы: широкополосные и узкополосные. К узкополосным относятся сигналы, ширина спектра которых значительно меньше основной частоты w_0

$$\Delta w_c \ll w_0$$

Широкополосные - это такие сигналы, у которых частотный диапазон значительно превышает основную частоту :

$$\Delta w_c \gg w_0$$

Обобщенный подход к математическому описанию детерминированных сигналов

В качестве обобщенной модели любого детерминированного сигнала можно предложить модель следующего вида

$$x_m(t) = \sum_k^N \lambda_k \varphi_k(t) \quad (1.55)$$

где: $\varphi_k(t)$ - координатные (базисные) функции;

λ_k - параметры модели сигнала или коэффициенты разложения сигнала в ряд по функциям $\varphi_k(t)$.

Модель всегда отличается от самого сигнала, то есть всегда существует разница

$$x_m(t) - x(t)$$

Станем рассматривать сигнал на отрезке $0 \leq t \leq T$, а в качестве критерия адекватности модели возьмем величину

$$\Delta = \int_0^T \{x_m(t) - x(t)\}^2 dt$$

- квадратичную погрешность или

взвешенную квадратичную погрешность

$$\delta = \int_0^T \{x_m(t) - x(t)\} \rho(t) dt \quad (1.56)$$

$\rho(t)$ - весовая функция, выбираемая из технических условий и вводимая для того, чтобы на данном временном отрезке обеспечить наилучшую адекватность модели.

$$\delta = \int_0^T x_m^2(t) \rho(t) dt - 2 \int_0^T x_m(t) x(t) \rho(t) dt + \int_0^T x^2(t) \rho(t) dt$$

Рассмотрим δ как функцию параметров модели λ : $\delta > 0$, δ , - квадратичная форма и поэтому имеет единственный экстремум - минимум.

Условия экстремума функции нескольких переменных :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial \lambda_m} &= 0, (m = \overline{0, N}) \\ \frac{\partial \delta}{\partial \lambda_m} &= 2 \int_0^T x_m(t) \frac{\partial x_m(t)}{\partial \lambda_m} \rho(t) dt - 2 \int_0^T \frac{\partial x_m(t)}{\partial \lambda_m} x(t) \rho(t) dt = 0 \\ \int_0^T x_m(t) \frac{\partial x_m(t)}{\partial \lambda_m} \rho(t) dt &= \int_0^T \frac{\partial x_m(t)}{\partial \lambda_m} x(t) \rho(t) dt \end{aligned}$$

Однако, $\frac{\partial x_m(t)}{\partial \lambda_m} = \varphi_m(t)$, подставляем в наше выражение

$$\int_0^T x_m(t) \varphi_m(t) \rho(t) dt = \int_0^T \varphi_m(t) x(t) \rho(t) dt$$

и подставляем в это соотношение выражение для модели

$$\begin{aligned} x_m(t) &= \sum_{k=0}^N \lambda_k \varphi_k(t) \\ \sum_{k=0}^N \lambda_k \int_0^T \{ \varphi_k(t) \varphi_m(t) \rho(t) dt \} - \int_0^T \varphi_m(t) x(t) \rho(t) dt &= 0 \end{aligned} \quad (1.57)$$

То есть, чтобы отыскать параметры λ_k , необходимо решить систему (N+1) уравнений с (N+1) неизвестными, что достаточно

неудобно. Но существует и другой путь.

Если выполняются условия ортогональности базисных функций,

$$\int_0^T \varphi_k(t)\varphi_m(t)\rho(t)dt = \begin{cases} 0, k \neq m \\ \int_0^T \varphi_k(t)\varphi_m(t)\rho(t)dt = \beta_m, k = m \end{cases}$$

то наше выражение примет вид

$$\lambda_m \int_0^T \varphi_m^2(t)\rho(t)dt - \int_0^T \varphi_m(t)x(t)\rho(t)dt = 0$$

$$\lambda_m \beta_m - \int_0^T \varphi_m(t)x(t)\rho(t)dt = 0$$

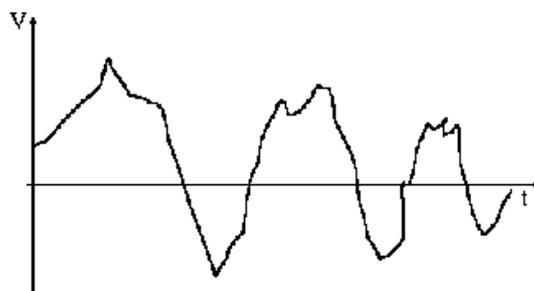
Таким образом система уравнений сводится к совокупности (N+1) уравнений, каждое из которых имеет единственное неизвестное, которое может быть найдено :

$$\lambda_m = \frac{1}{\beta_m} \int_0^T \varphi_m(t)x(t)\rho(t)dt = 0 \quad (1.58)$$

1.2.3 Математическое описание случайных процессов

Классификация случайных процессов

Как говорилось ранее, процессы, соответствующие случайным физическим явлениям, нельзя описать точными математическими соотношениями, поскольку результат каждого наблюдения над процессом не воспроизводим. То есть, исход любого наблюдения представляет собой лишь один из многих возможных результатов. Рассмотрим, изменение напряжения на выходе генератора некоторого шума.



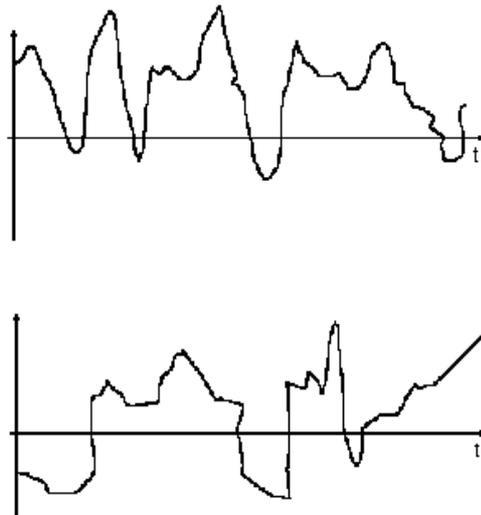


Рисунок 14 - Реализации на выходе генератора шума

Как видно из рисунка 14, записи выходного напряжения генератора от реализации к реализации меняются. Кроме того, напряжение на выходе второго такого же генератора будет изменяться совершенно другим образом, чем у первого.

Функция времени, описывающая случайное явление, называется выборочной функцией или реализацией .

Множество всех реализаций, которые могут быть получены при регистрации данного случайного явления, называется случайным или стохастическим процессом. То есть реализация, полученная в результате наблюдений над случайным физическим явлением, представляет собой элемент множества возможных физических реализаций случайного процесса.

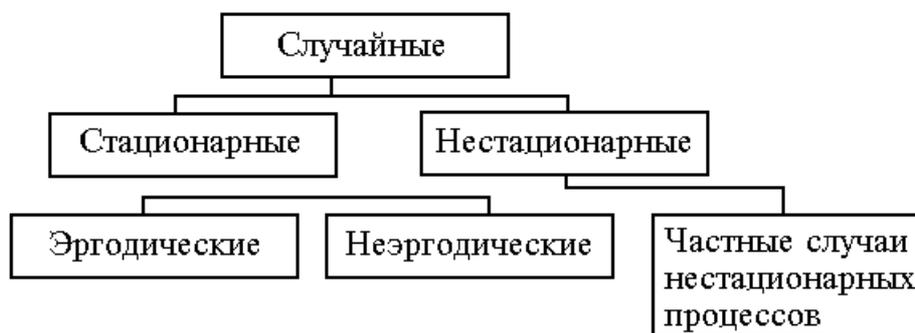


Рисунок 15 - Классификация случайных процессов

Различают стационарные и нестационарные случайные процессы. В свою очередь стационарные процессы могут быть эргодическими и неэргодическими. Для нестационарных существует

специальная классификация нестационарности. Классификация случайных процессов и связь между различными их классами показана на рисунке 15.

Обсудим теперь общие черты и физический смысл указанных категорий процессов.

Стационарные случайные процессы

Физическое явление при рассмотрении с позиций теории случайных процессов (сигналов) можно описать в любой момент времени осреднением по ансамблю реализаций, представляющих данный случайный процесс. Рассмотрим ансамбль выборочных функций, образующий случайный процесс (рисунок 16).

Математическое ожидание или среднее значение (первый начальный момент распределения) процесса в момент времени t может быть найдено путем суммирования мгновенных значений каждой реализации ансамбля в момент t деления этой суммы на число реализаций. Аналогичным образом корреляция между значениями случайного процесса в два различных момента времени (второй смешанный центральный момент, который называют *автокорреляционной функцией*) определяется путем осреднения по ансамблю произведений мгновенных значений центрированного процесса $X(t) = X(t)$ в моменты t и $t + \tau$. То есть, математическое ожи

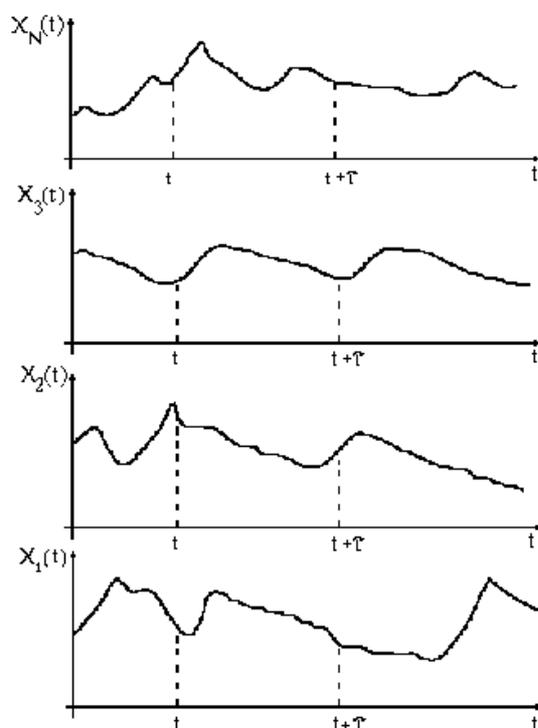


Рисунок 16 - Ансамбль реализаций, образующих случайный процесс

дание $m_x(t)$ и автокорреляционная функция $R_x(t, t+\tau)$ процесса $\{X(t)\}$ (фигурные скобки означают ансамбль реализаций) определяются из соотношений

$$m_x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n(t) \quad (1.59a)$$

$$R_x(t, t+\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k^0(t) X_k^0(t+\tau) \quad (1.59b)$$

причем при суммировании предполагается, что появление всех реализаций равновероятно. В общем случае, когда функции $m_x(t)$ и $R_x(t, t+\tau)$ меняются с изменением момента времени t , случайный процесс $\{X(t)\}$ называется *нестационарным*. В частном случае независимости $m_x(t)$ и $R_x(t, t+\tau)$ от t случайный процесс $\{X(t)\}$ называется *стационарным в широком смысле*. Математическое ожидание такого процесса постоянно, а автокорреляционная функция представляет собой функцию единственной переменной - временного сдвига между сечениями процесса, то есть $m_x(t) = m_x$, $R_x(t, t+\tau) = R_x(\tau)$.

Для случайного процесса $\{X(t)\}$ можно отыскать бесконечное множество начальных и центральных (в том числе и смешанных) моментов; их совокупность полностью описывает плотности распределения процесса. Когда все начальные и центральные моменты не зависят от времени, процесс называют *стационарным в узком смысле* (более точное определение такого типа стационарности будет приведено ниже). Любой процесс, стационарный в узком смысле, является стационарным и в широком, но не наоборот.

Эргодические случайные процессы

Выше был рассмотрен вопрос об определении свойств случайного процесса путем осреднения по ансамблю в отдельные моменты времени. Однако, во многих случаях представляется возможным описать свойства стационарного случайного процесса путем осреднения по времени отдельных достаточно продолжительных реализаций ансамбля. Рассмотрим, например, K -ю выборочную функцию случайного процесса, изображенного на рисунке 16. Математическое ожидание $m_x(k)$ и автокорреляционная функция этой реализации $R_x(\tau, k)$ определяются выражениями

$$M_x(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_k(t) dt \quad (1.60a)$$

$$R_x(\tau, k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_k(t) X_k(t + \tau) dt \quad (1.606)$$

Если случайный процесс $\{X(t)\}$ стационарен и $m_x(k)$ и $R_x(\tau, k)$, определенные формулами (1.60), одинаковы для всех реализаций, то случайный процесс $\{X(t)\}$ называется *эргодическим*. Для эргодического случайного процесса среднее значение и автокорреляционная функция (а также другие моменты, определяемые осреднением по времени) равны соответствующим средним по ансамблю: $m_x(k) = m_x$, $R_x(\tau, k) = R_x(\tau)$. Заметим, что только стационарные процессы могут обладать свойством эргодичности.

Эргодические процессы представляют важную разновидность сигналов, так как все их свойства могут быть определены осреднением по времени одной единственной реализации (хотя и непременно достаточно продолжительной). На практике процессы, соответствующие стационарным случайным явлениям, как правило, обладают свойством эргодичности, что позволяет правильно определить характеристики стационарного случайного процесса по одной выборочной реализации.

Нестационарные случайные процессы

К нестационарным относятся все случайные процессы, упомянутые в приведенной выше классификации, не обладающие свойством стационарности хотя бы в широком смысле. Характеристики нестационарного процесса в общем случае представляют собой некоторые функции времени, определить которые можно только осреднением по ансамблю реализаций, образующих процесс. В практических задачах часто представляется невозможным получить достаточно большое число реализаций для отыскания характеристик процесса с необходимой достоверностью. Это обстоятельство препятствует развитию практических методов оценивания и анализа нестационарных случайных процессов.

Во многих случаях в классе нестационарных процессов, соответствующих реальным физическим явлениям, можно выделить особые типы нестационарности, для которых задача оценивания и анализа упрощается. Например, некоторые случайные явления описываются нестационарным случайным процессом $\{Y(t)\}$, каждая реализация которого имеет вид $Y(t) = A(t)X(t)$, где $X(t)$ - реализация стационарного случайного процесса $\{X(t)\}$, $A(t)$ - детерминированный множитель. Процессы такого типа относятся к нестационарным процессам, реализации которых имеют общий детерминированный тренд. Если нестационарный процесс соответствует конкретной модели такого типа, то для его описания нет необходимости производить осреднение по ансамблю: любые

требуемые характеристики можно оценить по одной реализации, как и для эргодических процессов.

Стационарные реализации

Понятие стационарности, рассмотренное выше, связано с осреднением по ансамблю характеристик случайного процесса. Однако на практике часто приходится решать вопрос о стационарности или нестационарности процесса, представленного всего одной реализацией. В этом случае используется несколько отличное от приведенного выше понятие стационарности. Когда речь идет о стационарности одной выборочной функции, то это означает, что характеристики, рассчитанные по коротким временным интервалам, не меняются значительно для различных интервалов. Термин "значительно" используется здесь для обозначения того факта, что наблюдаемые изменения больше, чем можно ожидать за счет обычной выборочной статистической изменчивости.

Для разъяснения этого рассмотрим реализацию $X(t)$, полученную по K -й реализации случайного процесса $\{X(t)\}$. Определим математическое ожидание и автокорреляционную функцию осреднением по времени на коротком интервале продолжительности T при начальном моменте t :

$$m_x(t,k) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X_k(t) dt \quad (1.61a)$$

$$R_x(t, t+\tau, k) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X_k(t) X_k(t+\tau) dt \quad (1.61b)$$

В общем случае, когда выборочные характеристики, определенные формулами (1.61), меняются значительно при изменении начального момента t , отдельная реализация называется *нестационарной*. В частном случае, когда выборочные характеристики, определенные этими формулами, не меняются значительно при изменении t , реализация называется *стационарной*. Реализация эргодического процесса всегда стационарна. С другой стороны, реализации физически важных нестационарных процессов не обладают свойством стационарности. Следовательно, если предположение об эргодичности оправдано, то подтверждение свойства стационарности одной реализации может служить

достаточным основанием для допущения стационарности и эргодичности случайного процесса, к которому принадлежит данная реализация.

1.1.4 Исчерпывающее описание случайных процессов

Рассмотрим вновь случайный процесс, реализации которого изображены на рисунке 16. Зафиксируем значение временного аргумента. При фиксированном аргументе случайный процесс превращается в случайную величину и носит название *сечения* случайного процесса. Для приближенного описания случайного процесса зададим его в равноотстоящие (через интервал Δt) моменты времени, то есть получим сечения t_1, t_2, t_3 , и т. д. Устремим Δt к нулю, число сечений N при этом устремляется к бесконечности.

Сигнал (процесс) превращается в систему бесконечного числа случайных величин $\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)\}$.

Исчерпывающей характеристикой системы случайных величин является совместный закон распределения, заданный в той или иной форме, например, в дифференциальной: $f\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)\}$. Таким образом, для случайного процесса исчерпывающей характеристикой является бесконечномерная плотность распределения сечений. Для удобства в дальнейшем станем записывать ее в следующей форме:

$f(X_1, t_1, X_2, t_2, \dots, X_N, t_N, \dots)$.

И теперь вернемся к определению стационарности или не стационарности сигнала и зададим его несколько строже, нежели это было выполнено ранее.

В зависимости от поведения плотности распределения при прибавлении к каждому временному аргументу одной и той же величины, различают нестационарные процессы, слабо стационарные и стационарные в узком смысле.

Если при прибавлении к каждому временному аргументу одной и той же величины бесконечномерная плотность вероятности не изменяется, то сигнал (процесс) называется стационарным в узком смысле (см. определение выше), а в противном случае процесс таковым не является (т. е. это - либо процесс, стационарный лишь в широком смысле, либо вовсе нестационарный процесс).

То есть условие стационарности (в узком смысле) может быть записано следующим образом:

$$f(X_1, t_1+u; X_2, t_2+u; \dots, X_m, t_m+u; \dots) = f(X_1, t_1; X_2, t_2; \dots, X_m, t_m; \dots) \quad (1.62)$$

Выберем $t_1+u=0$, тогда $u=-t_1$: выражение для плотности приобретает вид:

42

$$f(X_1, 0; X_2, t_2-t_1; \dots, X_m, t_m-t_1; \dots)$$

для двумерной плотности распределения соблюдается соотношение

$$f(X_1, 0; X_2, t_2 - t_1) = f(X_1, t_1; X_2, t_2) \quad (1.63)$$

то есть плотность вероятности зависит не от времени, а от временного сдвига между сечениями, а одномерная плотность распределения вообще не зависит от какого-либо временного аргумента:

$$f(X_1, t_1) = f(X_1, 0) \quad (1.64)$$

Вместо плотностей вероятностей для описания случайных процессов можно использовать и характеристические функции, представляющие собой преобразования Фурье от соответствующих плотностей распределения. Так, например, N -мерная характеристическая функция определяется соотношением:

$$\begin{aligned} \varphi_n(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n)} f(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n &= \quad (1.65) \\ = M[\exp(ju_1 x_1 + ju_2 x_2 + \dots + ju_n x_n)] \end{aligned}$$

Отметим, что для независимых случайных величин характеристическая функция системы равна произведению характеристических функций величин, составляющих систему.

Иногда вместо плотностей вероятностей используют интегральные законы распределения - функции распределения. Одномерная функция распределения определяет относительную долю значений $x_i(t)$, $i=1, 2, 3, \dots$, которые меньше некоторой величины X_i :

$$F_1(X_1, t_1) = \int_{-\infty}^{X_1} f(u, t_1) du \quad (1.66)$$

Очевидно, что для значений X_1 , в которых функция $F(x_1, t_1)$ дифференцируема, справедливо равенство

$$f(X_1, t_1) = \frac{\partial F(X_1, t_1)}{\partial X_1} \quad (1.67)$$

Двумерная функция распределения определяется соотношением

$$F_1(X_1, t_1, X_2, t_2) = \int_{-\infty}^{X_1} \int_{-\infty}^{X_2} f(u_1, t_1, u_2, t_2) du_1 du_2 \quad (1.68)$$

откуда следует, что

$$f(X_1, t_1, X_2, t_2) = \frac{\partial^2 F(X_1, t_1, X_2, t_2)}{\partial X_1 \partial X_2} \quad (1.69)$$

где функция, приведенная в выражении, есть N - мерная функция распределения.

1.2.4. Приближенное описание случайных процессов

Как уже говорилось выше, для полного описания случайного процесса требуется полный набор его реализаций и математическое (в смысле определения вероятностных законов распределения возможных значений процесса) описание его свойств.

Для решения такой задачи в теории стохастических сигналов используется уже известный приём применения характеристик, которые на практике называют моментными или, попросту, начальными или центральными моментами сигнала $\{X(t)\}$ или совокупности сигналов $\{X(t)\}$ и $\{Y(t)\}$.

Начальным моментом порядка K случайного процесса $\{X(t)\}$ называется такая функция времени, которая в каждый момент времени t, равна математическому ожиданию K-й степени самого сигнала:

$$d_k(t) = M[X^k(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} X^k(t) f(X, t) dx \quad (1.70)$$

Для определения любого момента d_k достаточно знать одномерную функцию плотности распределения вероятностей:

$$d_1(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) f(X, t) dx \quad (1.71)$$

Это и есть математическое ожидание (или среднее значение) процесса.

Как уже говорилось выше, практически любой (и особенно стационарный по математическому ожиданию) процесс можно представить себе как аддитивную смесь постоянной (или медленно изменяющейся по среднему значению) мультипликативной составляющей.

Моменты, определяемые для централизованного сигнала $\overset{\circ}{X}(t)$, имеют название *центральных*:

Центральный момент s-го порядка - это такая функция

времени, которая в каждый момент времени равна математическому ожиданию s -й степени соответствующего центрированного сигнала.

$$\mu_s(t) = M[\overset{0}{X}^s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \overset{0}{X}^s(t) f(x, t) dx \quad (1.72)$$

Моменты 0-го и 1-го порядка неинформативны, так как

$$\mu_0(t) = 1; \mu_1(t) = 0$$

Основное применение получил второй центральный момент:

$$\mu_s(t) = M[\overset{0}{X}^2(t)] = D_x(t) \quad (1.73)$$

Это - дисперсия сигнала, которая характеризует степень разбросанности отдельных реализаций относительно математического ожидания.

Ту же информацию о процессе $\{X(t)\}$ дает и среднее квадратическое отклонение, численно равное квадратному корню из дисперсии и имеющее размерность самого сигнала.

Для описания случайных процессов используют также смешанные моменты.

Смешанным начальным моментом порядка $(k+s)$ случайного сигнала $\{X(t)\}$ называется такая функция двух временных аргументов t_1 и t_2 , которая при фиксированных значениях этих аргументов численно равна математическому ожиданию произведения k -й и s -й степеней соответствующих сечений сигнала:

$$d_{k,s}(t_1, t_2) = M[X^k(t_1)X^s(t_2)] \quad (1.74)$$

Центральный смешанный момент порядка $(k+s)$ определяется выражением вида :

45

$$\mu_{k,s}(t_1, t_2) = M[\overset{0}{X}^k(t_1) \overset{0}{X}^s(t_2)] \quad (1.75)$$

Для приближенного описания свойств случайного процесса наиболее широкое применение получил центральный смешанный момент порядка $(1+1)$:

$$\mu_{1,1}(t_1, t_2) = M[\overset{0}{X}(t_1) \overset{0}{X}(t_2)] = R_x(t_1, t_2). \quad (1.76)$$

- математическое ожидание произведения двух сечений центрированного сигнала. Это - уже упоминавшаяся автокорреляционная функция случайного сигнала $\{X(t)\}$ (авто- т. е. характеризуется корреляция, или взаимосвязь двух сечений одного и того же процесса).

Таким образом, для приближенного описания свойств сигнала используют математическое ожидание, дисперсию и автокорреляционную функцию.

Выясним, о каких свойствах сигнала несет информацию АКФ, а для этого рассмотрим ее собственные свойства.

1) АКФ обладает свойством симметричности относительно своих аргументов, то есть не изменяет своего значения при перемене временных аргументов местами:

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2, t_1) \quad (1.77)$$

2) По величине АКФ не может превышать произведения среднеквадратических отклонений соответствующих сечений:

$$R_x(t_1, t_2) \leq \sigma_x(t_1) \sigma_x(t_2) \quad (1.78)$$

3) При совпадении временных аргументов АКФ превращается в дисперсию:

$$R_x(t, t) = M[X^2(t)] = D_x(t). \quad (1.79)$$

То есть набор характеристик, необходимых для приближенного описания случайного сигнала, может быть сокращен до двух: m_x и $R_x(\tau)$.

Вернемся ко второму свойству АКФ и положим $t_1=t_2=t$:

$$R_x(t, t) \leq \sigma_x^2(t), \text{ т. е.}$$

$$R_x(t, t) \leq D_x(t). \quad (1.80)$$

Наибольшее значение АКФ имеет при равных временных аргументах, и это наибольшее значение равно дисперсии сигнала.

На практике для удобства часто используют нормированную автокорреляционную функцию, под которой понимают функцию вида

$$\rho_x(t_1, t_2) = \frac{R_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)} = \frac{M[X(t_1)X(t_2)]}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)} \quad (1.81)$$

Нормированная АКФ - величина безразмерная. По определению нормированная АКФ - это коэффициент корреляции между двумя сечениями случайного процесса.

Рассмотрим, как будут трансформироваться свойства АКФ при переходе к нормированной функции :

1) $\rho_x(t_1, t_2) = \rho_x(t_2, t_1)$;

2) $\rho_x(t_1, t_2) \leq 1$;

3) при равенстве временных аргументов:

$$t_1 = t_2 = t, \rho_x(t, t) = 1.$$

Выясним, как будет вести себя $\rho_x(t_1, t_2)$ при изменении интервала времени между сечениями $t_1 - t_2 = \tau$ от нуля до бесконечности

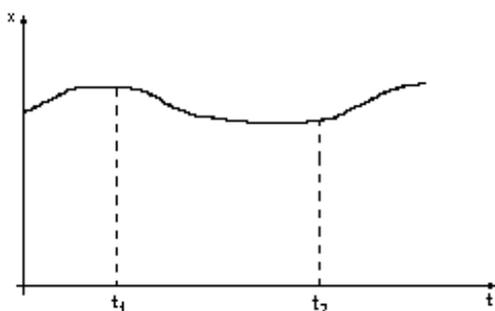


Рисунок 17 - Реализация случайного процесса (к вопросу о поведении нормированной АКФ в зависимости от интервала времени между сечениями)

Таким образом, выясняется четвертое свойство АКФ:

$$\lim_{|t_2 - t_1| \rightarrow \infty} \rho_x(t_1, t_2) = 0 \quad (1.82)$$

47

Если рассматривать АКФ как функцию интервала времени между сечениями, то это функция при τ , стремящемся к бесконечности, будет стремиться к нулю :

$$4) \lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho_x(\tau) = 0 \quad (1.83)$$

то есть взаимосвязь между сечениями будет ослабевать и даже теряться (в соответствии с рисунком 17)

Пусть имеем два случайных сигнала $\{X(t)\}$ и $\{Y(t)\}$, каждый из них можно представить в виде совокупности их сечений. Для точного их описания их следует представлять бесконечным числом сечений. То есть, сигналы представляются бесконечным числом случайных величин.

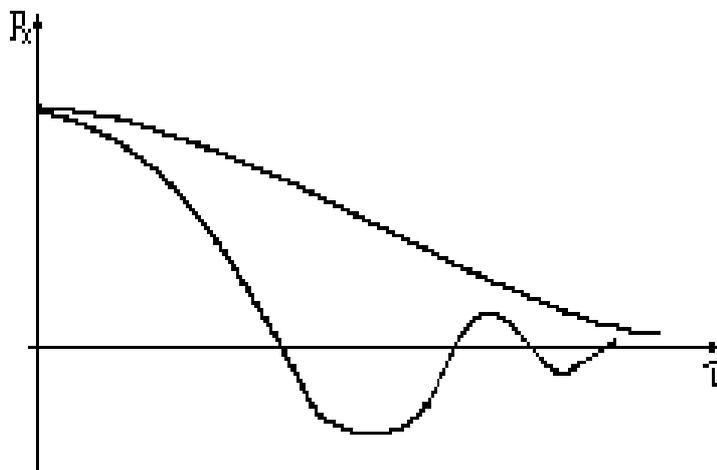


Рисунок 18 - Возможные изменения нормированной АКФ в зависимости от интервала времени между реализациями

Если совместная плотность распределения всех сечений этих сигналов не изменяется при прибавлении ко всем временным аргументам одной и той же величины, то эти сигналы называются *стационарными и стационарно - связанными*.

Рассмотрим приближенное описание свойств системы двух сигналов. Для этого будем использовать моментные характеристики.

Для каждого из сигналов указывают его математическое ожидание и АКФ :

$$m_x(t), m_y(t); R_x(t_1, t_2), R_y(t_1, t_2).$$

Кроме этих характеристик вводится еще одна: взаимная корреляционная функция $R_{xy}(t_1, t_2)$ (ВКФ).

Взаимной корреляционной функцией между двумя сигналами $\{X(t)\}$ и $\{E(t)\}$ называется такая функция времени, которая при фиксированных значениях временных аргументов равна математическому ожиданию произведения соответствующих сечений этих сигналов:

$$R_{yx}(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]. \quad (1.84)$$

Иногда вместо этой функции используют нормированную ВКФ :

$$\rho_{yx}(t_1, t_2) = \frac{R_{yx}(t_1, t_2)}{\sigma_y(t_1)\sigma_x(t_2)} = \frac{M[\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]}{\sigma_y(t_1)\sigma_x(t_2)} \quad (1.85)$$

Как видно из формулы (1.85) , ρ_{yx} - это коэффициент корреляции между сечениями $Y(t_1)$ и $X(t_2)$.

Рассмотрим свойства этих функций:

1) $R_{yx}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_2, t_1)$, так как

$$R_{yx}(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)] = M[\overset{\circ}{X}(t_2)\overset{\circ}{Y}(t_1)] = R_{xy}(t_2, t_1) \quad (1.86)$$

Взаимная корреляционная функция несимметрична относительно своих аргументов.

$$\rho_{yx}(t_1, t_2) = \rho_{xy}(t_2, t_1);$$

$$2) R_{yx}(t_1, t_2) \leq \sigma_y(t_1)\sigma_x(t_2);$$

$$\rho_{yx}(t_1, t_2) \leq 1 \quad (1.87)$$

3) при одинаковых значениях временных аргументов:

$$R_{yx}(t, t) = M[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{X}(t)] = D_{yx}(t). \quad (1.88)$$

взаимная дисперсия.

$R_{yx}(t_1, t_2)$ описывает степень линейной статистической взаимосвязи между временными сечениями различных сигналов.

Пусть $t_2 - t_1 = \tau$ - интервал времени между сечениями.

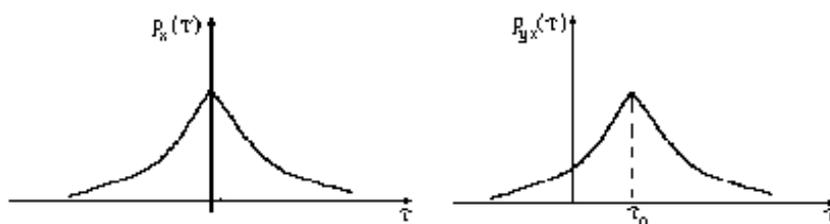


Рисунок 19 - Графики зависимостей АКФ и ВКФ от интервала времени между сечениями

АКФ симметрична, и для ее описания можно изучать только одну ветвь, а в случае ВКФ необходимо исследовать обе ветви.

Нормированная ВКФ достигает своего максимума при τ_0 , то есть два сигнала наиболее линейно связаны при этом сдвиге между их временными сечениями.

Если $\rho_{yx}(\tau)=1$, то сигналы $X(t)$ и $Y(t)$ связаны линейной функциональной зависимостью при $\tau=\tau_0$. Все понятия можно обобщить на случай системы произвольного числа сигналов $\{X(t)\}$, $i=1, \vec{N}$.

Для этого достаточно установить $m_{xi}(t)$ - математические ожидания всех сигналов;

$R_{xi}(t_1, t_2)$ - АКФ всех сигналов;

$R_{yi, xj}(t_1, t_2)$ - ВКФ между всеми парами сигналов.

Математическое описание стационарных случайных сигналов

Пусть имеем случайный процесс $X(t)$, который является стационарным. При этом его одномерная плотность вероятности будет зависеть только от X и не будет зависеть от времени:

$$f(X, t) = f(X) \quad (1.89)$$

Не будут зависеть от времени и все начальные и центральные моменты :

$$\begin{aligned} d_k(t) &= d_k \\ \mu_k(t) &= \mu_k \end{aligned}$$

и, в частности, дисперсия

$$D_x(t) = \sigma_x^2 = D_x.$$

Для АКФ справедливо следующее соотношение:

$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1)$, то есть АКФ зависит не от начала отсчета, а лишь от сдвига между временными сечениями.

Дисперсия характеризует мощность стационарного случайного сигнала, например:

$$i(t) = X(t), P(t) = i^2(t) * R, M[P(t)] = R * M[X^2(t)].$$

То есть, если предположить, что сигнал центрирован, то это выражение представляет его дисперсию (мощность, выделяемую на единичной нагрузке).

Рассмотрим свойства АКФ стационарного случайного сигнала.

$$t_2 - t_1 = \tau; R_x(t_2 - t_1) = R_x(\tau).$$

1) По величине АКФ процесса не может превышать его дисперсию;

$$R_x(\tau) \leq D_x = \sigma_x^2;$$

2) АКФ - четная функция своего аргумента :

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau);$$

3) АКФ при нулевом аргументе равна дисперсии сигнала:

$$R_x(0) = D_x.$$

Для нормированной корреляционной функции эти свойства трансформируются следующим образом :

$$1) \rho_x(\tau) \leq 1;$$

$$2) \rho_x(\tau) = \rho_x(-\tau);$$

$$3) \rho_x(0) = 1.$$

Общим для АКФ и нормированной АКФ стационарного случайного сигнала является то, что при неограниченном увеличении временного сдвига между сечениями обе они стремятся к нулю :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho_x(\tau) = 0$$

При описании свойств стационарного процесса часто указывают такой интервал времени, начиная с которого можно считать $\rho_x = 0$. Это - интервал корреляции, который принято обозначать τ_k . τ_k показывает, в каком промежутке времени сечения

сигнала сильно коррелированы (при $\tau > \tau_k$ эти сечения считаются некоррелированными). Кроме того, интервал корреляции несет информацию о частотных свойствах сигнала, определяет длительность АКФ во времени.

Рассмотрим методы определения τ_k .

1) Выбирается малая величина $\delta \ll 1$, и на расстоянии от оси времени проводятся две прямые, параллельные этой оси (в соответствии с рисунком 20).

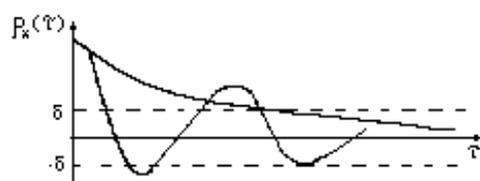


Рисунок 20 - Определение интервала корреляции
(метрологический подход)

Тот момент времени, начиная с которого удовлетворяется условие $|\rho_x(\tau)| < \delta$, принимают за τ_k . Величину δ обычно принимают равной 2 - 5% от 1.

2) На оси времени как на основании строится прямоугольник, высота которого равна единице, а площадь равна площади всей фигуры под кривой нормированной АКФ (в соответствии с рисунком 21).

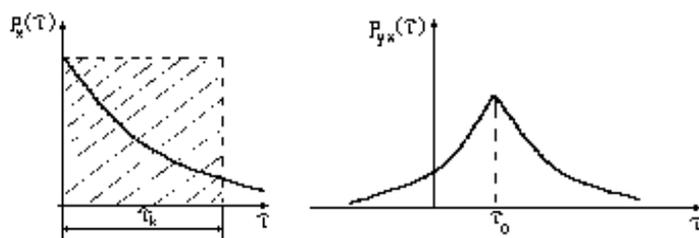


Рисунок 21 - Определение интервала корреляции
(формантный подход)

$$\tau_k = \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) d\tau \quad (1.90)$$

Этот метод применяется для определения τ_k монотонных,

не знакопеременных АКФ.

Для вычисления знакопеременных АКФ принято использовать следующие три подхода:

$$3) \quad \tau_k = \int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| d\tau \quad (1.91)$$

$$4) \quad \tau_k = \int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) d\tau \quad (1.92)$$

$$5) \quad \tau_k = \frac{\mu_N}{\mu_N - 1} \quad (1.93)$$

где μ_N - момент АКФ, определяемый соотношением

$$\mu_N = \int_0^{\infty} \tau^N \rho_X(\tau) d\tau$$

N - любое целое положительное число.

Из приведенных методов наиболее часто на практике используется четвертый.

Посмотрим, какой из приведенных способов дает наибольшее значение интервала корреляции :

$$\tau_{k1} = \int_0^{\infty} \rho_X(\tau) d\tau \leq \int_0^{\infty} |\rho_X(\tau)| d\tau = \tau_{k2}$$

$$\tau_{k3} = \int_0^{\infty} \rho_X^2(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} |\rho_X(\tau)| |\rho_X(\tau)| d\tau \leq \int_0^{\infty} |\rho_X(\tau)| d\tau = \tau_{k2}$$

так как $|\rho_X(\tau)| \leq 1$.

Таким образом, $\tau_{k1} \leq \tau_{k2}$, $\tau_{k3} \leq \tau_{k2}$.

Пример.

Пусть имеем стационарный случайный процесс $X(t)$ с нормированной корреляционной функцией

$$\rho_X(\tau) = e^{-d|\tau|}$$

53

и определим его интервал корреляции первыми четырьмя способами:

$$e^{-d|\tau|} = \delta ; -d\tau = \ln \delta ; \tau_k = \frac{1}{d} \ln \frac{1}{\delta}$$

То есть, чем больше тем круче спадает АКФ, и тем меньше величина интервала корреляции.

$$\tau_{k1} = \int_0^{\infty} e^{-d\tau} d\tau = \frac{1}{d} ; \tau_{k2} = \int_0^{\infty} e^{-d\tau} d\tau = \frac{1}{d} ;$$

$$\tau_{k3} = \int_0^{\infty} e^{-2d\tau} d\tau = \frac{1}{2d} .$$

Приближенное описание АКФ

Во-первых, АКФ может быть приближенно описана интервалом корреляции. Кроме этого, для приближенного описания АКФ используются моментные характеристики этой функции.

Нормированным моментом порядка K АКФ называется величина

$$\mu_k = \int_0^{\infty} \tau^k \rho_x(\tau) d\tau \quad (1.94)$$

Если $K = 0$, то $\mu_k = \tau_k$, то есть интервал корреляции представляет собой момент АКФ нулевого порядка. Для приближенного описания АКФ используют ее модель

$$\rho_M(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N, \tau)$$

где β_1, \dots, β_N - коэффициенты (параметры) модели.

Для описания АКФ необходимо отыскать значения этих параметров, что можно проделать, используя метод моментов, согласно которому моменты истинной АКФ должны равняться моментам модели функции корреляции:

$$\mu_k = \mu_k^{(M)}, k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.95)$$

Использование метода моментов позволяет достаточно точно

описывать АКФ при больших значениях τ .

При малых τ более целесообразно пользоваться критерием производных, который сводится к тому, что коэффициенты модели вычисляются приравнением соответствующих производных нормированной АКФ и ее модели в нуле:

$$\rho_x^{(k)}(0) = \rho_x(0), k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.96)$$

Описание системы стационарных и стационарно связанных сигналов

Пусть имеем два случайных сигнала, которые стационарно связаны между собой.

Взаимная корреляционная функция (ВКФ) системы имеет вид

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1) \overset{\circ}{Y}(t_2)]$$

Для описания системы двух случайных процессов необходимо знать двумерную плотность вероятности

$$f[X(t_1), Y(t_2)] = f(X, t_1+u; Y, t_2+u) \quad (1.97)$$

Выражение (1.97) представляет собой условие стационарной связанности.

Как и в случае АКФ, положим $\tau = t_2 - t_1$. Рассмотрим свойства ВКФ системы двух стационарно связанных сигналов.

1) Так как

$$\begin{aligned} R_{xy}(t_1, t_2) &= R_{yx}(t_2, t_1), \\ \text{то} \quad R_{xy}(\tau) &= R_{yx}(-\tau) \end{aligned} \quad (1.98)$$

(в соответствии с рисунком 22)

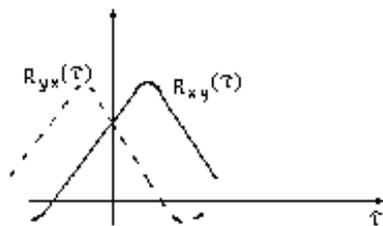


Рисунок 22 - График ВКФ системы двух стационарно связанных сигналов

2) Аналогично,

$$R_{xy}(\tau) \leq \sigma_x \sigma_y \quad (1.99)$$

55

$$3) \quad R_{xy}(0) \neq \sigma_x \sigma_y \quad (1.100)$$

Нормированная функция взаимной корреляции

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y} \quad (1.101)$$

обладает аналогичными свойствами:

$$1) \quad \rho_{xy}(\tau) = \rho_{yx}(-\tau);$$

$$2) \quad \rho_{xy}(\tau) \leq 1.$$

Для приближенного описания ВКФ используется ряд характеристик: координата и величина экстремума, интервал

взаимной корреляции, моментные характеристики и производные ВКФ при различных значениях аргумента.

Интервал взаимной корреляции двух стационарно связанных случайных сигналов определяется как интервал времени, внутри которого ВКФ отлична от нуля, а вне его - равна или близка к нулю (в соответствии с рисунком 23).

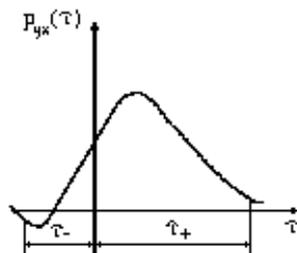


Рисунок 23 - К вопросу об определении интервала взаимной корреляции

Способы отыскания сходны со способами определения интервала корреляции с отличием, что в данном случае приходится оценивать взаимодействие как в положительной, так и в отрицательной области.

$$1) \quad \rho_{xy}(\tau) = \delta \quad (1.102)$$

$$2) \quad \tau_{\text{кв}} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 \rho_{xy}(\tau) d\tau + \int_0^{\infty} \rho_{xy}(\tau) d\tau = \\ = \int_0^{\infty} \rho_{yx}(\tau) d\tau + \int_0^{\infty} \rho_{xy}(\tau) d\tau \quad (1.103)$$

$$3) \quad \tau_{\text{кв}} = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho_{xy}(\tau)| d\tau \quad (1.104)$$

$$4) \quad \tau_{\text{кв}} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}^2(\tau) d\tau \quad (1.105)$$

Так же, как и в случае АКФ для приближенного описания ВКФ используют ее моменты, которые определяются следующим образом

$$\mu_{xy}^{(q)} = \int_0^{\infty} \tau^q \rho_{xy}(\tau) d\tau \quad (1.106)$$

q - порядок момента.

Если известна координата максимального значения ВКФ, то можно использовать и такие моменты :

$$\varepsilon_q = \int_0^{\infty} (\tau - \tau_0)^q \rho_{xy}(\tau) d\tau \quad (1.107)$$

1.2.6 Обобщенные модели случайных процессов (по Пугачеву)

Всякий случайный процесс может быть представлен в виде

$$X(t) = m_x(t) + \overset{0}{X}(t) \quad (1.108)$$

и описан моделью

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \varphi_k(t), \quad (1.109)$$

где: U_k - коэффициенты разложения случайной величины;

57

$\varphi_k(t)$ - координатные, детерминированные функции.

В качестве критерия адекватности модели исследуемому сигналу можно взять критерий минимума среднеквадратической погрешности

$$\Delta = M[\{ X_m(t) - X(t) \}^2] = \min \quad (1.110)$$

$$M[X_m(t)] = M[m_x(t)] + \sum_{k=1}^{\infty} M[U_k] \varphi_k(t) \quad (1.111)$$

Чтобы обеспечить равенство математических ожиданий модели и сигнала необходимо, чтобы сумма равнялась нулю. Это возможно, когда все случайные величины U_k центрированы. Дальнейшее построение модели сводится к отысканию U_k .

$$\Delta = \min$$

$$\overset{\circ}{X}_M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \varphi_k(t) \quad (1.112)$$

$$\Delta = M[\{\overset{\circ}{X}_M(t) - \overset{\circ}{X}(t)\}^2] = \min. \quad (1.113)$$

Это выполняется при $\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_k(t)} = 0$,

$$\text{или} \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_k(t)} = M[\{\overset{\circ}{X}_M(t) - \overset{\circ}{X}(t)\} \frac{\partial \overset{\circ}{X}_M}{\partial \varphi_k(t)}] = 0.$$

$$\text{Но} \quad \frac{\partial \overset{\circ}{X}_M}{\partial \varphi_k(t)} = U_k,$$

$$M[\{\overset{\circ}{X}_M(t) - \overset{\circ}{X}(t)\} U_k] = 0,$$

отсюда

$$M[\overset{\circ}{X}_M(t) U_k] = M[\overset{\circ}{X}(t) U_k] \quad (1.114)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} M[U_m U_k] \varphi_m(t) = M[\overset{\circ}{X}(t) U_k]_{k=0,1,\dots,\infty} \quad (1.115)$$

Это нереально, поэтому кроме требования центрированности, накладываем еще одно условие

$$M[\overset{\circ}{U}_m(t) \overset{\circ}{U}_k(t)] = R_{m,k}.$$

Для того, чтобы избежать необходимости решать систему уравнений, потребуем выполнения условия ортогональности

$$R_{m,k} = \begin{cases} D_k, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases} \quad (1.116)$$

то есть случайные величины U должны быть некоррелированными.

$$M[\overset{\circ}{U}_k^2] = D_k$$

$$D_k \varphi_k(t) = M[U_k \overset{\circ}{X}(t)], \quad k=1,2,3,\dots \quad (1.117)$$

Вместо системы уравнений получаем совокупность уравнений, каждое из которых имеет единственное неизвестное.

Определяем координатные функции

$$\varphi_k(t) = \frac{M[U_k \overset{\circ}{X}(t)]}{D_k} \quad (1.118)$$

при известной дисперсии.

Или наоборот, задаваясь координатными функциями, отыскиваем дисперсии

$$D_k = \frac{M[U_k \overset{\circ}{X}(t)]}{\varphi_k(t)} \quad (1.119)$$

Вывод: любой случайный процесс $X(t)$ можно описать моделью

$$X_M(t) = m_x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \varphi_k(t)$$

причем математические ожидания модели и сигнала должны совпадать, а коэффициенты разложения представляют центрированные и некоррелированные случайные величины.

$$D_k \varphi_k(t) = M[U_k \overset{\circ}{X}(t)].$$

Так как $D_k \varphi_k(t) \neq 0$, то и $M[U_k \overset{\circ}{X}(t)] \neq 0$, следовательно, любой коэффициент разложения должен быть коррелирован с самим сигналом $X(t)$.

Вычислим минимальное значение среднеквадратической погрешности.

Итак, центрированная модель имеет вид

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \varphi_k(t).$$

Среднеквадратическая погрешность определяется выражением

$$\Delta = M[\{\overset{\circ}{X}_M(t) - \overset{\circ}{X}(t)\}^2].$$

Или

$$\Delta = M[\overset{\circ}{X}_M^2(t)] - 2M[\overset{\circ}{X}_M(t)\overset{\circ}{X}(t)] + M[\overset{\circ}{X}^2(t)]$$

причем последнее слагаемое равно дисперсии исследуемого сигнала.

$$\overset{\circ}{X}_M^2(t) = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \varphi_k(t) \varphi_m(t) M[U_k U_m] = \sum_{k=1}^N D_k \varphi_k^2(t),$$

$$\overset{\circ}{X}_M(t) \overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \varphi_k(t) \overset{\circ}{X}(t),$$

$$M[\overset{\circ}{X}_M(t) \overset{\circ}{X}(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) M[U_k \overset{\circ}{X}(t)],$$

но

$$M[U_k \overset{\circ}{X}(t)] = \sum_{k=1}^N D_k \varphi_k^2(t), \text{ то есть}$$

$$M[\overset{\circ}{X}_M(t) \overset{\circ}{X}(t)] = \sum_{k=1}^N D_k \varphi_k^2(t),$$

$$\Delta_{\min} = D_x(t) - 2 \sum_{k=1}^N D_k \varphi_k^2(t) + \sum_{k=1}^N D_k \varphi_k^2(t),$$

$$\Delta_{\min} = D_x(t) - \sum_{k=1}^N D_k \varphi_k^2(t) \quad (1.120)$$

Отсюда видно, что среднеквадратическая погрешность

60

убывает до нуля, когда N стремится к бесконечности.

Выражение $\sum_{k=1}^N D_k \varphi_k^2(t)$, будем считать дисперсией модели.

Минимальную среднеквадратическую погрешность чисто формально можно представить в виде

$$\Delta_{\min} = \{R_x(t, t_1) - \sum_{k=1}^N D_k \varphi_k(t) \varphi_k(t_1)\} |_{t=t_1}, \quad (1.121)$$

где: $R_x(t, t_1)$ - АКФ сигнала. Отсюда можно предположить, что

$$\sum_{k=1}^N D_k \varphi_k(t) \varphi_k(t_1) = R_M(t, t_1) - \text{АКФ модели.}$$

Обратимся к модели и найдем ее функцию корреляции:

$$\begin{aligned}
R_M(t, t_1) &= M[\overset{O}{X}_M(t) \overset{O}{X}(t_1)] = M\left[\sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \varphi_k(t) \varphi_m(t_1) U_k U_m\right] = \\
&= \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \varphi_k(t) \varphi_m(t_1) M[U_k U_m] = \sum_{k=1}^N D_k \varphi_k(t) \varphi_k(t_1) \quad (1.122)
\end{aligned}$$

то есть наше предположение о виде АКФ модели верно.

Таким образом, минимум среднеквадратической погрешности определяется выражением

$$\Delta_{\min} = \{R_x(t, t_1) - R_M(t, t_1)\} | t=t_1 \quad (1.123)$$

Выводы :

1. В качестве модели АКФ случайного процесса можно брать ее каноническую модель :

$$R_M(t, t_1) = \sum_{k=1}^N D_k \varphi_k(t) \varphi_k(t_1),$$

и чем точнее модель АКФ, тем точнее будет модель самого сигнала.

2. Из выражения для канонической модели АКФ вытекает каноническая модель сигнала, и для построения последней необходимо предварительно синтезировать каноническую модель

его функции корреляции.

1.2.6 Математическое описание стационарных случайных сигналов в частотной области

Настоящий раздел посвящен рассмотрению частотных, или спектральных свойств стационарных случайных процессов. В зависимости от того, на ограниченном или неограниченном промежутке времени исследуется сигнал, эти свойства разительно отличаются друг от друга.

Спектральное представление стационарного случайного сигнала, рассматриваемого на ограниченном интервале времени

Пусть $\overset{O}{X}(t)$ - центрированный стационарный случайный процесс на участке $0 \leq t \leq T$, а $R_x(t, t_1)$ - АКФ этого процесса.

Так как $\overset{O}{X}(t)$ - стационарный сигнал, то его корреляционная функция является функцией одного аргумента:

$$R_x(t, t_1) = R_x(t_1 - t) = R_x(\tau),$$

где $\tau = t_1 - t$. Найдем диапазон изменения τ :

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq t \leq T \\ 0 \leq t_1 \leq T \end{array} \right\} \Rightarrow -T \leq t_1 - t \leq T; -T \leq \tau \leq T.$$

На рисунке 24 изображен график зависимости АКФ от интервала между сечениями.

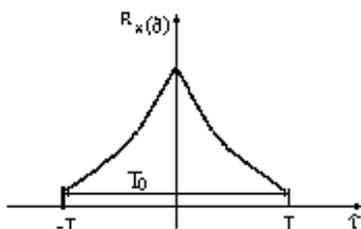


Рисунок 24 - График АКФ ограниченного во времени стационарного случайного процесса

Построим каноническую модель АКФ, для этого представим ее в виде тригонометрического ряда Фурье :

$$R_x(\tau) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(kw\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sin(kw\tau). \quad (1.124)$$

62

Определим коэффициенты ряда :

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} R_x(\tau) \cos(kw\tau) d\tau; \quad \lambda_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} R_x(\tau) \sin(kw\tau) d\tau.$$

$w = \frac{2\pi}{T_0}$; $\lambda_k = 0$, так как АКФ - четная функция своего аргумента, Sin - нечетная, а интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю;

$b_k = D_k$, тогда

$$R_x(\tau) = \frac{D_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cos(kw\tau);$$

$$D_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} R_x(\tau) \cos(kw\tau) d\tau, \quad \text{избавляемся от } T_0:$$

$$w = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}, \quad \text{тогда}$$

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T R_x(\tau) \cos(k\omega \tau) d\tau.$$

Докажем, что эта модель является канонической, для этого вместо подставим его значение

$$R_x(t, t_1) = \frac{D_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cos(k\omega(t - t_1))$$

но $\cos(k\omega(t-t_1)) = \cos(k\omega t - k\omega t_1) = \cos(k\omega t)\cos(k\omega t_1) + \sin(k\omega t)\sin(k\omega t_1)$, тогда

$$R_x(t, t_1) = \frac{D_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k (\cos(k\omega t)\cos(k\omega t_1) + \sin(k\omega t)\sin(k\omega t_1)).$$

Таким образом, сам сигнал может быть представлен в виде :

$$X(t) = \Phi + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \sin(k\omega t) \quad (1.125)$$

Коэффициенты разложения при этом обладают следующими свойствами :

$$1) M[\Phi] = M[U_k] = M[V_k] = 0,$$

63

то есть все они центрированы;

2) Коэффициенты разложения некоррелированы между собой : $M[\Phi U_k] = M[\Phi V_k] = 0$ при любых k .

$$3) M[U_k U_m] = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ D_k, & k = m \end{cases}$$

$$M[V_k V_m] = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ D_k, & k = m \end{cases}$$

$$4) M[U_k V_m] = 0$$

$$D[\Phi] = \frac{D_0}{2}$$

То есть сигнал описывается разложением :

$$\begin{aligned} X(t) &= \Phi + \sum_{k=1}^{\infty} (U_k \cos(k\omega t) + V_k \sin(k\omega t)) = \\ &= \Phi + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin(k\omega t + \varphi_k)) \end{aligned}$$

где

$$A_k = \sqrt{U_k^2 + V_k^2}; \quad \varphi_k = \arctg\left(\frac{V_k}{U_k}\right).$$

Любой стационарный случайный сигнал может быть представлен в виде бесконечного ряда тригонометрических функций со случайными амплитудами и фазами.

Определим дисперсию k-й гармоники:

$$D_k = M[\{U_k \cos(k\omega t) + V_k \sin(k\omega t)\}] = \cos^2(k\omega t) M[U_k^2] + 2\sin(k\omega t)\cos(k\omega t) M[U_k V_k] + \sin^2(k\omega t) M[V_k^2]. \quad (1.126)$$

Дисперсия D_k характеризует мощность k-й гармонической составляющей канонической модели сигнала.

Зависимость величины D_k от частоты получила название спектра случайного сигнала или спектра мощности случайного сигнала или энергетического спектра.

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T R_x(\tau) \cos(k\omega\tau) d\tau;$$

$$R_x(t, t_1) = \frac{D_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cos(k\omega(t - t_1)) \quad (1.127)$$

64

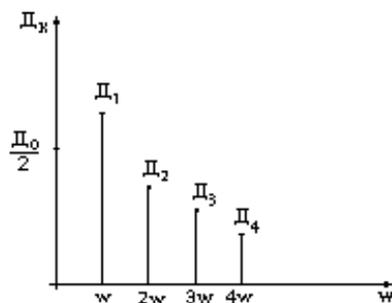


Рисунок 25 - Энергетический спектр случайного сигнала

Спектр случайного сигнала, ограниченного во времени, имеет линейчатую, дискретный характер, он определен на строго фиксированных частотах.

Спектр обладает следующими основными свойствами:

1) Он неотрицателен

$$D_k \geq 0.$$

2) Представляет собой четную функцию k:

$$D_k = D_{-k}.$$

3) Положим $\tau = 0$:

$$D_x = \frac{D_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k,$$

то есть энергия (мощность) всего сигнала складывается из мощности (энергии) постоянной составляющей и всех гармоник.

4) Рассмотрим, как ведет себя дисперсия k -й гармоники при неограниченном увеличении промежутка времени T .

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T |R_x(\tau)| d\tau = \frac{2}{T} \int_0^T |R_x(\tau)| d\tau < \frac{2D_x}{T} \int_0^T |\rho_x(\tau)| d\tau = \frac{2D_x}{T} \tau_k \quad (1.12)$$

где $\tau_k = \int_0^T |\rho_x(\tau)| d\tau$ - интервал корреляции процесса $X(t)$.

То есть, $D_k < \frac{2D_x}{T} \tau_k$ - при увеличении T дисперсия гармоники убывает.

65

5) Как видно из неравенства (1.128) предел дисперсии при неограниченном увеличении T равен нулю

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D_x = 0. \quad (1.129)$$

Рассмотрим, к чему стремится дисперсия при неограниченном росте порядкового номера гармоники k .

Обозначим: $k\omega\tau = \chi$, $\chi_B = k\omega T = k\pi$, $\chi_m = -k\pi$,

$$\tau = \frac{\chi}{k\omega}, \quad d\tau = \frac{d\chi}{k\omega} = \frac{T}{k\omega} d\chi.$$

$$D_k = \frac{1}{k\pi} \int_{-k\pi}^{k\pi} R_x\left(\frac{\chi}{k\omega}\right) \cos \chi d\chi;$$

при больших k

$$D_k = \frac{1}{k\pi} \int_{-k\pi}^{k\pi} \cos \chi d\chi;$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} D_x = 0.$$

То есть, при больших k энергетический спектр затухает.

Рассмотрим вопрос определения *полосы частот* сигнала.

В основу определения частотного диапазона кладется энергетический подход, то есть под полосой частот подразумевается такая, в которой сосредоточена практически вся энергия (мощность) сигнала, а именно - 95%.

$$X_M(t) = \sum_{k=m}^N (A_k \sin(k\omega t + \varphi_k)),$$
$$\omega_H = m\omega; \omega_B = N\omega.$$

Таким образом, верхняя и нижняя границы полосы частот при известных m и N легко определяются. Ширина спектра при этом:

$$\Delta\omega = (N-m)\omega$$

$$D_M = \sum_{k=m}^N D_k - \text{мощность сигнала в полосе частот;}$$

66

$$D_M = \sum_{k=m}^N D_k = 0.95D_x$$

Отсюда ищутся m и N . Но непосредственно таким подходом воспользоваться нельзя, нужны другие способы. Например, предположим, что потери энергии на частотах от 0 до $m-1$ и от $N+1$ до ∞ равны, тогда:

$$\frac{D_0}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} D_k = 0.025D_x, \quad (1.130)$$

отсюда определяют m ;

$$\sum_{N=N+1}^{\infty} D_k = 0.025D_x,$$

из этого выражения можно найти N , но вычислять сумму бесконечного ряда неудобно, поэтому часто прибегают к такому подходу:

$$D_x = \frac{D_0}{2} + \sum_{k=1}^N D_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} D_k,$$

это - мощность всего сигнала ;

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} D_k = D_x - \frac{D_0}{2} - \sum_{k=1}^N D_k = 0.025D_x, \quad (1.131)$$

Этим уравнением для определения N воспользоваться проще, для этой же цели можно применить и такое выражение:

$$0.975D_x = \frac{D_0}{2} + \sum_{k=1}^N D_k, \quad (1.132)$$

Спектральное представление стационарного случайного сигнала, рассматриваемого на неограниченном интервале времени

Пусть имеем стационарный случайный сигнал $X(t)$, рассматриваемый на интервале времени $0 \leq t < \infty$.

67

Для описания его частотных свойств введем в рассмотрение отношение дисперсии k -й гармоники к ширине полосы частот между двумя близлежащими спектральными линиями.

$$R_x(\tau) = \frac{D_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{2} e^{jk\omega\tau} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{2} e^{-jk\omega\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{2} e^{jk\omega\tau} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{2} e^{-jk\omega\tau}$$

Заменим во второй сумме k на $-k$:

$$R_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{2} e^{jk\omega\tau} + \sum_{k=-\infty}^0 \frac{D_k}{2} e^{jk\omega\tau},$$

но $D_k = D_{-k}$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{2} e^{jk\omega\tau} + \sum_{k=-\infty}^0 \frac{D_k}{2} e^{-jk\omega\tau} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{D_k}{2} e^{jk\omega\tau}. \quad (1.133)$$

Так как частота ω численно равна расстоянию между спектральными линиями, то можно сделать формальную замену :

$$R_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{D_k}{2} e^{jk\Delta w\tau} \quad (1.134)$$

В свою очередь

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T R_x(\tau) \cos(k\Delta w\tau) d\tau \quad (1.135)$$

Найдем отношение

$$\frac{D_k}{\Delta w} = \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T R_x(\tau) \cos(k\Delta w\tau) d\tau = S^*(k\Delta w) \quad (1.136)$$

Это - функция $k\Delta w$, обладающая свойствами:

$$S^*(-k\Delta w) = S^*(k\Delta w),$$

68

то есть $S^*(k\Delta w)$ - четная функция своего аргумента; кроме того она неотрицательна: $S^*(k\Delta w) \geq 0$.

Перейдем от D_k к введенной нами функции:

$$D_k = \Delta w S^*(k\Delta w)$$

$$S^*(k\Delta w) = \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T R_x(\tau) \cos(k\Delta w\tau) d\tau \quad (1.137)$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S^* e^{jk\Delta w\tau} \Delta w \quad (1.138)$$

Устремим Δw к нулю, а интервал времени T к бесконечности. $S^*(k\Delta w)$ при неограниченном увеличении времени наблюдения называется *спектральной плотностью*.

$$\begin{cases} R_x(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S^*(u) \exp(ju\tau) du \\ S^*(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(u\tau) d\tau \end{cases} \quad (1.139)$$

Вместо аргумента u введем w :

$$\begin{cases} R_x(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S^*(w) \exp(jw\tau) dw \\ S^*(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(w\tau) d\tau \end{cases} \quad (1.140)$$

Спектральная плотность мощности (СПМ) случайного сигнала обладает теми же свойствами: она является неотрицательной и четной функцией частоты.

Для того, чтобы АКФ можно было представить в виде Фурье - преобразования от СПМ, переобозначим ее:

$$S(w) = \frac{S^*(w)}{2} \quad (1.141)$$

69

В формулах произойдут следующие изменения :

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(w) \exp(jw\tau) dw \\ S(w) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(w\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.142)$$

Рассмотрим свойства новой спектральной плотности:

$$\begin{aligned} \cos(w\tau) &= \frac{e^{jw\tau} + e^{-jw\tau}}{2} \\ \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(w\tau) d\tau &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(jw\tau) d\tau + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-jw\tau) d\tau$$

В первом интеграле сделаем замену аргумента на противоположный по знаку и т. к. $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$, то

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(w\tau) d\tau &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-jw\tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-jw\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-jw\tau) d\tau \end{aligned}$$

то есть спектральная плотность может быть записана в виде:

$$S(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-jw\tau) d\tau \quad (1.143)$$

Вывод : АКФ и СПМ связаны между собой парой преобразований Фурье.

Сделаем подстановку: $\exp(jw\tau) = \cos(w\tau) + j\sin(w\tau)$, тогда

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(w) \cos(w\tau) dw + j \int_{-\infty}^{\infty} S(w) \sin(w\tau) dw,$$

70

но так как АКФ является четной функцией, а синус — нечетной, то второй интеграл равен нулю, и тогда

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(w) \cos(w\tau) dw,$$

то есть:

$$\begin{cases} R_x(\tau) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} S(w) \cos(w\tau) dw \\ S(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(w\tau) d\tau \end{cases} \quad (1.144)$$

Укажем некоторые свойства спектральной плотности мощности.

Во-первых, СПМ является четной функцией своего аргумента

$$S(\omega) = S(-\omega),$$

во-вторых, спектральная плотность - неотрицательная функция:

$$S(\omega) \geq 0,$$

и в третьих, вычислим дисперсию сигнала:

$$D_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (1.145)$$

То есть, интеграл от спектральной плотности в бесконечных пределах равен дисперсии (полной мощности) сигнала. Это - условие нормировки.

Частотный диапазон сигнала и способы его определения

Под частотным диапазоном случайного сигнала понимают такую полосу частот, в которой сосредоточена практически вся его мощность (95%).

Мощность сигнала - это его дисперсия, значит в частотном диапазоне содержится 95% дисперсии. Будем рассматривать только одну ветвь (в соответствии с рисунком 26)

71

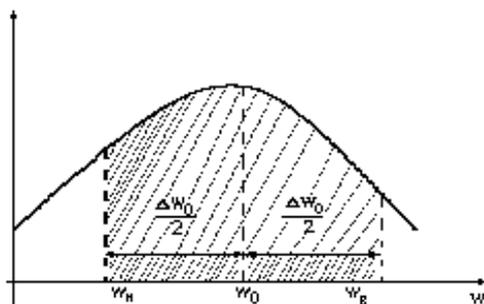


Рисунок 26-К вопросу об определении частотного диапазона сигнала

Случайный сигнал будет содержать энергию, соответствующую площади заштрихованной фигуры.

$$\int_{w_H}^{w_B} S(w)dw = 0.95 \frac{D_x}{2} \quad (1.146)$$

Однако это уравнение нельзя использовать для вычисления ширины спектра, так как в него входит два неизвестных.

Существует несколько способов определения частотного диапазона. Рассмотрим первый из них. Предположим, что потери энергии слева и справа от частотного диапазона одинаковы:

$$\int_0^{w_H} S(w)dw = 0.025 \frac{D_x}{2} \quad (1.147)$$

$$\int_{w_B}^{\infty} S(w)dw = 0.025 \frac{D_x}{2}$$

$S(w)$ - монотонная функция, т. е. решение единственно. Ширина частотного диапазона по его верхней и нижней границам :

$$\Delta w_c = w_B - w_H.$$

Та частота, на которой спектральная плотность имеет максимум, называется основной частотой сигнала w_0 .

Если известна основная частота w_0 , то делается предположение о том, что спектр сигнала симметричен

72

относительно этой частоты:

$$\begin{cases} w_B = w_0 + \Delta w_c / 2 \\ w_H = w_0 - \Delta w_c / 2 \end{cases} \quad (1.148)$$

Тогда уравнение (1. 146) примет вид

$$\int_{w_0 - \Delta w_c / 2}^{w_0 + \Delta w_c / 2} S(w)dw = 0.95 \frac{D_x}{2} \quad (1.149)$$

В этом уравнении имеется единственное неизвестное - эквивалентная ширина спектра мощности, и так как СПМ - монотонная функция, то уравнение имеет только одно решение.

Итак, для определения частотного диапазона необходимо:

- 1) определить основную частоту ω_0 ;
- 2) решить уравнение и найти эквивалентную ширину спектра мощности;
- 3) найти верхнюю и нижнюю границы частотного диапазона.

Возможен и частный случай, когда нижняя граничная частота равна нулю, и приходится определять только верхнюю частоту диапазона:

$$\int_0^{\omega_B} S(\omega) d\omega = 0.95 \frac{D_x}{2} \quad (1.150)$$

Здесь единственное неизвестное - верхняя граничная частота, которая численно равна эквивалентной ширине частотного диапазона $\Delta\omega_c = \omega_B$.

Наибольшее применение на практике получил *формантный* подход к определению частотного диапазона.

Согласно этому подходу, вначале определяется ширина частотного диапазона. Под ней понимается величина основания прямоугольника (в соответствии с рисунком 27), построенного на оси частот и имеющего высоту, равную максимальному значению СПМ, а площадь - равную площади фигуры, ограниченной кривой спектральной плотности.

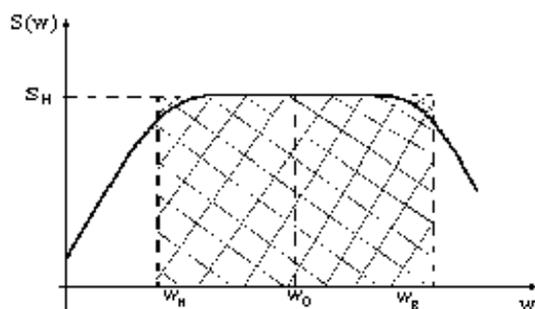


Рисунок 27 - Формантный метод определения частотного диапазона

$$\begin{aligned}
\Delta w_c S_M &= D_x / 2 \\
\Delta w_c &= D_x / 2 S_H \\
w_H &= w_0 - \Delta w_c / 2 \\
w_B &= w_0 + \Delta w_c / 2
\end{aligned}
\tag{1.151}$$

Достоинством этого подхода является минимум вычислений. На практике часто используют его модификацию:

$$\Delta w_c = D_x / 2 S_M = \int_0^\infty S(w) dw / 2 S_M \tag{1.152}$$

или

$$\Delta w_{c_1} = \int_0^\infty S^2(w) dw / 2 S_M^2 \tag{1.153}$$

Рассмотрим связь между этими двумя способами.

$$\int_0^\infty S^2(w) dw = \int_0^\infty S(w) S(w) dw = < S_M \int_0^\infty S(w) dw .$$

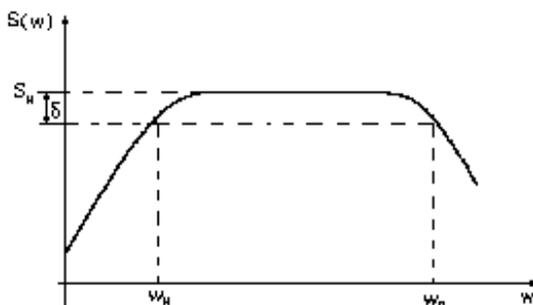
С учетом этого неравенства :

$$\Delta w_{c_1} \leq S_M \int_0^\infty S(w) dw / S_M^2 ; \Delta w_{c_1} \leq \int_0^\infty S(w) dw / S_M .$$

74

$$\text{но } \Delta w_c = \int_0^\infty S(w) dw / 2 S_M , \Rightarrow \Delta w_{c_1} \leq \Delta w_c .$$

Это справедливо для любых сигналов. Еще одним способом определения частотного диапазона является так называемый метрологический подход. При этом подходе под частотным



диапазоном понимается такой, в котором СПМ $S(w)$ незначительно отличается от своего наибольшего значения (в соответствии с рисунком 28).

Рисунок 28 - Метрологический подход к определению частотного диапазона

Координата пересечения линии, параллельной оси абсцисс и отстоящей от нее на $S_M - \delta$, с кривой $S(w)$ дают граничные частоты w_H и w_B .

$$S_M - \delta = S(w); \quad 1 - \gamma = \frac{S(w)}{S_M}; \quad \gamma = 5-10\%.$$

$$1 - \frac{\delta}{S_M} = \frac{S(w)}{S_M} \quad (1.154)$$

Этот способ дает заниженные значения эквивалентной ширины спектра мощности.

В зависимости от того, в каком соотношении находятся между собой w_0 и ширина спектра, различают два типа сигналов:

1) широкополосные, у которых ширина частотного диапазона значительно превышает значение основной частоты: $\Delta w_c \gg w_0$;

2) узкополосные, у которых основная частота намного больше эквивалентной ширины спектра мощности.

Укажем здесь еще одно свойство всех стационарных случайных процессов, которое носит названия *соотношения неопределенности*:

Произведение интервала корреляции случайного сигнала на

75

эквивалентную ширину спектра его мощности есть величина постоянная, значение которой зависит от способов задания этих характеристик:

$$\tau_k \Delta w_c = \text{const} \quad (1.155)$$

Например, рассмотрим широкополосный сигнал с нулевой основной частотой $w_0=0$, тогда $S_M=S(0)$. Мы знаем, что

$$\Delta w_c = \int_0^{\infty} S(w) dw / 2S_M = D_x / 2S_M$$

$$w_0 = 0,$$

$$S(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos(w\tau) d\tau,$$

$$S(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_x(\tau) d\tau = \frac{D_x}{\pi} \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) d\tau = \frac{D_x \tau_k}{\pi} = S_M,$$

$$\Delta w_c = \frac{D_x \pi}{2D_x \tau_k} = \frac{\pi}{2\tau_k}; \text{ тогда } \Delta w_c \tau_k = \frac{\pi}{2};$$

Рассмотрим теперь некоторые специальные виды сигналов .

Полосовые шумы

Полосовым шумом называется сигнал, СПМ которого постоянна в заданной полосе частот, а вне ее равна нулю (в соответствии с рисунком 29 и 30).

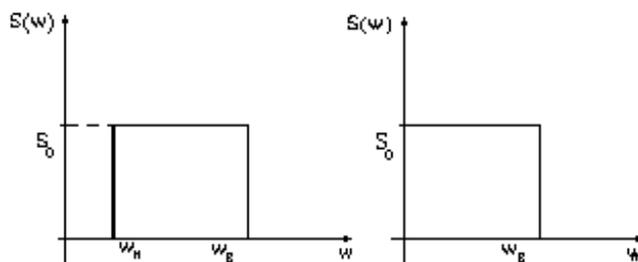


Рисунок 29 - Спектр узкополосного сигнала

Рисунок 30 - Спектр широкополосного сигнала

w_0 - частота, делящая частотный диапазон пополам:

76

$$w_0 = \frac{w_H + w_B}{2}.$$

S_0 - интенсивность шума.

Основной частотой широкополосного сигнала считается нулевая частота.

Рассмотрим узкополосный шум. Выразим его интенсивность через дисперсию :

$\Delta w_c S_0 = D_x / 2$ - это площадь прямоугольника на рисунке 23,

$$S_0 = \frac{D_x}{2\Delta w_c} = \frac{D_x}{2(w_B - w_H)}$$

Рассмотрим функцию корреляции полосового шума.

$$\begin{aligned}
 R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(w) \cos(w\tau) dw = 2 \int_0^{\infty} S(w) \cos(w\tau) dw = \\
 &= 2 \int_{w_H}^{w_B} S(w) \cos(w\tau) dw = 2 \int_{w_H}^{w_B} S_0 \cos(w\tau) dw = \\
 &= 2D_x / 2(w_B - w_H) \int_{w_H}^{w_B} \cos(w\tau) dw = \frac{D_x}{w_B - w_H} \frac{\sin(w\tau)}{\tau} \Big|_{w_H}^{w_B} = \\
 &= \frac{D_x 2}{\tau(w_B - w_H)} \sin\left(\frac{w_B - w_H}{2} \tau\right) \cos\left(\frac{w_B + w_H}{2} \tau\right);
 \end{aligned}$$

но $w_B - w_H = \Delta w_c$, $(w_B + w_H)/2 = w_0$, тогда

$$R_x(\tau) = D_x \frac{2}{\Delta w_c \tau} \sin\left(\frac{\Delta w_c}{2} \tau\right) \cos(w_0 \tau)$$

или

$$R_x(\tau) = D_x \frac{\sin(\frac{\Delta w_c}{2} \tau)}{\frac{\Delta w_c}{2} \tau} \cos(w_0 \tau) \quad (1.156)$$

АКФ полосового шума имеет колебательный, затухающий характер. Рассмотрим вопрос: при каких условиях отсчеты шума будут некоррелированными? АКФ будет равной нулю, когда либо синус, либо косинус равны нулю:

а) $\sin\left(\frac{\Delta w_c}{2} \tau\right) = 0$, когда

77

$\Delta w_c / 2 \tau = k\pi$, $k=1,2,\dots$ (при $k=0$ значение АКФ равно единице);

$$\tau = 2k\pi / \Delta w_c; w = 2\pi f; \Delta w_c = 2\pi \Delta f_c, \tau = k / \Delta f_c. \quad (1.157)$$

Таким образом, отсчеты шума будут некоррелированными, если их брать через интервал $1/\Delta f_c$;

б) $\cos(w_0 \tau) = 0$; $w_0 \tau = (2k+1)\pi/2$, $k=0, 1, 2,\dots$

$$\tau = (2k+1)\pi / 2w_0; w_0 = 2\pi f_0;$$

$$\tau = (2k+1)\pi / 2 * 2\pi f_0 = (2k+1) / 4f_0$$

Найдем шаг по аргументу :

$$(2k+1)/4f_0 - (2(k-1)+1)/4f_0 = (2k+1-2k+2-1)/4f_0 = 1/2f_0 \quad (1.158)$$

Таким образом, получены два шага дискретизации, при которых отсчеты сигнала становятся некоррелированными. Из них надо брать тот, который имеет наименьшее значение, для узкополосных сигналов это - $\Delta t = 1/2f_0$ - наименьший шаг, при котором отсчеты некоррелированы.

Рассмотрим теперь широкополосный шум.

$$w_H = 0; w_B = \Delta w_c .$$

Для определения АКФ сигнала воспользуемся формулой для функции корреляции узкополосного шума (1.121), положив $w_H = 0$.

$$R_x(\tau) = \frac{D_x}{w_B \tau} \sin(w_B \tau) = D_x \sin(\Delta w_c \tau) / \Delta w_c \tau \quad (1.159)$$

$$\sin(\Delta w_c \tau) = 0;$$

$$\Delta w_c \tau = k\pi; \tau = k\pi / \Delta w_c = k\pi / 2\pi \Delta f_c = k / 2\Delta f_c .$$

Шаг дискретизации по времени для получения некоррелированных отсчетов составляет

$$t = 1/2 \Delta f_c. \quad (1.160)$$

Белый шум

Белый шум - это такой стационарный случайный сигнал, спектральная плотность мощности которого постоянна на любой частоте (в соответствии с рисунком 31).

78

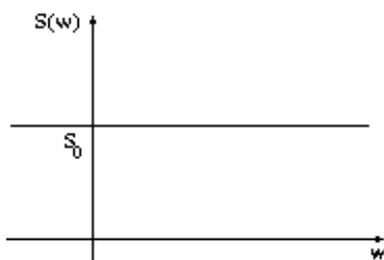


Рисунок 31 - Спектр белого шума

Понятие белого шума аналогично понятию белого света, содержащего все спектральные составляющие. Белый шум представляет собой математическую абстракцию, так как площадь под прямой $S(\omega)=S_0$ бесконечна (а следовательно, бесконечна и дисперсия, т. е. полная мощность сигнала).

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\omega\tau) d\omega =$$

$$2\pi S_0 \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\omega\tau) d\omega \right\} = 2\pi S_0 \delta(\tau).$$

$2\pi S_0=N$ - интенсивность белого шума (как уже отмечалось, о мощности белого шума говорить бессмысленно).

Итак, корреляционная функция белого шума имеет вид

$$R_x(\tau)=N\delta(\tau), \quad (1.161)$$

по виду АКФ совпадает с дельта - функцией, и все ее свойства аналогичны свойствам дельта - функции:

$$R_x(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \neq 0 \\ \infty, & \tau = 0 \end{cases}$$

Отсчеты сигнала, являющегося белым шумом, взятые с любым шагом дискретизации, отличным от нуля, всегда некоррелированы. То есть, если имеется возможность генерировать белый шум, то не представляется сложным получать последовательности случайных

79

величин, не коррелированных во времени.

Если СПМ случайного сигнала постоянна в широком диапазоне частот, перекрывающем полосу пропускания динамической системы, то по отношению к этой системе данный сигнал можно принять за белый шум.

Иногда для на практике вводится нормированная СПМ:

$$S_n(\omega)=S(\omega)/D_x \quad (1.162)$$

по аналогии с нормированной АКФ.

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(w) \exp(jw\tau) dw$$

$$S(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-jw\tau) d\tau$$

Разделим левую и правую части на D_x , получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_H(w) \exp(jw\tau) dw \\ S_H(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(\tau) \exp(-jw\tau) d\tau \end{array} \right.$$

То есть нормированные СПМ и АКФ связаны между собой той же парой преобразований Фурье, что и ненормированные характеристики.

Все свойства нормированной спектральной плотности полностью аналогичны свойствам СПМ (четная, неотрицательная), кроме условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_H(w) dw = 1.$$

Неканоническая модель стационарного случайного сигнала (по Чернецкому)

Пусть имеем стационарный случайный сигнал $X(t)$, который попытаемся описать моделью $X_M(t)$, определяемую критериями

$$M[X(t)] = M[X_M(t)] \quad (1.163)$$

80

$$D[X(t)] = D[X_M(t)] \quad (1.164)$$

$$R_x(\tau) = R_M(\tau) \quad (1.165)$$

Модель стационарного случайного процесса можно предположить в следующем виде:

$$X(t) = m_x + b_1 \sin(\omega t) + b_2 \cos(\omega t), \quad (1.166)$$

где b_1, b_2, ω - центрированные, независимые случайные величины.

Эту модель можно представить в виде

$$X(t) = m_x + \sqrt{b_1^2 + b_2^2} * \sin(\omega t + \arctg(b_1/b_2)).$$

То есть, случайный процесс представляет аддитивную смесь постоянной составляющей и суммы гармоник со случайными амплитудами, частотами и фазами.

В данной модели компактность достигается за счет того, что частота носит случайный характер. В этом и заключается ее основное отличие от канонической модели Пугачева.

Для центрированного случайного сигнала модель имеет вид

$$\overset{\circ}{X}(t) = b_1 \sin(\omega t) + b_2 \cos(\omega t).$$

Найдем дисперсию модели

$$D_M = M[\overset{\circ}{X}_M(t)^2];$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{X}_M(t)^2 &= b_1^2 \sin^2(\omega t) + 2b_1 b_2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) + b_2^2 \cos^2(\omega t) = \\ &= b_1^2 \sin^2(\omega t) + b_1 b_2 \sin(2\omega t) + b_2^2 \cos^2(\omega t) = b_1^2 \sin^2(\omega t) + b_1 b_2 \sin(2\omega t) + \\ &+ b_2^2 - b_2^2 \sin^2(\omega t) = (b_1^2 - b_2^2) \sin^2(\omega t) + b_2^2 + b_1 b_2 \sin(2\omega t) \end{aligned}$$

В соответствии с этой формулой находим дисперсию:

$$\begin{aligned} D_M &= M[(b_1^2 - b_2^2)] * M[\sin^2(\omega t)] + M[b_2^2] + M[b_1] M[b_2] M[\sin(2\omega t)] = \\ &= \{M[b_1^2] - M[b_2^2]\} * M[\sin^2(\omega t)] + M[b_2^2] + 0, \end{aligned}$$

т. к. b_1 и b_2 центрированы.

Должно выполняться условие:

$$D_M = D_x, \text{ то есть}$$

81

$$\{M[b_1^2] - M[b_2^2]\} * M[\sin^2(\omega t)] + M[b_2^2] = D_x$$

Левая часть не должна зависеть от времени. Это выполняется, когда $M[b_1^2] = M[b_2^2]$, тогда $M[b_2^2] = D_x$, таким образом

$$M[b_1^2] = M[b_2^2] = D_x \quad (1.167)$$

То есть, случайные величины, входящие в модель Чарнецкого, могут быть любыми, но непременно центрированными и с равными

дисперсиями, которые, в свою очередь, должны быть равны дисперсии моделируемого сигнала.

Напомним еще об одном требовании, которому должна удовлетворять модель - равенстве корреляционных функций исследуемого сигнала и модели:

$$R_x(\tau) = R_m(\tau)$$

$$R_m(\tau) = M[X_m^{\circ}(t)X_m^{\circ}(t-\tau)]; X_m^{\circ}(t) = b_1 \sin(\omega t) + b_2 \cos(\omega t);$$

$$X_m^{\circ}(t-\tau) = b_1 \sin(\omega(t-\tau)) + b_2 \cos(\omega(t-\tau));$$

$$X_m^{\circ}(t)X_m^{\circ}(t-\tau) = b_1^2 \sin(\omega t) \sin(\omega(t-\tau)) + b_1 b_2 \sin(\omega t) \cos(\omega(t-\tau)) + b_1 b_2 \cos(\omega t) \sin(\omega(t-\tau)) + b_2^2 \cos(\omega t) \cos(\omega(t-\tau))$$

$$\begin{aligned} R_m(\tau) = & M[b_1^2]M[\sin(\omega t) \sin(\omega(t-\tau))] + \\ & + M[b_1]M[b_2]M[\sin(\omega t) \cos(\omega(t-\tau))] + \\ & + M[b_1]M[b_2]M[\cos(\omega t) \sin(\omega(t-\tau))] + \\ & + M[b_2^2]M[\cos(\omega t) \cos(\omega(t-\tau))] \end{aligned}$$

Но так как b_1 и b_2 являются центрированными случайными величинами, то их математические ожидания равны нулю, и тогда

$$\begin{aligned} R_m(\tau) = & M[b_1^2]M[\sin(\omega t) \sin(\omega(t-\tau))] + \\ & M[b_2^2]M[\cos(\omega t) \cos(\omega(t-\tau))] = \quad (1.168) \\ = & D_x M[\sin(\omega t) \sin(\omega(t-\tau))] + \\ & + D_x M[\cos(\omega t) \cos(\omega(t-\tau))] = D_x M[\cos(\omega \tau)] \end{aligned}$$

Следует отметить, что данные функции корреляции удовлетворяют условию стационарности (не зависят от времени, но лишь от временного сдвига между сечениями процесса) и имеет

82

одинаковую с исследуемым сигналом дисперсию.

$$R_x(\tau) = D_x M[\cos(\omega \tau)]$$

Зададимся теперь вопросом, как правильно выбрать значение частоты ω ?

Параметры же b_1 и b_2 выбираются из условия равенства дисперсий оцениваемого сигнала и модели.

Для этого разделим левую и правую части выражения для АКФ на D_x .

$$\rho_x(\tau) = M[\cos(w\tau)]$$

Пусть $f(w)$ - плотность вероятности распределения случайной величины w , тогда

$$M[\cos(w\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(w) \cos(w\tau) dw$$

Но нормированная АКФ равна

$$\rho_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(w) \cos(w\tau) dw$$

Из этого интегрального уравнения можно найти плотность распределения $f(w)$ случайной величины w .

Однако, памятуя о том, что нормированная спектральная плотность стационарного случайного процесса и его нормированная АКФ связаны друг с другом парой преобразований Фурье:

$$S_n(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(\tau) \cos(w\tau) d\tau$$

$$R_x(\tau) = D_x M[\cos(w\tau)]$$

Корреляционная функция не зависит от выбора параметров b_1 и b_2 , но лишь от случайной частоты w . Напрашивается вывод о том, что плотность распределения случайной величины w численно должна быть равна

$$f(w) = S(w) \tag{1.169}$$

83

То есть, случайные величины b_1 , b_2 и w , входящие в модель Чернецкого, должны представлять собой центрированные и независимые случайные величины. При этом дисперсии величин b_1 и b_2 должны быть равными друг другу и равны дисперсии исследуемого сигнала.

Плотность распределения случайной величины w должна быть при этом равна нормированной спектральной плотности моделируемого сигнала.

Математическое описание систем случайных сигналов в частотной области

Пусть имеем два стационарных случайных сигнала $X(t)$ и $Y(t)$. Каждый из них характеризуется своей корреляционной функцией $R_x(\tau)$ и $R_y(\tau)$, а также функцией взаимной корреляции $R_{xy}(\tau)$.

Для описания свойств системы сигналов в частотной области используется взаимная спектральная плотность мощности (ВСП), которая определяется как преобразование Фурье от взаимной корреляционной функции:

$$S_{yx}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) \exp(-jw\tau) d\tau \quad (1.170)$$

Рассмотрим свойства ВСП:

$$S_{yx}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) \cos(w\tau) d\tau - j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) \sin(w\tau) d\tau \quad (1.171)$$

Взаимная спектральная плотность является комплексной функцией своего аргумента, ее мнимая часть не равна нулю.

$$\operatorname{Re} S_{yx}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) \cos(w\tau) d\tau \text{ — вещественная часть ВСП,}$$

$$\operatorname{Im} S_{yx}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) \sin(w\tau) d\tau \text{ — мнимая часть ВСП .}$$

Вещественная часть ВСП является четной, а мнимая - нечетной функцией частоты .

$$S_{yx}(w) = \operatorname{Re} S_{yx}(w) - j \operatorname{Im} S_{yx}(w) = |S_{yx}(w)| \exp(-j\varphi(w)),$$

84

где

$|S_{yx}(w)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 S_{yx}(w) + \operatorname{Im}^2 S_{yx}(w)}$ - амплитудно-частотный спектр сигнала, четная функция частоты,

$\varphi(w) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{Im} S_{yx}(w)}{\operatorname{Re} S_{yx}(w)} \right)$ - фазо-частотный спектр.

В формуле (1.170) вместо w подставим $-w$:

$$S_{yx}(-w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) \exp(jw\tau) d\tau.$$

В правой части переменную интегрирования заменим на $-\tau$:

$$S_{yx}(-w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(-\tau) \exp(-jw\tau) d\tau, \quad \text{но} \quad R_{yx}(-\tau) = R_{xy}(\tau),$$

тогда

$$S_{yx}(-w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) \exp(-jw\tau) d\tau = S_{xy}(w)$$

Таким образом,

$$S_{yx}(-w) = S_{xy}(w) \quad (1.172)$$

Взаимная спектральная плотность удовлетворяет свойству

$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{yx}(w) \exp(jw\tau) dw \quad (1.173)$$

То есть, взаимная корреляционная функция и ВСП связаны между собой парой преобразований Фурье.

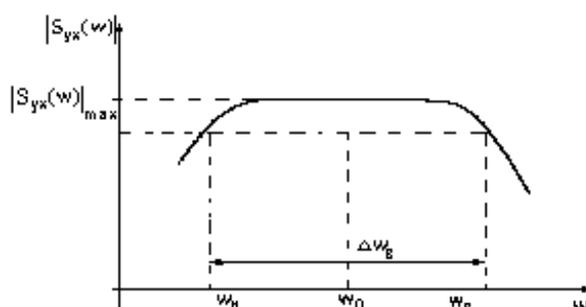


Рисунок 32 - К определению ширины взаимного спектра

Та частота, на которой модуль ВСП достигает максимума, называется основной частотой взаимного спектра.

Весь взаимный спектр располагается вблизи этой частоты. Тот диапазон частот, в котором модуль взаимной спектральной плотности мало отличается от своего наибольшего значения, носит название частотного диапазона взаимного спектра.

Ширина его равна ширине взаимного спектра:

$$\Delta W = W_B - W_H \quad (1.174)$$

Определение ширины взаимного спектра

Ширина взаимного спектра может быть определена одним из двух следующих способов:

$$1) \Delta W_B = \frac{\int_0^{\infty} |S_{yx}(w)| dw}{|S_{yx}(w)|_{\max}} \quad (1.175)$$

$$2) \Delta W_B = \frac{\int_0^{\infty} |S_{yx}(w)|^2 dw}{|S_{yx}(w)|_{\max}^2} \quad (1.176)$$

Второй способ получил большее распространение, так как первый интеграл часто расходится.

Взаимный спектр несет информацию о взаимосвязи сигналов в частотной области. Наибольшая такая взаимосвязь наблюдается при частоте w_0 .

Ширина взаимного спектра указывает на тот частотный диапазон, где взаимосвязь между сигналами достаточно велика.

Анализ линейных динамических систем, работающих при входных случайных воздействиях

Пусть имеем ЛДС с импульсной переходной характеристикой

86

$h(\tau)$, на вход которой поступает случайный процесс $X(t)$.

Надо уметь находить выходной сигнал и определять все его свойства, если известны характеристики входного сигнала, т. е. Находить

$$M[Y(t)], D[Y(t)], R_y(t, t+\tau), R_{yx}(t, t+\tau).$$

Они будут зависеть от свойств входного сигнала и характеристик ЛДС.

$$Y(t) = \int_0^t h(\tau)X(t - \tau)d\tau \quad (1.177)$$

$$1) \quad M[Y(t)] = M\left[\int_0^t h(\tau)m_x(t - \tau)d\tau\right] = \int_0^t h(\tau)M[X(t - \tau)]d\tau$$

$$M[Y(t)] = \int_0^t h(\tau)m_x(t - \tau)d\tau = m_y(t) \quad (1.178)$$

$$2) \quad \overset{\circ}{Y}(t) = Y(t) - m_y(t) = \int_0^t h(\tau)\{X(t - \tau) - m_x(t - \tau)\}d\tau,$$

$$\overset{\circ}{Y}(t) = \int_0^t h(\tau)\overset{\circ}{X}(t - \tau)d\tau \quad (1.179)$$

$$3) \quad \overset{\circ}{Y}(t + u) = \int_0^{t+u} h(\tau_1)\overset{\circ}{X}(t + u - \tau_1)d\tau_1,$$

$$\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t + u) = \int_0^t \int_0^{t+u} h(\tau)h(\tau_1)\overset{\circ}{X}(t - \tau)\overset{\circ}{X}(t + u - \tau)d\tau d\tau_1;$$

Находим математические ожидания левой и правой частей:

$$R_y(t, t + u) = \int_0^t \int_0^{t+u} h(\tau)h(\tau_1)R_x(t - \tau_1, t + u - \tau)d\tau d\tau_1. \quad (1.180)$$

Найдем дисперсию выходного сигнала, для этого положим $u=0$:

$$D[Y(t)] = \int_0^t \int_0^t h(\tau)h(\tau_1)R_x(t - \tau_1, t - \tau)d\tau d\tau_1 \quad (1.181)$$

87

то есть, чтобы отыскать дисперсию выходного сигнала, необходимо знать АКФ входного.

4) Взаимная корреляционная функция:

$$R_{yx}(t, t + u) = M[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{X}(t + u)] =$$

$$= \int_0^t h(\tau)R_x(t - \tau, t + u - \tau)d\tau \quad (1.182)$$

Выходной сигнал стационарной ЛДС при входном нестационарном сигнале будет нестационарным.

Иногда используют следующий подход. Входной сигнал представляют в виде канонической модели

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \varphi_k(t),$$

тогда выходной сигнал:

$$Y(t) = \int_0^t h(\tau) m(t + \tau) d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \int_0^t h(\tau) \varphi_k(t - \tau) d\tau;$$

$$\psi_k(t) = \int_0^t h(\tau) \varphi_k(t - \tau) d\tau;$$

$$Y(t) = m_y(t) + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \psi_k(t) \quad (1.183)$$

Если на входе линейной динамической системы имеем каноническую модель входного сигнала, то на выходе получаем каноническую модель выходного сигнала с теми же коэффициентами разложения. Отличаются только координатные функции.

Пусть входной сигнал является стационарным. Рассмотрим характеристики выходного сигнала системы.

$$m_y(t) = \int_0^t h(u) m_x(u) du = m_x \int_0^t h(u) du \quad (1.184)$$

Вывод: выходной сигнал стационарной ЛДС при

88

стационарном входном сигнале не стационарен по математическому ожиданию.

$$D_y(t) = \int_0^t \int_0^t h(\tau) h(\tau_1) R_x(\tau, \tau_1) d\tau d\tau_1 \quad (1.185)$$

$$R_y(t, t + u) = \int_0^t \int_0^{t+u} h(\tau) h(\tau_1) R_x(u - \tau_1 + \tau) d\tau d\tau_1. \quad (1.186)$$

По автокорреляционной функции выходной сигнал не стационарен при стационарном входном.

Взаимно-корреляционная функция:

$$R_{yx}(t, t + u) = \int_0^t h(\tau)R_x(u + \tau)d\tau. \quad (1.187)$$

То есть, входной и выходной сигналы нестационарно связаны.

Рассмотрим теперь установившийся (статический) режим работы ЛДС, устремив верхний предел интегрирования к бесконечности.

$$1) m_y = m_x \int_0^{\infty} h(u)du \quad (1.188)$$

$$2) D_y = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\tau)h(\tau_1)R_x(\tau_1 - \tau)d\tau d\tau_1 \quad (1.189)$$

$$3) R_y(u) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\tau)h(\tau_1)R_x(u - \tau_1 + \tau)d\tau d\tau_1 \quad (1.190)$$

$$4) R_{yx}(u) = \int_0^{\infty} h(\tau)R_x(u + \tau)d\tau \quad (1.191)$$

В установившемся режиме работы выходной сигнал ЛДС при стационарном входном является стационарным и стационарно связанным со входным.

Спектральная плотность мощности выходного сигнала определяется выражением

$$S_y(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_y(u) \exp(-jwu)du,$$

89

Подставим сюда выражение для АКФ:

$$S_y(w) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\tau)h(\tau_1) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(u - \tau_1 + \tau) \exp(-jwu)du \right\} d\tau d\tau_1$$

Рассмотрим интеграл в скобках:

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} u - \tau_1 + \tau &= u_1 \\ u &= u_1 + \tau_1 - \tau \\ du &= du_1 \\ u_{1_B} &= \infty; u_{2_H} = -\infty \end{aligned} \right| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(u) \exp(-jw(u + \tau_1 - \tau)) du = \\
& = \exp(jw\tau) \exp(-jw\tau_1) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(u) \exp(-jwu) du = \\
& = S_x(w) \exp(jw\tau) \exp(-jw\tau_1)
\end{aligned}$$

- подставим в исходный интеграл:

$$\begin{aligned}
S_y(w) &= S_x(w) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\tau) h(\tau_1) \exp(-jw\tau_1) \exp(jw\tau) d\tau d\tau_1 = \\
&= S_x(w) \left\{ \int_0^{\infty} h(\tau_1) \exp(-jw\tau_1) d\tau_1 \right\} \left\{ \int_0^{\infty} h(\tau) \exp(jw\tau) d\tau \right\} = \\
&= S_x(w) W(jw) W(-jw) = S_x(w) |W(jw)|^2.
\end{aligned} \tag{1.192}$$

То есть, спектральная плотность мощности выходного сигнала ЛДС при подаче на нее стационарного случайного сигнала связана с СПМ входного сигнала через квадрат модуля частотной характеристики.

Если искать дисперсию, АКФ и ВКФ по соотношениям (1.189), (1.190) и (1.191), то придется иметь дело с двойными интегралами, в то время как эти характеристики можно найти проще, пользуясь найденной зависимостью (1.192):

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(w) dw = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(w) |W(jw)|^2 dw, \tag{1.193}$$

то есть дисперсия, также как и СПМ, зависит не от всей частотной

90

характеристики, а только от АЧХ.

$$\begin{aligned}
R_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_y(w) \exp(jw\tau) dw = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} S_x(w) |W(jw)|^2 \exp(jw\tau) dw.
\end{aligned} \tag{1.194}$$

Рассмотрим какое практическое применение имеет найденная

зависимость. Спектр выходного сигнала зависит от СПМ входного и амплитудно-частотной характеристики системы.

Пусть на вход ЛДС подается белый шум, тогда

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= S_0 = \text{const}, \\ S_y(\omega) &= S_0 |W(j\omega)|^2, \end{aligned} \quad (1.194)$$

то есть СПМ выходного сигнала зависит только от квадрата модуля частотной характеристики системы. Меняя частотную характеристику, можно получать сигналы с различными спектрально-корреляционными свойствами, окрашенные шумы. Это очень важный вывод, так как многие задачи планирования эксперимента решаются имитационным моделированием, которое предполагает, в свою очередь, использование в качестве исследуемых сигналов случайных процессов с заданными спектральными характеристиками (для проверки свойств синтезируемых фильтров, систем, и т. д.).

$$R_{yx}(u) = \int_0^{\infty} h(\tau) R_x(u + \tau) d\tau \quad (1.195)$$

Пусть мы определили АКФ входного сигнала и функцию взаимной корреляции между входным и выходным сигналами. Соотношение (1.195) можно использовать для определения ИПХ исследуемой системы. Найдем ВКФ между входным $X(t)$ и выходным $Y(t)$ сигналами системы, заменив в соотношении (1.195) у аргумента u знак на противоположный:

$$R_{yx}(-u) = \int_0^{\infty} h(\tau) R_x(-u + \tau) d\tau \quad (1.196)$$

$$R_{xy}(u) = \int_0^{\infty} h(\tau) R_x(u - \tau) d\tau \quad (1.197)$$

Пусть на вход системы подается стационарный белый шум. Его корреляционная функция:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= N\delta(\tau), \quad R_x(u - \tau) = N\delta(u - \tau), \\ R_{xy}(u) &= N \int_0^{\infty} h(\tau) \delta(u - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Согласно фильтрующему свойству дельта - функции:

$$R_{xy}(u) = N * h(u),$$

то есть вид ВКФ совпадает с видом импульсной переходной характеристики ЛДС.

$$h(u) = R_{xy}(u) / N \quad (1.198)$$

Соотношение (1.198) можно использовать как алгоритм определения ИПХ.

Далее подается тестовый сигнал - белый шум и вычисляется взаимная спектральная плотность входного и выходного сигналов.

$$\begin{aligned} S_{xy}(w) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(u) \exp(-jwu) du = \\ &= \int_0^{\infty} h(\tau) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(u - \tau) \exp(-jwu) du \right\} d\tau \end{aligned}$$

Внутренний интеграл:

$$\left. \begin{array}{l} u - \tau = u_1 \\ u = u_1 + \tau \\ du = du_1 \end{array} \right| \begin{array}{l} u_{1в} = \infty \\ u_{1н} = -\infty \end{array} \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(u_1) e^{-jw(u_1+\tau)} du_1 = \\ e^{-jw\tau} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(u_1) e^{-jwu_1} du_1 \right\} = e^{-jw\tau} S_x(w), \end{array} \right.$$

подставляем в исходный интеграл:

92

$$S_{xy}(w) = S_x(w) \int_0^{\infty} h(\tau) \exp(-jw\tau) d\tau = S_x(w) * W(jw) \quad (1.199)$$

То есть взаимная спектральная плотность между входным и выходным сигналами связана с СПМ входного сигнала через частотную характеристику системы.

Вещественная частотная характеристика оказывает влияние на

вещественную часть ВСП и не оказывает влияния на мнимую часть ВСП, и наоборот.

Вывод: частотную характеристику системы можно определять, зная взаимную спектральную плотность входного и выходного сигналов, а также СПМ входного сигнала.

$$W(j\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{S_x(\omega)} \quad (1.200)$$

Любой сигнал можно представить как аддитивную смесь полезного сигнала и помехи:

$$X(t) = S(\tau) + \overset{\circ}{X}(t) \quad (1.201)$$

Выходной сигнал системы:

$$Y(t) = m_y(t) + \overset{\circ}{Y}(t) \quad (1.201)$$

ЛДС осуществляет преобразование, причем

$$m_y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)S(\tau)d\tau, D_y = D[\overset{\circ}{Y}],$$

$D_y = \min$ - условие минимума помехи.

Зададимся вопросом, что надо сделать для того, чтобы значение дисперсии выходного сигнала понизилось (а значит и уменьшилось значение помехи)?

93

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)|W(j\omega)|^2 d\omega = 2 \int_0^{\infty} S_x(\omega)|W(j\omega)|^2 d\omega \quad (1.202)$$

Пусть максимальное значение СПМ входного сигнала $S_{\text{ХН}}$, тогда $S(\omega) \leq S_{\text{ХН}}$.

$$D_y = 2 \int_0^{\infty} S_x(\omega) |W(j\omega)|^2 d\omega \leq 2S_{\text{хн}} \int_0^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega \quad (1.203)$$

Это — оценка дисперсии сверху, то есть оценка той величины, которой она не превышает.

Пусть эквивалентная ширина спектра мощности сигнала $\overset{\circ}{X}(t)$ будет

$$\Delta\omega_c = \frac{D_x}{2S_{\text{н}}}.$$

Пусть ширина полосы пропускания ЛДС определяется выражением

$$\Delta\omega_{\text{ф}} = \frac{\int_0^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega}{|W(j\omega)|_{\text{н}}^2},$$

$$S_{\text{хн}} = \frac{D_x}{2\Delta\omega_c}, \int_0^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega = \Delta\omega_{\text{ф}} |W(j\omega)|_{\text{н}}^2,$$

Подставим это в выражение для дисперсии (1.203):

$$\frac{2D_x}{2\Delta\omega_c} \Delta\omega_{\text{ф}} |W(j\omega)|^2 = D_x |W(j\omega)|^2 \frac{\Delta\omega_{\text{ф}}}{\Delta\omega_c},$$

$$D_y \leq D_x |W(j\omega)| \frac{\Delta\omega_{\text{ф}}}{\Delta\omega_c} \quad (1.204)$$

Выражение (1.204) определяет оценку сверху дисперсии выходного сигнала.

Выводы:

1) Мощность выходной помехи тем больше, чем больше

94

мощность входной помехи.

2) Ширину полосы пропускания ЛДС нужно делать как можно меньше ширины спектра мощности сигнала, стремиться к тому, чтобы отношение $\Delta\omega_{\text{ф}} / \Delta\omega_c$ было как можно меньше.

Перепишем соотношение по-другому:

$$\tau_u \Delta\omega_{\text{ф}} = \text{const}; \quad \tau_k \Delta\omega_c = \text{const}$$

$$\frac{\Delta w_{\phi}}{\Delta w_c} = \frac{\tau_k}{\tau_u} = \text{const}; \quad \frac{\Delta w_{\phi}}{\Delta w_c} = C \frac{\tau_u}{\tau_k}$$

C — константа, которая зависит от способа задания величин Δw_{ϕ} , Δw_c , τ_u , τ_k .

$$D_y = C * D_x |W(j\omega)|^2 \frac{\tau_u}{\tau_k}. \quad (1.205)$$

Соотношения (1.204) и (1.205) используются на равных основаниях.

Вывод: для наилучшего подавления помехи нужно увеличивать длительность ИПХ системы по сравнению с интервалом корреляции исследуемого процесса. Но увеличивая длительность ИПХ, мы ухудшаем быстродействие.

Нормализация стационарных случайных процессов линейными динамическими системами

Пусть $X(t)$ — стационарный случайный сигнал с произвольным законом распределения. Он подается на вход ЛДС с импульсной переходной характеристикой $h(\tau)$.

В установившемся режиме работы выходной сигнал системы определяется выражением

$$Y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) X(t - \tau) d\tau, \quad h(\tau) = \begin{cases} h(\tau), & 0 \leq \tau \leq \tau_u \\ 0, & \tau > \tau_u \end{cases}$$

τ_u — длительность ИПХ, то есть

$$Y(t) = \int_0^{\tau_u} h(\tau) X(t - \tau) d\tau. \quad (1.206)$$

Разобьем τ_u на отдельные промежутки Δ (шаг дискретизации) $N = \tau_u / \Delta$ — число промежутков разбиения.

95

Для дискретизированного по времени сигнала процесс на выходе системы определится соотношением

$$Y(t) = \sum_{k=1}^N h(k\Delta) X(t - k\Delta) \quad (1.207)$$

Выберем шаг дискретизации, равный τ_k , тогда $N = \tau_u / \tau_k$,

$$Y(t) = \sum_{k=1}^N h(k\tau_k) \tau_{ky} X(t - k\tau_k),$$

$$Y_k = h(k\tau_k) X(t - k\tau_k), \quad (1.208)$$

или

$$Y_k = C_k X(t - k\tau_k), \quad Y = \sum_{k=1}^N Y_k, \quad (1.209)$$

то есть выходной сигнал представляется в виде суммы случайных величин. Определим свойства этих величин.

$$Y_k = C_k X(t - k\tau_k)$$

$$\overset{\circ}{Y}_k = C_k \overset{\circ}{X}(t - k\tau_k)$$

Рассмотрим другое сечение сигнала :

$$\overset{\circ}{Y}_m = C_m \overset{\circ}{X}(t - m\tau_k)$$

и корреляционный момент между ними:

$$R[Y_k, Y_m] = M[\overset{\circ}{Y}_k \overset{\circ}{Y}_m] = C_k C_m M[\overset{\circ}{X}(t - k\tau_k) \overset{\circ}{X}(t - m\tau_k)] =$$

$$= C_k C_m R[(m - k)\tau_k] = \begin{cases} C_m^2 R(0) = C_m^2 D_y, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

То есть $R_y(\tau_k), R_y(2\tau_k), \dots = 0$ при $k \neq m$, таким образом отсчёты Y некоррелированы.

$Y(t) = \sum_{k=1}^N Y_k$, пусть $N = \frac{\tau_u}{\tau_k} \rightarrow \infty$, тогда по центральной предельной теореме Ляпунова

$$\lim f(y) = f(y) \quad (1.210)$$

$$N = \frac{\tau_u}{\tau_k}, \quad \frac{\tau_u}{\tau_k} \rightarrow \infty, \quad \frac{\tau_u}{\tau_k} \rightarrow 0.$$

Если длительность ИПХ системы намного превышает значение интервала корреляции входного сигнала, то закон распределения выходного сигнала можно считать нормальным при любом законе распределения входного. Чем больше, тем лучше

нормализация и, естественно, тем хуже быстродействие.

$$\tau_u \Delta w_n = \text{const} ; \tau_k \Delta w_c = \text{const}$$

$$\frac{\tau_u}{\tau_k} = C \frac{\Delta w_n}{\Delta w_c}.$$

То есть, чем уже полоса пропускания ЛДС по сравнению с эквивалентной шириной спектра мощности входного сигнала, тем лучше эта система осуществляет нормализацию.

Вопросы синтеза оптимальных ЛДС

При постановке задачи синтеза оптимальной системы прежде всего необходимо выбрать критерий оптимальности, задать, в каком смысле данная система является оптимальной. Таких критериев может быть много, например:

- 1) $D_y = \min$ - критерий минимума дисперсии помехи;
- 2) $D_y/D_x = \min$ - критерий наилучшей помехозащищенности;
- 3) пусть $Y_u(t)$ — идеальное значение выходного сигнала, величина $Y(t) - Y_u(t)$ характеризует отклонение поведения системы от идеала, для практических целей ее использовать неудобно, так как она знакопеременна, поэтому воспользуемся другой, положительной: $\{Y(t) - Y_u(t)\}^2$, но она случайна, так что для характеристики отклонения возьмем ее математическое ожидание:

$$M \left[\{Y(t) - Y_u(t)\}^2 \right] = \Delta \text{ — среднеквадратическая}$$

погрешность.

$$\Delta = \min \tag{1.211}$$

Соотношение (1.211) определяет так называемый среднеквадратический критерий.

Кроме перечисленных критериев можно использовать интегральный среднеквадратический критерий:

97

$$\int_0^{\infty} M \left[\{Y(t) - Y_u(t)\}^2 \right] dt = \min, \tag{1.212}$$

критерий максимального быстродействия и пр.

Можно решать две оптимизационные задачи:

- 1) параметрическая оптимизация;
- 2) строгая оптимизация.

Поставим задачу в общем виде. Есть полезный сигнал $S(t)$,

который искажается аддитивной помехой $\overset{\circ}{X}(t)$, то есть входной сигнал имеет вид:

$$X(t) = S(t) + \overset{\circ}{X}(t).$$

В идеале выходной сигнал определяется выражением

$$Y_u(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)S(t - \tau)d\tau \quad (1.213)$$

В качестве критерия адекватности будем использовать критерий минимума среднеквадратической погрешности.

Определим вид импульсной переходной характеристики системы $h(\tau)$, исходя из условия $\Delta = \min$, а далее по $h(\tau)$ станем строить структуру ЛДС.

$$Y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)X(t - \tau)d\tau$$

Δ - функционал от τ .

Пусть $h_0(\tau)$ - ИПХ оптимальной системы.

$$Y_0(t) = \int_0^{\infty} h_0(\tau)X(t - \tau)d\tau \quad (1.214)$$

Задачу будем решать методом неопределенных множителей Лагранжа:

$$h(\tau) = h_0(\tau) + \lambda h_n(\tau), \quad (1.215)$$

98

здесь λ - произвольная величина, $-\infty < \lambda < \infty$,

$h_n(\tau)$ - произвольная функция.

$$h(\tau)|_{\lambda=0} = h_0(\tau),$$

$$Y(t) = Y_0(t) + \lambda Y_n(t)$$

где $Y_n(t) = \int_0^{\infty} h_n(\tau)X(t - \tau)d\tau$ $Y(t)$ (1.216)

$$\Delta = M \left[\left\{ Y_0(t) + \lambda Y_n(t) - Y_u(t) \right\}^2 \right] \quad (1.217)$$

Рассмотрим Δ как функционал от λ : $\Delta = f(\lambda)$,

$$\Delta|_{\lambda=0} = M \left[\left\{ Y_0(t) - Y_n(t) \right\}^2 \right] = \Delta_{\min} \left. \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = 0$$

Если это условие выполняется для любых $h_n(\tau)$, то $h_0(\tau)$ - ИПХ оптимальной системы.

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} = M \left[2 \left\{ Y_0(t) + \lambda Y_n(t) - Y_u(t) \right\} Y_n(t) \right] = 0,$$

но $\lambda = 0$, тогда

$$\left. \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = M \left[\left\{ Y_0(t) - Y_u(t) \right\} Y_n(t) \right] = 0,$$

$$M \left[Y_0(t) Y_n(t) \right] - M \left[Y_n(t) Y_u(t) \right] = 0.$$

Подставим выражения для $Y_0(t)$ (1.214) и $Y_n(t)$ (1.216):

$$Y_0(t) Y_n(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty h_0(u) h_n(\tau) X(t-u) X(t-\tau) du d\tau,$$

$$Y_n(t) Y_u(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty h_0(u) Y_n(t) X(t-u) du,$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty h_0(u) h_n(\tau) X(t-u) X(t-\tau) du d\tau - \int_0^\infty \int_0^\infty h_0(u) Y_n(t) X(t-u) du = 0$$

$$\int_0^\infty h_n(u) \left\{ \int_0^\infty h_0(\tau) M \left[X(t-\tau) X(t-u) \right] d\tau - M \left[Y_u(t) X(t-u) \right] \right\} du = 0$$

99

Это условие выполняется при любом виде $h_n(\tau)$, если внутренний интеграл равен нулю.

$$\int_0^\infty h_0(\tau) M \left[X(t-\tau) X(t-u) \right] d\tau - M \left[Y_u(t) X(t-u) \right] = 0 \quad (1.218)$$

Это - условие синтеза оптимальных динамических систем, из

его определяется $h(\tau)$ -оптимальная ИПХ. Уравнение (1.218) справедливо как для стационарных, так и для нестационарных случайных сигналов.

В частном случае, когда полезный сигнал и помеха стационарны, математические ожидания, стоящие в левой части, не будут зависеть от времени, а лишь от разности временных аргументов.

$$M[X(t-u)X(t-\tau)] = \psi(\tau-u) = \psi(u-\tau) \quad (1.219)$$

$$M[Y_u(t)X(t-u)] = \gamma(u) \quad (1.220)$$

В этом случае наше уравнение примет вид:

$$\int_0^{\infty} h_0(\tau)\psi(u-\tau)d\tau = \gamma(u) \quad (1.221)$$

Это - классическое уравнение Винера-Хопфа. Оно имеет совершенно определенную физическую интерпретацию и может быть решено в явном виде, тогда величина $\psi(t)$ рассматривается как входной сигнал динамической системы, а $\gamma(t)$ - как выходной.

В изображениях Лапласа соотношение между этими величинами будет выглядеть как

$$\gamma(p) = W(p)\psi(p), \text{ отсюда}$$

$$W(p) = \frac{\gamma(p)}{\psi(p)},$$

где :

$$\gamma(p) = \int_0^{\infty} \exp(-pu)\gamma(u)du;$$

$$\psi(p) = \int_0^{\infty} \psi(u) \exp(-pu)du.$$

Положим $\tau = 0$, тогда

$$\begin{aligned} M[X(t)X(t-u)] &= \psi(u); \\ M[Y_u(t)X(t-u)] &= \gamma(u). \end{aligned} \quad (1.222)$$

Итак, если на вход системы подается аддитивная смесь полезного сигнала и помехи $X(t) = S(t) + \overset{0}{X}(t)$, то для синтеза

оптимальной системы необходимо знать: сам полезный сигнал $S(t)$, автокорреляционную функцию помехи, кроме того, нужно достаточно определенно знать, что именно мы хотим на - $Y_u(t)$. По этим данным можно найти функции $\gamma(u)$ и $\psi(u)$. Затем находим изображения по Лапласу $\gamma(p)$ и $\psi(p)$. По этим изображениям отыскиваем передаточную функцию $W(p)$ оптимальной системы, на основе которой и осуществляется ее техническая реализация.

2 Статистическая обработка информации

2.1 Задачи статистической обработки информации

Проблема статической обработки информации многогранна. Задачи, связанные с ней, имеются и в области управления технологическими процессами, и в области управления производством в целом, они актуальны также в экономике, социологии при проведении научно-экспериментальных исследований и т.д.

Сама обработка информации необходима для того, чтобы иметь возможность управлять ходом процессов и явлений. На управляемые процессы воздействует бесчисленное множество случайных факторов, которые невозможно учесть, поэтому обработка информации должна иметь статистический характер. Задачей этой статистической обработки является выявление тенденций в развитии тех или иных процессов и явлений и повышении достоверности получаемых сведений.

Задача статистической обработки информации является весьма сложной, многоплановой и требующей больших временных и материальных затрат. Поэтому важна обоснованность требований, предъявляемых к качеству статистической обработки информации-достоверности и оперативности.

2.2 Математическое описание объекта измерения.

Понятие об объекте измерения и его математическом описании

Основная задача информационно-измерительной системы (ИИС) в автоматизированной системе управления (АСУ)-представлять информацию об управляемом процессе в таком виде, чтобы обеспечить возможность суждения о качестве его протекания и выработать соответствующее воздействие. Для получения такой информации (которую в дальнейшем станем называть *объектом измерения*) совокупность сигналов, характеризующая управляемый процесс, подвергается обработке в ИИС.

Объект измерения (ОИ) -это связующее звено между собственно управляемым процессом и АСУ. Несмотря на то, что ОИ несет в себе неисчерпаемое количество информации о процессе, он лишь приближенно представляет этот процесс в информационном отношении. Поэтому для выявления информации, необходимой для оптимизации процесса управления, нужно, во-первых, выбрать и обосновать адекватную в некотором смысле модель процесса и, во-вторых правильно выбрать ОИ. Эти вопросы связаны с отбором существенных для управления сигналов, с минимизацией информативных измеряемых параметров процесса и т.д.

Лишь имея эти два исходные момента (выбранные ОИ и адекватную модель процесса), можно приступить к решению задачи эффективной обработки совокупности первичных измерительных сигналов, которая может быть сформулирована следующим образом: при заданном ОИ и выбранной модели процесса необходимо преобразовать ОИ таким образом, чтобы достаточно оперативно и достоверно получать информацию о параметрах модели управляемого процесса.

Состояние ОИ описывается совокупностью конечного числа величин X_1, X_2, \dots, X_N . Изменение этих величин во времени характеризует поведение ОИ, то есть процессы, протекающие в нем.

Для установления соответствия состояния или поведения ОИ предъявляемым к нему требованиям вводятся специальные критерии поведения объекта. Эти критерии могут техническими, точностными, временными, психологическими, гигиеническими и др. В общем случае вводится несколько показателей исследуемого объекта Y_1, Y_2, \dots, Y_K . Все эти определяются по состоянию объекта измерения

$$\begin{aligned} Y_1 &= A\{X_1, \dots, X_N\} \\ Y_K &= A\{X_1, \dots, X_N\}, \end{aligned}$$

где A_i - вид преобразования, который необходимо осуществить над объектом измерения, чтобы получить показатель качества объекта исследования Y_i .

Из изложенного следует, что любая ИИС должна определять составляющие объекта измерения X_1, \dots, X_N и затем путем обработки результатов этих измерений определять показатели качества объекта исследования Y_1, \dots, Y_K . Составляющие объекта исследования X_1, \dots, X_N являются входными сигналами ИИС.

Прежде чем создавать ИИС для исследования того или иного объекта, необходимо на основании предварительных теоретических и экспериментальных исследований сформировать объект измерения.

После того, как выявлены составляющие объекта измерения X_1, X_2, \dots, X_N , необходимо проанализировать взаимосвязи между ними. В результате этого анализа выясняется, какие из составляющих X_1, X_2, \dots, X_N являются взаимонезависимыми, а какие зависят друг от друга. Целью такого анализа, в конечном счете, является минимизация числа составляющих, которые должны быть непосредственно измерены.

Очевидно, что если все составляющие X_1, X_2, \dots, X_N взаимонезависимы, то они обязательно должны в дальнейшем и все измеряться. Если же окажется, что некоторые из них (или все)

взаимозависимы, то общее число составляющих, подлежащих непосредственно измерению, может быть сокращено. В этом случае достаточно измерить лишь взаимонезависимые составляющие, а из зависимых измерить только те, по которым могут быть определены оставшиеся. Таким образом, общее число составляющих, подлежащих непосредственно измерению, может быть сокращено до $M = N - j$, где j - число уравнений, связывающих между собой взаимозависимые составляющие.

Это обстоятельство в дальнейшем может принести большой эффект, так как позволит сократить общее число первичных преобразователей информационно-измерительной системы.

Для пояснения сказанного приведем пример. Пусть объектом исследования является электрическая цепь, представляющая собой нагрузку, подключенную к источнику питания. Состояние этого объекта в каждый момент времени характеризуется тремя параметрами ($N=3$): напряжением источника питания U , током I , протекающим через нагрузку и сопротивлением нагрузки R . В данном примере все эти три параметра объекта исследования являются одновременно и составляющими объекта измерения. Анализ объекта (электрической цепи) показывает, что его параметры U, I и R взаимосвязаны между собой ($U=I \cdot R$). Поэтому нет необходимости измерять отдельно все эти величины. Достаточно измерить лишь любые две из них, а третью подсчитать по их значениям, то есть определить косвенным путем.

Этот пример показывает, какой большой эффект дает анализ взаимосвязей между составляющими объекта измерения.

Взаимосвязи должны быть проанализированы не только качественно, но и количественно. Качественный анализ показывает, какие из составляющих объекта независимы друг от друга, а какие взаимосвязаны. Но он совершенно не позволяет судить о том, сильные (жесткие) ли эти связи или слабые. Если эти связи слабые и практически ими можно пренебречь, то мы не можем по или нескольким составляющим достаточно просто и, главное, точно определить другие, слабо связанные с первыми.

Таким образом, одной из важнейших задач является количественная оценка взаимосвязей между составляющими объекта измерения.

Знание взаимосвязей между отдельными составляющими позволит в дальнейшем определить алгоритмы нахождения некоторых составляющих по другим, с которыми связаны первые. Чем точнее будет найден этот алгоритм, тем точнее будут измерены составляющие, и как следствие, в итоге будут точнее оценены показатели объекта исследования и его состояние или поведение.

Возникает вопрос о точности количественной оценки взаимосвязей между составляющими объекта измерения. Очевидно, при прочих равных условиях, чем точнее определены количественные взаимосвязи, тем лучше. Но, с другой стороны, повышение точности количественной оценки взаимосвязи между составляющими сопряжено с большими трудностями и неизбежно приводит к усложнению алгоритма нахождения одних составляющих через другие. Поэтому точность количественной оценки взаимосвязей должна быть выбрана разумной и целиком и полностью согласована с той необходимой точностью, которая допускается при измерениях тех или иных составляющих объекта измерения.

Следующей важной задачей является изучение свойств составляющих объекта измерения. Знание этих свойств позволит в дальнейшем синтезировать оптимальные алгоритмы измерения параметров объекта исследования, выбрать необходимые типы измерительных преобразователей и определить частоты их опроса.

Перечисленные задачи могут быть решены на основании математического описания объекта измерения.

Общий подход к математическому описанию объекта измерения

Рассмотрим некоторые общие вопросы математического описания объекта измерения. При этом будем иметь в виду, что конечной целью является описание взаимосвязей между составляющими объекта измерения и математическое описание самих составляющих.

Поскольку составляющие объекта X_1, X_2, \dots, X_N являются случайными величинами, то естественно рассматривать их в совокупности как систему случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_N) . Исчерпывающим описанием этой системы величин является закон распределения. Допустим, что тем или иным способом определена плотность совместного распределения величин X_1, X_2, \dots, X_N , входящих в систему $f(x_1, \dots, x_N)$.

По известной плотности распределения системы случайных величин находят плотности распределения $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N)$ отдельных величин, входящих в систему:

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_N) dx_2 \dots dx_N;$$

$$f(x_N) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_{N-1};$$

Зная плотность распределения системы величин и плотности распределения отдельных величин, входящих в систему, можно проверить, являются ли все величины (составляющие) X_1, \dots, X_N взаимонезависимыми. Критерием взаимонезависимости является выполнение условия

$$f(x_1, \dots, x_N) = f(x_1)f(x_2)\dots f(x_N) \quad (2.1)$$

Если это условие будет выполнено, то все параметры можно рассматривать как взаимонезависимые. Если же окажется, что условие (2.1) не выполняется, то это будет означать, что часть величин X_1, \dots, X_N или все они являются взаимозависимыми. В этом случае необходимо выявить взаимонезависимые и взаимозависимые величины и затем найти алгоритм определения одних составляющих через другие.

Для решения этой задачи необходимо определить условные плотности распределения каждой из составляющих X_1, \dots, X_N :

$$f\left(\frac{X_1}{X_2}, \dots, X_N\right) = \frac{f(x_1, \dots, x_N)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_N) dx_1} \quad (2.2)$$

$$f\left(\frac{X_N}{X_1}, \dots, X_{N-1}\right) = \frac{f(x_1, \dots, x_N)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_N) dx_N} \quad (2.3)$$

Критерием независимости величины X_k от всех остальных является равенство

$$f(x_k/x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) = f(x_k). \quad (2.4)$$

Невыполнение этого равенства будет означать, что величина X_k функционально связана с какими-то из величин $X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_n$, а именно с теми, функцией которых является условная плотность распределения величины X_k .

Чтобы найти эту функциональную связь, надо определить условное математическое ожидание величины X_k :

$$M\left[\frac{X_k}{X_1}, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_k}{f\left(\frac{x_k}{x_1}, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n\right)} dx_k \quad (2.5)$$

Это условное математическое ожидание отражает функциональную связь величины X_k с другими :

$$X_k = M[X_k / X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_n] = [X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_n]. \quad (2.6)$$

Формула (2.6) как раз и показывает алгоритм определения составляющей объекта измерения X , через другие, с которыми она связана.

Таким образом знание совместного закона распределения составляющих объекта измерения позволяет решать все интересующие задачи. Но, к сожалению, нахождение такого закона распределения сопряжено с громадными трудностями, связанными с большой затратой материальных средств и времени. Особенно это усугубляется при большом числе составляющих объекта измерения. Поэтому описанную методику целесообразно применять лишь тогда, когда число составляющих невелико ($n=3-5$).

При большом числе составляющих объекта измерения, с целью сокращения материальных и временных затрат, целесообразно вначале решать качественную задачу, позволяющую лишь ответить на вопрос, какие из составляющих взаимонезависимы, а какие зависят друг от друга. К количественной оценке взаимозависимостей между ними надо переходить лишь после решения первой задачи.

Первая, качественная задача, может быть решена двояко. Во-первых, уже на основе предварительного словесного описания исследуемого объекта и физических процессов, протекающих в нем, может быть вынесено суждение о взаимосвязи составляющих.

Помощь здесь могут оказать, например, функциональные схемы объектов.

Если априорно выявить взаимосвязи удастся лишь между небольшим числом составляющих или вообще не представляется возможным, то целесообразно провести статистическое исследование объекта исследования.

Применение дисперсионного анализа

Наиболее эффективным статистическим методом выявления взаимозависимости является дисперсионный анализ.

Этот метод состоит в том, что путем изменения соответствующих параметров объекта исследования изменяют заданным образом одну или несколько других составляющих объекта измерения. Эти изменения могут повлиять на величину одной или нескольких других составляющих. Степень такого влияния, его качественные характеристики как раз и описываются с помощью дисперсионного анализа. В зависимости от числа

составляющих, степень влияния которых на другие мы хотим оценить, различают однофакторный, двухфакторный и т.д. дисперсионные анализы.

На примере однофакторного и двухфакторного дисперсионного анализа поясним, как происходит выявление взаимосвязей между составляющими объекта измерения путем использования данного метода.

Пусть ставится задача определить, является ли составляющая X_k зависимой от составляющей X_a . Эта задача решается при помощи однофакторного дисперсионного анализа. Для этого составляющей X_a задают ряд значений X_a, X_a, \dots, X_a и при каждом значении производится n измерений составляющих X_k .

Для удобства результаты измерений обычно заносятся в таблицу 1.

Таблица 1

Значения	Номер измерения				
	1	...	J	...	N
X_{A1}	X_{k11}	...	X_{k1j}	...	X_{k1n}
...
X_{ai}	X_{ki1}	...	X_{kij}	...	X_{kin}
...
X_{am}	X_{km1}	...	X_{kmj}	...	X_{kmn}

В таблице 1 через X_{kij} обозначен результат j -го измерения составляющей X_k при значении $X_a = X_{ai}$. Как видно из таблицы, всего мы имеем $n \cdot m$ результатов измерения составляющей X_k .

Обозначим через X_k среднее арифметическое из n измерений составляющей X_k , выполненных при значении $X_a = X_a$, через X_{k-} среднее арифметическое из n измерений составляющей X_k , выполненных при значении $X_a = X_a$ и т.д.

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 X_{k1}^* &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{k1j} \\
 X_{ki}^* &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{kij} \quad ; \\
 X_{km}^* &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{kmj}
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

Очевидно, если влияние составляющей X_a на составляющую

X_k существенно, то есть X_k зависит от X_a , то мы должны ожидать повышенного рассеивания средних $X_{k_1}, \dots, X_{k_i}, \dots, X_{k_m}$ и наоборот.

Обозначим через X_k общее среднее арифметическое всех $m \cdot n$ измерений составляющей X_k :

$$X_k^* = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{kij} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{ki}^* . \quad (2.8)$$

Определим общую статистическую дисперсию всех результатов измерений составляющей X_k :

$$D_k^* = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{kij} - X_k^*)^2 . \quad (2.9)$$

Эта дисперсия обязана своим появлением всем действующим факторам - как влиянию составляющей X_A , так и фактору случайности при каждом конкретном значении X_A . Основная задача, которую решает дисперсионный анализ - это разделение общей дисперсии D_k^* на компоненты, которые характеризовали бы влияние на составляющую X_k составляющей X_A и фактора случайности, в отдельности.

Принимая во внимание формулы (2.7) и (2.8), статистическую дисперсию D_k^* представим в виде

$$D_k^* = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [(X_{kij} - X_{kj}^*) + (X_{ki}^* - X_k^*)]^2 = \frac{1}{mn} (Q_A + Q_0), \quad (2.10)$$

где

$$Q_A = n \sum_{i=1}^m (X_{ki}^* - X_k^*)^2;$$

$$Q_0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{kij} - X_{ki}^*)^2;$$

Таким образом, статистическая дисперсия D_k^* результатов измерения составляющей X_k при различных значениях X_A пропорциональна сумме слагаемых Q_A и Q_0 , т.е. рассеивание, результатов измерения составляющей X_k складывается из двух компонент: Q_A и Q_0 . Величина Q_A характеризует влияние на

дисперсию D_k^* составляющей X_k , а величина Q_0 - влияние случайных погрешностей.

Для того чтобы оценить степень влияния составляющей X_A на X_k , необходимо сравнить между собой слагаемые Q_A и Q_0 . Очевидно в том случае, когда влияние составляющей X_A на X_k существенно, т.е. зависит от X_A , мы должны получить $Q_A \gg Q_0$. Если же влияние X_A на X_k несущественно, то рассеивание результатов измерения, составляющей X_k будет вызвано лишь случайными погрешностями, и мы должны получить $Q_A \ll Q_0$.

Так как результаты измерения параметра X_k носят случайный характер, то и величины Q_A и Q_0 будут также случайными. Поэтому их сравнения нужно проводить вероятностными методами.

На практике случайные погрешности измерений очень часто оказываются распределенными по нормальному закону. В этом случае сравнение слагаемых Q_A и Q_0 , т.е. оценку влияния составляющей X_A на X_k , можно проводить с помощью так называемого F-критерия:

$$F = \frac{C_A}{C_0}, \quad (2.11)$$

где

$$C_A = \frac{Q_A}{m-1}; \quad C_0 = \frac{Q_0}{m(n-1)}.$$

Величина F является случайной, так как величины Q_A и Q_0 случайны. Доказано, что величина подчинена так называемому F-распределению с $(m-1)$ и $m(n-1)$ - степенями свободы.

Правило оценки степени влияния составляющей X_A на X_k , сводится к следующему:

- 1) подсчитываются значения величин Q_A и Q_0 , $(m-1)$ и $m(n-1)$;
- 2) по этим значениям подсчитываются C_A, C_0 и затем F ;
- 3) по специальным таблицам, имеющимся в справочниках, задаваясь доверительной вероятностью q (обычно полагают $q=0.95 \div 0.999$) по степеням свободы $(m-1)$ и $m(n-1)$ с учетом C_A, C_0 и находится F_q ;
- 4) гипотеза о том, что составляющая X_k зависима от принимается, если $F > F_q$;
- 5) если $F \leq F_q$, то влияние составляющей X_A на X_k нужно считать незначительным, так как в этом случае рассеивание результатов измерений вызвано в основном случайными, погрешностями измерения X_k .

Если с помощью дисперсионного анализа установлено, что составляющая X_k зависит от X_A , то это отнюдь не означает, что составляющая X_A зависит от X_k , так как первая может быть причиной, а вторая - следствием. Так, например, Э.Д.С. термопары зависит от разности температур между ее холодным и горячим спаями. Но температура между горячим и холодным спаями этой термопары ни в коем случае не зависит от термоэдс. Точно так же, если X_k не зависит от X_A , то это не означает X_A , что также не зависит от X_k . Поэтому, чтобы выявить взаимонезависимые составляющие объекта измерения, нужно проверять с помощью дисперсионного анализа взаимное влияние их друг на друга.

Рассмотрена методика применения дисперсионного анализа для выявления наличия зависимости какой-то одной составляющей объекта измерения от другой. Теперь необходимо определить, является ли составляющая объектом X_k зависимой от двух других X_A и X_B или зависит от какой-то одной из них. Эта задача решается с помощью двухфакторного дисперсионного анализа. Для этого одной из составляющих объекта, например X_B , задается какое-то значение X_{B1} . При этом значении X_B начинают изменять значения составляющей X_A и при каждом конкретном ее значении $X_{A1}, \dots, X_{Ai}, \dots, X_{Am}$ осуществляют измерение величины X_k . Затем устанавливают другое значение $X_B = X_{B2}$ и снова осуществляют измерение при тех же самых значениях X_A , что и в предыдущем случае. Такие измерения проводят для ряда значений $X_{B1}, \dots, X_{Bi}, \dots, X_{Bm}$, составляющей X_B . В итоге получают $n \cdot m$ результатов измерения составляющей X_k , где n и m - соответственно число значений, которое задали составляющим объекта измерения X_B и X_A . Результаты измерений заносят в табл. 2.

В этой таблице через X_{kij} ; обозначен результат измерения X_k при значениях $X_A = X_{Ai}$ и $X_B = X_{Bj}$

Введем обозначения:

$$X_{kAi}^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{kij} - \text{среднее значение составляющей при}$$

$$X_A = X_{Ai};$$

$$X_{kBj}^* = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{kij} - \text{среднее значение составляющей при}$$

$$X_B = X_{Bj};$$

$$X_k^* = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{kij} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{kAi}^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{kBj}^* \quad - \quad \text{среднее}$$

арифметическое результатов измерений составляющей X_k .

Таблица 2

X_A	X_B	X_{B1}	...	X_{Bj}	...	X_{Bn}
X_{A1}		X_{k11}	...	X_{kij}	...	X_{k1n}
...	
X_{Ai}		X_{ki1}	...	X_{kij}	...	X_{kin}
...	
X_{Am}		X_{m1}	...	X_{mj}	...	X_{mn}

Очевидно, на величину среднего X_{kAi}^* оказывает влияние, помимо случайных факторов, лишь составляющая объекта X_A , так как по всем значениям X_B проведено усреднение. Точно так же величина среднего X_{kBj}^* зависит лишь от значений составляющей X_B . Поэтому рассеивание средних X_{kAi}^* не будет зависеть от значений X_B , а рассеивание X_{kBj}^* - от значений X_A .

Общее рассеивание результатов измерения составляющей X_k может быть оценено величиной статистической дисперсии:

$$D_k^* = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{kij} - X_k^*)^2. \quad (2.12)$$

Принимая во внимание обозначения, введенные выше, формулу (12) представим в виде

$$\begin{aligned} D_k^* &= \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [(X_{kAi}^* - X_k^*) + (X_{kBj}^* - X_k^*) + (X_{kij} - X_{kAi}^* - X_{kBj}^* + X_k^*)]^2 = \\ &= \frac{1}{mn} (Q_A + Q_B + Q_0), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} Q_A &= n \sum_{i=1}^m (X_{kAi}^* - X_k^*)^2; \\ Q_B &= m \sum_{j=1}^n (X_{kBj}^* - X_k^*)^2; \\ Q_0 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{kij} - X_{kAi}^* - X_{kBj}^* + X_k^*)^2; \end{aligned}$$

Таким образом, статистическая дисперсия D_k^* пропорциональна сумме трех слагаемых Q_A , Q_B и Q_0 . Причем, помимо случайных факторов, вызванных погрешностями измерения, на величину слагаемого Q_A влияет лишь X_A , а на величину $Q_B - X_B$.

Оценка степени влияния составляющих объекта измерения X_A и X_B на составляющую X_k , как и при однофакторном дисперсионном анализе, производится при условии нормального распределения случайных погрешностей измерений с помощью F-критерия:

$$F_A = \frac{\frac{1}{m-1} Q_A}{\frac{1}{(m-1)(n-1)} Q_0} = \frac{C_A}{C_0}; \quad (2.14)$$

$$F_B = \frac{\frac{1}{n-2} Q_B}{\frac{1}{(m-1)(n-1)} Q_0} = \frac{C_B}{C_0}. \quad (2.15)$$

Правило оценки степени влияния составляющих X_A и X_B на X_k заключается в следующем:

- 1) подсчитываются величины Q_A , Q_B , $(m-1)$, $(n-1)$ и $(m-1)(n-1)$;
- 2) по значениям величин п.1 определяются C_A , C_B , C_0 , а затем F_A и F_B ;
- 3) задаются величиной доверительной вероятности q ;
- 4) по специальным таблицам по степеням свободы $(m-1)$ и $(m-1)(n-1)$ с учетом C_A и C_0 , находится F_{qA} , а по степеням свободы $(n-1)$ и $(m-1)(n-1)$ с учетом C_B и $C_0 - F_{qB}$;
- 5) если $F_A \leq F_{qA}$ и $F_B \leq F_{qB}$, то влияние составляющих объекта измерения X_A и X_B на X_k несущественно и можно считать, что X_k практически не зависит ни от X_A , ни от X_B ;
- 6) при $F_A > F_{qA}$ и $F_B > F_{qB}$ принимается гипотеза о том, что влияние составляющих объекта измерения X_A и X_B на X_k существенно, т.е. X_k зависит как от X_A , так и от X_B ;
- 7) если $F_A \leq F_{qA}$, а $F_B > F_{qB}$, то на составляющую влияет в основном не X_A , а X_B , т.е. составляющая X_k зависит лишь не от X_A , а от X_B ;
- 8) при $F_A > F_{qA}$ и $F_B \leq F_{qB}$ принимается гипотеза о том, что составляющая объекта измерения зависит лишь не от X_B а от X_A .

Итак, рассмотрена методика применения дисперсионного анализа для выявления взаимосвязанных и взаимонезависимых составляющих объекта измерения. При этом необходимо

подчеркнуть что применение дисперсионного анализа особенно эффективно при одновременном изучении влияния нескольких составляющих объекта измерения на какую-то другую составляющую.

Дисперсионный анализ позволяет решить лишь качественную задачу — выделить из общего числа составляющих объекта измерения X_1, \dots, X_n взаимонезависимые и взаимозависимые.

Следующей, более высокой ступенью описания исследуемого объекта должно явиться выяснение количественных соотношений между взаимосвязанными составляющими объекта измерения. Эта задача является одной из главных при математическом описании объекта измерения.

2.3 Статистические способы описания взаимосвязей между составляющими объекта измерения

Иногда функциональные связи между некоторыми составляющими объекта измерения удается математически писать на основе априорных сведений о физических процессах, протекающих в объекте. Если же таких сведений имеется недостаточно, или они совсем отсутствуют, то функциональные соотношения, связывающие ряд составляющих объекта, могут быть установлены только на основе экспериментальных исследований. При этом, учитывая, что составляющие носят случайный характер, результаты экспериментальных исследований должны обязательно подвергаться той или иной статистической обработке.

Допустим, в результате дисперсионного анализа установлено, что составляющая объекта измерения X_k зависит от составляющей X_A . Теперь ставится задача установить количественную зависимость составляющей X_k от X_A .

В математической статистике доказано, что истинную зависимость величин X_k и X_A , лишенную всяких случайных наслоений, дает регрессия, т. е. математическое ожидание (среднее значение) величины X_k , вычисленное при условии, когда величина X_A примет определенное значение. Поэтому идеальной целью можно считать отыскание уравнения регрессии.

Однако точное уравнение регрессии можно написать только зная средние значения X_k для всех допустимых значений X_A . В практических же наблюдениях такая ситуация невозможна. Более того, даже отдельные значения средних составляющей X_k , не могут быть найдены точно, а допускают лишь приближенные оценки. В связи с этим можно искать лишь уравнения приближенной регрессии, оценивая тем или иным способом величину и вероятность этой, приближенности.

Для того чтобы получить уравнение приближенной регрессии, т. е. найти зависимость составляющей X_k от X_A , составляющей X_A

задают ряд значений $X_{A1}, \dots, X_{Ai}, \dots, X_{An}$ и при каждом этом значении измеряют значение составляющей X_k .

Результаты заносят в таблицу 3.

Таблица 3

X_A	X_{A1}	...	X_{Ai}	...	X_{An}
X_k	X_{k1}	...	X_{ki}	...	X_{kn}

Основным способом отыскания уравнения регрессии является принцип наименьших квадратов. Этот принцип утверждает, что наилучшее уравнение приближенной регрессии дает та функция из рассматриваемого класса, для которой сумма квадратов

$$S = \sum_{i=1}^n [X_{ki} - \psi(X_{Ai}, \alpha_1, \dots, \alpha_l)]^2 \quad (2.16)$$

имеет наименьшее значение.

В формуле (2.16) $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ — неопределенные коэффициенты, входящие в аналитическое выражение уравнения регрессии.

Величина суммы S зависит, с одной стороны, от вида уравнения регрессии $X_k = \psi(X_A, \alpha_1, \dots, \alpha_l)$, а с другой стороны — от численных значений коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_l$.

Для того чтобы сумма S была минимальна, во-первых, должен быть правильно выбран вид уравнений регрессии. Вид этого уравнения может быть известен заранее из соображений аналогии, из теоретических рассуждений или из сравнения эмпирических данных с известными функциями. Наиболее трудной задачей является подбор типа регрессии непосредственно по эмпирическим данным, когда теоретические предпосылки изучаемой зависимости совершенно неизвестны. При этом всегда желательно выбирать такой вид уравнения регрессии, чтобы число l неопределенных коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ было значительно меньше числа изменения n .

Пусть, исходя из тех или иных соображений, выбран вид уравнения регрессии. Тогда величину суммы S (2.16), можно рассматривать как функцию от коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_l$. Теперь задача состоит в том, чтобы найти такой выбор этих коэффициентов, который минимизировал бы величину S .

Из математического анализа известно, что необходимым условием минимума функции S (дифференцируемой) многих переменных является выполнение равенств

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} &= 0; \\ \dots & \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_\lambda} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Принимая во внимание формулу (2.16), после преобразований получим систему λ уравнений, с λ неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_{ki} \frac{\partial \psi(X_{Ai}, \alpha_1, \dots, \alpha_\lambda)}{\partial \alpha_1} - \sum_{i=1}^n \psi(X_{Ai}, \alpha_1, \dots, \alpha_\lambda) \frac{\partial \psi(X_{Ai}, \alpha_1, \dots, \alpha_\lambda)}{\partial \alpha_1}; \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n X_{ki} \frac{\partial \psi(X_{Ai}, \alpha_1, \dots, \alpha_\lambda)}{\partial \alpha_\lambda} - \sum_{i=1}^n \psi(X_{Ai}, \alpha_1, \dots, \alpha_\lambda) \frac{\partial \psi(X_{Ai}, \alpha_1, \dots, \alpha_\lambda)}{\partial \alpha_\lambda}; \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Решая эту систему уравнений, находим неизвестные коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_\lambda$. Если она имеет единственное решение, то при $S \geq 0$ это решение всегда будет обеспечивать минимум величины S . Если же решений будет несколько, то из них необходимо выбирать то, которое минимизирует величину S .

Найденные в результате решения системы уравнений (2.18) коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_\lambda$ будут, очевидно, являться функциями X_k и X_λ :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \varphi_1(X_{k1}, \dots, X_{kn}; X_{A1}, \dots, X_{An}); \\ \dots & \\ \alpha_\lambda &= \varphi_\lambda(X_{k1}, \dots, X_{kn}; X_{A1}, \dots, X_{An}). \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

А так как значения составляющих X_k и X_λ , полученные в результате их измерения, носят случайный характер, вследствие влияния случайных погрешностей измерения, то случайными будут и коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_\lambda$. Поэтому эти коэффициенты должны быть обязательно подвергнуты статистической оценке. В частности, необходимо оценить степень их случайности, т. е. величину среднеквадратического отклонения каждого коэффициента, и указать доверительный интервал и доверительную вероятность.

Последняя задача оказывается в большинстве случаев очень трудной и поэтому ограничивается лишь указанием среднеквадратических отклонений этих коэффициентов.

После того как коэффициенты в уравнении приближенной регрессии найдены и оценены, само это уравнение должно быть подвергнуто статистическому анализу. В результате этого анализа, во-первых, выясняется, нуждается ли полученное уравнение регрессии в поправке; во-вторых, если такая необходимость имеется, то ищется сама поправка.

Для решения первой задачи подсчитывается статистическая дисперсия:

$$D = \frac{1}{n - \lambda} S = \sum_{i=1}^n [X_{ki} - \psi(X_{Ai}, \alpha_1, \dots, \alpha_\lambda)]^2 \quad (2.20)$$

являющаяся общей мерой рассеяния всех X_{ki} вокруг функции $\psi(X_A, \alpha_1, \dots, \alpha_l)$. Очевидно, чем меньше величина D , тем лучше подобрано уравнение регрессии.

В образовании дисперсии D участвуют два фактора: рассеяние X_{ki} вокруг истинной линии регрессии (вокруг своих средних), вызванное случайными погрешностями измерений составляющей X_k , описываемое дисперсией D_k , и погрешность в определении приближенной регрессии $X_k = \psi(X_A, \alpha_1, \dots, \alpha_l)$, которой соответствует некоторая дисперсия D_p . Поскольку эти факторы независимы, то

$$D = D_k + D_p \quad (2.21)$$

Так как дисперсия D_k вызвана независимыми от нас причинами (случайными погрешностями измерений составляющей X_k), то уменьшить величину дисперсии D возможно лишь уменьшением дисперсии D_p , т. е. улучшением сходимости приближенной регрессии к истинной. При этом необходимо иметь в виду следующее. Чем точнее подобрано уравнение регрессии, тем меньше D_p . Но любое уточнение уравнения регрессии сопряжено с большой вычислительной работой, и, кроме того, чем точнее уравнение регрессии, тем оно, как правило, сложнее. С другой стороны, из уравнения (2.21) видно, что бессмысленно стремиться обеспечить величину D_p

очень малой по сравнению с D_k , так как при $D_p \leq D_k$ величина дисперсии и практически остается неизменной ($D \approx D_k$). Поэтому в качестве критерия верности выбранного уравнения регрессии

естественно считать приближенное равенство $D \approx D_k$. Если же $D > D_k$, то уравнение регрессии необходимо уточнить. Таким образом, чтобы оценить верность выбранного уравнения регрессии, необходимо сравнивать между собой дисперсии D и D_k . А так как эти дисперсии носят случайный характер, то такое сравнение должно осуществляться статистическим способом. Для этого применяется, как и при дисперсионном анализе, F -критерий (критерий Фишера).

Правило сравнения сводится к следующему:

- 1) по формуле (2.20) подсчитывается величина D ;
- 2) определяется дисперсия D_k результатов измерения параметра X_k , для чего проводятся специальные измерения;
- 3) вычисляется отношение $D/D_k = F$;
- 4) задаваясь доверительной вероятностью q , из таблиц по известным D , D_k и их степеням свободы находится число F_q ;
- 5) если $F \leq F_q$, то считается, что дисперсия D образована только за счет случайных погрешностей измерений и, следовательно, никакие уточнения уравнения регрессии не способны уменьшить эту дисперсию, т. е. нужно признать правильность выбора уравнения регрессии;
- 6) при $F > F_q$ дисперсия D образуется не только за счет случайных погрешностей измерений, но и вследствие неправильного подбора уравнения регрессии. В этом случае уравнение регрессии должно быть уточнено.

Для уточнения уравнения регрессии $X_k = \psi(X_A, \alpha_1, \dots, \alpha_l)$, в него вводится поправка $\psi_1(X_A, \beta_1, \dots, \beta_c)$, где β_1, \dots, β_c — неизвестные коэффициенты, и рассматривается уточненное уравнение регрессии в виде

$$X_k = \psi(X_A, \alpha_1, \dots, \alpha_l) + \psi_1(X_A, \beta_1, \dots, \beta_c) \quad (2.22)$$

При этом считается, что неизвестными должны быть не только коэффициенты β_1, \dots, β_c , но и коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_l$. Все они, как и ранее, определяются по принципу наименьших квадратов, т. е. так, чтобы минимизировалась величина суммы:

$$S_1 = \sum_{i=1}^n [X_{ki} - \psi(X_{Ai}, \alpha_1, \dots, \alpha_l) - \psi_1(X_{Ai}, \beta_1, \dots, \beta_c)]^2 \quad (2.23)$$

После этого подсчитывается дисперсия

$$D_1 = \frac{S_1}{n - l - c}, \quad (2.24)$$

являющаяся мерой рассеяния всех X_{ki} вокруг функции

$$[\psi(X_A, \alpha_1, \dots, \alpha_\lambda) + \psi_1(X_A, \beta_1, \dots, \beta_c)].$$

Добавка к уравнению регрессии признается подобранной правильно, если окажется, что $D_1 < D$. В противном случае (когда $D_1 > D$) добавка признается выбранной неправильно и необходимо искать новую. Здесь, как и ранее, дисперсии должны сравниваться статистическим способом с помощью F-критерия.

При правильно выбранной добавке к уравнению регрессии производится сравнение дисперсий D_1 и D_k с целью выяснения, нуждается ли новое уравнение регрессии в дополнительном уточнении. Таким образом, уравнение регрессии уточняется до тех пор, пока не будет выяснено, что оно подобрано правильно, т. е. не противоречит экспериментальным данным. Правильно подобранное уравнение регрессии принимается в качестве функциональной связи между составляющими объекта измерения X_k и X_A . При этом необходимо всегда помнить, что уравнение регрессии может не выражать никаких теоретических закономерностей.

Рассмотрен самый общий подход к получению математической зависимости одной составляющей объекта измерения от другой. Теперь необходимо рассмотреть случай, когда априорно о характере этой зависимости ничего неизвестно и она определяется лишь на основе опытных данных. Основной проблемой здесь является выбор вида уравнения регрессии, которое должно быть как можно более простым.

В настоящее время при решении этой задачи наибольшее распространение получили два способа.

При первом способе уравнения регрессии $X_k = \psi(X_A, \alpha_1, \dots, \alpha_l)$ берется в виде

$$X_k = \alpha_1 + \alpha_2 X_A + \alpha_3 X_A^2 + \dots + \alpha_\lambda X_A^{\lambda-1}. \quad (2.25)$$

Это так называемая параболическая регрессия.

В этом случае система уравнений (2.18), из которой должны быть определены неизвестные коэффициенты α_1, \dots

\dots, α_l принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \sum_{i=1}^n X_{Ai}^0 + \alpha_2 \sum_{i=1}^n X_{Ai} + \dots + \alpha_\lambda \sum_{i=1}^n X_{Ai}^{\lambda-1} &= \sum_{i=1}^n X_{ki} X_{Ai}^0; \\ \dots & \dots \\ \alpha_1 \sum_{i=1}^n X_{Ai}^{\lambda-1} + \alpha_2 \sum_{i=1}^n X_{Ai}^\lambda + \dots + \alpha_\lambda \sum_{i=1}^n X_{Ai}^{2(\lambda-1)} &= \sum_{i=1}^n X_{ki} X_{Ai}^{\lambda-1}. \end{aligned} \right\} (2.26)$$

Эта система уравнений является линейной и ее решение не представляет труда.

Для сокращения вычислительной работы задачу по определению уравнения регрессии решают путем последовательных приближений. Вначале задаются уравнением регрессии вида $X_k = \alpha_1 + \alpha_2 X_A$, определяют коэффициенты α_1 и α_2 и проверяют описанными выше способами правильность выбора уравнения регрессии. Если уравнение регрессии нуждается в уточнении, то рассматривают уравнение вида $X_k = \alpha_1 + \alpha_2 X_A + \alpha_3 X_A^2$. Снова определяют коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и проверяют правильность их выбора. Так поступают до тех пор, пока уравнение регрессии не окажется подобранным правильно.

Такой способ определения уравнения регрессии довольно прост, но имеет один серьезный недостаток: при каждом уточнении уравнения, т. е. при повышении его степени, все значения коэффициентов, вычисленные ранее, оказываются бесполезными и их приходится определять вновь. В результате возрастает объем вычисленной работы.

От указанного недостатка свободен второй способ определения уравнения регрессии, при котором это уравнение задается в виде

$$X_k = \alpha_1 P_0(X_A) + \alpha_2 P_1(X_A) + \dots + \alpha_l P_{l-1}(X_A), \quad (2.27)$$

где $P_{l-1}(X_A)$ — многочлены Чебышева П. Л.

Первые два из этих многочленов имеют вид

$$P_0(X_A) = 1, \quad P_1(X_A) = X_A - \frac{n+1}{2},$$

а остальные определяются по формуле

$$P_{\lambda+1}(X_A) = P_1(X_A) P_\lambda(X_A) - \frac{\lambda^2(n^2 - \lambda^2)}{4(4\lambda^2 - 1)} P_{\lambda-1}(X_A). \quad (2.28)$$

Коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ в формуле (2.27) также находятся по методу наименьших квадратов. При этом формулы для их определения получаются достаточно простыми:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ki}; \\ \alpha_2 &= \frac{\sum_{i=1}^n X_{ki} P_1(X_{Ai})}{\sum_{i=1}^n P_1(X_{Ai})}; \\ &\dots \\ \alpha_\lambda &= \frac{\sum_{i=1}^n X_{ki} P_{\lambda-1}(X_{Ai})}{\sum_{i=1}^n P_{\lambda-1}^2(X_{Ai})} \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Достоинство описываемого способа определения уравнения регрессии в том, что вычисленные по формуле (2.29) коэффициенты не зависят от того, каков будет порядок разыскиваемого уравнения регрессии. Это значит, что находя уравнение регрессии методом последовательных уточнений, мы используем все ранее найденные коэффициенты, больше их не пересчитывая. Повышение порядка регрессии на единицу потребует теперь нахождения лишь одного коэффициента.

Таким образом, рассмотрены способы определения математической зависимости между двумя составляющими объекта измерения. Точно так же решается задача и определения математической зависимости одной составляющей объекта измерения X_k , от нескольких X_A, X_B, \dots . Разница заключается лишь в том, что в данном случае уравнение регрессии надо искать в виде

$$X_k = \psi(X_A, X_B, \dots; \alpha_1, \dots, \alpha_e), \quad (2.30)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_e$, как и ранее, неопределенные коэффициенты, значения которых должны быть найдены по принципу наименьших квадратов.

2.4 Математическое описание составляющих объекта

измерения

После того как получены математические зависимости одних

составляющих объекта измерения от других, необходимо перейти к математическому описанию самих составляющих, которые являются, как было сказано выше входными, сигналами ИИС.

Основной предпосылкой для описания составляющих объекта измерения должно быть то, что эти составляющие носят случайный характер и, помимо этого, изменяются во времени. То есть мы должны рассматривать составляющие объекта измерения как случайные, процессы или сигналы.

В качестве обобщенной модели какой-то k -той составляющей объекта измерения можно взять модель вида

$$X_k(t) = \varphi(t)N(t) + \psi(t), \quad (2.31)$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ - некоторые детерминированные функции времени; $N(t)$ - случайная функция времени.

Из формулы (31) следует, что для математического описания составляющей объекта измерения $X_k(t)$ нужно уметь описывать детерминированные компоненты $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ и случайную $N(t)$.

Методы представления детерминированных компонент составляющих объекта измерения

Детерминированные функции времени (сигналы) могут иметь различный вид. Поэтому естественно стремиться представить любую детерминированную функцию в каноническом виде через какие-то стандартные функции.

Одним из распространенных, канонических представлений детерминированных функций является разложение их в ряд по ортогональным функциям:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \varphi_k(t), \quad (2.32)$$

где A_k - коэффициенты разложения;

$\varphi_0(t), \dots, \varphi_k(t)$ - ортогональные координатные функции, т. е.

такие, что
$$\int_a^b p(t) \varphi_k(t) \varphi_i(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq k \\ 1, & \text{при } i = k \end{cases}$$

Здесь $p(t)$ - весовая функция.

В качестве координатных функций могут выступать самые разнообразные функции. Так, если функция $\varphi(t)$ рассматривается на конечном интервале времени от T_1 до T_2 , то в качестве координатных функций могут быть выбраны различные

ортогональные полиномы Чебышева, Лежандра и др.

Наиболее часто в качестве координатных ортогональных функций выбираются тригонометрические функции. В этом случае детерминированная функция $\varphi(t)$, рассматриваемая на конечном интервале времени от T_1 до T_2 , может быть представлена в виде так называемого ряда Фурье:

$$\varphi(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t). \quad (2.33)$$

Здесь $\omega = \frac{2\pi}{(T_2 - T_1)}$ - круговая частота первой гармоники;

$$a_k = \frac{2}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \varphi(t - T_1) \sin k\omega t dt;$$

$$b_k = \frac{2}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \varphi(t - T_1) \cos k\omega t dt.$$

Формулу (33) перепишем в виде

$$\varphi(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k), \quad (2.34)$$

где

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \varphi_k = \arctg \frac{b_k}{a_k}.$$

Как видно из формулы (34), сигнал $\varphi(t)$ представлен в виде суммы его постоянной составляющей $\frac{b_0}{2}$ и бесконечного числа гармонических составляющих $A_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$. На практике очень часто число членов ряда (34) ограничивают конечным числом n выбирая величину n так, чтобы 95% энергии сигнала было сосредоточено в диапазоне частот от 0 до $n\omega$.

Энергия сигнала (1), существующего на интервале времени от

T_1 до T_2 , определяется по формуле

$$E = \int_{T_1}^{T_2} \varphi^2(t) dt. \quad (2.35)$$

Подставляя в выражение (35) значение $\varphi(t)$ из формулы (33), представим энергию сигнала, в функции коэффициентом ряда Фурье:

$$E = \frac{T_2 - T_1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{T_2 - T_1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2. \quad (2.36)$$

Если энергия сигнала известна, то число и членов ряда Фурье, которым можно ограничиться при описании сигнала, определяется по формуле

$$0.95E = \frac{T_2 - T_1}{2} \sum_{k=0}^n A_k^2 \quad (2.37)$$

Зная n , можно определить такую важную характеристику сигнала, как верхнюю граничную частоту спектра сигнала, которая принимается равной частоте наивысшей гармоники, т. е.

$$F_b = \frac{\omega_b}{2\pi} = \frac{n\omega}{2\pi} = \frac{n}{T_2 - T_1}. \quad (2.38)$$

Энергию сигнала необходимо знать не только для того, чтобы определить допустимое конечное число членов ряда или верхнюю граничную частоту спектра сигнала, но и для оценки энергетических характеристик сигнала. К энергетическим характеристикам сигнала, помимо его энергии относится так называемая мощность сигнала и его действующее значение.

Мощностью сигнала $\varphi(t)$, существующего на интервале времени от T_1 до T_2 , называется величина

$$P_c = \frac{E}{T_2 - T_1} = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \varphi^2(t) dt, \quad (2.39)$$

а действующим значением -

$$\sqrt{P_c} = \sqrt{\frac{E}{T_2 - T_1}} = \sqrt{\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \varphi^2(t) dt}. \quad (2.40)$$

Из формул (35), (39) и (40) видно, что все энергетические характеристики сигнала (энергия E , мощность P , и действующее значение) жестко связаны между собой.

Если, сигнал $\varphi(t)$ представлен в виде, ряда Фурье (33) или (34), то, как следует из выражений (36) и (39), его мощность может быть определена по формуле (41)

$$P_c = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2. \quad (2.41)$$

Ряд Фурье (38) для функции $\varphi(t)$, существующий на интервале от T_1 до T_2 может быть записан также в комплексной форме:

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega t}, \quad (2.42)$$

где комплексный коэффициент C_k определяется по формуле

$$C_k = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \varphi(t - T_1) e^{-jk\omega t} dt. \quad (2.43)$$

Коэффициенты разложения в ряде (42) связаны с коэффициентами разложения ряда (33) соотношением

$$C_k = \frac{b_k - ja_k}{2}. \quad (2.44)$$

Если сигнал $\varphi(t)$ задается в виде ряда (42), то его мощность подсчитывается по формуле

$$P_c = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k C_k^*, \quad (2.45)$$

где C_k^* - комплексная величина, сопряженная с C_k .

В тех случаях, когда детерминированный сигнал $\varphi(t)$ является непериодической функцией и $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt < \infty$, то его можно представить в виде

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.46)$$

где

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.47)$$

Обычно в такой форме, представляют импульсные сигналы.

Комплексная величина $S(\omega)$ называется спектральной плотностью сигнала или комплексным спектром. Модуль $|S(\omega)| = \sqrt{S(\omega)S^*(\omega)}$ величины $S(\omega)$ называется просто спектром сигнала.

Энергия сигнала $\varphi(t)$, представленного в виде выражения может быть подсчитана по формуле

$$E = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega, \quad (2.48)$$

а верхняя граничная частота F_b его спектра определяется из уравнения

$$0.95E = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi F_b} |S(\omega)|^2 d\omega, \quad (2.49)$$

или

$$\int_0^{2\pi F_b} |S(\omega)|^2 d\omega = 0.95 \int_0^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.50)$$

Уравнением (49) целесообразно пользоваться при известной

энергии сигнала, а уравнением (50) - при неизвестной.

Большое значение для математического описания сигналов имеет теорема Котельникова, которая утверждает, что непрерывная функция времени $\varphi(t)$, не содержащая частот выше граничной $\omega_b = 2\pi F_b$, полностью определяется отсчетами мгновенных значений $\varphi(k\Delta t)$ в точках, отстоящих друг от друга на интервалы $\Delta t = \frac{\pi}{\omega_b}$. Эта теорема позволяет представить непрерывную функцию $\varphi(t)$ в виде ряда

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k\Delta t) \frac{\sin \omega_b(t - k\Delta t)}{\omega_b(t - k\Delta t)}. \quad (2.51)$$

Если функция $\varphi(t)$ с ограниченным спектром рассматривается на конечном интервале времени T , то точное разложение (51) заменяется приближенными:

$$\varphi(t) \approx \sum_{k=-n/2}^{n/2} \varphi(k\Delta t) \frac{\sin \omega_b(t - k\Delta t)}{\omega_b(t - k\Delta t)}. \quad (2.52)$$

где

$$n = \left(\frac{T}{\Delta t} \right) + 1 \approx 2F_b T.$$

Таким образом, в данном случае функция $\varphi(t)$ определяется в виде конечного числа $n=2F_b T$ ее отсчетов.

Методы представления случайных компонент составляющих объекта измерения

Рассмотрим способы представления случайных компонент составляющих объекта измерения.

Случайный сигнал (процесс) $N(t)$ в общем случае может быть охарактеризован его m -мерной плотностью вероятности системы m случайных величин $(N(t_1), \dots, N(t_m))$, где t_1, \dots, t_m - произвольные значения аргумента t .

Многомерные плотности вероятности позволяют описать случайный, процесс сколь угодно полно. Однако нахождение m -мерной плотности вероятности - очень трудная задача, которую удается решить, далеко не всегда. Поэтому на практике часто ограничиваются рассмотрением хотя и менее полных, но зато более простых так называемых характеристик или моментов случайного процесса.

Обычно указывают математическое ожидание, второй начальный момент, дисперсию, корреляционную функцию. Иногда дополнительно указывают коэффициенты асимметрии и эксцесса. Для определения приведенных характеристик достаточно знать лишь двумерную плотность распределения.

При математическом описании случайного процесса желательно также указать стационарным или нестационарным он является.

Для стационарных случайных процессов, помимо рассмотренных, указывают еще ряд важных характеристик. Одной из таких характеристик является интервал корреляции τ_k . Наиболее распространенными формулами для подсчета этой величины являются

$$\tau_k = \frac{\int_0^{\infty} K_N(\tau) d\tau}{K_N(0)}; \quad (2.66)$$

$$\tau_k = \frac{\int_0^{\infty} |K_N(\tau)| d\tau}{K_N(0)}; \quad (2.67)$$

Другой важной характеристикой стационарного случайного процесса является спектральная плотность дисперсии (мощности)

$$S_N(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_N(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.68)$$

Для оценки интервала частот, в котором существует стационарный случайный процесс, вводят понятие эквивалентной ширины спектра мощности, которую определяют по формуле

$$\Delta\omega_{\text{э}} = \frac{\int_0^{\infty} S_N(\omega) d\omega}{S_{Nm}(\omega)}, \quad (2.70)$$

где $S_{Nm}(\omega)$ - максимальное значение спектральной плотности.

Эквивалентная ширина спектра мощности связана с интервалом корреляции соотношением

$$\Delta\omega_{\text{э}}\tau_k = \text{const.} \quad (2.71)$$

Во многих практических случаях также полезно провести исследование случайного процесса, для того, чтобы изучить, является ли он эргодическим. Эргодическим называется такой процесс, для которого среднее по времени равно в вероятностном смысле среднему по ансамблю реализаций.

Если процесс окажется эргодическим, то в дальнейшем его обработка с помощью информационно-измерительной системы будет значительно проще, чем неэргодического.

Выше рассмотрены основные способы математического описания детерминированных и случайных функций, которые являются элементами модели (31) составляющей $X_k(t)$ объекта измерения. После этого нетрудно описать характеристики самой составляющей $X_k(t)$.

Из изложенного в данном разделе видно, что математическое описание объекта измерения - непростая задача требует для своего решения провести большой объем экспериментальных исследований статистической обработки их результатов.

Список использованных источников

1. Бендат Дж., Пирсол Л. - Измерение и анализ случайных процессов. Перевод с английского/предисловие Г.Я. Мирского/ - М.: Мир, 1974 - 464 с.
2. Бендат Дж., Пирсол Л. - Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989 - 527 с.
3. Бриллинджер. Анализ временных рядов. - М.: Мир, 1978 - 635 с.
4. Дженкинс Дж. Ваттс Д., Спектральный анализ и его приложения. - М.: Мир, 1971
5. Марпл С. Цифровой спектральный анализ и его приложения. - М.: Мир, 1990 - 577 с.
6. Пугачев В.С. Введение в теорию случайных функций. - М.: Физматгиз, 1972 - 883 с.

