

Краткие сведения
по стохастической финансовой математике

А.Е. Барабанов

(для студентов экономического факультета СПбГУ)

Оглавление

| | |
|---|-----------|
| Введение | 4 |
| 1 Финансовые инструменты и стохастические модели | 5 |
| 1.1 Основные финансовые инструменты | 5 |
| 1.2 Производные финансовые инструменты | 7 |
| 1.3 Доходы покупателя и продавца опциона | 9 |
| 1.4 Справедливая цена опциона в простейшей модели | 10 |
| 1.5 Случайная процентная ставка | 12 |
| 1.6 Диверсификация Марковитца | 13 |
| 1.7 Модель ценообразования финансовых активов | 15 |
| 1.8 Арбитражная теория расчетов | 16 |
| 2 Расчет цен платежных обязательств | 19 |
| 2.1 Мартингал как модель изменения случайной процентной ставки | 19 |
| 2.2 Инвестор на (B, S) –рынке | 20 |
| 2.3 Хеджирование. Верхние и нижние цены | 23 |
| 2.4 Одношаговая модель | 25 |
| 2.5 Модель Кокса–Росса–Рубинштейна (CRR –модель) | 29 |
| 2.6 Понятие арбитража | 31 |
| 2.7 Расчет цен на полных рынках | 32 |
| 2.8 Формулы Башелье и Блэка–Шоулса | 34 |

Введение

В данном пособии собраны сведения из финансовой математики, связанные со стохастическими моделями формирования и изменения цен. Они составили основу краткого курса из 7–8 лекций для студентов экономического факультета СПбГУ по специальности "Финансы и кредит".

Практически все сведения взяты из монографии А.Н. Ширяева "Основы стохастической финансовой математики" (том 1, "Факты и модели", и том 2, "Теория", изд-во ФАЗИС, М., 1998).

Автор стремился минимизировать требования к математической подготовке студентов. В связи с этим из монографии А.Н. Ширяева были отобраны наиболее простые математические факты, которые в то же время имеют ясную экономическую интерпретацию.

Данный курс ввиду его небольшого объема и существенных ограничений на математическую сложность нельзя считать полным в каком-либо смысле. Это скорее "краткое введение" в современную стохастическую финансовую математику.

Пособие предназначено для студентов экономического факультета, изучающих математические модели ценообразования, а также для студентов других специальностей, интересующихся мартингальными методами расчета справедливых цен платежных обязательств.

Глава 1

Финансовые инструменты и стохастические модели

1.1 Основные финансовые инструменты

1. Банковский счет — это ценная бумага, относящаяся к облигациям и означающая, что банк обязуется выплачивать заранее определенный процент от суммы счета. Способы начисления процентов:

- простые проценты (m раз в год),
- сложные проценты (непрерывно).

Пусть начальный капитал, внесенный на банковский счет, был B_0 . В случае простых процентов заранее определяется *процентная ставка* $r(m)$ начисления процентов m раз в год, и через $N + k/m$ лет капитал вырастет до значения

$$B_{N+k/m}(m) = B_0 \left(1 + \frac{r(m)}{m}\right)^{m(N+k/m)}.$$

В случае непрерывных процентов с процентной ставкой $r = r(\infty)$ через время T , выраженное в годах, капитал будет равен

$$B_T(\infty) = B_0 e^{rT}.$$

Очевидно, что для целых $T = N$ равенство капиталов через N лет при простых и сложных процентах возможно только при

$$r = n \ln \left(1 + \frac{r(m)}{m}\right).$$

Кроме годовой процентной ставки r иногда объявляется *годовая учетная ставка* q из следующего условия: для того, чтобы через один год получить капитал B_1 требуется внести начальный капитал $B_1(1 - q)$. Очевидно, что $q = r/(1 + r)$.

При непрерывно начисляемой процентной ставке r удвоение начального капитала произойдет через время T , для которого $e^{rT} = 2$. Если $r = a/100$, то получается, что

$$T = \frac{100 \ln 2}{a} \approx \frac{69.3}{a}.$$

На практике число 69.3 заменяется на более удобное число 72, делящееся на 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12. Широкое распространение получило правило 72: *если процентная ставка есть $a/100$, то удвоение капитала происходит через $72/a$ лет.*

2. Облигации или бонь. Это долговые обязательства, выпускаемые с целью аккумуляции капитала. По ним выплачиваются фиксированные проценты, а ссуда возвращается полностью в установленное время. Доля риска в них есть, и поэтому более крупные и надежные корпорации выплачивают меньшие проценты, чем мелкие или ненадежные. Каждую облигацию характеризует:

- момент погашения T ;
- номинальная стоимость $P(T, T)$, выплачиваемая в момент погашения;
- купонная процентная ставка r_c , определяющая дивиденды, равные $r_c \times P(T, T)$;
- начальная цена облигации $P(0, T)$;
- рыночная цена $P(t, T)$, по которой обладатель облигации может ее продать в момент $t \leq T$;
- текущая процентная ставка $r_c(t, T) = r_c P(T, T) / P(t, T)$, используемая для сравнения доходности различных облигаций;
- доход до момента погашения или доходность, выражаемая обычно в процентах. Это годовая ставка $\rho(T - t, T)$, при которой рыночная цена облигации в момент t равна полному доходу от купонов и номинальной стоимости с учетом дисконтирования, т.е. это корень уравнения

$$P(t, T) = \sum_{k=1}^{T-t} \frac{r_c P(T, T)}{(1 + \rho)^k} + \frac{P(T, T)}{(1 + \rho)^{T-t}}.$$

3. Акции. Это долевые ценные бумаги, выпускаемые для увеличения капитала. По ним выплачиваются дивиденды, а также они являются предметом игры на бирже. Владелец *обыкновенной акции* получает обычно процент от дохода компании, но в случае ее разорения теряет все. Это рискованная форма. Владелец *привилегированной акции* обычно получает доход, который не растет с увеличением дохода компании, но при разорении его риск потерь значительно меньше. В акциях указывается также доля участия в работе компании, способы выплат дивидендов и другие условия.

Купля и продажа акций производится через *брокерские конторы*, которые являются членами биржи по обмену акциями (stock exchange). Основные биржи:

- NYSE (New York Stock Exchange). На ней к брокерам предъявляются высокие требования к претаксовому заработку компаний, объему акций и их стоимости. В торговле участвуют старейшие, хорошо известные компании. Их более 2 тысяч.
- AMEX (American Stock Exchange) — для компаний средних размеров. Их около 1 тысячи.

- NASDAQ (National Association of Securities Dealers Automatic Quotations) объединяет около 5 тыс. компаний разных размеров. Торговля производится по компьютерно-цифровой связи через дилеров, биржа не имеет своего централизованного места.
- OTC (Over-the-counter) — также компьютерная биржа, объединяет порядка 40 тыс. участников. Нет ограничений по размеру капитала.

Основная информация о состоянии компаний отражается в усредненных *индексах*. Наиболее известны индексы Доу-Джонса:

- DJIA – Dow Jones Industrial Average (по 30 индустриальным компаниям);
- Dow Jones Transportation Average (по 20 крупнейшим компаниям, занимающимся перевозками);
- Dow Jones Utility Average (по 15 газовым, электрическим, энергетическим компаниям);
- Dow Jones 65 Composite Average (по всем 65 компаниям из предыдущих списков).

Кроме них широко используются: Standard & Poor's 500 (S&P500) index; The NYSE Composite index; The NASDAQ Composite index; The AMEX Market Value index; Value-Line; The Russel 2000; The Wilshire 5000 и др.

Текущая информация о ценах покупки и продажи акций 5 тысяч компаний, участвующих в OTC, поставляется электронной системой NASDAQ. Брокеры через дилеров могут в любой момент узнать цены покупки и продажи, а также осуществить сделку с тем дилером, который предлагает лучшую цену.

1.2 Производные финансовые инструменты

К ним относятся: форвардные и фьючерсные контракты, опционы, варранты, свопы, комбинации, спреды, сочетания и пр.

1. **Форвардный контракт или форвард** — это соглашение о поставке-покупке некоторого товара в определенный момент в будущем по фиксированной цене. Форвард обязателен к исполнению обоими договаривающимися сторонами. Например, крестьянин еще весной договаривается с овощехранилищем о том, что он осенью поставит по фиксированной цене определенный объем овощей, хотя он еще даже не высадил рассаду. Овощехранилище договаривается с пунктами потребления — магазинами, ресторанами и др. — о продаже в определенные сроки, начиная со следующей осени, готовых овощей по фиксированным ценам.

Такие договоренности гарантируют участникам защиту от катастроф и разорения: для крестьянина — в случае неурожая или в случае отсутствия возможностей сбыта товара; для овощехранилища — от отсутствия поставщиков и отсутствия потребителей товара; для ресторанов — от отсутствия достаточного ассортимента блюд и т. д.

В момент поставки и платежа оговоренные заранее цены могут оказаться невыгодными одному из участников, но каждый готов не получить возможной прибыли

ради того, чтобы оградить себя от риска больших убытков. Таким образом, форвардный контракт есть *способ понижения риска* для обоих участников. В этом состоит назначение и причина возникновения не только форвардов, но и других производных финансовых инструментов.

Пусть форвардный контракт состоит в поставке в будущем некоторого товара, за который расплачиваются деньгами. Тогда говорят, что покупатель "занимает *длинную* позицию", а продавец (или поставщик товара) "занимает *короткую* позицию". С увеличением срока поставки, т.е. промежутка времени между подписанием форвардного контракта и его исполнением, форвардная цена товара обычно падает.

Форвардный контракт заключается между двумя сторонами без посредников. В этой ситуации одна из сторон может попытаться нарушить соглашение, если к моменту исполнения цена окажется невыгодной. Для предотвращения самой возможности такого нарушения были созданы фьючерсы.

2. **Фьючерсные контракты или фьючерсы** — это соглашения, аналогичные форвардным, но дополненные специальным механизмом перерасчета, делающим отказ от исполнения невыгодным для каждой договаривающейся стороны.

Механизм перерасчета осуществляется на бирже при помощи *клиринговой палаты*, которая заводит на каждого участника сделки специальный счет. В момент заключения фьючерсного контракта обе стороны вносят на свои счета некоторую сумму, обычно 2% — 10% от объема сделки, называемую *начальной маржой* (initial margin). При изменении рыночной стоимости товара клиринговая палата самостоятельно переводит деньги между счетами участников сделки так, чтобы компенсировать потери одного за счет прибыли другого в случае замены фьючерса на покупку того же товара по текущим рыночным ценам. Если при этом счет одного из участников значительно уменьшается, то он должен внести дополнительные деньги для поддержания определенного уровня (maintenance margin).

3. **Опцион** — это контракт, дающий его покупателю *право* купить или продать определенную ценность в установленный момент времени или период времени на заранее оговариваемых условиях. Обычно эти условия сводятся к цене покупки–продажи.

Различаются опционы покупателя (опцион–колл, call option) и опцион продавца (опцион–пут, put option). Владелец опциона–колл имеет право купить, а владелец опциона–пут — продать.

Опционы бывают *Европейского* или *Американского типа*. В опционах Европейского типа момент исполнения сделки фиксирован, т.е. стороны договариваются о возможной покупке–продаже в фиксированный момент времени в будущем. В опционах Американского типа момент сделки выбирает владелец опциона, но фиксирован временной промежуток, в течение которого опцион может быть предъявлен к исполнению.

Продавец или эмитент опциона отдает право покупателю опциона совершить или не совершать сделку с эмитентом по заранее оговоренной цене и в определенный момент или временной промежуток. Поэтому стороны неравноправны, и эмитент должен получить компенсацию, называемую премией продавцу опциона. По существу, это цена, по которой эмитент опциона продает право купить или продать покупателю опциона.

1.3 Доходы покупателя и продавца опциона

Для простоты изложения предположим, что сделки можно совершать в фиксированные моменты времени, которые пометим номерами $n = 0, 1, \dots, N$. Покупка опциона совершается в момент времени $n = 0$. В случае опциона Европейского типа покупатель опциона может предъявить его к исполнению в момент N , а в случае опциона Американского типа — в произвольный момент времени $n \leq N$. При этом рыночная цена товара, указанного в опционе, меняется во времени. В момент n обозначим ее S_n .

Рассмотрим стандартный опцион-колл Европейского типа со временем исполнения N . По нему покупатель опциона имеет право купить указанный в опционе товар по цене K в момент N . Если рыночная цена окажется больше, $S_N > K$, то владельцу опциона выгодно предъявить его к оплате, и он получит доход $S_N - K$ (который может быть выражен деньгами, если владелец опциона тут же продаст приобретенный по дешевке товар по текущим рыночным ценам). Если же в момент N окажется, что $S_N < K$, то покупать товар по такой цене нет смысла и владелец опциона не предъявит его к исполнению, т.е. опцион просто исчезнет как документ. В обоих случаях покупатель опциона отдает премию эмитенту опциона. Обозначим эту премию C .

Таким образом, доход покупателя стандартного опциона Европейского типа равен

$$(S_N - K)_+ - C,$$

где операция $(\cdot)_+$ имеет следующее определение: $(x)_+ = x$, если $x > 0$; и $(x)_+ = 0$, если $x \leq 0$. Соответственно, доход продавца (эмитента) опциона равен

$$C - (S_N - K)_+.$$

Важная задача финансовой математики состоит в том, как рассчитать правильно премию C в момент $n = 0$, не зная об изменениях рыночной цены к моменту $n = N$, так, чтобы каждая из сторон не оказалась заведомо ущемленной.

Рассмотрим стандартный опцион-пут Европейского типа. Эмитент опциона-пут отдает покупателю опциона право продать в момент $n = N$ определенный товар по цене K . За это он получает премию P . Нетрудно проверить, что доход покупателя опциона-пут можно записать в виде

$$(K - S_N)_+ - P,$$

а доход эмитента равен этому выражению с противоположным знаком, т.е. $P - (K - S_N)_+$.

Положения покупателя и продавца (эмитента) опциона любого типа различны. Покупатель опциона-колл Европейского типа просто ждет момента, когда будет возможность предъявить его для совершения сделки и следит за ценами как созерцатель. Он либо не получит ничего при неудачном изменении рыночных цен, либо выиграет. Положение эмитента более сложное. Он должен быть готовым к моменту времени N выделить $(S_N - K)_+$ свободных средств. Он следит за изменениями цен и готовит портфель ценных бумаг, который должен покрыть указанную сумму. Эмитент рискует проиграть на разнице цен, и его премия есть компенсация за риск.

Замечания. Некоторые сведения о терминологии.

1. В момент покупки опциона $n = 0$ имеются сведения о текущей рыночной цене товара S_0 . Если цена K , указанная в опционе, равна текущей рыночной цене этого

товара ($K = S_0$), то говорят, что опцион с нулевым выигрышем (*at-the-money*). Если $K < S_0$, то опцион с выигрышем (*in-the-money*), а если $K > S_0$, то с проигрышем (*out-of-the-money*).

2. Участники торгов на фондовых и финансовых биржах, стремящиеся выиграть на колебаниях цен акций, обычно делятся на "быков" и "медведей". Если на некоторые типы ценных бумаг спрос превышает предложение, то автоматически осуществляются покупки, выбывают с торгов наиболее дешевые лоты. Тем самым средняя цена предлагаемых ценных бумаг повышается.

Некоторые дилеры специально скупают бумаги одного типа, стремясь содействовать повышению цен на них. После повышения цен они собираются продать ценные бумаги и получить доход на разнице цен. Такие дилеры называются "*быками*", так как они стремятся поднять цены акций наподобие движения быка, поднимающего рогами свою жертву вверх. "Бык" может покупать даже за свои собственные деньги, но при этом его намерения становятся всем известны, и он "открывает позицию быка", занимая "длинную позицию".

Другие дилеры, наоборот, стараются продать как можно больше ценных бумаг определенных типов. Выставляя на продажу эти бумаги они не могут назначать им высокую цену, так как их не купят. Понижать цену приходится не только им, но и другим участникам рынка этих бумаг. Впоследствии дилеры рассчитывают купить те же ценные бумаги по установившейся более низкой цене. Эти дилеры называются "*медведями*". "Медведь" своими действиями давит и опускает вниз цены наподобие движения тяжелой медвежьей лапы. "Медведь" может продавать даже те товары, которых у него в момент продажи нет. Такие операции называются "короткими продажами", при этом дилер "устанавливает медвежью позицию".

1.4 Справедливая цена опциона в простейшей модели

Доходы покупателя и продавца опциона зависят от колебаний цен на рынке, и они отражаются на премии. Если заранее известно, что цены будут определенным образом расти, то этот вычисленный заранее прирост должен целиком войти в премию. Наиболее важной является ситуация, в которой все известные тенденции в изменении цен уже учтены и оставшиеся колебания "носят случайный характер".

Приращение $S_k - S_{k-1}$ рыночной цены в момент k обозначим ξ_k . Тогда

$$S_n = S_0 + \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Предположим, что ξ_k — случайные величины. Отсутствие известных тенденций в изменении цен означает, что их среднее равно нулю, т. е. $E\xi_k = 0$ при $k = 1, 2, \dots, N$.

В простейшей модели предположим, что величины ξ_k могут принимать только два значения: $-a_k$ и b_k , зависящие от k (причем $a_k, b_k > 0$). Обозначим $P\{\xi_k = -a_k\} = p_k$, $P\{\xi_k = b_k\} = q_k$. Очевидно, что $p_k + q_k = 1$, и из условия $E\xi_k = -p_k a_k + q_k b_k = 0$ следует, что

$$p_k = \frac{b_k}{b_k + a_k}, \quad q_k = \frac{a_k}{a_k + b_k}.$$

В дальнейшем будет доказано, что в такой модели справедливая цена опциона–колл равна

$$C = E(S_N - K)_+.$$

Это значение получается при приравнивании к нулю математического ожидания дохода продавца или покупателя.

Справедливость премии C означает следующее: если премия \tilde{C} окажется больше, чем C , то эмитент опциона может обеспечить себе безрисковый доход величины $\tilde{C} - C$. Если же $\tilde{C} < C$, то эмитент опциона не имеет возможности выполнить условия контракта без потерь.

Докажем это утверждение для еще более простой ситуации, когда $N = 1$ и $K = S_0$ (at-the-money). Нетрудно видеть, что в этом случае $S_1 = S_0 + \xi = K + \xi$ и $S_N - K = \xi$. Здесь и далее индекс k опускаем, так как он везде равен 1. В соответствии со сформулированным утверждением, справедливая премия должна быть

$$C = E(\xi)_+ = qb = \frac{ab}{a+b} = pa$$

Предположим, что $\tilde{C} > C$. Докажем, что эмитент может получить безрисковую прибыль в размере $\tilde{C} - C$. Эмитент покупает пакет тех же ценных бумаг, составляющий долю p от величины пакета, указанного в опционе.

Если в момент $N = 1$ реализуется $\xi = -a$, то предъявлять опцион к оплате будет невыгодно. Но за счет уменьшения цены купленный пакет величины p создаст убыток в размере pa . Итого, баланс эмитента равен

$$\tilde{C} - pa = \tilde{C} - C > 0.$$

Теперь рассмотрим вариант $\xi = b$. Тогда опцион будет предъявлен к исполнению, и эмитент потеряет на нем b . Но купленный пакет в этом случае также даст доход в размере pb . Поэтому баланс будет равен

$$\tilde{C} - b + pb = \tilde{C} - qb = \tilde{C} - C,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что после продажи опциона эмитент тут же купил акции по объему $\gamma = p$ от пакета, указанного в опционе. С учетом премии у него осталось свободных денег $\beta = \tilde{C} - pS_0$. Пара (β, γ) составляет его портфель ценных бумаг. Только что доказано, что этот портфель покрывает с избытком платежное обязательство $(S_1 - K)_+$.

Докажем, что если $\tilde{C} < C$, то такого портфеля бумаг не существует. Пусть (β, γ) — произвольный портфель, сформированный эмитентом. Пусть $\xi = -a$. Тогда опцион не будет предъявлен, а потери составят γa . Баланс с учетом премии равен

$$\tilde{C} - \gamma a < C - \gamma a = (p - \gamma)a.$$

Неотрицательный баланс возможен только при условии $\gamma < p$.

Пусть реализовалось $\xi = b$. Тогда предъявленный к исполнению опцион создаст убыток размера b , а купленный пакет — доход в размере γb . Баланс составит

$$\tilde{C} + \gamma b - b < C - b + \gamma b = b(q - 1) + \gamma b = b(\gamma - p).$$

Для того, чтобы баланс был неотрицательным, требуется, чтобы $\gamma > p$, что противоречит полученному ранее условию.

1.5 Случайная процентная ставка

Рыночная цена товара в широком смысле (включая ценные бумаги, валюту и пр.) изменяется со временем, и это изменение, как правило, содержит непредсказуемые составляющие. Рыночную цену в момент n обозначим S_n . Непредсказуемость в момент n приращения $\Delta S_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ можно описать следующим образом: выбрать в качестве модели для ΔS_{n+1} случайную величину, которая не зависит от цены S_n и всех прежних реализовавшихся цен S_k , $k < n$.

Первая вероятностная модель изменения рыночных цен была построена в диссертации Л. Башелье [L. Bachelier "Theorie de la speculation", 1900]. В ней предполагалось, что приращения цены являются случайными величинами, независимыми от предыстории. В результате модель цены как функции времени была определена как случайный процесс, позднее названный винеровским. Дальнейшие исследования богатой статистики функционирования фондовых рынков привели к уточнению этой модели: вместо значений цен S_n следует моделировать логарифмы цен $\log S_n$, для которых моделью является винеровский процесс.

Свойство независимости приращений логарифмов рыночных цен впервые на реальных данных исследовал М. Кендалл. В своем докладе на заседании Королевского статистического общества Великобритании в 1953 г. он описал статистические свойства изученных им следующих данных: недельные цены для 19 акций в период с 1928 по 1938 год; месячные средние цены на пшеницу на Чикагском рынке с 1883 по 1934 годы, а также на хлопок на Нью-Йоркской торговой бирже с 1816 по 1951 год. Пытаясь найти ритмы, тренды или циклы в этих ценах, он пришел к заключению, что "... Демон Случая извлекал случайным образом число ... и добавлял его к текущему значению для определения ... цены в следующий момент". Наиболее близкой математической моделью является

$$S_n = S_0 e^{h_1 + h_2 + \dots + h_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

где (h_k) — последовательность независимых случайных величин.

При малых приращениях цены относительное приращение близко к приращению логарифма,

$$\frac{\Delta S_n}{S_{n-1}} \approx \Delta(\log S_n) = \log S_n - \log S_{n-1},$$

и именно последняя величина в предыдущей модели обозначена h_n и считается независимой от остальных приращений.

Относительное приращение цены некоторого товара (в широком смысле)

$$\rho_n = \frac{\Delta S_n}{S_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{S_n}{S_{n-1}} - 1$$

называется *случайной процентной ставкой* этого товара, или *относительным доходом* или *коэффициентом прироста* или *возвратом (return)*. Величина ρ_n становится известной в момент n , но вычисляется как доля величины цены в момент $n - 1$. Она моделирует неопределенность, существующую в момент $n - 1$, в изменении цены к моменту n .

Если $\rho_n > 0$, то цена товара растет; если $\rho_n < 0$, то падает. Отметим, что всегда $\rho_n > -1$.

1.6 Диверсификация Марковитца

Предположим, что перед инвестором стоит задача разместить свой капитал X на рынке, где торгуются ценные бумаги A_1, A_2, \dots, A_N . Будем считать, что это акции, хотя они могут быть любым товаром.

В момент размещения капитала $n = 0$ рыночную цену одной акции A_k (или одного условного пакета акций этого типа) обозначим $S_0(A_k)$, $1 \leq k \leq N$. Инвестора интересует изменение его капитала к следующему моменту времени $n = 1$. Цены акций в этот будущий момент времени обозначим $S_1(A_k)$, они определяются соответствующими случайными процентными ставками $\rho(A_k)$.

Предположим, что инвестор купил акций A_k в количестве b_k при каждом $k = 1, 2, \dots, N$. Тогда начальный капитал $X = X_0$, вложенный в акции, можно представить в виде

$$X_0 = \sum_{k=1}^N b_k S_0(A_k).$$

В следующий момент времени $n = 1$ капитал изменится и составит

$$X_1 = \sum_{k=1}^N b_k S_1(A_k) = \sum_{k=1}^N b_k S_0(A_k)(1 + \rho(A_k)) = X_0 + \sum_{k=1}^N b_k S_0(A_k) \rho(A_k).$$

Вектор $b = (b_k)_{k=1}^N$ называется портфелем ценных бумаг, приобретенным инвестором.

Удельный вес акции A_k в начальном капитале обозначим

$$d_k = \frac{b_k S_0(A_k)}{X_0}, \quad 1 \leq k \leq N,$$

а усредненную с этим весом случайную процентную ставку —

$$\rho(b) = \sum_{k=1}^N \rho(A_k) d_k.$$

Портфель ценных бумаг b полностью определяется вектором $d = (d_k)_{k=1}^N$. В то же время, компоненты вектора d неотрицательны, в сумме составляют 1 и

$$X_1 = X_0 + \sum_{k=1}^N d_k X_0 \rho(A_k) = X_0(1 + \rho(b)).$$

По этой причине величину $\rho(b)$ можно считать *случайной процентной ставкой пакета b* .

При выборе портфеля ценных бумаг инвестор обычно преследует две цели: увеличить ожидаемый в среднем прирост капитала и уменьшить риск возможных убытков. Риск связан с нестабильностью рынка и значительными колебаниями цен.

В рамках вероятностной модели изменений цен колебания случайной величины тесно связано с ее дисперсией. Поэтому цели инвестора формулируется следующим образом: увеличить EX_1 и уменьшить DX_1 . Эти две цели иногда противоречат друг другу, поэтому принято сначала фиксировать ожидаемый капитал $m = EX_1$, а затем среди всех возможных портфелей ценных бумаг, обеспечивающих среднее значение

m выбрать тот, на котором среднеквадратичное отклонение $CKO = \sqrt{DX_1}$ было бы минимальным.

По определению, $DX_1 = X_0^2 D\rho(b)$, поэтому минимизировать следует дисперсию случайной процентной ставки пакета. Ее можно выразить через дисперсию случайных процентных ставок и их взаимную ковариацию. По определению,

$$\begin{aligned} D\rho(A_k) &= E\{(\rho(A_k) - E\rho(A_k))^2\}, & 1 \leq k \leq N, \\ \text{Cov}(\rho(A_i), \rho(A_j)) &= E\{(\rho(A_i) - E\rho(A_i))(\rho(A_j) - E\rho(A_j))\}, & 1 \leq i, j \leq N. \end{aligned}$$

Отсюда

$$D\rho(b) = \sum_{k=1}^N d_k^2 D\rho(A_k) + \sum_{i,j=1; i \neq j}^N d_i d_j \text{Cov}(\rho(A_i), \rho(A_j)).$$

Отрицательные значения ковариаций $\text{Cov}(\rho(A_i), \rho(A_j))$ уменьшают результирующее значение $D\rho(b)$. Отсюда следует *правило отрицательной коррелированности*, известное также как *эффект Марковитца*:

при составлении пакета ценных бумаг надо стремиться к тому, чтобы вложения делались в бумаги, среди которых, по возможности, много отрицательно коррелированных.

Предположим, что $d_k = 1/N$ при $1 \leq k \leq N$. Если все случайные величины $\rho(A_k)$, $k = 1, 2, \dots, N$ некоррелированы, то

$$D\rho(b) = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N D\rho(A_k).$$

Усредненное значение дисперсий обозначим

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N D\rho(A_k).$$

При условии ограниченности дисперсий $D\rho(A_k)$ дисперсия случайной процентной ставки пакета

$$D\rho(b) = \frac{1}{N} \sigma_N^2 \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$. Отсюда следует второе правило, названное *эффектом некоррелированности*:

для уменьшения риска при инвестировании в некоррелированные ценные бумаги надо, по возможности, набрать количество этих бумаг N как можно большим, а объемы сравнимыми по величине.

Метод распыления средств на покупку небольших порций слабо коррелированных ценных бумаг называется *диверсификацией* портфеля ценных бумаг. Диверсификация уменьшает риск и применяется там, где требуется прежде всего высокая защита капиталовложений от разорения.

Наконец, предположим, что $d_k = 1/N$, но цены на акции A_k могут быть коррелированы. Тогда

$$D\rho(b) = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N D\rho(A_k) + \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1; i \neq j}^N \text{Cov}(\rho(A_i), \rho(A_j)) = \frac{1}{N} \sigma_N^2 + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \overline{\text{Cov}}_N,$$

где

$$\overline{\text{Cov}}_N = \frac{1}{N^2 - N} \sum_{i,j=1; i \neq j}^N \text{Cov}(\rho(A_i), \rho(A_j)).$$

Первое слагаемое σ_N^2/N определяет *несистематический риск*, и он может быть уменьшен диверсификацией. Второе слагаемое пропорционально $\overline{\text{Cov}}_N$ и не стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Оно характеризует *систематический риск* рынка и не подавляется при диверсификации.

1.7 Модель ценообразования финансовых активов

Данная теория известна как CAPM — Capital Asset Pricing Model. В ней изучаются свойства случайной процентной ставки некоторого финансового актива A по отношению к ”глобальной” процентной ставке большого рынка, например, индекса S&P 500.

Предполагается, что активы можно размещать в банке, дающем безрисковую процентную ставку r . Она обычно меньше, чем ожидаемое значение рисковых процентных ставок, отображаемое в процентной ставке большого рынка ρ . Действительно, статистические данные говорят о том, что $r < E\rho$, т. е. за отсутствие риска надо платить.

Случайную процентную ставку актива A обозначим $\rho(A)$. Тогда можно определить коэффициент пропорциональности $\beta(A)$ из уравнения

$$E\rho(A) - r = \beta(A)(E\rho - r).$$

В рамках теории CAPM устанавливается, что этот же коэффициент $\beta(A)$ является оптимальным при оценивании центрированных значений $\rho(A)$ по центрированным значениям ρ . Другими словами, случайные величины ρ и $\rho(A)$ связаны уравнением

$$\rho(A) - E\rho(A) = \beta(A)(\rho - E\rho) + \eta,$$

и случайная величина η некоррелирована с ρ . Следствием последней формулы является уравнение

$$\text{Cov}(\rho(A), \rho) = \beta(A)D\rho.$$

Бетой актива A называется величина

$$\beta(A) = \frac{E\rho(A) - r}{E\rho - r}.$$

При этом эта же величина может быть выражена как

$$\beta(A) = \frac{\text{Cov}(\rho(A), \rho)}{D\rho}.$$

Теория CAPM и ее выводы применимы лишь к равновесному рынку, в модели которого предполагается, что участники имеют равный доступ к информации и их решения основываются на средних значениях и ковариациях цен.

В обеих формулах своего определения значение $\beta(A)$ выступает как коэффициент пропорциональности между глобальными ценами рынка и ценами актива A . В первой формуле этот коэффициент связывает средние премии за риск по отношению

к безрисковому вложению в банк; во второй — случайные отклонения от средних значений.

Величина $\beta(A)$ есть мера реакции актива A на изменение на рынке. График линейной функции $E\rho_\beta = r + \beta E(\rho - r)$ от аргумента β называют также "прямая CAPM".

Из уравнения, связывающего центрированные значения $\rho(A)$ и ρ следует, что

$$D\rho(A) = \beta^2(A)D\rho + D\eta.$$

Первое слагаемое $\beta^2(A)D\rho$ характеризует *систематический риск*. Он определяется состоянием рынка в целом ($D\rho$) и влиянием рынка на данный актив ($\beta^2(A)$). Второе слагаемое $D\eta$ характеризует *несистематический риск*, связанный с колебаниями цен конкретного актива.

При выборе портфеля ценных бумаг невозможно подавить систематический риск иначе, чем подбором активов, не коррелированных с глобальным рынком, т. е. с малыми значениями β . Несистематический риск можно подавить диверсификацией.

1.8 Арбитражная теория расчетов

В теории *APT* (Arbitrage Pricing Theory), называемой иногда также теорией "риска и возврата", глобальные факторы описываются не одной случайной процентной ставкой ρ , а несколькими факторами, представленными случайными величинами f_1, f_2, \dots, f_q . Это могут быть цены на нефть, на металл, объем урожая зерновых и пр.

Пусть на рынке торгуются N активов A_1, A_2, \dots, A_N . Для каждого $i = 1, 2, \dots, N$ случайная процентная ставка актива A_i представляется в виде линейной комбинации

$$\rho(A_i) = a_0(A_i) + a_1(A_i)f_1 + \dots + a_q(A_i)f_q + \zeta(A_i),$$

где "шумовая" составляющая $\zeta(A)$ некоррелирована с данными глобальными факторами. За счет нормировки и линейных преобразований можно свести линейную модель к частному случаю, когда $E f_k = 0$, $D f_k = 1$, $\text{Cov}(f_k, f_l) = 0$ при $k \neq l$ и $E \zeta(A_i) = 0$, а также $\text{Cov}(f_k, \zeta(A_i)) = 0$ и $\text{Cov}(\zeta(A_i), \zeta(A_j)) = \sigma_{ij}^2$ при $k, l = 1, 2, \dots, q$ и при $i, j = 1, 2, \dots, N$.

Портфелю $d = (d_1, \dots, d_N)$ соответствует доход

$$\rho(d) = \sum_{i=1}^N d_i \rho(A_i) = \sum_{i=1}^N d_i a_{i0} + \left(\sum_{i=1}^N d_i a_{i1} \right) f_1 + \dots + \left(\sum_{i=1}^N d_i a_{iq} \right) f_q + \sum_{i=1}^N d_i \zeta(A_i),$$

где $a_{ik} = a_k(A_i)$.

Выберем такой портфель ценных бумаг, чтобы одновременно были выполнены условия

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 + \dots + d_N &= 0, \\ \sum_{i=1}^N d_i a_{ik} &= 0, \quad k = 1, \dots, q, \\ \sum_{i=1}^N d_i a_{i0} &= \sum_{i=1}^N d_i^2. \end{aligned}$$

Для этого введем матричные обозначения

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_{N1} & \cdots & a_{Nq} \end{pmatrix}, \quad a_0 = \begin{pmatrix} a_0(A_1) \\ \vdots \\ a_0(A_N) \end{pmatrix}, \quad \bar{\rho} = \begin{pmatrix} \rho(A_1) \\ \vdots \\ \rho(A_N) \end{pmatrix}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} \zeta(A_1) \\ \vdots \\ \zeta(A_N) \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_q \end{pmatrix}.$$

Тогда $\bar{\rho} = a_0 + \mathcal{A}f + \zeta$, а условия можно записать в виде $d^* \mathcal{A} = 0$, $d^* a_0 = |d|^2$.

Если $N \gg q$, то естественно ожидать, что прямоугольная матрица \mathcal{A} имеет полный ранг по столбцам. Тогда условие $d^* \mathcal{A} = 0$ возможно только если

$$d = (I - \mathcal{A}(\mathcal{A}^* \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^*) \gamma$$

с произвольной матрицей γ размера $q \times q$. Определим $\gamma = a_0$ и введем обозначение $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{A}^* \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^*$. Тогда очевидно, что $\mathcal{B} = \mathcal{B}^* = \mathcal{B}^2$. Отсюда находим, что

$$d^* a_0 = a_0^* (I - \mathcal{B}) a_0 = a_0^* (I - \mathcal{B})^2 a_0 = |d|^2,$$

что доказывает выполнение всех дополнительных условий.

По определению, $\mathcal{B}a_0 = \mathcal{A}\lambda$, где

$$\lambda = (\mathcal{A}^* \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^* a_0 = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_q)^*.$$

Следовательно,

$$d = a_0 - \mathcal{B}a_0 = a_0 - \lambda_0 1_N - \sum_{k=1}^q \lambda_k a_k,$$

где $a_k = (a_k(A_1), a_k(A_2), \dots, a_k(A_N))^*$, $1_N = (1, 2, \dots, 1)^*$. Квадрат нормы d равен

$$|d|^2 = \sum_{i=1}^N \left(a_0(A_i) - \lambda_0 - \sum_{k=1}^q \lambda_k a_k(A_i) \right)^2.$$

Предположим, что допустима такая ситуация, когда $|d| \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. Выберем портфель θd с $\theta = |d|^{-4/3}$. Для него $\rho(\theta d) = \theta \rho(d)$, и поэтому

$$\mathbb{E} \rho(\theta d) = \theta d^* a_0 = \theta |d|^2 = |d|^{2/3} \rightarrow \infty, \quad (N \rightarrow \infty)$$

$$\mathbb{D} \rho(\theta d) = \theta^2 \sum_{i,j=1}^N d_i d_j \sigma_{ij}^2.$$

Если составляющие $\zeta(A_i)$ некоррелированы и нормированы, т. е. $\sigma_{ij} = \delta_{ij}$, то

$$\mathbb{D} \rho(\theta d) = \theta^2 |d|^2 = |d|^{-2/3} \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$.

В итоге доказано следующее: при нулевом начальном капитале возможно составить такой портфель ценных бумаг, что ожидаемое значение дохода может быть сколь угодно большим, а риск, выраженный дисперсией дохода — сколь угодно малым. Такая ситуация называется арбитражем: положительная прибыль достигается при отсутствии риска при нулевом начальном капитале.

Условие отсутствия арбитража на рынке указывает на неправомерность одного из сделанных предположений. Этим предположением оказывается $|d| \rightarrow \infty$. Но при больших N из ограниченности d следует, что большинство из его компонентов малы. Другими словами, для большинства активов A_i справедливо приближенное равенство

$$E\rho(A_i) = a_0(A_i) \approx \lambda_0 + \sum_{k=1}^q \lambda_k a_k(A_i).$$

Таким образом, среднее значение случайной процентной ставки есть линейная комбинация коэффициентов зависимости от глобальных факторов. Этот вывод обоснован лишь для больших N , а для небольшого набора активов расчет среднего значения $\rho(A)$ по указанной формуле может привести к грубым ошибкам.

Глава 2

Расчет цен платежных обязательств

2.1 Мартингал как модель изменения случайной процентной ставки

Определение. Мартингалом (в дискретном времени) называется стохастическая последовательность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^\infty$, заданная на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) с выделенным на нем неубывающим семейством σ -алгебр $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^\infty$, $(\mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$ при $m \leq n$,) такая, что $E|X_n| < \infty$, X_n являются \mathcal{F}_n -измеримыми и $E(X_n | \mathcal{F}_m) = X_m$ с вероятностью 1 при $m \leq n$.

В моделях изменения цен \mathcal{F}_n есть σ -алгебра всех событий, произошедших до момента n включительно. Измеримость произвольной случайной величины ξ относительно σ -алгебры \mathcal{F}_n означает, что значения этой случайной величины становятся полностью известными не позже момента n .

Пусть r_n — банковская ставка. Ее значение фиксируется в момент $n - 1$, поэтому случайная величина r_n является \mathcal{F}_{n-1} -измеримой. Банковский счет B_n также \mathcal{F}_{n-1} -измерим, поскольку он равен $B_{n-1}(1 + r_n)$.

Рыночная цена S_n некоторого актива A , наоборот, в момент $n-1$ еще неизвестна, а фиксируется только в момент n , поэтому она \mathcal{F}_n -измерима. Соответственно, случайная процентная ставка ρ_n также \mathcal{F}_n -измерима.

Предположим, что $E(\rho_n | \mathcal{F}_{n-1}) = r_n$ при всех $n \geq 1$. Это предположение означает, что ожидаемый в среднем доход от актива A совпадает с доходом от процентов в банке. Данная ситуация реальна, например, в том случае, когда риск актива A столь же мал, как и риск разорения банка. Докажем, что в этом случае отношение S_n/B_n образует мартингал.

Действительно,

$$\begin{aligned} E\left(\frac{S_n}{B_n} | \mathcal{F}_{n-1}\right) &= E\left(\frac{S_{n-1}(1 + \rho_n)}{B_n} | \mathcal{F}_{n-1}\right) = \frac{S_{n-1}}{B_n} E((1 + \rho_n) | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \frac{S_{n-1}}{B_n} (1 + r_n) = \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}. \end{aligned}$$

На подобной модели основывается так называемое "фундаментальное решение", связывающее величину рыночной цены с ожидаемыми дивидендами. Пусть полный доход от актива A состоит из колебаний рыночной цены ΔS_n и дивидендов (или

других дополнительных источников дохода, связанных с данным активом) δ_n . Тогда случайная процентная ставка определяется как

$$\rho_n = \frac{\Delta S_n + \delta_n}{S_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Предположим, что $E(\rho_n | \mathcal{F}_{n-1}) = r$ — постоянная величина. Тогда

$$E(S_{n+1} + \delta_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(S_n(1 + \rho_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = S_n(1 + r),$$

что можно также записать в форме

$$S_n = \frac{1}{1+r} E(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) + \frac{1}{1+r} E(\delta_{n+1} | \mathcal{F}_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Итерируя последнее равенство k раз, получим

$$S_{n+k} = \frac{1}{(1+r)^k} E(S_{n+k} | \mathcal{F}_n) + \sum_{j=1}^k \frac{1}{(1+r)^j} E(\delta_{n+j} | \mathcal{F}_n), \quad n, k = 1, 2, \dots$$

Всякое ограниченное решение данного уравнения записывается в виде

$$S_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^j} E(\delta_{n+j} | \mathcal{F}_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Это и есть фундаментальное решение. В частности, если дивиденды не меняются, $\delta_n = \delta$ при всех n , то

$$S_n = \delta/r,$$

т.е. цена пропорциональна дивидендам и обратно пропорциональна ожидаемому значению случайной процентной ставки.

2.2 Инвестор на (B, S) –рынке

Как и в предыдущем разделе, в каждый момент $n \geq 0$ на вероятностном пространстве задана σ -алгебра \mathcal{F}_n , которая интерпретируется как объем информации, доступной каждому участнику рынка в момент n . Для любого $n \geq 0$ случайные величины, измеримые относительно \mathcal{F}_n , становятся полностью известными всем участникам рынка в момент не позже n .

Рассмотрим рынок, состоящий из банковского счета (или *безрискового актива*) B и акций (*рисковых активов*) A_1, A_2, \dots, A_d . Стоимость условной единицы вложений на банковский счет описывается последовательностью $(B_n)_{n \geq 0}$, а рыночные цены одного условного пакета акции A_i — последовательностью $(S_n^i)_{n \geq 0}$ при $1 \leq i \leq d$. В соответствии с моделью из предыдущего раздела случайная величина B_n является \mathcal{F}_{n-1} –измеримой, а случайная величина S_n^i — \mathcal{F}_n –измеримой.

Сделаем следующие предположения относительно допустимых действий инвестора: он может размещать свои средства на банковском счете и брать с него даже в долг, а также покупать и продавать акции, пакеты которых считаются ”безгранично делимыми”, в том числе выполнять ”короткие продажи”.

Определение 1. *Портфелем ценных бумаг* называется пара последовательностей $\pi = (\beta, \gamma)$ случайных величин $\beta = (\beta_n)_{n \geq 0}$ и $\gamma = (\gamma_n^1, \gamma_n^2, \dots, \gamma_n^d)_{n \geq 0}$, которые интерпретируются следующим образом: β_n есть банковский вклад в момент n , а γ_n^i есть объем купленных акций вида A_i в момент n . При этом случайные величины β_n и γ_n^i при всех $1 \leq i \leq d$ являются \mathcal{F}_{n-1} -измеримыми.

Капиталом портфеля ценных бумаг $\pi = (\beta, \gamma)$ называется последовательность $X^\pi = (X_n^\pi)_{n \geq 0}$, определяемая равенством

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \sum_{i=1}^d \gamma_n^i S_n^i.$$

□

Банковский вклад β_n может быть отрицательным, что означает взятие в долг, а объем акций γ_n^i также может принимать отрицательные значения, что соответствует "коротким продажам" акций вида A_i .

Банковский вклад можно также рассматривать как вложение в некоторый дополнительный актив, однако этот актив имеет важную особенность: его цена в момент n известна уже в момент $n-1$, что для остальных активов обычно недостижимо.

Для упрощения обозначений скалярное произведение векторов γ_n и S_n будем обозначать так же, как и произведение чисел, а именно,

$$\gamma_n S_n = \sum_{i=1}^d \gamma_n^i S_n^i.$$

Таким образом, капитал портфеля ценных бумаг $\pi = (\beta, \gamma)$ записывается в виде $X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n$.

Обычно перед инвестором стоит задача расчета портфеля ценных бумаг так, чтобы его капитал укладывался в ряд ограничений, например, был не ниже заданной величины в определенные моменты времени или покрывал некоторое платежное обязательство. Портфель является последовательностью случайных величин β_n и γ_n , и в начальный момент времени $n = 0$ их значения еще не определены. Но инвестор знает, что к моменту $n-1$, когда потребуется фиксировать β_n и γ_n , у него уже будет достаточно информации, чтобы выбрать их однозначно. Этой информацией являются рыночные цены S_{n-1} и банковские параметры B_{n-1} и r_n .

Таким образом, инвестор выбирает не фиксированные объемы покупок и продаж на финансовом рынке, а свою стратегию поведения. Он указывает однозначно в момент времени $n = 0$, как он будет реагировать на все возможные изменения рыночных цен.

Вычислим приращение капитала портфеля за один такт времени. Введем обозначения для приращений:

$$\Delta B_n = B_n - B_{n-1}, \quad \Delta S_n = S_n - S_{n-1}, \quad \Delta \beta_n = \beta_n - \beta_{n-1}, \quad \Delta \gamma_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}.$$

Применив равенство $\Delta(a_n b_n) = a_n \Delta b_n + b_{n-1} \Delta a_n$, выразим приращение капитала

$$\Delta X_n^\pi = X_n^\pi - X_{n-1}^\pi = [\beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n] + [b_{n-1} \Delta \beta_n + S_{n-1} \Delta \gamma_n].$$

Выражение во второй квадратной скобке является \mathcal{F}_{n-1} -измеримым, оно равно изменению капитала портфеля в момент $n-1$ за счет выбранного изменения самого портфеля, т.е. за счет приращений $\Delta\beta_n$ и $\Delta\gamma_n$ при текущих ценах B_{n-1} и S_{n-1} . Другими словами, это выражение есть объем вложенных средств в момент $n-1$, который может быть положительным (вливание капитала) или отрицательным (изъятие средств из оборота).

Наоборот, выражение в первой квадратной скобке есть изменение капитала портфеля за рассматриваемый промежуток времени между тактами $n-1$ и n за счет изменения рыночных цен и за счет банковских процентов.

Определение 2. Портфель ценных бумаг π называется *самофинансируемым*, если его капитал можно представить в виде

$$X_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{k=1}^n (\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k), \quad n \geq 1.$$

□

Очевидно, что условие самофинансирования можно записать также в виде

$$B_{n-1} \Delta\beta_n + S_{n-1} \Delta\gamma_n = 0, \quad n \geq 1,$$

т.е. в каждый момент времени $n-1$ при изменении портфеля не производится вливания или оттока капитала.

Цены акций и капитал можно измерять в процентах к банковскому счету, $\tilde{S}_n = S_n/B_n$, $\tilde{X}_n^\pi = X_n^\pi/B_n$, $\tilde{B}_n = 1$. Тогда условие самофинансируемости можно записать как

$$\tilde{B}_{n-1} \Delta\beta_n + \tilde{S}_{n-1} \Delta\gamma_n = [B_{n-1} \Delta\beta_n + S_{n-1} \Delta\gamma_n]/B_{n-1} = 0.$$

Поскольку $\Delta\tilde{B}_n = 0$, то определение самофинансируемости можно также записать как

$$\tilde{X}_n^\pi = \tilde{X}_0^\pi + \sum_{k=1}^n \gamma_k \Delta\tilde{S}_k, \quad n \geq 1,$$

или в приращениях

$$\Delta \left(\frac{X_n^\pi}{B_n} \right) = \gamma_n \Delta \left(\frac{S_n}{B_n} \right).$$

Множество всех самофинансируемых портфелей будем обозначать SF (от self-financing — самофинансирование).

Рассмотрим более подробную модель изменения капитала портфеля ценных бумаг. В ней присутствуют следующие составляющие: дивиденды, потребление, инвестирование и операционные издержки. Введем соответствующие обозначения.

1. Дивиденды по акциям. По каждому виду акции A_i выплачиваются дивиденды, суммарные выплаты по ним к моменту n обозначим D_n^i . Очевидно, что приращения $\delta_n^i = \Delta D_n^i \geq 0$ и что $D_0^i = 0$. Размеры выплат определяются по окончании периода времени, за который начисляются дивиденды, поэтому величины D_n^i являются \mathcal{F}_n -измеримыми. Совокупность всех дивидендов обозначим $D_n = (D_n^1, D_n^2, \dots, D_n^d)$.

2. Потребление. Общий объем потребления к моменту n обозначим C_n . Очевидно, $\Delta C_n^i \geq 0$ и $C_0^i = 0$. Величины C_n являются \mathcal{F}_n -измеримыми.
3. Инвестиции. К моменту n объем инвестиций обозначим I_n , эта случайная величина \mathcal{F}_n -измерима. Очевидно, $\Delta I_n^i \geq 0$ и $I_0^i = 0$.
4. Операционные издержки. Пусть за покупку каждой акции нужно заплатить долю λ от ее текущей стоимости, а за продажу акции — долю μ ее стоимости. Конечно, $\lambda, \mu \geq 0$.

Условие самофинансируемости можно записать следующим образом:

$$B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = -[\Delta C_n - \Delta I_n + \delta_{n-1}\gamma_{n-1} + \mu S_{n-1}(\Delta\gamma_n)^+ + \lambda S_{n-1}(\Delta\gamma_n)^-].$$

Приращение капитала самофинансируемого портфеля за период от $n-1$ до n равно

$$\Delta\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right) = \gamma_n \left[\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) + \frac{\Delta D_n}{B_n} \right] + \frac{\Delta(I_n - C_n)}{B_{n-1}} - \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} [\lambda(\Delta\gamma_n)^+ + \mu(\Delta\gamma_n)^-].$$

Иногда к формированию портфеля предъявляются дополнительные требования, например,

- $\beta_n \geq 0$, — банк не дает денег в долг;
- $\gamma_n \geq 0$, — запрещены "короткие продажи";
- $\gamma_n S_n / X_n^\pi \leq \alpha$, — ограничения на процент "рискового капитала";
- $\mathbf{P}\{X_N^\pi \in A\} \geq 1 - \varepsilon$, — в момент N для покрытия платежных обязательств требуется иметь капитал в размере, указанном в множестве A , что требуется обеспечить с вероятностью не меньше $1 - \varepsilon$.

2.3 Хеджирование. Верхние и нижние цены

Предположим, что целью инвестора является покрытие некоторого платежного обязательства в момент N . Его стратегия, т.е. портфель ценных бумаг, создается в момент $n = 0$ и состоит в том, как в моменты $n = 1, 2, \dots, N-1$ менять объемы банковских вкладов и пакетов акций в зависимости от реализовавшейся рыночной цены.

Платежное обязательство может также зависеть от рыночной цены в момент N , например, если это проданный опцион. Таким образом, как портфель ценных бумаг, так и платежное обязательство моделируются случайными величинами, зависящими от текущих рыночных цен. В этом смысле платежное обязательство выражается случайной величиной f_N , являющейся \mathcal{F}_N -измеримой. Начальный капитал портфеля обозначим x , это неотрицательная величина.

Определение 3. *Верхним (x, f_N) -хеджем* называется портфель ценных бумаг $\pi = (\beta, \gamma)$, у которого капитал в момент $n = 0$ равен x , а в момент $n = N$ удовлетворяет неравенству $X_N^\pi \geq f_N$ почти наверное.

Нижним (x, f_N) -хеджем называется портфель ценных бумаг $\pi = (\beta, \gamma)$, у которого капитал в момент $n = 0$ равен x , а в момент $n = N$ удовлетворяет неравенству $X_N^\pi \leq f_N$ почти наверное.

В случае выполнения обоих этих условий, т.е. если $X_0^\pi = x$ и $X_N^\pi = f_N$, то (x, f_N) -хедж называется *совершенным*. \square

Хедж (от английского hedge — забор) является инструментом защиты инвестора от колебания цен в ситуации, когда необходимо обеспечить покрытие некоторого платежного обязательства. Само обязательство меняется вместе с колебаниями цен, и задача инвестора состоит в разработке такой стратегии покупки–продажи активов, чтобы капитал портфеля колебался согласованно с обязательством в зависимости от рыночных цен. Если платежное обязательство возникло в результате некоторой финансовой операции (сделки), то разработка хеджа можно рассматривать как *страхование* этого обязательства.

Пусть f_N и $x \geq 0$ фиксированы. Введем обозначение для множества всех *самофинансируемых* верхних (x, f_N) -хеджей

$$H^*(x, f_N) = \{\pi \in SF : X_0^\pi = x, X_N^\pi \geq f_N \text{ п.н.}\},$$

а также для множества всех *самофинансируемых* нижних (x, f_N) -хеджей

$$H_*(x, f_N) = \{\pi \in SF : X_0^\pi = x, X_N^\pi \leq f_N \text{ п.н.}\}.$$

Иногда условие самофинансируемости не включают в определения этих множеств, однако оно необходимо для расчета справедливых цен платежных обязательств, и мы ограничимся только этими целями.

Не для всякого начального капитала x существует хотя бы один верхний хедж или хотя бы один нижний хедж. Отсутствие такого хеджа означает, что соответствующее множество, H^* или H_* , пусто. Ясно, что если для начального капитала x существует верхний хедж, то он существует и для любого большего начального значения $x_1 > x$. Для нижних хеджей наоборот: если множество $H_*(x, f_N)$ непусто, то непусто множество $H_*(x_2, f_N)$ с любым $x_2 < x$.

Определение 4. *Верхней ценой* платежного обязательства f_N называется число

$$C^*(f_N) = \inf\{x \geq 0 : H^*(x, f_N) \neq \emptyset\}.$$

Нижней ценой платежного обязательства f_N называется число

$$C_*(f_N) = \sup\{x \geq 0 : H_*(x, f_N) \neq \emptyset\}.$$

\square

При продаже платежного обязательства (например, опциона) его верхняя и нижняя цены оказываются границами, в рамках которых возможен торг между покупателем и продавцом о цене покупки. Следующие рассуждения показывают, что вне промежутка цен $[C_*, C^*]$ одна из сторон может получить чистую безрисковую прибыль, что, конечно, не устраивает другую сторону.

Пусть продавец платежного обязательства f_N продал его по цене $x > C^*(f_N)$. Тогда он может распорядиться полученными средствами следующим образом. Выберем y так, чтобы $C^*(f_N) < y < x$. По определению величины $C^*(f_N)$ существует

такой портфель ценных бумаг π^* , что $X_0^{\pi^*} = y$ и $X_N^{\pi^*} \geq f_N$. Купив такой портфель по цене y , продавец к моменту N должен будет отдать f_N и получить $X_N^{\pi^*} \geq f_N$, т.е. не проиграть. А в начальный момент он оставил у себя $x - y > 0$, что составляет его безрисковую прибыль ("free lunch").

Сложнее обстоит дело с нижней ценой платежного обязательства. Пусть покупатель купил обязательство f_N по цене $x < C_*(f_N)$. Выберем y так, чтобы $x < y < C_*(f_N)$. Тогда существует такой портфель π_* , что $X_0^{\pi_*} = y$ и $X_N^{\pi_*} \leq f_N$. В этой ситуации покупателю следует поискать на рынке инвестора, который готов вложив в начальный момент $n=0$ капитал y получить в момент $n=N$ капитал $X_N^{\pi_*}$. При ликвидности рынка, наличия на нем участников с разнообразными интересами, ожиданиями и сроками оборота такой инвестор вполне может найтись. Этот инвестор платит покупателю y (передает в управление эти средства) за обязательство возвратить в момент N капитал $X_N^{\pi_*}$. Чистый безрисковый выигрыш покупателя составит не менее $y - x > 0$.

Таким образом, область цен $[0, C_*(f_N))$ за платежное обязательство f_N дает покупателю возможность получения безрискового дохода, против чего может справедливо возражать продавец. Область цен $(C^*(f_N), \infty)$ дает продавцу возможность получения безрискового дохода, против чего может справедливо возражать покупатель. Следовательно, приемлемая цена за платежное обязательство лежит в области $[C_*(f_N), C^*(f_N)]$, устанавливающей рамки переговоров об окончательной цене за платежное обязательство.

Особо интересен случай, когда $C_*(f_N) = C^*(f_N)$, который возникает, если существует хотя бы один совершенный хедж. Тогда дальнейшие переговоры теряют смысл, и стороны должны принять цену $x = C_*(f_N) = C^*(f_N)$ за платежное обязательство f_N как единственно справедливую. Такое обязательство f_N называется *воспроизводимым*.

Определение 5. Рынок ценных бумаг называется *полным*, если на нем всякое ограниченное \mathcal{F}_N -измеримое платежное обязательство является воспроизводимым. \square

Полнота рынка выглядит весьма редким явлением, однако имеется ряд признанных математических моделей рынка, которые обладают свойством полноты. В этих моделях цена любого (ограниченного) платежного поручения однозначно вычисляется. Поэтому модели полных рынков активно применяются для теоретических расчетов цен платежных обязательств.

2.4 Одношаговая модель

В этом разделе верхняя и нижняя цены платежного обязательства вычислены в простейшем примере. Эти числа имеют наглядную интерпретацию как свойства графика функции, определяющей доход от этой ценной бумаги. Вводится и поясняется понятие мартингальных мер, которые играют ключевую роль в исследовании свойств безарбитражности и полноты рынков.

В данной модели (B, S) -рынка присутствует банковский счет и всего один вид акций, кроме того, выбирается $N = 1$. В начальный момент заданы константы B_0 и

S_0 . Они преобразуются за один такт в величины

$$\begin{aligned} B_1 &= B_0(1+r), \\ S_1 &= S_0(1+\rho), \end{aligned}$$

где $r \geq 0$ — известная банковская процентная ставка, а $\rho > -1$ — случайная процентная ставка акции. Вся случайность заключена в величине ρ или, что то же самое, в случайной величине S_1 .

Платежное поручение f_1 , измеримое относительно S_1 , можно представить как функцию от этой случайной величины, т.е. $f_1 = f(S_1)$, где f — некоторая фиксированная (неслучайная) функция (например, в европейском опционе покупателя это $(S_1 - K)_+$).

Без ограничения общности можно считать, что $B_0 = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} C^*(f_1) &= \inf \{ \beta + \gamma S_0 : \beta(1+r) + \gamma S_0(1+\rho) \geq f(S_0(1+\rho)) \text{ п.н. } \}, \\ C_*(f_1) &= \sup \{ \beta + \gamma S_0 : \beta(1+r) + \gamma S_0(1+\rho) \leq f(S_0(1+\rho)) \text{ п.н. } \}. \end{aligned}$$

Это границы промежутка приемлемых цен при продаже платежного обязательства. Далее будет показано, что эти величины тесно связаны со свойствами графика функции f и могут быть рассчитаны аналитически.

Предположим, что случайная величина ρ принимает значения в промежутке $[a, b]$ почти наверное, причем этот промежуток не может быть уменьшен. Распределение ρ на $[a, b]$ обозначим P . Наряду с распределением P рассмотрим другие распределения \tilde{P} на $[a, b]$, которые взаимно абсолютно непрерывны относительно P (т.е. для любого борелевского множества A если $P(A) = 0$, то $\tilde{P}(A) = 0$ и наоборот), что обозначается $\tilde{P} \sim P$. Введем подмножество таких распределений:

$$\mathcal{P} = \{ \tilde{P} : \tilde{P} \sim P, \int_a^b \rho \tilde{P}(d\rho) = r \}.$$

Распределения \tilde{P} из этого множества называются мартингальными мерами. Действительно, если такие распределения порождены вероятностной мерой, то $\tilde{E}\rho = r$. При таком условии, как было доказано выше, случайные величины S_n/B_n образуют мартингал.

Множество \mathcal{P} непусто, если $r \in [a, b]$. Множество \mathcal{P} состоит ровно из одного элемента, если к тому же распределение P сосредоточено всего в двух точках a и b . Далее будет доказано, что существование хотя бы одной мартингальной меры равносильно отсутствию арбитражных возможностей на рынке, а единственность мартингальной меры равносильна полноте рынка.

Пусть $\pi = (\beta, \gamma) \in H^*(x, f_1)$ — некоторый верхний хедж. Тогда по определению,

$$\beta(1+r) + \gamma S_0(1+\rho) \geq f(S_0(1+\rho))$$

почти наверное. Пусть \tilde{P} — некоторая мартингальная мера. Проинтегрируем неравенство по этой мере, что означает переход к математическим ожиданиям ($E_{\tilde{P}}$) по этой мере в правой и левой частях. Поскольку $E_{\tilde{P}}\rho = r$ по определению мартингальной меры, то

$$\beta(1+r) + \gamma S_0(1+r) \geq E_{\tilde{P}}f(S_0(1+\rho)),$$

что после преобразований равносильно неравенству

$$\beta + \gamma S_0 \geq \frac{\mathbb{E}_{\tilde{P}} f(S_0(1 + \rho))}{1 + r}.$$

Стоящая в левой части неравенства величина $x = \beta + \gamma S_0$ есть начальный капитал портфеля π . Поэтому доказано следующее утверждение: для любого верхнего хеджа начальный капитал не может быть меньше, чем величина, стоящая в правой части последнего неравенства. Значит, и нижняя грань $C^*(f_1)$ не меньше этой величины. Данное утверждение верно для любой мартингальной меры \tilde{P} . Следовательно,

$$C^*(f_1) \geq \sup_{\tilde{P} \in \mathcal{P}} \frac{\mathbb{E}_{\tilde{P}} f(S_0(1 + \rho))}{1 + r}.$$

Аналогично доказывается, что

$$C_*(f_1) \leq \inf_{\tilde{P} \in \mathcal{P}} \frac{\mathbb{E}_{\tilde{P}} f(S_0(1 + \rho))}{1 + r}.$$

В обозначениях

$$x_* = \inf_{\tilde{P} \in \mathcal{P}} \frac{\mathbb{E}_{\tilde{P}} f(S_0(1 + \rho))}{1 + r}, \quad x^* = \sup_{\tilde{P} \in \mathcal{P}} \frac{\mathbb{E}_{\tilde{P}} f(S_0(1 + \rho))}{1 + r}.$$

доказано, что

$$C_*(f_1) \leq x_* \leq x^* \leq C^*(f_1).$$

Пусть функция f выпуклая и непрерывная. Докажем, что тогда $x_* = C_*(f_1)$, $x^* = C^*(f_1)$ и найдем эти величины.

Сначала докажем, что существует единственная мера P^* , сосредоточенная в точках a и b и обладающая важным свойством из условия мартингальности: $\mathbb{E}_{P^*} \rho = r$. Действительно, если p^* и q^* есть вероятности попадания в точки a и b , соответственно, то они удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} p^* + q^* &= 1, \\ ap^* + bq^* &= r. \end{aligned}$$

Отсюда p и q однозначно определяются:

$$\begin{aligned} p^* &= \frac{b - r}{b - a}, \\ q^* &= \frac{r - a}{b - a}. \end{aligned}$$

Введем вспомогательные обозначения: $f_a = f(S_0(1 + a))$ и $f_b = f(S_0(1 + b))$.

Теорема 1. Пусть функция платежного обязательства f выпукла и непрерывна на $[a, b]$, а отрезок $[a, b]$ — наименьший, вне которого случайная величина ρ равна нулю почти наверное. Тогда $C^*(f_1) = x^*$, эта величина достигается на мере P^* и равна

$$C^*(f_1) = \frac{1}{1 + r} (p^* f_a + q^* f_b).$$

Кроме того, величина $C^*(f_1)$ достигается на портфеле ценных бумаг $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$ при

$$\begin{aligned}\beta^* &= \frac{1}{1+r} \left(f_a - \frac{f_b - f_a}{b-a} (1+a) \right), \\ \gamma^* &= \frac{1}{S_0} \frac{f_b - f_a}{b-a},\end{aligned}$$

т.е. этот портфель является верхним хеджем, $X_1^{\pi^*} \geq f_1$ п.н., с начальным капиталом $X_0^{\pi^*} = C^*(f_1)$.

Доказательство. Пусть $c^* = (p^* f_a + q^* f_b) / (1+r)$ — правая часть формулы в утверждении теоремы 1. Достаточно доказать, что $x^* \geq c^*$ и $C^*(f_1) \leq c^*$.

Докажем, что $x^* \geq c^*$. По определению x^* достаточно предъявить такую последовательность мартингальных мер $(\tilde{P}_n)_{n=1}^\infty$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\tilde{P}_n} f(S_0(1+\rho)) = c^*(1+r).$$

В качестве $(\tilde{P}_n)_{n=1}^\infty$ выберем последовательность мартингальных мер, которые сходятся по вероятности к распределению P^* . Такая последовательность существует, поскольку промежуток $[a, b]$ — наименьший, вне которого $\rho = 0$ почти наверное.

По свойствам математических ожиданий от ограниченных величин

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\tilde{P}_n} f(S_0(1+\rho)) &= \mathbb{E}_{P^*} f(S_0(1+\rho)) = f(S_0(1+a))P^*({a}) + f(S_0(1+b))P^*({b}) \\ &= f_a p^* + f_b q^* = c^*(1+r),\end{aligned}$$

по определению c^* , что и требовалось доказать.

Докажем, что $C^*(f_1) \leq c^*$. Достаточно предъявить такой портфель $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$, что $\beta^* + \gamma^* S_0 = c^*$ и $\beta^*(1+r) + \gamma^* S_0(1+\rho) \geq f(S_0(1+\rho))$ почти наверное. Но случайная величина ρ принимает значения на отрезке $[a, b]$ почти наверное, поэтому достаточно доказать, что

$$\beta^*(1+r) + \gamma^* S_0(1+t) \geq f(S_0(1+t)) \quad \forall t \in [a, b].$$

Выберем β^* и γ^* так, чтобы линейная функция $\phi(t) = \beta^*(1+r) + \gamma^* S_0(1+t)$ проходила через точки $\phi(a) = f_a$, $\phi(b) = f_b$. Эти два уравнения легко решить относительно β^* и γ^* , и при этом получаются формулы из утверждения теоремы.

Функция $f(S_0(1+t))$ выпуклая на промежутке $[a, b]$ по предположению, поэтому ее график находится ниже хорды, соединяющей концевые точки (a, f_a) и (b, f_b) . Эта же хорда есть график линейной функции ϕ . Следовательно, неравенство $\beta^*(1+r) + \gamma^* S_0(1+t) \geq f(S_0(1+t))$ на $[a, b]$ доказано и портфель π^* есть верхний хедж для f_1 . Его начальный капитал равен

$$\beta^* + \gamma^* S_0 = \frac{1}{(1+r)(b-a)} [f_a(b+1-1-r) + f_b(-a-1+1+r)] = \frac{1}{1+r} (f_a p^* + f_b q^*) = c^*,$$

откуда $C^*(f_1) \leq c^*$, что завершает доказательство теоремы. \square

Для нахождения нижней цены платежного обязательства f_1 введем следующие обозначения. Производную выпуклой функции $f(S_0(1+x))$ по x в точке r обозначим

λ . Тогда уравнение касательной к графику функции $f(S_0(1+x))$ в точке $(r, f(S_0(1+r)))$ будет

$$\psi(x) = \lambda(x - r) + f_r,$$

где $f_r = f'(S_0(1+r))$.

Теорема 2. Пусть вероятность попадания случайной величины ρ в любую окрестность точки r положительна, а функция f выпукла и непрерывна. Тогда

$$C_*(f_1) = x_* = \frac{f_r}{1+r}.$$

Эта величина достигается на нижнем хедже $\pi_* = (\beta_*, \gamma_*)$ при

$$\begin{aligned}\beta_* &= \frac{f_r}{1+r} - \lambda, \\ \gamma_* &= \frac{\lambda}{S_0}.\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $c_* = f_r/(1+r)$. Докажем, что $x_* \leq c_* \leq C_*(f_1)$.

Определим P_* как распределение, сосредоточенное в одной точке r , т.е. $P_*(\{r\})=1$. По условию теоремы существует последовательность мартингальных мер $(\tilde{P}_n)_{n=1}^\infty$, сходящаяся по вероятности к P_* . Поэтому

$$x_* \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_{\tilde{P}_n} f(S_0(1+\rho))}{1+r} = \frac{\mathbb{E}_{P_*} f(S_0(1+\rho))}{1+r} = c_*,$$

что доказывает неравенство $x_* \leq c_*$.

Для доказательства неравенства $c_* \leq C_*(f_1)$ определим портфель $\pi_* = (\beta_*, \gamma_*)$, как указано в утверждении теоремы. По свойствам выпуклой функции ее график находится выше любой касательной. В частности, $f(S_0(1+x)) \geq \psi(x)$ при всех x . Отсюда

$$\begin{aligned}X_1^{\pi_*} &= \beta_*(1+r) + \gamma_* S_0(1+\rho) = f_r - \lambda(1+r) + \lambda(1+\rho) \\ &= \lambda(\rho - r) + f_r = \psi(\rho) \leq f(S_0(1+\rho)) = f_1,\end{aligned}$$

что означает, что портфель π_* есть нижний хедж. Его начальный капитал равен

$$X_0^{\pi_*} = \beta_* + \gamma_* S_0 = \frac{f_r}{1+r} = c_*,$$

и поэтому $C_*(f_1) \geq c_*$, что завершает доказательство теоремы 2. \square

2.5 Модель Кокса–Росса–Рубинштейна (CRR–модель)

Пусть в предыдущей модели случайная величина ρ может принимать только значения $\rho = a$ или $\rho = b$ (с ненулевой вероятностью) и $a < r < b$. Докажем, что в этом случае всякое ограниченное платежное обязательство воспроизводимо, его нижняя цена равна верхней, а рынок является полным.

Для этого достаточно предъявить портфель π , который одновременно является верхним и нижним (x, f_1) -хеджем, т.е. $X_0^\pi = x$ и $X_1^\pi = f_1$ п.н. Тогда из определений верхнего и нижнего хеджа следует, что $C^*(f_1) \leq x \leq C_*(f_1)$. В то же время при условии существования мартингалльных мер было доказано, что $C_*(f_1) \leq x_* \leq x^* \leq C^*(f_1)$. Следовательно, все эти величины равны и, в частности, равны начальному капиталу x портфеля π .

Определим $\pi = \pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$ в обозначениях, введенных перед теоремой 1. В соответствии с рассуждениями из доказательства теоремы 1 если $\rho = a$, то $X_1^{\pi^*} = f_a = f(S_0(1 + \rho))$, а если $\rho = b$, то $X_1^{\pi^*} = f_b = f(S_0(1 + \rho))$. В обоих случаях $X_1^{\pi^*} = f_1$, т.е. это совершенный хедж. Его начальный капитал определяет справедливую цену платежного обязательства:

$$C^*(f_1) = C_*(f_1) = \frac{1}{1+r} \left(\frac{b-r}{b-a} f_a + \frac{r-a}{b-a} f_b \right).$$

Тем самым основная задача инвестора полностью решена: найдена цена платежного обязательства и определен портфель ценных бумаг, который гарантирует покрытие этого обязательства.

Воспроизводимость платежного обязательства тесно связана со свойствами мартингалльных мер в данной задаче. Во-первых, из условия $a < r < b$ следует, что мартингалльная мера существует, например, P^* . Во-вторых, такая мера единственная, т.е. нет других мартингалльных мер, кроме P^* . Докажем это.

Мартингалльная мера \tilde{P} , будучи эквивалентной мере P , сосредоточенной в двух точках a и b , должна быть равна нулю на любом множестве, не содержащем эти точки. Следовательно, она должна быть сосредоточена на этой же паре точек. Перед формулировкой теоремы 1 было доказано, что вероятности $p^* = \tilde{P}(\{a\})$ и $q^* = \tilde{P}(\{b\})$ определяются однозначно, что означает единственность мартингалльной меры.

Термин "мартингалльная мера" употребляется потому, что по этой мере мартингалом является нормированная стоимость актива S/B . Действительно,

$$\mathbb{E}_{\tilde{P}} \Delta \left(\frac{S_1}{B_1} \right) = \mathbb{E}_{\tilde{P}} \left(\frac{S_1}{B_1} - \frac{S_0}{B_0} \right) = \mathbb{E}_{\tilde{P}} \left(\frac{S_0(1+\rho)}{B_0(1+r)} - \frac{S_0}{B_0} \right) = \frac{S_0(1+\mathbb{E}_{\tilde{P}}\rho)}{B_0(1+r)} - \frac{S_0}{B_0} = 0,$$

так как $\mathbb{E}_{\tilde{P}}\rho = r$.

Рассмотрим многошаговую модель: $N > 1$. Предположим, что случайные величины ρ_n могут принимать только два значения: $\rho_n = a_n$ или $\rho_n = b_n$ при $n = 1, \dots, N$, и банковская процентная ставка r_n находится между ними: $a_n < r_n < b_n$ п.н. При этом r_n , a_n и b_n — случайные величины, измеримые относительно \mathcal{F}_{n-1} . Требуется найти справедливую цену платежного обязательства f_N , измеримого относительно \mathcal{F}_N .

В частном случае, когда $a_n \equiv a$, $b_n \equiv b$ и $r_n \equiv r$, эта модель была впервые рассмотрена в статье Кокса, Росса и Рубинштейна [Cox J.C., Ross R.A., Rubinstein M. "Option pricing: a simplified approach". Journal of Financial Economics, 1979, v. 7, №3, p.229–263] и с тех пор известна как *CRR*-модель.

Под справедливой ценой платежного обязательства f_N подразумевается общее значение верхней и нижней цены, которое совпадает с начальным капиталом совершенного хеджа.

Нетрудно заметить, что данная задача разбивается на N одношаговых подзадач, для каждой из которых существует единственная мартингалльная мера. Поэтому и

для общей задачи такая мера существует и единственна. При помощи этой меры, как будет показано в следующих разделах, явно вычисляется цена платежного обязательства, а также стратегия портфеля ценных бумаг, образующего совершенный хедж.

2.6 Понятие арбитража

Под арбитражем в финансовой математике понимается получение положительной прибыли без риска и без начального капитала. Чаще говорят о рынке, на котором "отсутствуют арбитражные возможности", называя такой рынок "честным", "рационально устроенным" или "эффективным".

Определение 6. Говорят, что самофинансируемый портфель π реализует *арбитражную возможность* в момент N , если у него начальный капитал нулевой, $X_0^\pi = 0$, а в момент N капитал обладает свойствами

$$X_N^\pi \geq 0 \text{ п.н.}, \quad \mathbb{E}X_N^\pi > 0.$$

Определение 7. Рынок называется *безарбитражным*, если на нем отсутствуют арбитражные возможности, т.е. для любого самофинансируемого портфеля π если $X_0^\pi = 0$ и $X_N^\pi \geq 0$ п.н., то $X_N^\pi = 0$ п.н.

Отсутствие арбитражных возможностей на рынке означает, что любые прибыли должны быть связаны с определенными рисками иметь убытки. Если предположить, что участники рынка достаточно информированы, то естественно считать, что арбитражные возможности, если такие могут появиться, сразу реализуются и исчезают с рынка. С другой стороны, реализация арбитражной возможности создает прибыль из ничего, и поэтому не считается "рациональной" или "честной".

Следующая важнейшая теорема стохастической финансовой математики устанавливает связь между понятиями мартингальной меры и безарбитражности (B, S) -рынка.

Теорема 3. Для того, чтобы (B, S) -рынок был безарбитражным, необходимо и достаточно, чтобы существовала мера \tilde{P} (называемая *мартингальной* или *риск-нейтральной*), которая эквивалентна естественной вероятностной мере P и обладает свойствами

$$\mathbb{E}_{\tilde{P}} \left(\frac{S_n}{B_n} \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right) = \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}$$

п.н. при всех $n = 1, 2, \dots, N$.

Доказательство. Пусть мартингальная мера \tilde{P} существует и $\pi = (\beta, \gamma)$ — некоторый самофинансируемый портфель ценных бумаг с начальным капиталом $X_0^\pi = 0$. По определению самофинансируемого портфеля

$$X_N^\pi = X_0^\pi + \sum_{n=1}^N \gamma_n \Delta \left(\frac{S_n}{B_n} \right).$$

Условие мартингальности меры \tilde{P} можно также записать в виде

$$\mathbb{E}_{\tilde{P}} \left\{ \Delta \left(\frac{S_n}{B_n} \right) \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right\} = 0$$

п.н. при всех $n = 1, 2, \dots, N$. Поскольку случайная величина γ_n измерима относительно \mathcal{F}_{n-1} , то

$$\mathbb{E}_{\tilde{P}} \left\{ \gamma_n \Delta \left(\frac{S_n}{B_n} \right) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right\} = \gamma_n \mathbb{E}_{\tilde{P}} \left\{ \Delta \left(\frac{S_n}{B_n} \right) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right\} = 0$$

п.н. при всех $n = 1, 2, \dots, N$. Следовательно,

$$\mathbb{E}_{\tilde{P}} X_N^\pi = \mathbb{E}_{\tilde{P}} \sum_{n=1}^N \mathbb{E}_{\tilde{P}} \left\{ \gamma_n \Delta \left(\frac{S_n}{B_n} \right) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right\} = 0.$$

Если же $X_N^\pi \geq 0$ п.н. и мера \tilde{P} эквивалентна мере P , то из последнего равенства следует, что $\mathbb{E} X_N^\pi = 0$. Последнее утверждение совпадает с определением безарбитражности рынка.

Таким образом, из существования хотя бы одной мартингальной меры следует, что на рынке нет арбитражных возможностей. Обратное утверждение доказывается намного сложнее и поэтому в данном курсе пропускается. \square

В простейшей одношаговой модели рынка с одним видом акции, для которого случайная процентная ставка ρ принимает значения на отрезке $[a, b]$ п.н. (и этот отрезок не может быть уменьшен), условие безарбитражности имеет вид $r \in (a, b)$. Действительно, если $a < r < b$, то мартингальные меры, эквивалентные исходной мере P , были описаны в доказательстве теоремы 1.

Если же $r < a$, то безрисковую прибыль можно получить, взяв деньги из банка и вложив их в акции. Если $r > b$ то, наоборот, для получения прибыли нужно продать все акции и положить деньги в банк. При $r = a$ или $r = b$ и $a < b$ те же действия дадут положительный доход с ненулевой вероятностью, что означает реализацию арбитражной возможности.

2.7 Расчет цен на полных рынках

По определению, на полных рынках у любого ограниченного платежного обязательства совпадают нижняя и верхняя цены. Это общее значение цены является справедливым по отношению к покупателю и продавцу, так как не дает ни одному из них возможности получить безрисковый доход. Для расчета этой цены, а также для определения портфеля ценных бумаг, который покрывает платежное обязательство, используется следующая вторая важнейшая теорема стохастической финансовой математики.

Теорема 4. Для того, чтобы безарбитражный финансовый (B, S) -рынок был полным, необходимо и достаточно, чтобы на нем существовала только одна мартингальная мера.

(Без доказательства.)

Далее будем рассматривать только полные рынки. Единственную мартингальную меру на них будем обозначать \tilde{P} , а математическое ожидание по этой мере (в том числе условное) — $\tilde{\mathbb{E}}$. По определению мартингальной меры

$$\tilde{\mathbb{E}} \left\{ \Delta \left(\frac{S_n}{B_n} \right) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right\} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Пусть f_N — некоторое ограниченное \mathcal{F}_N -измеримое платежное обязательство. По определению полного рынка для него существует совершенный (x, f_N) -хедж, т.е. такой самофинансируемый портфель $\pi = (\beta, \gamma)$, что $X_0^\pi = x$ и $X_N^\pi = f_N$ п.н. При этом начальный капитал x совпадает с верхней и нижней ценой, т.е.

$$x = C_*(f_N) = C^*(f_N) = C(f_N),$$

и эту величину мы будем считать справедливой ценой платежного обязательства f_N . Поставим задачу о нахождении $C(f_N)$ и совершенного хеджа π .

Теорема 5. (*основные формулы для определения совершенного хеджа и его капитала*). Пусть f_N — некоторое ограниченное платежное обязательство на полном (B, S) -рынке и оно \mathcal{F}_N -измеримо. Пусть $\tilde{\mathbb{E}}$ обозначает математическое ожидание по мартингальной мере и $\pi = (\beta, \gamma)$ — совершенный хедж, воспроизводящий f_N . Тогда

1. Справедливая цена этого обязательства равна

$$C(f_N) = B_0 \tilde{\mathbb{E}} \frac{f_N}{B_N}$$

(“основная формула для цены совершенного хеджирования Европейского типа на полных ранках”).

2. Капитал данного совершенного хеджа π в промежуточные моменты может быть вычислен по формуле

$$X_k^\pi = B_k \tilde{\mathbb{E}} \left\{ \frac{f_N}{B_N} \middle| \mathcal{F}_k \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

3. Объемы акций γ_k в портфеле π определяются из уравнения

$$\frac{X_k^\pi}{B_k} - \frac{X_{k-1}^\pi}{B_{k-1}} = \gamma_k \left(\frac{S_k}{B_k} - \frac{S_{k-1}}{B_{k-1}} \right), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

4. Банковские вклады β_k в портфеле π вычисляются по формуле

$$\beta_k = \frac{X_k^\pi - \gamma_k S_k}{B_k}.$$

Доказательство. Капитал самофинансируемого портфеля π вычисляется по формуле

$$\frac{X_N^\pi}{B_N} = \frac{x}{B_0} + \sum_{n=1}^N \gamma_n \Delta \left(\frac{S_n}{B_n} \right),$$

где $x = C(f_N)$. Математическое ожидание по мартингальной мере от каждого слагаемого в правой части равно нулю, а $X_N^\pi = f_N$, поэтому

$$\tilde{\mathbb{E}} \frac{f_N}{B_0} = \frac{C(f_N)}{B_0}.$$

Отсюда следует утверждение 1 теоремы.

Для доказательства утверждений 2 и 3 вычислим условные математические ожидания по мартингальной мере, приняв во внимание свойство мартингальности меры \tilde{P} :

$$\tilde{E} \left\{ \frac{f_N}{B_N} \middle| \mathcal{F}_k \right\} = \frac{X_0^\pi}{B_0} + \sum_{n=1}^k \gamma_n \Delta \left(\frac{S_n}{B_n} \right) = \frac{X_k^\pi}{B_k}$$

при $k = 1, 2, \dots, N$. Второе равенство есть формула для нормированного капитала самофинансируемого портфеля. Это доказывает утверждение 2. Утверждение 3 получается простым вычитанием соседних по k равенств из утверждения 2.

Наконец, утверждение 4 есть следствия определения величины капитала портфеля ценных бумаг в момент k :

$$X_k^\pi = \beta_k B_k + \gamma_k S_k$$

при $k = 1, 2, \dots, N$. \square

2.8 Формулы Башелье и Блэка–Шоулса

Первая работа по изучению вероятностного характера динамики цен акций была написана Л. Башелье в 1900 г. Его модель в современных терминах описывается уравнением

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

где S_t — значение рыночной цены данного актива, μ — постоянный коэффициент сноса, W_t — стандартный винеровский процесс, т.е. процесс с начальным значением $W_0 = 0$ и гауссовским распределением приращений, которые к тому же независимы на непересекающихся промежутках времени.

Это диффузионная модель рынка, которая оказалась безарбитражной и полной. Единственная мартингальная мера в этой модели определяется равенством

$$d\tilde{P} = Z_T dP_T,$$

где $P_T = P|_{\mathcal{F}_T}$ и

$$Z_T = \exp \left(-\frac{\mu}{\sigma} W_T - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\sigma} \right)^2 T \right).$$

По теореме 5 находим явное выражение для справедливой цены опциона.

Теорема 6 ("формула Башелье"). В модели Башелье рациональная стоимость стандартного опциона–колл Европейского типа с функцией платежа $f_T = (S_T - K)_+$ определяется формулой

$$C_T = (S_0 - K) \Phi \left(\frac{S_0 - K}{\sigma \sqrt{T}} \right) + \sigma \sqrt{T} \phi \left(\frac{S_0 - K}{\sigma \sqrt{T}} \right),$$

где

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(y) dy.$$

(Без доказательства.)

В частности, при $S_0 = K$ рациональная стоимость опциона–колл равна

$$C_T = \sigma \sqrt{\frac{T}{2\pi}}.$$

Именно эту формулу вывел Л. Башелье, не пользуясь современными понятиями теории вероятностей.

Одним из недостатков модели Л. Башелье является возможность отрицательных значений для цен S_t , что противоречит естественным представлениям. В ходе дальнейших исследований, начиная со знаменитого доклада М. Кендалла, выяснилось, что независимыми следует считать не сами приращения цен, а приращения их логарифмов. Соответствующая модель записывается в дифференциальной форме:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad t \geq 0.$$

Она была предложена П. Самуэльсоном в 1965 г. и подробно изучена в работе Р. Мертона в 1973 г. Наконец, в знаменитой статье Блэка и Шоулса [Black F., Scholes M. "The pricing of options and corporate liabilities". Journal of Political Economy, 1973, v. 81, №3, p. 637–659] были выведены окончательные формулы для расчета справедливой цены опционов, которые служат важнейшим ориентиром на современных финансовых рынках. В 1997 г. Р. Мертон, Ф. Блэк и М. Шоулс были удостоены Нобелевской премии по экономике за эти достижения.

Предположим, что банковская процентная ставка постоянна и равна r , так что изменение банковского счета определяется дифференциальным уравнением $dB_t = rB_t dt$. Это уравнение вместе с дифференциальным уравнением относительно S_t называют моделью Мертона–Блэка–Шоулса.

Теорема 7 ("формула Блэка–Шоулса"). В модели Мертона–Блэка–Шоулса рациональная цена стандартного опциона–колл Европейского типа с функцией платежа $f_T = (S_T - K)_+$ определяется формулой

$$C_T = S_0 \Phi \left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + T \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma \sqrt{T}} \right) - K e^{-rT} \Phi \left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + T \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma \sqrt{T}} \right).$$

(Без доказательства.)

В частности, при $S_0 = K$ и $r = 0$ получается упрощенная формула

$$C_T = S_0 \left[\Phi \left(\frac{\sigma \sqrt{T}}{2} \right) - \Phi \left(-\frac{\sigma \sqrt{T}}{2} \right) \right].$$