С.И. ШЕЛОБАЕВ

# Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе

*Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим специальностям*

ЮНИТИ
UNITY
Москва • 2001

ББК 65в6.я73
Ш44

Рецензенты:
*кафедра технологии и предпринимательства Орловского государственного университета (зав. кафедрой проф. А.А. Калекин), д-р экон. наук, проф. В.Н. Бабанов и д-р техн. наук, проф. Ю.Н. Арсеньев*

Главный редактор издательства *Н.Д. Эриашвили*

**Шелобаев С.И.**
Ш44 Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. — 367 с.
ISBN 5-238-00113-4.

Рассмотрены основные экономико-математические методы и модели анализа, оптимизации ресурсов и принятия решений в разнообразных условиях определенности, риска и неопределенности и их применение в производстве, экономике, финансах и бизнесе. Исследованы типовые и усложненные экономико-математические модели задач математического программирования, статистического анализа данных, ряда моделей эконометрики, банковского бизнеса, принятия решений с пояснением их сути на многочисленных примерах из сфер экономики, производства, банковской сферы, контроля и учета фирм.

Для студентов высших и средних профессиональных учебных заведений, руководителей предприятий, менеджеров, государственных и банковских служащих, слушателей школ бизнеса.

ББК 65в6.я73

ISBN 5-238-00113-4

© С.И. Шелобаев, 2000
© ООО "ИЗДАТЕЛЬСТВО ЮНИТИ-ДАНА", 2000.
Воспроизведение всей книги или любой ее части запрещается без письменного разрешения издательства

# Предисловие

Проблемы перехода российской экономики к рынку сложны и многоплановы. Сегодня, когда Россия все еще находится в глубочайшем социально-экономическом кризисе и большинство россиян находится за чертой бедности, в обществе идут поиски путей обеспечения ее национальной, социально-экономической, экологической, ядерной, продовольственной, интеллектуально-образовательной, информационной и прочей безопасности. Уровень и прогресс цивилизации, как известно, определяются не только развитием общественно-политических отношений, но и развитием морали, образования и просвещения, идей, новаций, расширением и углублением знаний, все большим распространением их в массах. Балканский кризис 1999 г. особенно ярко показал устремления международных военно-политических и финансовых кругов военными средствами разрешать возникающие мировые проблемы. В отличие от восточной цивилизации, где познание объективных законов отодвинуто на задний план религией и искусством, для западной цивилизации главным источником развития выступает *наука,* объясняющая привилегированность положения их большинства граждан по отношению к нищенствующему большинству других стран. В России же пока не востребуются ни мораль, ни образование, ни наука, ни искусство, ни общечеловеческие ценности.

Обладая богатейшими природными ресурсами и высочайшим уровнем интеллектуального потенциала, оставшегося от СССР, Россия должна найти свой путь развития. Приобщаясь к западной цивилизации, *мы не должны* механически, бездумно перенимать чужой опыт и экономические механизмы без учета собственных традиций, морали, нравственности, религии, имеющихся научных идей и разработок. Главными направлениями в этом деле являются: активное развитие реального сектора экономики, финансово-банковской системы, приоритет в развитии науки и образования, воспитании подрастающего поколения, что позволит России в перспективе занять подобающее ей достойное место в мире. Рассматриваемые в книге экономико-математические методы и модели должны помочь читателям *овладеть искусством принятия эффективных управленческих и инвестиционно-финансовых решений, распределения и оптимизации ресурсов, анализа и обработки данных, прогнозирования последствий.*

# Введение

Для оживления реального сектора экономики, активизации кредитно-денежной политики, банковского бизнеса и предпринимательства во всех сферах деятельности российских субъектов рынка, повышения их эффективности, качества и надежности функционирования, развития и совершенствования объектов производственной и коммерческой инфраструктуры необходимо:

1) разработать и жестко проводить в жизнь единую государственную стратегию приоритетного развития отраслей хозяйства, включая отрасли, определяющие научно-технический прогресс и безопасность страны, подкрепленную действенным государственным регулированием, стимулированием и прогнозированием развития;

2) проводить экономическую политику, ориентированную на эффективное устойчивое развитие, укрепление правового фундамента экономических отношений, создать целостную систему законодательных актов и Кодекса государственного регулирования экономики;

3) вести планомерное обучение, подготовку и переподготовку специалистов, персонала, лиц, принимающих решения (ЛПР), владеющих глубокими знаниями экономико-математических методов и моделей оптимизации и эффективного распределения ограниченных ресурсов, выбора наилучших решений в условиях множества противоречивых требований и ограничений, моделирования и прогнозирования разнообразных процессов с применением информационных технологий и ЭВМ.

Экономический рост в любой стране невозможен без реализации новых крупномасштабных проектов, инвестиций и инноваций, без политической стабильности и устойчивости финансово-банковской системы, уверенности инвесторов и собственников капитала в твердости реализуемого политического курса, нацеленности на эффективность развития производства, разумности правил налогообложения и деловой игры. Для этого необходимы:

- совершенствование структурной политики и политики доходов как инструментов индикативного планирования;
- разработка комплексных стратегий развития предприятий, федеральных научно-технических программ повышения конкурентоспособности отдельных отраслей;

- укрепление безопасности и обороноспособности страны;
- органичное развитие ее научно-технической, финансово-бюджетной, кредитно-банковской, инвестиционно-производственной, социально-экономической, культурно-образовательной и прочих сфер деятельности;
- повышение материального благосостояния человека-труженика как основного носителя любых общественных отношений, его заинтересованности в результатах своего труда, уверенности в завтрашнем дне.

За рубежом в последние годы приступили к реализации экологически осознанной концепции руководства и управления современными предприятиями, банками, организациями и фирмами, к созданию и внедрению в практическую деятельность комплексной методологии принятия решений по уменьшению разнообразных видов риска, сопровождающих производственно-хозяйственную и интеллектуально-управленческую деятельность субъектов рынка и ЛПР, которая базируется на принципе оптимального соотношения «эффект — затраты — риск» с учетом многочисленных и противоречивых целей и критериев качества. Подобная постановка проблемы требует формализации социо-техно-экономических взаимосвязей существующих организационно-производственных систем и создания на их основе адекватных оптимизационных математических моделей, отражающих сущность и особенности современных социо-техно-экономических систем.

В мире сегодня признается, что эффективность деятельности любого субъекта рынка зависит от степени адаптации организационных структур, процессов бизнеса, перестраиваемости производственных и технологических процессов, уровня подготовки, отбора, активизации и стимулирования персонала в реализации целей управления.

*В предлагаемой вниманию читателя книге изложены разновидности экономико-математических моделей и методов оптимизации ресурсов и принятия решений, применяемых в эффективной деятельности фирм с пояснением их на множестве практических примеров из сфер производства, коммерции, банковского бизнеса, управленческого учета и решаемых как вручную, так и с помощью программных средств ЭВМ, а также основные принципы адаптации организационно-производственных структур к внешним динамическим возмущениям внешней среды.*

Экономико-математическое моделирование, являясь одним из эффективных методов описания сложных социально-эко-

номических объектов и процессов в виде математических моделей, превращается тем самым в часть самой экономики, вернее, в сплав экономики, математики и кибернетики. Подтверждением положительной оценки этого явления стало присуждение Нобелевских премий в области экономики в последнее десятилетие в основном только за новые экономико-математические исследования.

Как известно, в составе экономико-математических методов можно выделить следующие научные дисциплины и их разделы [1—10]:

- *экономическую кибернетику* (системный анализ экономики, теорию экономической информации и теорию управляющих систем);
- *математическую статистику* (дисперсионный анализ, корреляционный анализ, регрессионный анализ, многомерный статистический анализ, факторный анализ, кластерный анализ, частотный анализ, теорию индексов и др.);
- *математическую экономику и эконометрику* (теорию экономического роста, теорию производственных функций, межотраслевые балансы, национальные счета, анализ спроса и потребления, региональный и пространственный анализ, глобальное моделирование и т. п.);
- *методы принятия оптимальных решений* (математическое программирование, сетевые и программно-целевые методы планировании и управления, теорию массового обслуживания, теорию и методы управления запасами, теорию игр, теорию и методы принятия решений, теорию расписаний и др.; причем только в математическое программирование входит ряд разделов программирования — линейное, нелинейное, динамическое, целочисленное, параметрическое, сепарабельное, стохастическое, дробно-линейное, геометрическое программирование);
- *специфические методы и дисциплины экономики* (для *централизованно планируемой экономики* — теорию оптимального функционирования экономики, оптимальное планирование, теорию оптимального ценообразования, модели материально-технического снабжения; для *рыночной,* или *конкурентной, экономики* — модели свободной конкуренции, модели монополии, индикативного планирования, модели теории фирмы и др.);
- *экспериментальные методы* изучения экономики (математические методы анализа и планирования экономических экспе-

риментов, имитационное моделирование, деловые игры, методы экспертных оценок и т.п.).

Если попытаться классифицировать сами экономико-математические модели, то можно выделить свыше десяти признаков, основными из которых являются:

1) по общему целевому назначению — *теоретико-аналитические* и *прикладные* модели;

2) по степени агрегирования объектов — *макроэкономические* (функционирование экономики как единого целого) и *микроэкономические* (предприятия и фирмы) модели;

3) по конкретному предназначению — *балансовые* (требование соответствия наличия ресурсов и их использования), *трендовые* (развитие моделируемой системы через длительную тенденцию ее основных показателей), *оптимизационные* (выбор наилучшего варианта из множества вариантов производства, распределения или потребления), *имитационные* (в процессе машинной имитации изучаемых систем или процессов) модели;

4) по типу информации, используемой в модели, — *аналитические* (на базе априорной информации) и *идентифицируемые* (на базе апостериорной, экспериментальной информации) модели;

5) по учету фактора неопределенности — *детерминированные* и *стохастические* модели;

6) по характеристике математических объектов или аппарата — *матричные* модели, модели *линейного* и *нелинейного программирования, корреляционно-регрессионные* модели, модели *теории массового обслуживания,* модели *сетевого планирования и управления,* модели *теории игр* и т.п.;

7) по типу подхода к изучаемым системам — *дескриптивные (описательные)* модели (например, балансовые и трендовые модели) и *нормативные* модели (оптимизационные и модели уровня жизни).

К числу сложной комбинированной экономико-математической модели, например, можно отнести *экономико-математическую модель межотраслевого баланса,* являющуюся по вышеприведенной классификации прикладной, макроэкономической, аналитической, дескриптивной, детерминированной, балансовой, матричной моделью, причем выделяют как статические, так и динамические модели межотраслевого баланса.

Книга состоит из трех разделов, включающих 11 глав, введения, заключения, приложений и списка литературы.

В *разделе I (главы 1—4)* рассмотрены разновидности экономико-математических моделей и их использование в макро- и микроэкономике, исследованиях производственно-экономических и финансовых ситуаций, методы оптимизации и принятия решений на основе задач линейного, целочисленного, стохастического и нелинейного программирования, а также сетевых задач и моделей.

В *разделе II (главы 5—8)* анализируются экономико-статистические методы анализа данных, эконометрические модели оценки и анализа эффективности деятельности субъектов рынка, модели систем массового обслуживания, методы управления капиталом, активами и пассивами, включая методы управления портфелем ценных бумаг.

В *разделе III (главы 9—11)* исследуются разнообразные методы принятия единичных и программных инвестиционно-финансовых решений, работающих в условиях определенности.

*Главы 10—11 написаны автором совместно с Ю.Н. Арсеньевым.*

# Раздел I
# Экономико-математические методы оптимизации и распределения ресурсов

Переход к рыночной экономике неотъемлем от процессов планирования, регулирования, управления и прогнозирования производственных и технологических процессов. В этой связи актуальны разработка и применение экономико-математических методов и моделей для решения возникающих производственно-хозяйственных задач, определения и выбора вариантов экономического развития на перспективу, обеспечения оптимального распределения ресурсов для выполнения отдельных комплексов работ и т.п. Определение оптимального варианта текущего и перспективного развития часто связано с решением динамических задач оптимизации, имеющих большую размерность и множество разнообразных условий и ограничений (например, целочисленности переменных, сочетающейся с требованием их неубывания во времени), что обусловливает сложность решения из-за существенно многоэкстремального характера. Рассмотрим основные экономико-математические методы оптимизации.

# Глава 1
# Экономико-математические модели и методы и их применение в макро- и микроэкономике

## 1.1. Разновидности экономико-математических моделей и методов

Все множество наук сегодня широко включает в себя как *необходимые* инструментальные средства математические модели и методы, позволяющие осуществлять более высокий уровень формализации и абстрактного описания наиболее важных, существенных связей технико-экономических переменных систем и объектов, оценивать форму и параметры зависимостей их переменных; получать новые знания об объектах; определять наилучшие решения в той или иной ситуации; формулировать выводы, адекватные изучаемому объекту; компактно излагать основные теоретические положения.

Любое технико-экономическое исследование всегда предполагает объединение теории (математической модели) с практикой (экспериментом и статистическими данными). В качестве примера экономических моделей можно назвать модели: экономического роста, равновесия на товарных и финансовых рынках, ценообразования и конкурентного равновесия, социального и экономического оптимума, потребительского выбора и др. [1—54]. Формализация основных особенностей функционирования техно-социо-экономических объектов позволяет оценивать качество и эффективность принимаемых решений по степени использования и оптимизации ресурсов, прогнозировать их возможные негативные последствия, использовать полученные оценки в управлении.

*Математическая модель объекта* — это его гомоморфное отображение в виде совокупности уравнений, неравенств, логических отношений, графиков, условный образ объекта, созданный для упрощения его исследования, получения о нем новых

знаний, анализа и оценки принимаемых решений в конкретных или возможных ситуациях.

Математические модели, используемые, например, в экономике, можно подразделить: по *особенностям моделируемого объекта* — на макро- и микроэкономические; *по целям моделирования и используемому инструментарию* — на теоретические и прикладные, оптимизационные и равновесные, статические и динамические, непрерывные и стохастические.

*Макроэкономические* модели обычно описывают экономику страны как единое целое, связывая между собой укрупненные материальные и финансовые показатели: ВВП, потребление, инвестиции, занятость, бюджет, инфляцию, ценообразование и др.

*Микроэкономические* модели описывают взаимодействие структурных и функциональных составляющих экономики либо их автономное поведение в переходной неустойчивой или стабильной рыночной среде, стратегии поведения фирм в условиях олигополии с использованием методов оптимизации и теории игр и т. п.

*Теоретические* модели отображают общие свойства экономики и ее компонентов с дедукцией выводов из формальных предпосылок. *Прикладные* модели обеспечивают возможность оценки параметров функционирования конкретных технико-экономических объектов и обоснования выводов для принятия управленческих решений (к их числу относятся прежде всего эконометрические модели, позволяющие статистически значимо оценивать числовые значения экономических переменных на основе имеющихся наблюдений). *Равновесные* модели, присущие рыночной экономике, описывающие поведение субъектов хозяйствования как в стабильных устойчивых состояниях, так и в условиях нерыночной экономики, где неравновесие по одним параметрам компенсируется другими факторами. *Оптимизационные* модели связаны в основном с микроуровнем (оптимизация и распределение ресурсов, максимизация полезности потребителем или прибыли предприятием), на макроуровне результатом рационального выбора поведения становится некоторое состояние равновесия.

*Статические* модели описывают состояние экономического объекта в конкретный текущий момент или период времени; *динамические* модели, напротив, включают взаимосвязи переменных во времени, описывая силы и взаимодействия процессов в экономике.

*Детерминированные* модели предполагают жесткие функциональные связи между переменными модели, а *стохастические* модели допускают наличие случайных воздействий на исследуемые показатели, используя в качестве инструментария методы теории вероятностей и математической статистики.

В экономической науке выделяют следующие основные направления:

- *математическую экономику*, занимающуюся анализом свойств и решений математических моделей технико-экономических процессов и исследующую теоретические модели, основанные на определенных предпосылках — линейность, монотонность, выпуклость и др., а также на конкретных формулах взаимосвязи величин;
- *эконометрику*, занимающуюся статистической оценкой и анализом экономических зависимостей и моделей на основе изучения эмпирических данных.

Математическая экономика изучает вопросы, связанные с существованием решения модели в условиях его неотрицательности, стационарности, наличия других дополнительных свойств. К ее основным классам моделей относятся: *модели равновесия* в экономических системах (модели Эрроу—Дебре, «затраты —выпуск» В. Леонтьева и др.) и *модели экономического роста* (модели Солоу, Харрода—Домара, Гейла, Морищимы и др., модели магистрального типа).

Основой *эконометрики* являются методы корреляционно-регрессионного анализа, математической статистики, дисперсионного анализа и др. [1—54].

## 1.2. Математические модели и методы в исследовании производственно-экономических ситуаций

**Функции, графики, дифференциальное исчисление в экономическом анализе.** Исследования и наблюдения в окружающем нас мире показывают, что все экономические величины (цена товара, прибыль субъекта хозяйствования, объем производства, инфляция и безработица и др.) тесно связаны между собой определенным образом.

Понятие *функции* или *функциональной зависимости* — основное математическое понятие, с помощью которого моделируются взаимосвязи между реальными величинами, качественные и ко-

личественные соотношения между технико-экономическими характеристиками и показателями. Функция $y = f(x)$ считается заданной, если известна закономерность, по которой каждому значению $x$ из некоторого множества $A$ соответствует одно вполне определенное значение $y$ из некоторого числового множества $B$. Любую функцию можно задавать различными способами (наиболее часто используют задание в виде формулы, таблицы или графика, а при использовании ЭВМ — алгоритма).

В экономике часто требуется найти наилучшее в том или ином смысле, или *оптимальное*, значение того или иного показателя: максимальное значение прибыли, производительности оборудования или труда, минимальное значение стоимости, издержек, затрат времени и т.д. Нахождение оптимального значения показателя при этом сводится к нахождению *экстремума* (максимума или минимума) функции от одной или нескольких переменных. Необходимым условием экстремума функции $y = f(x)$ является равенство нулю ее первой производной. При исследовании на экстремум функций нескольких переменных используются методы дифференциального исчисления, когда решаемые задачи включают не только минимизируемую (максимизируемую) функцию, но и ограничения. К таким задачам относятся задачи математического программирования, для решения которых разработаны специальные методы, опирающиеся на дифференциальное исчисление, и методы теории исчисления операций и предельного анализа.

Наряду с этим часто используются понятия *средней величины* (средние издержки, средний ущерб, средняя прибыль и др.). При этом часто требуется определить, на какую величину улучшится результат, если будут увеличены затраты или, наоборот, насколько уменьшится результат, если затраты сократятся, т. е. необходимо определить предел отношения приростов результатов и затрат с нахождением *предельного эффекта*. Для решения подобных задач необходимо применение методов дифференциального исчисления — нахождение производной для функции одной переменной и частных производных для функции нескольких переменных.

В экономических приложениях математики широко используются *линейные и нелинейные функции* двух и $n$ переменных. Упорядоченная пара первых частных производных вида $[\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1, \partial f(x_1, x_2)/\partial x_2]$ или $[\partial y(x_1, x_2)/\partial x_1, \partial y(x_1, x_2)/\partial x_2]$ функции $y = f(x_1, x_2)$ двух переменных $x_1$ и $x_2$ обозначается сим-

волом grad $f(x_1, x_2)$ или grad $y(x_1, x_2)$ и называется *градиентом функции* этой функции $f(x_1, x_2)$ или $y(x_1, x_2)$ двух переменных.

Градиент grad $f(x_1^0, x_2^0)$ функции $f(x_1, x_2)$ в точке $A(x_1^0, x_2^0)$ показывает направление самого быстрого *роста* функции $f(x_1, x_2)$ в точке $A(x_1^0, x_2^0)$ **(рис. 1.1,а)**.

Точка $B(x_1^0, x_2^0)$ называется *критической* для функции $y(x_1, x_2)$, если координаты $x_1^0$ и $x_2^0$ этой точки удовлетворяют системе уравнений $\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1 = 0$, $\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2 = 0$. Поэтому точки *локального экстремума* следует искать только среди критических точек этой функции. Однако критическая точка не обязательно должна являться точкой (локального) экстремума.

*Второй частной производной* функции $y = f(x_1, x_2)$ двух переменных называется (первая) частная производная от (первой) частной производной. Таким образом, можно получить четыре вторых частных производных:

$$\partial^2 f(x_1, x_2)/\partial x_1^2;\ \partial^2 f(x_1, x_2)/\partial x_1 \partial x_2;$$

$$\partial^2 f(x_1, x_2)/\partial x_2 \partial x_1;\ \partial^2 f(x_1, x_2)/\partial x_2^2.$$

Если *смешанные* вторые частные производные

$$\partial^2 f(x_1, x_2)/\partial x_1 \partial x_2;\ \partial^2 f(x_1, x_2)/\partial x_2 \partial x_1$$

непрерывны, то они обязательно равны. В отличие от смешанных вторые частные производные $\partial^2 f(x_1, x_2)/\partial x_1^2$; $\partial^2 f(x_1, x_2)/\partial x_2^2$ принято называть *чистыми*.

*Достаточное условие локального экстремума* формулируется так. Пусть функция $y = f(x_1, x_2)$ имеет критическую точку $B(x_1^0, x_2^0)$, внутреннюю для области определения функции $f(x_1, x_2)$ (т. е. пусть $\partial f(x_1^0, x_2^0)/\partial x_1 = 0$, $\partial f(x_1^0, x_2^0)/\partial x_2 = 0$).

**1)** пусть $\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)/\partial x_1^2 > 0$ (или $\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)/\partial x_2^2 > 0$), $\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)/\partial x_1^2] \cdot [\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)/\partial x_2^2] - [\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)/\partial x_1 \partial x_2] > 0$, тогда точка $B(x_1^0, x_2^0)$ —точка *локального минимума* функции $y = f(x_1, x_2)$;

**2)** пусть $\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)/\partial x_1^2 < 0$ (или $\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)/\partial x_2^2 < 0$), $[\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)/\partial x_1^2] \cdot [\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)/\partial x_2^2] - [\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)/\partial x_1 \partial x_2] > 0$,

тогда точка $B(x_1^0, x_2^0)$—точка *локального максимума* функции $y = (x_1, x_2)$;

3) пусть $[\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)/\partial x_1^2] \cdot [\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)/\partial x_2^2] - [\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)/\partial x_1 \partial x_2] < 0$, тогда в точке $B(x_1^0, x_2^0)$функции $y = (x_1, x_2)$ локального и, следовательно, глобального экстремума *нет*.

Для функции $y = f(x_1,..., x_n)$ определение условия локального экстремума повторяется почти дословно. В частности, *необходимое условие локального экстремума* имеет вид:

$$\partial f(x_1,..., x_n)/\partial x_1 = 0, ..., \partial f(x_1,..., x_n)/\partial x_n = 0.$$

Достаточное условие локального экстремума из-за сложности записи здесь не приводится. Заметим, что более точными являются термины: *безусловный локальный* (или *глобальный*) *максимум* (*минимум*); *точка безусловного локального* (или *глобального*) *максимума* (*минимума*). Иногда вместо термина *безусловный* используют термин *абсолютный*.

***Пример 1.1.*** Известно, что прибыль определяется по формуле:

$$PR(x_1, x_2) = p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2),$$

где $f(x_1, x_2)$ — производственная функция фирмы; $p_0$ — рыночная цена готовой продукции фирмы, $p_1$ и $p_2$ — рыночные цены первого и второго ресурсов (факторов производства). Выражение $p_0 f(x_1, x_2)$ — выручка фирмы, а $(p_1 x_1 + p_2 x_2)$ — издержки производства фирмы, если для выпуска продукции ею затрачиваются первый и второй ресурсы в количестве $x_1$ и $x_2$ единиц соответственно. Необходимо определить комбинацию $B(x_1^0, x_2^0)$ресурсов, при которой фирма получит наибольшую прибыль.

Решение. Необходимо найти критические точки функции $PR(x_1, x_2)$, т. е. найти решение системы уравнений

$$\partial PR(x_1, x_2)/\partial x_1 = p_0 \partial f(x_1, x_2)/\partial x_1 - p_1 = 0;$$

$$\partial PR(x_1, x_2)/\partial x_2 = p_0 \partial f(x_1, x_2)/\partial x_2 - p_2 = 0.$$

Из специфики производственной функции (см. § 1.4) известно, если ее график напоминает горку, то часто ее критическая точка $B(x_1^0, x_2^0)$ является единственной и обязательно точкой глобального максимума прибыли $y = PR(x_1, x_2)$.

**Графики в экономическом моделировании**. К числу распространенных зависимостей в экономике можно отнести графики зависимостей спроса и предложения, спроса и дохода, потребления и бюджетного ограничения, издержек и доходов от объема производства. Рассмотрим их более подробно.

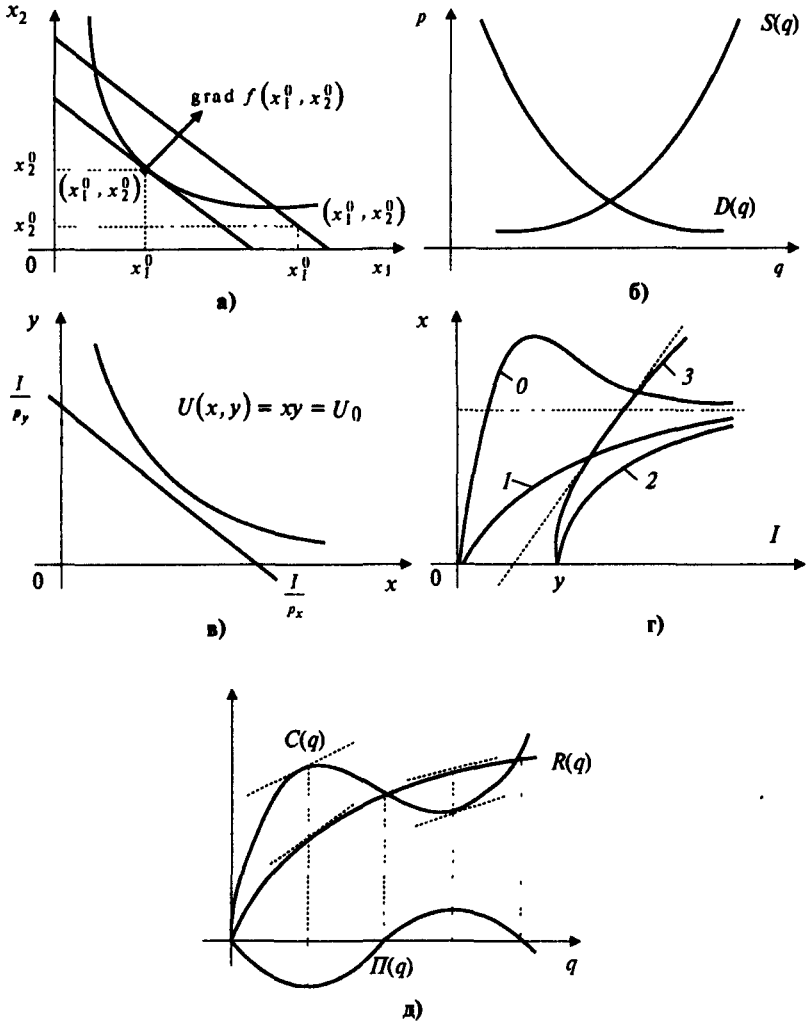



*Рис. 1.1.* ***Распространенные графики функций в экономике:***
**а** — градиент функции в задаче потребительского выбора; **б** — функция спроса $S(q)$ и предложения $D(q)$; **в** — функция полезностей $U(x, y)$ и бюджетного ограничения; **г** — функции спроса на товары разного приоритета в зависимости от дохода $I$: *0* — малоценные товары; *1*(*2*) — товары первой (второй) необходимости; *3* — предметы роскоши; **д** — функции издержек $C(q)$ и дохода $R(q)$, прибыли $П(q)$ в зависимости от объема производства $q$.

*Функции спроса и предложения* $p(q)$ выражают связь цены $p$ блага и величины спроса $q$ или предложения $S$ блага (товара) при постоянных значениях предпочтений потребителей, цен на прочие блага и других параметров. График функции спроса $D(q)$ и предложения $S(q)$ имеет вид **рис. 1.1,б.**

В теории потребительского спроса широко используются функции потребления, когда предпочтения потребителя описываются *кривой безразличия* $U_k = U(x, y)$, а бюджетное ограничение (расходы потребителя, как правило, меньше или равны его доходу) в ситуации, когда потребитель тратит весь свой доход на рассматриваемые блага, определяется зависимостью вида:

$$xp_x + yp_y = I,$$

где $p_x$, $p_y$ — цены благ $x$ и $y$, $I$ —доход потребителя.

Чтобы построить графики этих неявно заданных функций, требуется выразить в явном виде величину $y$ как функцию $x$ для обеих зависимостей. Если принять простейшую функцию полезностей $U(x, y) = xy$, то при уровне полезности (благосостояния), равном $U_0$, и дохода $I$ получаем следующие функции: $y = U_0/x$, $y = I/p_y + (p_x/p_y)x$. Как мы знаем, графиком первой функции (*кривой безразличия*) является гипербола (**рис. 1.1,в**), а второй (*бюджетного ограничения*) —прямая линия, имеющая отрицательный наклон, равный по модулю относительной цене блага $x$, и точку пересечения с осью ординат $A(0; I/p_y)$, соответствующую количеству блага $y$, которое можно приобрести по цене $p_y$, на всю величину дохода $I$.

Известны также *функции Торквинста*, моделирующие связь между величиной дохода $I$ и величиной спроса $x$ потребителей на следующие виды товаров (**рис. 1.1,г**): малоценные (кривая *0*), товары первой (кривая *1*) и второй (кривая *2*) необходимости (т. е. относительной роскоши), и предметы роскоши (кривая *3*). Их зависимости имеют соответственно следующий вид:

$$x = aI\cdot(I + b)/(I^2 + c);\ x = aI/(I + b);\ x = a(I - c)/(I + b);$$

$$x = aI\cdot(I - c)/(I + b).$$

Функции *издержек* $C(q)$ и *дохода* $R(q) = qp(q)$ в зависимости от объема производства $q$ в простейшем случае имеют вид **рис. 1.1,д**, причем характер функции дохода $R(q)$ определяется функцией спроса $p(q)$. В типичной ситуации издержки фирмы велики при небольшом объеме производства $q$ и вначале растут быстрее, чем доход. С увеличением объема производства скорость роста из-

держек уменьшается и в какой-то момент времени они сравниваются с доходом, и субъект рынка начинает получать прибыль. При дальнейшем росте объема производства прибыль сначала увеличивается, достигая максимума при оптимальном значении $q_0$, а затем издержки снова начинают расти быстрее, чем доход (так как эффективные ресурсы исчерпаны и требуются дополнительные помещения, сырье, квалифицированная рабочая сила, то прибыль начинает уменьшаться, достигая отрицательных значений при достаточно больших объемах производства).

**Применение эластичности в математической экономике**. Анализ взаимосвязи множества различных технико-экономических показателей требует ответа на следующие вопросы: 1) Какие факторы определяют интересующий нас экономический показатель? 2) Каков знак этой зависимости (положительный или отрицательный)? 3) Какова степень этой зависимости (насколько чувствителен исследуемый экономический показатель к изменению определяющих его факторов)? 4) Каково числовое (функциональное) выражение соответствующей зависимости (теоретическое — в виде формулы, графика или таблицы, или эконометрическое (эмпирическое) исследование)?

Заметим, анализ *чувствительности* зависимости функции $y = f(x)$ базируется на следующих подходах:

1) *приростной* подход (прирост фактора $\Delta x \to$ прирост исследуемого показателя $\Delta y$); мера *«абсолютной»* чувствительности — это скорость изменения функции (средняя —отношение изменений, или предельная, производная);

$$\textit{Скорость изменения функции на интервале } (x_0,\ x_0 + \Delta x) = \frac{\textit{Изменение функции } \Delta y}{\textit{Изменение аргумента } \Delta x}.$$

2) *темповый* подход (темп прироста фактора $\%\Delta x \to$ темп прироста исследуемого показателя $\%\Delta y$); напомним, что процентное изменение какой-либо переменной — это отношение изменения этой переменной к первоначальному ее значению, т. е. $\Delta x = \Delta x / x = (x_2 - x_1)/x_1$; мера *«относительной»* чувствительности — эластичность функции — средняя (отношение процентных изменений) или предельная (равная первой производной):

$$\%\Delta y / \%\Delta x \to \lim_{\%\Delta x \to 0} \%\Delta y / \%\Delta x = dx / dy \cdot x / y = f'(x) \cdot x / y .$$

В общем случае *эластичностью* функции $y = f(x)$ называется предел отношения относительных изменений переменных $y$ и $x$.

Если эластичность изменения переменной $y$ при изменении фактора $x$ обозначить через $E_x(y)$, эластичность примет следующий вид:

$$E_x(y) = Mf / Af,$$

где $Mf$ — маржинальное (предельное) значение функции $y$ в точке $x$; $Af$ — среднее значение функции $y$ в точке $x$.

*Коэффициент эластичности* показывает относительное изменение анализируемого показателя под действием единичного относительного изменения экономического фактора, от которого он зависит, при сохранении постоянными остальных влияющих на него факторов.

*Геометрическая интерпретация эластичности* функции проста и отображается отношением:

$$E_x(y) = \pm\, CB / CA,$$

где $CA$ ($CB$) — отрезок касательной от точки $C(x, y)$ до ее пересечения с осью $x(y)$.

Если точки $A$ и $B$ лежат по одну сторону от точки $C$ на касательной, то в формуле ставится *«плюс»*, при этом значение эластичности $E_x(y) > 1$ (**рис. 1.2,а**) или $E_x(y) < 1$ (**рис. 1.2,б**), а если по разные стороны, то *«минус»* (**рис. 1.2,в**).

В дискретном случае, а также при приближенном определении эластичности по дискретному набору данных вычисление эластичности уже не столь однозначное, как при непрерывном случае. Здесь неясно, что выбирать в качестве $x$: первоначальное значение ($x = x_1$); конечное значение ($x = x_2$) или среднее значение [$x = 0{,}5(x_1 + x_2)$]. В зависимости от этого различают:

**а)** *конечную (процентную)* эластичность

$$E_x(y) = [(y_2 - y_1)/ y_1] / [(x_2 - x_1) / x_1];$$

**б)** *среднюю (дуговую)* эластичность

$$E_x(y) = [2\,(y_2 - y_1) / (y_1 + y_2)] / [2\,(x_2 - x_1) / (x_1 + x_2)];$$

**в)** *логарифмическую* эластичность

$$E_x(y) = \ln(y_2 / y_1) / \ln(x_2 / x_1).$$

Все эти выражения мало отличаются друг от друга при небольших относительных (процентных) изменениях величин $x$ и $y$.

В экономике выделяются следующие виды эластичности.

**1.** *Эластичность спроса по цене* (прямая)

$$E_p(q) = (dq / q) / (dp / p) = (dq / dp)\,(p / q).$$

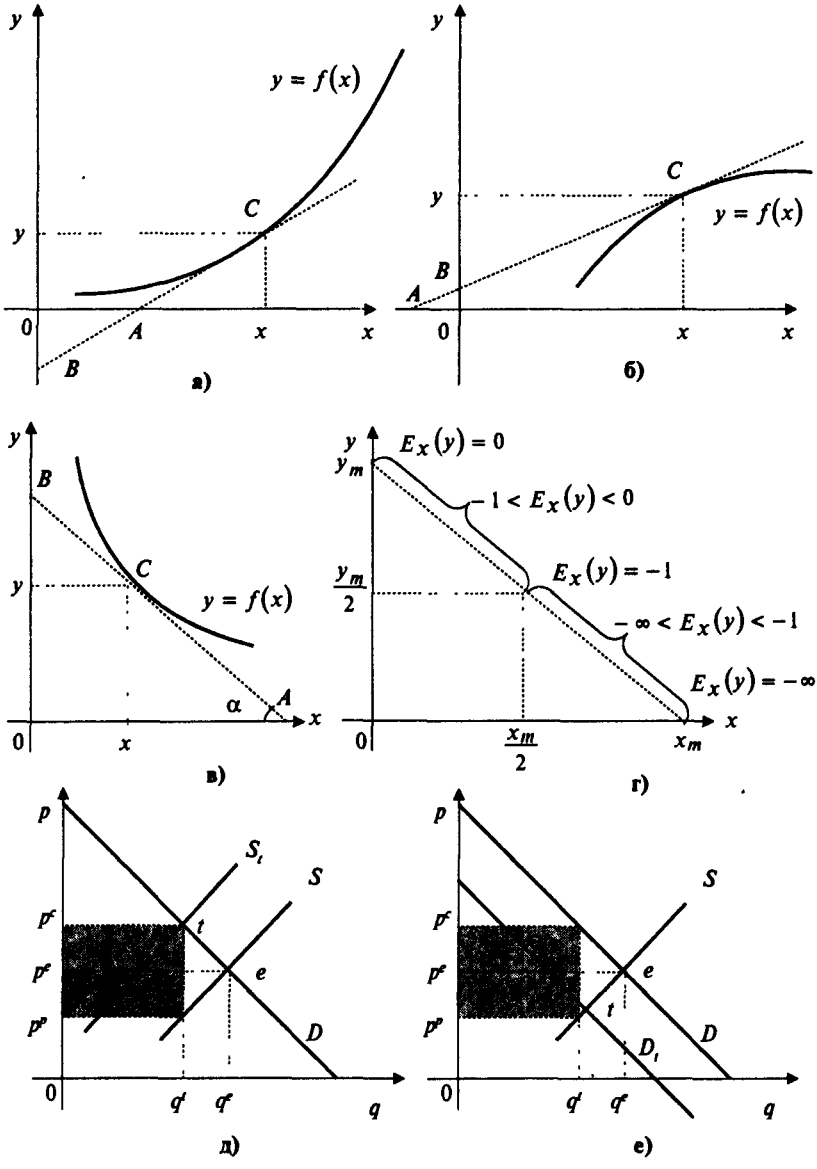



*Рис. 1.2.* ***Графики эластичности в экономическом анализе:***

**а** — $E_x(y)>1$; **б** — $E_x(y)<1$; **в** — $E_x(y)$ отрицательна; **г** — пределы изменения эластичности; **д** — модель взимания налога с производителей (налог $t$ = const); **е** — модель взимания налога с потребителей.

Показывает относительное изменение, выраженное в процентах, величины спроса $q$ на какое-либо благо при изменении цены $p$ этого блага на 1% и характеризует чувствительность потребителей к изменению цен на продукцию. Если ценовая эластичность спроса по модулю $|E_p(q)| > 1$, то спрос называют *эластичным;* если $|E_p(q)| < 1$, то — *неэластичным,* если $|E_p(q)| = 1$, то спрос *с единичной эластичностью.*

2. *Эластичность спроса по доходу I*

$$E_I(q) = (dq / q) / (dI / I) = (dq / dI)(I / q).$$

Характеризует относительное изменение (в процентах) величины спроса на какое-либо благо при изменении дохода потребителей этого блага на один процент; если $|E_I(q)| > 0$, то товары потребления качественные, если же $|E_I(q)| < 0$, то товары малоценные, некачественные; высокий положительный коэффициент спроса по доходу в отрасли указывает ее вклад в экономический рост больше, чем доля в структуре экономики, и она имеет шансы на расширение и процветание в перспективе. Напротив, если этот коэффициент имеет незначительное или отрицательное значения, то ее может ожидать застой и перспектива сокращения производства.

3. *Перекрестная эластичность спроса по цене*

$$E_{p_j}(q_i) = (dq_i/q_i)/(dp_j/p_j) = (dq_i/dp_j)\cdot(p_j/q_i).$$

Характеризует относительное изменение (в процентах) величины спроса $q$ на одно благо при изменениях цены на другое благо, заменяющее или дополняющее его в потреблении, на 1%. Условие $E_{p_j}(q_i) > 0$ свидетельствует о замещаемости благ, а $E_{p_j}(q_i) < 0$ — об их дополняемости.

4. *Ценовая эластичность ресурсов*

$$E_{p_i}(R_i) = (dR_i / R_i) / (dp_i / p_i) = (dR_i / dp_i)\cdot(p_i / R_i).$$

Характеризует относительное изменение (в процентах) величины спроса на какой-либо ресурс (например, труд) при изменении цены этого ресурса (соответственно заработной платы) на 1%;

5. *Эластичность замещения одного ресурса другим*

$$E_{R_j}(R_i) = (dR_i / R_i) / (dR_j / R_j) = (dR_i / dR_j)\cdot(R_j / R_i).$$

Характеризует необходимые изменения (в процентах) величины одного ресурса (например, капитала) при изменении ко-

личества другого ресурса (например, труда) на 1% с тем, чтобы выпуск при этом не изменился.

К *основным факторам, определяющим эластичность спроса,* относятся следующие [1]:

**а)** замещаемость блага в потреблении (эластичность спроса по цене тем выше, чем выше замещаемость блага);

**б)** удельный вес в доходе (эластичность спроса по цене тем выше, чем выше удельный вес расходов на данное благо в доходе потребителя);

**в)** субъективная необходимость (эластичность спроса по цене тем выше, чем ниже субъективная необходимость в данном благе);

г) фактор времени (эластичность спроса по цене обычно выше, чем больше промежуток времени).

Известны следующие теоретические зависимости взаимосвязи эластичности с другими факторами жизни общества:

**1.** *Эластичность выручки от продаж какого-либо блага тесно связана с эластичностью спроса на это благо.* Используя формулу выручки $R = pq$ и формулу для эластичности произведения функций, получаем:

$$E_p(R) = E_p(q) + E_p(p) = E_p(q) + 1 = 1 - |E_p(q)|,$$

так как эластичность спроса по цене $E_p(q)$ всегда отрицательна из-за того, что $p'(q) < 0$. При эластичном спросе выручка растет с ростом объема или уменьшением цены, а при неэластичном — падает.

**2.** *Связь цены и предельных издержек монополиста* такова, что величина надбавки к издержкам *s обусловливается величиной эластичности.* Если совершенно конкурентная фирма устанавливает цену на свою продукцию, равную предельным издержкам $p_c = MC$, то монополист обычно назначает на свою продукцию цену выше предельных издержек $p_м = MC\ (1 + s)$, где $s$ — надбавка к издержкам, составляющая 10%, 20% и более. Записывая условие максимизации прибыли $П$ как разницы между выручкой $R$ и издержками $C$ ($П = R - C$), имеем:

$$П' - R' - C' = MR - MC = 0,$$

где $П'$ — знак производной от прибыли.

Если вычислить предельную выручку $MR$ и приравнять ее к предельным издержкам $MC$, получим соотношение

$$p = MC / (1 - 1 / |E^D|),$$

где $E^D = p / qp'(q)$, из которого следует, что надбавка к предельным издержкам в цене должна быть тем меньше, чем выше эластичность спроса (**рис.1.2,г**).

Эта формула позволяет объяснить, как происходит сегментация рынка монопольным производителем с целью дискриминации потребителей и извлечения из этого дополнительной прибыли. Если монополист может устойчиво разделить покупателей по какому-либо признаку на две или большее число групп (пенсионеров, студентов, работающих и т.п.), то ему выгоднее установить для различных групп различные цены и, таким образом, сегментировать рынок. При этом суммарная выручка от продаж на двух и более рынках одного товара (или услуги) будет максимальна при равенстве предельных доходов от каждого из рынков (иначе ему будет выгоднее перераспределить объем продаж в пользу рынка с большим предельным доходом).

Таким образом,

$$MR_1 = p_1\,(1-1\,/\,|E_1^D|) = p_2\,(1-1\,/\,|E_2^D|) = MR_2.$$

Отсюда получаем

$$p_1/p_2 = (1-1\,/\,|E_2^D|)\,/\,(1-1\,/\,|E_1^D|)\,.$$

Следовательно, те покупатели, спрос которых на товар менее эластичен, платят за него большую цену.

3. *Эластичность тесно связана с налоговой политикой и моделями налогов,* базирующимися на концепции спроса и предложения. При этом в [1], например, показано, что большее налоговое бремя падает на экономического агента с меньшей эластичностью, у которого меньше возможностей для ухода от налогового бремени. В частности, если эластичность спроса равна нулю, то все налоговое бремя ложится на потребителей, так как независимо от величины налога (а следовательно, и от величины цены) потребители не изменят объема покупок. Если же спрос на какой-либо товар характеризуется совершенной эластичностью, то в проигрыше оказывается производитель, так как потребители уходят от налога, снижая величину спроса и потребляя товары-заменители **(рис. 1.2,д).**

Аналогичная ситуация возникает, когда налог формально взимается с потребителей. В этом случае введение налога приводит к сдвигу кривой спроса влево (к уменьшению объема продаж и цены товара), опять обратно пропорционально эластичностям производителей и потребителей. При этом независимо от того, кто является формальным плательщиком налога, фактическим плательщиком оказывается экономический агент с меньшей эластичностью, особенно если эластичность спроса и предложения сильно различается **(рис. 1.2, е).**

Рассматривая проблему влияния величины налоговой ставки на величину налоговой выручки, можно заметить, что эти величины связаны примерно аналогично зависимости выручки продаж и цены товара. В [1] показано, что налоговая выручка возрастает с увеличением налоговой ставки только до тех пор, пока доля ставки налога в цене товара меньше суммы обратных эластичностей спроса и предложения. Это дает возможность устанавливать высокие ставки налогообложения, существенно превышающие цену товара, на товары, спрос на которые неэластичен (или предложение которых неэластично). Примером этого служат акцизы на табак и винно-водочные изделия.

## 1.3. Соотношения между суммарными, средними и предельными величинами в экономике

Все множество технико-экономических показателей можно подразделить на:

- *абсолютные* показатели, выражаемые в количественных, объемных или денежных единицах и подразделяющиеся на *потоковые* (величины за определенный временной период) и *запасовые* (величины на определенную дату или момент времени);
- *относительные* показатели, представляющие собой отношения абсолютных (или других относительных) показателей, т. е. количество единиц одного показателя на одну единицу другого, причем не только соотношения разных показателей на один и тот же момент времени, но и одного и того же показателя в разные моменты времени (темпы роста данного показателя).

В экономическом анализе и принятии решений в одних ситуациях важны абсолютные показатели, в других — относительные, в третьих — их сочетание.

Как правило, при комплексном анализе экономических ситуаций для выбора наилучшего решения важны разнообразные показатели, как абсолютные, так и относительные, причем последние могут выступать как *средние* (например, величина соответствующего показателя (прибыли, издержек, выручки и др. в расчете на единицу выпуска) и *предельные* (прирост соответствующего показателя в расчете на единицу прироста выпуска) величины. Если, к примеру, средняя выручка превышает средние издержки, то субъект хозяйствования получает прибыль и производить продукцию ему выгодно. Если при этом предельная

выручка превышает предельные издержки, то ему выгодно расширять производство, увеличивая объем прибыли. Соответственно, если средние издержки превышают среднюю выручку, то субъект хозяйствования терпит убытки, а если предельные издержки превышают предельную выручку, то объем производства нужно сокращать.

В разделе III книги подробно рассмотрены проблемы анализа и особенности управленческого учета субъектов рынка с расчетом всех указанных показателей. Приведем формальные определения суммарных, средних и предельных величин.

*Суммарная величина* $F(x)$ — любая функция независимой переменной $F(x)$. Как правило, в экономике под суммарными величинами понимают абсолютные величины, в роли которых выступают следующие: доход (выручка) $R(Q)$ или издержки $C(Q)$ как функции объема выпуска $Q$, объем выпуска как функция от количества переменного ресурса, например, труда $Q(L)$, полезность как функция количества потребляемого блага $U(x)$ и др. (любая из перечисленных функций может быть задана формулой, таблицей или графиком).

*Средняя величина* $AF(x)$ определяется как отношение суммарной величины $F(x)$ к независимой переменной $x$, т. е.

$$AF(x) = F(x) / x,$$

где буква $A$ — сокращение англ. Average (средняя).

Средняя величина обозначается так же, как $F$. Пример средних величин в экономике — это среднедушевой объем потребления, средняя фондоотдача, средняя выручка (доход) $AR = R(Q)/Q$, средние издержки $AC = C(Q)/Q$, средний продукт труда $AQ_L = Q(L)/L$ и др. (средняя величина как функция независимой переменной также может задаваться в виде формулы или графика, **рис. 1.3, а**).

*Маржинальная,* или *предельная,* величина $MF(x)$ определяется как производная суммарной величины $F(x)$ по независимой переменной $x$, т. е.

$$MF(x) = F'(x), \text{ если } x \text{ — непрерывная величина;}$$

$$MF(x) = \Delta F / \Delta x, \text{ если } x \text{ — величина дискретная.}$$

Примерами предельных величин в экономике могут быть названы перечисленные выше показатели, применимые к средним величинам.

Найти маржинальную величину по суммарной величине (для непрерывного случая) можно на базе формулы:

$$MF(x) = F'(x).$$

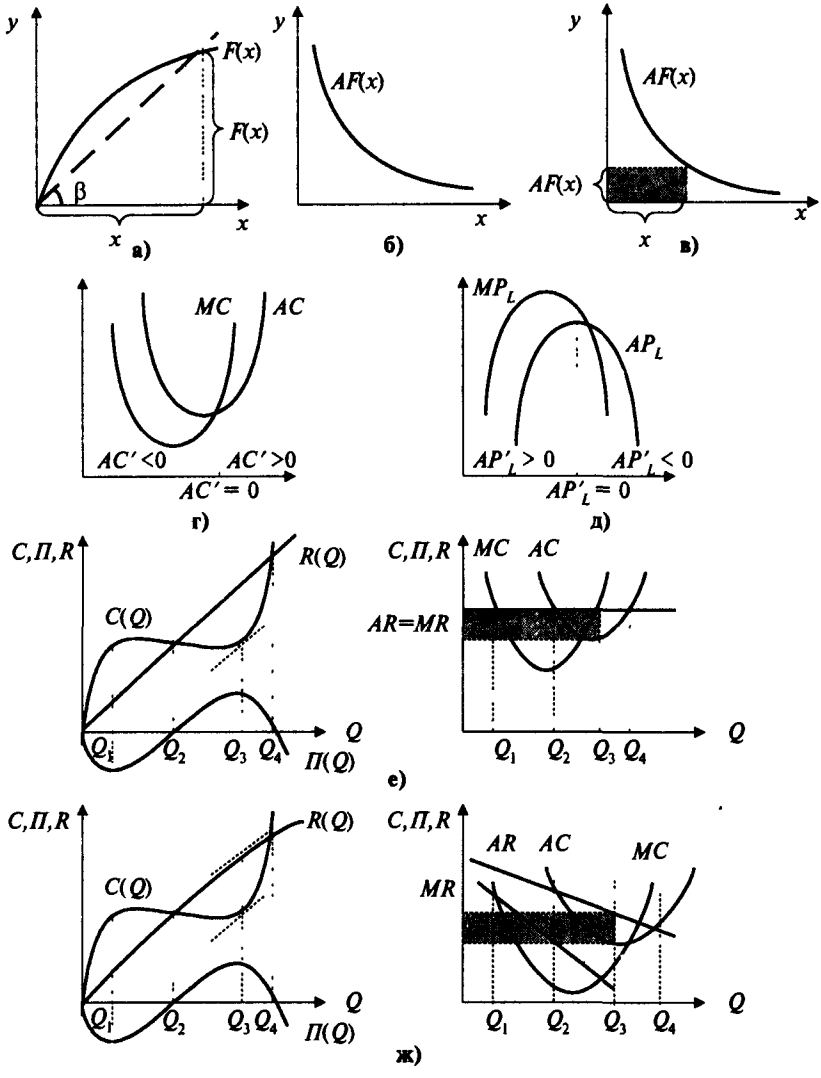



*Рис. 1.3.* ***Соотношения между суммарными (а), средними (б) и предельными величинами в экономике:***

в — нахождение суммарной величины по средней; г (д) — соотношение между графиками средних и предельных издержек *AC* и *MC* (продуктов труда *AP* и *MP*); е (ж) — соотношения между предельными, средними и суммарными величинами для рыночной структуры совершенной конкуренции (монополии), *R* — доход; *C* — издержки; *П* — прибыль; *Q* — объем выпуска

Если, например, $F(x) = ax - bx^4$, то $MF(x) = a - 4bx^3$.

Если суммарная величина задается выпуклой кривой $F(x)$ в виде графика, то необходимо через точку $A$ графика суммарной величины, имеющую координаты $[x, F(x)]$, провести касательную к графику. Тангенс угла наклона касательной к графику суммарной величины численно равняется производной суммарной величины, и следовательно, является предельной величиной $MF(x) = F(x) = \mathrm{tg}a$ **(рис. 1.3,б).**

Если необходимо найти суммарную величину по маржинальной величине, то применяется операция интегрирования $F(x) = \int MF(x)\,dx$. Например, если $MF(x) = a - bx^2$, то $F(x) = \int MF(x)\,dx = ax - b^3/3 + C$, где $C$ — произвольная постоянная. Если предельная величина задана графиком, то площадь под графиком функции предельной величины в диапазоне изменения независимой переменной от нуля до $x$ равняется суммарной величине минус постоянная $C$ **(рис. 1.3, в).**

*Соотношения между средними AF, суммарными F и маржинальными* (предельными) *MF величинами* независимой непрерывной переменной $x$ находятся легко: например, если задана средняя величина $AF(x)$, то суммарная величина $F(x) = x \cdot AF(x)$, а предельная величина $MF(x) = F'(x) = (x \cdot AF(x)) = AF(x) + x \cdot AF'(x)$. Аналогичным образом можно выразить среднюю величину через суммарную величину: $AF(x) = 1/x \cdot \int MF(x)\,dx$. Примеры соотношения между графиками средних $AC$ и предельных $MC$ издержек среднего $AP_L$ и предельного $MP_L$ продуктов труда приведены на **рис. 1.3, г,** д.

Если же независимая переменная $x$ может принимать только дискретные значения (например, количество выпуска штучной продукции, количество рабочих и т.п.), то все полученные выше соотношения сохраняют свой вид при следующих условиях:

**а)** производная функция $F'(x)$ заменяется на отношение $\Delta F/\Delta x$;

**б)** интеграл $\int MF(x)\,dx$ заменяется на конечную сумму $\sum MF(x)$;

**в)** касательная к графику функции $F(x)$ заменяется на прямую линию, проходящую через две точки с координатами $(x, F(x))$ и $(x + \Delta x, F(x + \Delta x))$.

Соотношение между средними и предельными величинами в дискретном случае имеет простую интерпретацию: если ученик — «ударник» получает только «хорошо», то его средняя оценка

также «хорошо». Каждая последующая оценка может интерпретироваться как предельная оценка, при этом если он получает только «отлично», то его средняя оценка постепенно повышается, а если — лишь «удовлетворительно», то предельная оценка станет ниже средней и его средняя оценка понизится.

**Анализ показателей и их соотношений как предельных, средних и суммарных величин, характеризующих работу субъекта рынка.** Если в качестве примера соотношений между предельными, средними и суммарными величинами рассмотреть показатели, характеризующие работу одного и того же субъекта рынка, работающего по законам: а) совершенно конкурентной фирмы, б) фирмы-монополиста, то можно констатировать следующее (для понимания рассуждений введем ряд обозначений показателей: $Q$ — объем выпуска продукции; $p$ — цена; $R = p(Q) \cdot Q$ — доход (выручка); $C$ — издержки; $П = R - C$ — прибыль, $q$ — величина спроса).

**1.** Если субъект рынка выступает как совершенно *конкурентная* фирма, то цена на ее продукцию постоянна и не зависит от объема производства данной фирмы, определяясь рынком, т. е. $p(Q) = p$, и, следовательно, $R(q) = pQ$. Доход является линейной функцией объема выпуска. Для типичной функции издержек, растущих быстрее, чем доход при малых объемах выпуска, графики дохода $R(q)$, издержек $C(Q)$ и прибыли $П(Q)$ имеют вид (рис. 1.3, е). По ним можно построить графики средних и предельных величин. Так как $MR = (pQ)' = p = pQ/Q = AR$, то графики среднего и предельного доходов имеют вид прямой, параллельной оси $Q$.

*График средних издержек* совпадает с графиком среднего дохода при объемах выпуска $Q_2$ и $Q_4$ (так как в этих точках значения функций $C(Q)$ и $R(Q)$ совпадают), лежит *выше* его при $Q < Q_2$ и $Q > Q_4$ (из $C(Q) > R(Q) \rightarrow AC(Q) = C(Q) / Q > R(Q) / Q = MC(Q)$ и лежит *ниже* его при $Q_2 < Q < Q_4$. В точке, лежащей чуть ниже $Q_3$, средние издержки минимальны. Эту точку можно найти, проводя из начала координат прямую, касающуюся графика $C(Q)$.

*График предельных издержек* можно построить, анализируя изменение наклона касательной к графику $C(Q)$. В точках $Q_1$ и $Q_3$ касательная к графику $C(Q)$ параллельна графику дохода $R(Q)$. Следовательно, в этих точках предельные издержки совпадают с предельным доходом и имеет место минимум прибыли (максимум убытков) в точке $Q_1$ и максимум прибыли в точке $Q_3$ ($П' = R' - C' = MK - MC = 0$), так как прибыль положительна

при объеме выпуска $Q_2 < Q < Q_4$ и отрицательна при $Q < Q_2$ и $Q > Q_4$. Величину прибыли при оптимальном объеме выпуска $Q_3$ можно найти как площадь заштрихованного прямоугольника по графикам средних издержек и среднего дохода (вершины этого прямоугольника находятся в точках с координатами: $A(Q_3, p)$; $B(0, AC(Q_3))$; $C(0, AC(Q_3))$; $D(0, P)$.

2. Если субъект рынка выступает как *монопольная фирма,* то она сама выбирает цену исходя из кривой спроса $p(Q)$ на ее продукцию. Так как $p(Q)$ — убывающая функция, то $p'(Q) < 0$. При той же функции издержек, что и в первом случае, графики суммарных, средних и предельных показателей приведены на рис. 1.3, ж, при этом графики суммарных, средних и предельных издержек имеют аналогичный первому случаю вид.

*График среднего дохода* $AR = p(Q) \cdot Q/Q = p(Q)$ совпадает с графиком функции спроса и пересекает график средних издержек в точках $Q_2$ и $Q_4$, где $R(Q)=C(Q)$. График предельного дохода лежит ниже графика среднего дохода при любых объемах выпуска, так как $MR = R'(Q) = p(Q) + Qp'(Q) = AR + Qp'(Q) < AR$ и $p'(Q) < 0$ и пересекает график предельных издержек в точках $Q_1$ и $Q_3$, в которых касательные к графикам дохода и издержек имеют одинаковый наклон. При этих объемах выпуска прибыль, как и в первом случае, принимает минимальное и максимальное значения соответственно. Это обусловлено тем, что необходимое условие максимума прибыли записывается аналогично как $\Pi' = R' - C' = MR - MC = 0$, и в оптимальной точке предельный доход обязательно равен предельным издержкам. Аналогично первому случаю прибыль на графиках средних и предельных величин можно определить как площадь заштрихованного прямоугольника, построенного между графиками среднего дохода и средних издержек, при этом вершины прямоугольника находятся в точках: $A(0, AR(Q_3))$; $B(0, AC(Q_3))$; $C(0, AC(Q_3))$; $D(0, AR(Q_3))$.

Таким образом, при определении оптимального объема производства фирмы, если известны ее функции суммарного дохода и издержек $R(Q)$ и $C(Q)$ (предполагается, что эти функции дифференцируемы), средние и предельные показатели могут быть использованы следующим образом:

а) вначале находятся точки, в которых величина предельного дохода равна величине предельных издержек, т. е. $MR(Q) = MC(Q)$; если таких точек нет, то фирме либо невыгодно производить вообще продукцию (при $R(Q) < C(Q)$), либо выгодно сколько угодно наращивать объем производства (при $R(Q) > C(Q)$);

**б)** в найденных точках может достигаться максимум прибыли, максимум убытка, минимум прибыли, минимум убытка, либо ничего из перечисленного; поэтому далее среди этих точек находятся те, в которых функция прибыли $\Pi(Q) = R(Q) - C(Q)$ достигает максимума (ее производная меняет знак с плюса на минус). Эти точки являются точками максимума прибыли или минимума убытка;

**в)** необходимо выбрать точки (точку), где величина прибыли положительна; признаком этого может быть превышение среднего дохода над средними издержками: $AR(Q) > MR(Q)$. Если такая точка найдена, то она является точкой (локального) максимума прибыли фирмы.

Рассмотрим особенности моделей полезности и производственных функций и их применения в экономических задачах.

## 1.4. Применение производственных функций в макро- и микроэкономике

**Понятие производственной функции.** Производственная функция одной переменной $Y = f(x)$ — функция, независимая переменная которой принимает значения объемов затрачиваемого ресурса (фактора производства), а зависимая переменная — значения объемов выпускаемой продукции. В связи с этим производственная функция (ПФ) $f$ называется *одноресурсной*, или *однофакторной* ПФ, ее область определения — множество неотрицательных действительных чисел. Запись $y = f(x)$ означает, что если ресурс затрачивается или используется в количестве $x$ единиц, то продукция выпускается в количестве $y = f(x)$ единиц. Символ $f$ (знак функции) является характеристикой производственной системы, преобразующей ресурс в выпуск. В микроэкономике считают, что $y$ — это максимально возможный объем выпуска продукции, если ресурс затрачивается или используется в количестве $x$ единиц. В макроэкономике такое понимание не совсем корректно, так как при ином распределении ресурсов между структурными единицами экономики выпуск может быть иным, поэтому ПФ — это статистически устойчивая связь между затратами ресурса и выпуском. Более правильной считается запись $y = f(x, a)$, где $a$ — вектор параметров ПФ.

Рассмотрим простую ПФ вида $f(x)= ax^b$, где $x$ —величина затрачиваемого ресурса (например, рабочего времени), $f(x)$ — объем выпускаемой продукции (например, число готовых деталей), величины $a$ и $b$ —параметры ПФ. Из графика **(рис. 1.4, а)** следует, что с ростом величины затрачиваемого ресурса $x$ объем выпуска $y$ растет, однако при этом каждая дополнительная единица ресурса дает все меньший прирост объема $y$ выпускаемой продукции. Это обстоятельство (рост объема выпуска $y$ и уменьшение прироста объема $\Delta y$ с ростом величины $x$) отражает фундаментальное положение экономической теории, подтвержденное на практике и называемое *законом убывающей эффективности.*

ПФ имеют различные области использования с реализацией принципа «затраты —выпуск» как на микро-, так и на макроуровне. *Микроэкономические* ПФ используются для описания взаимосвязи между величиной затрачиваемого или используемого ресурса $x$ в течение определенного времени и выпуском продукции $y$, осуществляемым конкретным субъектом хозяйствования.

*Макроэкономические* ПФ можно использовать для описания взаимосвязей между годовыми затратами труда в масштабе региона или страны и годовым конечным выпуском продукции (или дохода) этого региона или страны в целом, а также для решения задач анализа, планирования и прогнозирования. На микроэкономическом уровне затраты и выпуск могут измеряться в натуральных или в стоимостных единицах и показателях; например, годовые затраты труда — в человекочасах (объем человекочасов —натуральный показатель) или в рублях выплаченной заработной платы (ее величина — стоимостной показатель); выпуск продукции может быть представлен в штуках или других натуральных единицах (тоннах, метрах и т. п.) или в виде своей стоимости. На макроэкономическом уровне затраты и выпуск измеряются обычно в стоимостных показателях, представляя собой стоимостные (ценностные) агрегаты, т. е. суммарные величины произведений объемов затрачиваемых (или используемых) ресурсов и выпускаемых продуктов на их цены.

Производственная функция *нескольких переменных* — это функция вида $y= f(x)= f(x_1,..., x_n, a)$, независимые переменные $x_i$ которой принимают значения объемов затрачиваемых или используемых ресурсов (число переменных $n$ равно числу ресурсов), а значение функции имеет величину объемов выпуска; $a$ — вектор параметров. В связи с этим такие производственные

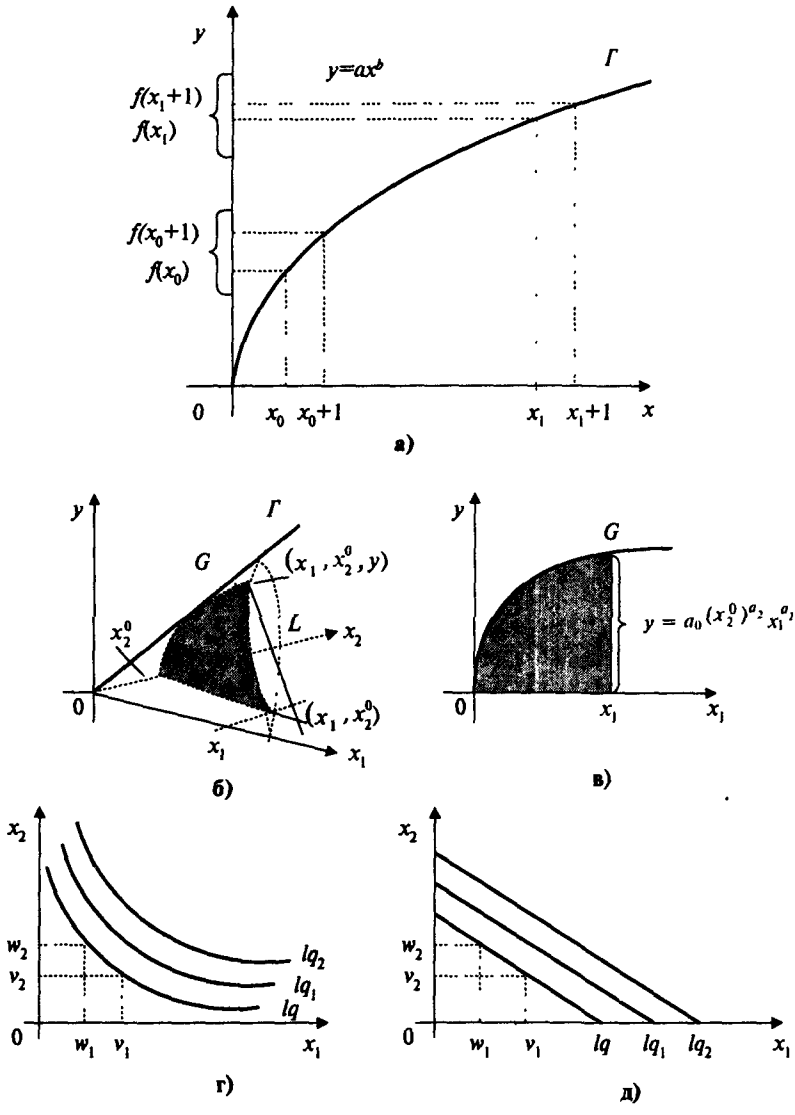



*Рис. 1.4.* ***Производственные функции в экономике:***

**а** — график ПФ $y = ax^b$; **б (в)** — график ПФ $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \left(a_1 + a_2 = 1\right)$ (фрагмент графика), **г** — ПФ вида Кобба—Дугласа; **д** — ПФ вида линейной функции; $l_{qi}$ — изокванты

функции называются *многоресурсными*, или *многофакторными*. Для *отдельного субъекта хозяйствования*, выпускающего однородный продукт, ПФ $f(x_1,..., x_n)$ могут связывать объем выпуска (в натуральном или стоимостном выражении) с затратами рабочего времени по различным видам трудовой деятельности, комплектующих изделий, энергии, основного капитала, измеряемым обычно в натуральных единицах (производственные функции такого типа характеризуют действующие технологии субъектов хозяйствования).

При построении ПФ для *отдельного региона* или страны в целом в качестве величины годового выпуска $y$ (объемы выпуска или дохода на макроуровне обозначаются большой буквой) чаще всего берут совокупный продукт (доход) региона или страны, исчисляемый обычно в неизменных, а не в текущих ценах, в качестве ресурсов рассматривают: основной капитал $K(x_1)$ — объем используемого в течение года основного капитала; живой труд $L(x_2)$ — количество единиц затрачиваемого в течение года живого труда, исчисляемые обычно в стоимостном выражении. В результате строят *двухфакторную* ПФ $f(x_1, x_2)$, или $Y = f(K, L)$. Далее от двухфакторных производственных функций переходят к трехфакторным, при этом в качестве третьего фактора иногда вводятся объемы используемых природных ресурсов. Кроме того, если производственные функции строятся по данным временных рядов, то в качестве особого фактора роста производства можно включить технический прогресс.

ПФ $y = f(x_1, x_2)$ называется *статической*, если ее параметры и характеристика $f$ не зависят от времени $t$ (хотя объемы ресурсов и объем выпуска могут зависеть от времени $t$), т. е. можно иметь представление в виде временных рядов: $x_1(0)$, $x_1(1)$,..., $x_1(T)$; $x_2(0)$, $x_2(1)$,..., $x_2(T)$; $y(0)$, $y(1)$,..., $y(T)$; $y(t) = f(x_1(t), x_2(t))$. Здесь $t$ —номер года, $t = 0,1,..., T$; $t = 0$ — базовый год временного промежутка, охватывающего годы 1, 2,..., $T$.

***Пример 1.2.*** Для моделирования проблем отдельного региона или страны в целом и решения задач как на макро-, так и на микроэкономическом уровне часто используется производственная функция Кобба—Дугласа (сокращенно обозначаемая в дальнейшем ПФКД):

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2},$$

где $a_0$, $a_1$, $a_2$ — параметры ПФ, являющиеся положительными постоянными числами, причем часто $a_1$ и $a_2$ таковы, что $a_1 + a_2 = 1$.

В практических приложениях ПФКД обычно $x_1$ равняется объему *используемого* основного капитала или объему используемых основных

фондов $K$ ($x_1 = K$), $x_2 = L$ — затратам живого труда, тогда она приобретает вид:

$$Y = a_0 \cdot K^{a_1} L^{a_2}.$$

Графиком ПФ вида $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ ($a_1 + a_2 = 1$) в трехмерном пространстве выступает двумерная поверхность $\Gamma$ **(рис.1.4,б)**, являющаяся конической поверхностью, направляющей которой служит линия $L$, а образующими —лучи, выходящие из точки 0. Пусть $x_2 = x_2^0 > 0$, тогда $y = (a_0(x_2^0)^{a_2})x_1^{a_1}$, и мы получаем вариант мультипликативной ПФ, аналогичный рассмотренному выше **(рис. 1.4,в)**, причем линия $G$ — пересечение поверхности $\Gamma$ вертикальной плоскостью $x_2 = x_2^0$. Поведение линии $G$ отражает факт, что с ростом затрат первого ресурса объем выпуска $y$ растет, но каждая дополнительная единица первого ресурса обеспечивает все меньший прирост выпуска $\Delta y$ (например, если число работников и их квалификация остаются неизменными, а число обслуживаемых ими станков, которое уже достаточно велико, увеличивается, скажем, в два раза, то это не ведет к двойному росту объема выпуска). Отметим, что если $a_1 + a_2 < 1$, то графиком $\Gamma$ ПФКД является поверхность, которая напоминает выпуклую вверх «горку», крутизна которой падает, если точка ($x_1$, $x_2$) перемещается на «северо-восток» по координатной плоскости.

***Пример 1.3.*** Пусть линейные аддитивные ПФ имеют вид: $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ (двухфакторная) и $y = a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n$ (многофакторная). Переход от мультипликативной ПФ к аддитивной осуществляется с помощью операции логарифмирования. Для двухфакторной мультипликативной ПФ $y = a_0x_1^{a_1}x_2^{a_2}$ этот переход имеет вид: $\ln y = \ln a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2$. Полагая $\ln y = w$, $\ln x_1 = v_1$ и $\ln x_2 = v_2$, получаем аддитивную ПФ вида $w = \ln a_0 + a_1v_1 + a_2v_2$. Выполняя обратный переход из аддитивной ПФ, можно получить мультипликативную производственную функцию. Если сумма показателей степени в ПФКД $y = a_0K^{a_1}L^{a_2}$ равна единице ($a_1 + a_2 = 1$), то ее можно записать в несколько иной форме:

$$Y/L = a_0K^{a_1}L^{a_1}/L = a_0K^{a_1}/L^{(1-a_2)} = a_0K^{a_1}/L^{a_1} = a_0(K/L)^{a_1}.$$

Дроби $Y/L = z$ и $K/L = k$ называются соответственно *производительностью труда* и *капиталовооруженностью труда.* Используя новые символы, получим $z = a_0k^{a_1}$, т. е. из двухфакторной ПФКД получим формально однофакторную ПФКД ($0 < a_1 < 1$), откуда следует, что *производительность труда z растет медленнее его капиталовооруженности* (этот вывод справедлив для случая статической ПФКД в рамках существующих технологии и ресурсов).

Обратная дробь $Y/K$ называется *производительностью капитала*, или *капиталоотдачей*, а обратные дроби $K/Y$ и $L/Y$ называются соответственно *капиталоемкостью* и *трудоемкостью выпуска продукции*.

ПФ называется *динамической*, если: **а)** время $t$ фигурирует в качестве самостоятельного фактора производства, влияющего на объем выпускаемой продукции; **б)** параметры ПФ и ее характеристика $f$ зависят от времени $t$, если параметры ПФ оцениваются по данным временных рядов (объем ресурсов и выпуска) продолжительностью $T_0$ лет (т. е. базовый промежуток для оценки параметров имеет продолжительность $T_0$ лет), то экстраполяцию по такой производственной функции следует рассчитывать не более чем на $T_0/3$ лет вперед (т. е. промежуток экстраполяции должен иметь продолжительность не более чем $T_0/3$ лет).

При построении ПФ влияние НТП учитывается множителем $e^{pt}$, где $p$ ($p > 0$) — характеризующий *темп прироста* выпуск, осуществляемый под влиянием НТП:

$$y(t) = e^{pt} f(x_1(t), x_2(t)),$$

где $t = 0,1,..., T$.

Данная ПФ — простейшая динамическая ПФ, содержащая нейтральный (не материализованный в одном из факторов) технический прогресс. В сложных случаях НТП, выступающий как трудо- или капиталосберегающий фактор, может воздействовать непосредственно на производительность и капиталоотдачу:

$$Y(t) = f(A(t) \cdot L(t), K(t));$$

$$Y(t) = f(A(t) \cdot K(t), L(t)).$$

В целом выбор аналитической формы ПФ $y = f(x_1, x_2)$ обусловливается теоретическими соображениями учета особенностей взаимосвязей между конкретными ресурсами (при микроэкономическом уровне), особенностей параметризации (реальных или экспертных данных, преобразуемых в параметры ПФ). Отметим, что оценка параметров ПФ обычно проводится с помощью метода наименьших квадратов.

**Формальные свойства, предельные (маржинальные) и средние значения производственных функций.** Производственная функция $f(x_1, x_2)$ должна удовлетворять ряду свойств [1]: **а)** без ресурсов нет выпуска; **б)** с ростом затрат хотя бы одного ресурса объем выпуска растет; **в)** с ростом затрат одного ($i$-го) ресурса при неизменном количестве другого ресурса величина прироста выпус-

ка на каждую дополнительную единицу $i$-го ресурса не растет (закон убывающей эффективности); **г)** производственная функция является однородной функцией степени $p > 0$: при $p > 1$ с ростом масштаба производства в $t$ раз ($t > 1$) объем выпуска возрастает в $t^p$ раз (т. е. имеем рост эффективности производства при росте масштаба производства); при $p < 1$ имеем падение эффективности производства от роста масштаба производства; при $p = 1$ — постоянную эффективность производства при росте его масштаба или независимость удельного выпуска от масштаба производства.

Заметим, что для ПФКД вида $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ ($a_1 + a_2 = 1$) свойства **а—г** выполняются. Для линейной ПФ $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \times$ $\times (a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0)$ ряд свойств (**а** (при $a_0 = 0$) и **г** не выполняются).

Линия $l_q$ уровня $q = f(x_1, x_2)$ ($0 < q$ — действительное число) ПФ $y = f(x_1, x_2)$ называется *изоквантой*, т. е. множеством точек, в котором ПФ постоянна и равна $q$). Различные наборы ($v_1$, $v_2$) и ($w_1$, $w_2$) затрачиваемых (используемых) ресурсов, принадлежащие одной и той же изокванте $l_q$ ($q = f(v_1, v_2) = f(w_1, w_2)$), дают один и тот же объем выпуска $q$.

Из вида изоквант $l_{q_1}$ и $l_{q_2}$ ПФКД вида $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ и линейной ПФ $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ **(рис. 1.4, г,д)** следует, что изокванта $l_{q_2}$, расположенная «северо-восточнее» изокванты $l_{q_1}$, соответствует большему объему выпуска (т. е. $q_2 > q_1$). Если объем используемого основного капитала $K$ неограниченно растет, то затраты труда неограниченно убывают.

При $n = 2$ для любой ПФ со свойствами **а—г** изокванта (если она не является прямой) есть линия (не обязательно гладкая), которая выпукла к точке 0 (линия, которая похожа на изокванту $l_q$; если график ПФ похож на выпуклую горку, то естественно, что ее изокванты есть линии, выпуклые к точке 0).

Дробь $A_i = f(x)/x_i$ ($i = 1,2$) называется *средней производительностью* $i$-го ресурса (фактора производства), или *средним выпуском* по $i$-му ресурсу (фактору производства).

При двухфакторной ПФКД $Y = a_0 \cdot K^{a_1} L^{a_2}$ для средних производительностей основного капитала $Y/K$ и труда $Y/L$ используются понятия соответственно *капиталоотдача* и *производительность труда* (они применяются для любых двухфакторных ПФ, у которых $x_1 = K$, $x_2 = L$).

Первая частная производная от ПФ вида $f(x_1, x_2)$, имеющая вид

$$M_i = \partial f(x)/\partial x_i \ (i = 1,2),$$

называется *предельной*, или *маржинальной производительностью* $i$-го *ресурса* (фактора производства), или *предельным выпуском* по $i$-му ресурсу (фактору производства).

Предельная производительность ресурса приближенно показывает, на сколько единиц увеличится объем выпуска $y$, если объем затрат $x_i$ $i$-го ресурса вырастает на одну (достаточно малую) единицу при неизменных объемах другого затрачиваемого ресурса. Здесь предельную величину $M_i$ целесообразно интерпретировать, используя близкое к ней отношение малых конечных величин $\Delta f(x)$ и $\Delta x_i$.

***Пример 1.4.*** Для ПФКД вида $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ найти в явном виде средние и предельные значения $A_1$, $A_2$, $M_1$, $M_2$ заданной функции.

Р е ш е н и е . Известны следующие формулы расчета: $A_i = f(x)/x_i$, $M_i = \partial f(x)/\partial x_i$, $i = 1,2$; подставляя значения, имеем:

$$A_1 = f(x)/x_1 = a_0 x_1^{a_1-1} x_2^{a_2}; \ A_2 = f(x)/x_2 = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2-1};$$

$$M_1 = \partial f(x)/\partial x_1 = a_0 x_1^{a_1-1} x_2^{a_2} a_1 = a_1 A_1;$$

$$M_2 = \partial f(x)/\partial x_2 = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2-1} a_2 = a_2 A_2.$$

Если $a_i \le 1$, то $M_i \le A_i$, так как $M_i / A_i = a_i$. Таким образом, получаем, что предельная производительность $i$-го ресурса не больше средней производительности этого ресурса.

***Пример 1.5.*** Для линейной ПФ вида $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ $(a_i > 0)$ найти в явном виде средние и предельные значения $A_1$, $A_2$, $M_1$ и $M_2$.

Р е ш е н и е . По аналогии с рассмотренным выше примером имеем:

$$A_1 = f(x)/x_1 = a_0/x_1 + a_1 + a_2 x_2/x_1;$$

$$A_2 = f(x)/x_2 = a_0/x_2 + a_1 x_1/x_2 + a_2;$$

$$M_1 = \partial f(x)/\partial x_1 = a_1; \ M_2 = \partial f(x)/\partial x_2 = a_2.$$

Отсюда имеем, что если $M_i/A_i \le 1$, то $M_i \le A_i$.

Отношение предельной производительности $M_i$ $i$-го ресурса к его средней производительности $A_i$ называется (*частной*) *эластичностью выпуска по i-му ресурсу* (по фактору производства), т. е.

$$E_i = M_i/A_i = \partial f(x)/\partial x_i \,/ f(x)/x_i = \partial f(x)/\partial x_i \cdot x_i/f(x).$$

Сумма $E_1 + E_2 = E_x$ называется *эластичностью производства*.

Эластичность выпуска по $i$-му фактору производства $E_i$ приближенно показывает, на сколько процентов увеличится выпуск $y$, если затраты $i$-го ресурса увеличатся на один процент при неизменных объемах другого ресурса. Пояснение выражения $E_i$, содержащего предельную величину $\partial f(x)/\partial x_i$, с помощью выражения, содержащего конечное приближение этой предельной величины, является ключевым в понимании сути частной эластичности выпуска по $i$-му ресурсу.

***Пример 1.6.*** Выписать в явном виде для ПФКД выражения для эластичностей $E_1$, $E_2$ и $E_x$.

Р е ш е н и е . Для ПФКД вида $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ имеем:

$$E_i = M_i/A_i = \partial f(x)/\partial x_i \,/ f(x)/x_i = \partial f(x)/\partial x_i \cdot x_i/f(x).$$

Как следует из результатов, полученных в примере **1.4**, составляющие эластичности равны:

$$A_1 = f(x)/x_1 = a_0 x_1^{a_1-1} x_2^{a_2};\ A_2 = f(x)/x_2 = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2-1};$$

$$M_1 = \partial f(x)/\partial x_1 = a_0 x_1^{a_1-1} x_2^{a_2} a_1 = a_1 A_1;$$

$$M_2 = \partial f(x)/\partial x_2 = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2-1} a_2 = a_2 A_2.$$

Подставив эти выражения в формулу частной эластичности, получим:

$$E_1 = M_1/A_1 = a_1 A_1/A_1 = a_1;\ E_2 = M_2/A_2 = a_2 A_2/A_2 = a_2;$$

$$E_x = E_1 + E_2 = a_1 + a_2.$$

***Пример 1.7.*** Для линейной ПФ вида $y = a_1 x_1 + a_2 x_2$ ($a_0 = 0$) выписать в явном виде выражения для эластичностей $E_1$, $E_2$ и $E_x$.

Р е ш е н и е . Аналогично вышеприведенному примеру **1.6** имеем:

$$E_i = M_i/A_i = (\partial f(x)/\partial x_i)\,/(f(x)/x_i) = \partial f(x)/\partial x_i \cdot x_i/f(x),$$

$$M_1 = \partial f(x)/\partial x_1 = a_1;\ M_2 = \partial f(x)/dx_2 = a_2;$$

$$A_1 = f(x)/x_1 = a_1 + a_2 x_2/x_1;\ A_2 = f(x)/x_2 = a_1 x_1/x_2 + a_2.$$

Тогда получаем:

$$E_1 = M_1/A_1 = a_1/(a_1 + a_2 x_2/x_1) = a_1 x_1/(a_1 x_1 + a_2 x_2);$$

$$E_2 = M_2/A_2 = a_2/(a_1 x_1/x_2 + a_2) = a_2 x_2\,/(a_1 x_1 + a_2 x_2);$$

$$E_x = E_1 + E_2 = (a_1 x_1 + a_2 x_2)/(a_1 x_1 + a_2 x_2) = 1.$$

*Предельной технологической нормой замены* (замещения) $i$-го ресурса (фактора производства) $j$-м ресурсом $R_{ij}$ называется выражение $R_{ij} = dx_j / dx_i$ $(i, j = 1,2)$ при постоянной $y$.

Пусть выпуск $y$ является постоянным (т. е. все наборы затрачиваемых ресурсов расположены на одной изокванте), тогда первый полный дифференциал производственной функции вида $y = f(x)$ равен:

$$dy = \partial f(x)/\partial x_1 \cdot dx_1 + \partial f(x)/\partial x_2 \cdot dx_2 = 0,$$

где $dx_1$, $dx_2$ — дифференциалы переменных $x_1$, $x_2$

Выразив первый дифференциал $dx_j$ и поделив его на $dx_i$, получим: $R_{ij} = dx_j / dx_i = (\partial f(x)/\partial x_j)/(\partial f(x)/\partial x_i) > 0$ $(i=j,\ i=1,2)$.

Для двухфакторной ПФ справедливо равенство:

$$R_{12} = E_1 x_2 / E_2 x_1,$$

т. е. предельная норма замены первого ресурса вторым равна отношению эластичностей выпуска по первому и второму ресурсам, умноженному на отношение объема второго ресурса к объему первого ресурса.

Если $x_1 = K$, $x_2 = L$, то отношение $x_1/x_2 = K/L$ называется *капиталовооруженностью труда*. В этом случае предельная норма замены основного капитала трудом равна отношению эластичностей выпуска по основному капиталу и труду, поделенному на капиталовооруженность труда.

При двухфакторной ПФ, постоянном выпуске $y$ и малых приращениях $\Delta x_1$ и $\Delta x_2$ имеет место следующее приближенное равенство:

$$R_{12} = -\ dx_2 / dx_1 = -\Delta x_2/\Delta x_1.$$

На основании этого равенства имеем, что предельная норма замены ресурсов $R_{12}$ приближенно показывает, на сколько единиц увеличатся затраты второго ресурса (при неизменном выпуске $y = a$), если затраты первого ресурса уменьшатся на одну (малую) единицу **(рис. 1.5, а)**, откуда следует, что чем круче касательная к изокванте $l_q$ в точке $(x_1, x_2)$, тем больше выражение $-\ dx_2 / dx_1$ и, следовательно, тем больше норма замены $R_{12}$ первого *ресурса* вторым.

***Пример 1.8.*** Для ПФКД вида $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ и линейной производственной функции вида $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ записать в явном виде выражения $R_{12}$ и $R_{21}$.

Р е ш е н и е . Так как $R_{ij} = dx_j / dx_i = \partial f(x)/\partial x_j / \partial f(x)/\partial x_i$, то, взяв соответствующие производные и упростив выражения, можно записать следующее:

а) для ПФКД $R_{12} = (\partial y/\partial x_1)/(\partial y)/\partial x_2) = (a_1/a_2) \cdot (x_2/x_1)$;

$R_{21} = (\partial y/\partial x_2)/(\partial y)/\partial x_1) = (a_2/a_1) \cdot (x_1/x_2)$;

б) для ЛПФ $R_{12} = (\partial y/\partial x_1)/(\partial y)/\partial x_2) = a_1/a_2$;

$R_{21} = (\partial y/\partial x_2)/(\partial y)/\partial x_1) = a_2/a_1$.

**Производственные функции в темповой форме записи, типа CES и эластичность замещения ресурсов.** Наряду со связями объемных показателей выпуска и затрат ресурсов анализ связи между темпами прироста этих показателей может вестись с введением производственных функций, отображаемых в темповой форме записи. Например, ПФ в темповой записи имеет вид:

$$y = f(k, l),$$

где $k$, $l$ —темпы прироста соответственно затрат капитала и труда.

ПФКД в объемных показателях соответствует следующая линейная зависимость темпов прироста, называемая *ПФКД в темповой записи*:

$$y_t = \alpha k_t + \lambda l_t + \nu,$$

где $\alpha$, $\lambda$ и $\nu$ —соответственно интенсивности использования ресурсов затрат капитала $K$, затрат труда $L$, темпа нейтрального НТП (та часть темпа прироста выпуска, которая не связана с приростом затрат капитала и труда, а отражает интенсификацию производства на макроуровне).

***Пример 1.9.*** Пусть, например, получена следующая формула производственной функции в темповой записи: $y_t = 0{,}3k_t + 0{,}6l_t + 1{,}5$. При этом средний темп прироста затрат труда $l_t$ составил 1%, средний темп прироста используемого капитала $k_t$ —6%, а средний темп прироста выпуска $y_t$ —3,9%. Оценить вклад экстенсивных и интенсивных факторов производства.

Р е ш е н и е . Вклад экстенсивных факторов (прироста затрат капитала и труда) составляет соответственно: $0{,}3 \cdot 6\% = 1{,}8\%$ и $0{,}6 \cdot 1\% = 0{,}6\%$. Вклад интенсивных факторов (научно-технического прогресса) составляет 1,5 процентных пункта, или $1{,}5/3{,}9 \cdot 100\% = 38{,}5\%$.

Наиболее известным обобщением ПФКД является функция с *постоянной эластичностью замещения* (Constant Elasticity Substitution — CES). Эластичность замещения ресурсов, или факторов, $G$ — это мера «кривизны» изоквант (линий уровня) ПФ (если говорить точнее, то «кривизну» изоквант измеряет величина $1/G$).

*Эластичность замещения труда капиталом* $G_{LK}$ показывает:

$$G_{LK} = d\,[\ln (K/L)]/d\,[\ln (Y'_L/Y'_K)],$$

на сколько процентов изменится капиталовооруженность $(K/L)$ при изменении предельной нормы замены труда капиталом $MRS_{KL}$ на 1%:

$$MRS_{KL} = -\,dK/dL = Y'_L/Y'_K.$$

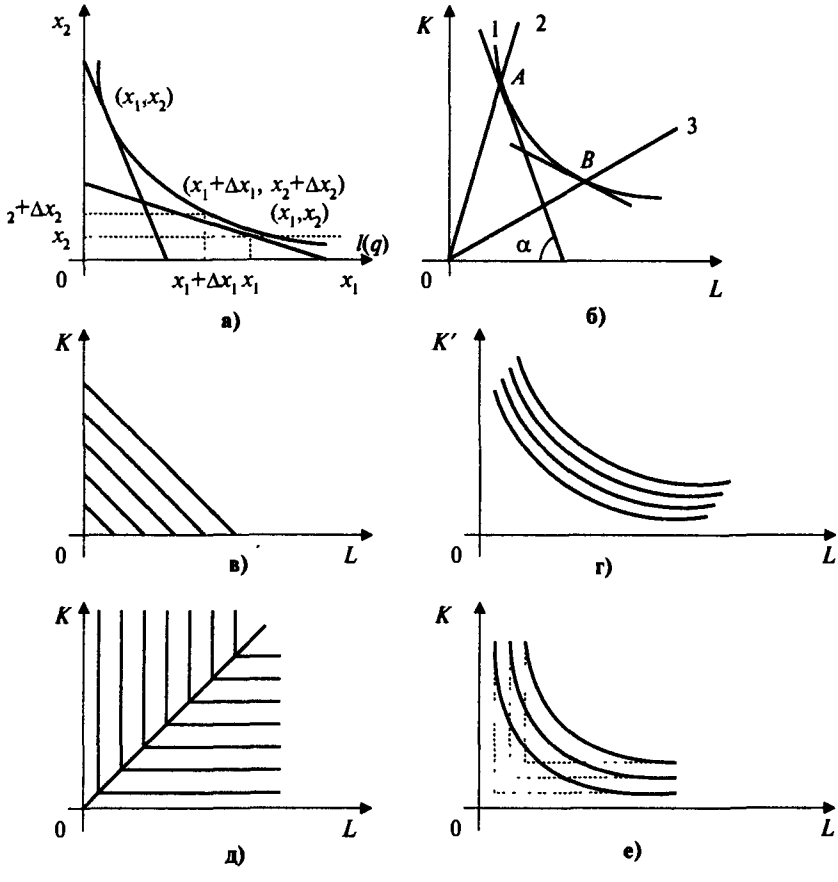



*Рис. 1.5.* ***Применение производственных функций:***

**а** — предельные и средние значения ПФ; **б** — эластичность замещения факторов по изокванте; **в—е** — ПФ различного вида: линейная (**в**), Кобба—Дугласа (**г**), Леонтьева (**д**), функции CES (**е**).

Если изобразить одну из изоквант (линий уровня с $Y = \text{const}$) ПФ на плоскости $KL$ (см. **рис. 1.5, б**), обозначив ее цифрой 1, то предельная норма замены в точке $A$ —это тангенс угла наклона этой изокванты, т. е. $\text{tg}\alpha$. При перемещении из точки $A$ в точку $B$ по изокванте наклон касательной меняется, меняется и соотношение $(K/L)$. Это соотношение постоянно вдоль каждой прямой, проходящей через начало координат (например, прямых *2* и *3*). Величина $1/G$ показывает относительное изменение тангенса угла наклона линии уровня в расчете на единицу изменения отношения $(K/L)$. Чем сильнее меняется наклон линии уровня при переходе, скажем, из точки $A$ в точку $B$ (с прямой *2* на прямую *3*), тем больше «кривизна» линии уровня (на **рис. 1.5, в—е** приведен ряд линий уровня ПФ вида: **в** —линейной $Y = aK + bL + c$ (линейной), **г** —ПФКД, **д** —ПФ с бесконечной эластичностью замещения $Y = \min(aK, bL)$ (функция Леонтьева), **е** — производственной функции типа CES).

Линейная ПФ имеет нулевую «кривизну» и соответственно бесконечную эластичность замещения *у*. ПФКД имеет эластичность замещения, равную единице. Функция Леонтьева имеет нулевую эластичность замещения: ресурсы в ней должны использоваться в заданной пропорции и не могут замещать друг друга. В реальной экономике степень взаимозаменяемости ресурсов может быть различной, соответственно различной (а не только нулевой, бесконечной или единичной) может быть и эластичность замещения.

Рассмотрим особенности оценки производственной функции с постоянной (но произвольной) эластичностью замещения — функции CES, описываемой следующей зависимостью:

$$Y = A\,(uK^{-p} + (1 - u)\,L^{-p})^{-n/p},$$

где $p \geq -1$; $n > 0$ —степень однородности; $A > 0$; $0 < u < 1$.

Эластичность замещения для такой функции равна:

$$E_R = 1/(1 + p).$$

Если $p = -1$, то получаем функцию с линейными изоквантами (в частности, линейную), при $p \to 0$ в пределе получаем производственную функцию Кобба—Дугласа с $G = 1$, а при $p \to \infty$ — производственную функцию Леонтьева. Например, развитие экономики СССР описывалось следующими оценками линейно-однородной функции CES, полученными под руководством А.Г. Гранберга за 1960—1985 гг.:

**а)** без учета технического прогресса

$$Y = 1{,}002(0{,}6412K^{-0{,}81} + 0{,}3588L^{-0{,}81})^{-1/0{,}81};$$

$$R^2 = 0{,}9984;\ DW = 1{,}58;$$

**б)** с учетом технического прогресса

$$Y = 0{,}966(0{,}4074K^{-3{,}03} + 0{,}5926L^{-3{,}03})^{-1/3{,}03} \cdot e^{0{,}0252t};$$

$$R^2 = 0{,}9982;\ DW = 1{,}76.$$

С точки зрения статистик $R^2$ и $DW$ обе зависимости получились значимыми при разных оценках показателя эластичности замещения $G$ ($G = 1/(1 + p)$). В целом оценка эластичности замещения зависела от конкретной специфики и составляла около 0,4, что говорит о невысокой степени взаимозаменяемости труда и капитала (в функции Кобба—Дугласа предполагается, что эластичность замещения $y$ априори составляет единицу). Ошибочность исходной гипотезы о степени взаимозаменяемости факторов может служить причиной недостаточной статистической значимости оценок производственной функции Кобба—Дугласа. Более подробно разновидности данного класса моделей рассмотрены в [1,2,78] и др.

Далее исследуем экономико-математические методы, относящиеся к оптимальным методам принятия решений на основе моделей математического программирования.

# Глава 2
# Математические модели оптимизации ресурсов и принятия решений

Для решения самых разнообразных задач оптимизации необходимо иметь соответствующую математическую модель. В большинстве ситуаций самые различные по содержанию задачи оказываются частными случаями одной задачи оптимизации.

## 2.1. Общий случай математической постановки задачи оптимизации

Если не рассматривать детально составление математической модели на конкретных примерах, как это делается в большинстве посвященных этой проблеме работ, например [16, 54, 82, 125—130], а перейти к общему случаю, то задача оптимизации в общем случае, включающая три компоненты (целевую функцию $F$, ограничения $g_i$ и граничные условия), имеет следующую математическую постановку:

$$\left.\begin{array}{l} F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(\min); \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\{\le, =, \ge\}\ d_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\{\le, =, \ge\}\ d_i; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ \{\le, =, \ge\}\ d_m; \\ a_j \le x_j \le b_j; i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}, \end{array}\right\} \qquad (2.1)$$

где $a_j$ и $b_j$ —нижнее и верхнее предельно допустимые значения $x_j$.

Задачу (2.1) можно представить в еще более общей компактной форме записи:

$$\left.\begin{array}{l} F = f(x_j) \to \max(\min); \\ g_1(x_j)\{\le, =, \ge\} d_i; \\ a_j \le x_j \le b_j;\ i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n} \end{array}\right\} \qquad (2.2)$$

*Граничные условия* показывают предельно допустимые значения искомых переменных, и в общем случае они могут быть двусторонними типа $a_j \le x_j \le b_j$. Вместе с тем на практике достаточно часто возникают следующие частные случаи:

1) в технических, экономических и других видах расчетов искомые величины обычно являются положительными или равными нулю. В этом случае в задаче (2.2) принимается $a_j = 0$, $b_j = \infty$ и накладывается только требование неотрицательности $x_j \ge 0$;

2) в ряде случаев значение величины $x_j$ может задаваться. Если принять, что должно выполняться требование $x_j = x_j^3$, где $x_j^3$ — заданное значение, то граничные условия в задаче (2.2) можно записать следующим образом:

$$x_{j_1}^3 \le x_j \le x_{j_2}^3 .$$

*Ограничения* обычно выражают определенные зависимости между переменными величинами, которые по своей сути могут быть теоретическими (формульными) и статистическими. *Теоретические* зависимости обычно справедливы при любых условиях и для их получения не требуется никаких дополнительных измерений. Однако на практике достаточно часто между параметрами модели нет известной функциональной зависимости. Так, например, если мы желаем оптимизировать использование общественного транспорта города в течение суток, то нам необходимо знать, как пассажиропоток распределен во времени. Естественно, что такой готовой зависимости нет, и для ее получения потребуется осуществить сбор и обработку статистических данных, чтобы получить определенную аналитическую зависимость, которая и будет тем ограничением, которое следует включить в задачу оптимизации.

Значения переменных, удовлетворяющие заданным граничным условиям и ограничениям, называют *допустимым* решением задачи. Иногда случается, что в задачу включаются противоречивые по смыслу требования, выполнить которые невозможно. Такая ситуация приводит к *несовместным* задачам, которые в планировании называют *несбалансированными планами* (когда нет и не может быть допустимых решений). Обычно же, если задача составлена правильно, то в общем случае она имеет набор допустимых решений. Чтобы из данного набора допустимых решений лицо, принимающее решение (ЛПР), могло выбрать одно наилучшее, необходимо договориться, как и по какому признаку его найти. В дальнейшем не будет речи о правильных решениях, потому что мы просто н е з н а е м , что это такое. Мы будем

говорить только об оптимальных решениях (от лат. optimus — наилучший). Заметим, что наилучшего решения во всех смыслах быть не может, оно может быть наилучшим (оптимальным) только в одном, строго установленном смысле. ЛПР должно абсолютно точно представлять, в чем заключается оптимальность принимаемого решения, т. е. по какому *критерию* (от гр. kriterion — мерило, оценка, средство для суждения) принимаемое решение должно быть оптимально.

Критерий часто называют целевой функцией, функцией цели, а в математических работах — функционалом. Критерий в общем случае может оценивать качественные свойства объекта, причем как желательные для субъекта (обычно с максимальным уровнем или значением, например, прибыль, производительность, надежность), так и нежелательные для него (или минимальные — непроизводительные затраты, расход материала, простои оборудования и др.). Если при принятии решения требуется максимизировать какое-то свойство (к примеру, прибыль, производительность или надежность), то в результате решения задачи критерий будет иметь наибольшее значение из всех допустимых решений. Если же требуется минимизировать критерий (стоимость, расход материала, время простоев оборудования), то в результате решения критерий будет иметь наименьшее значение из всех допустимых.

Множество различных по смыслу задач оптимизации, окружающих нас, например, из табл. 2.1, нельзя эффективно решить без привлечения ЭВМ, без знаний экономико-математических моделей, практических навыков составления математических моделей решения задач и применения их в среде существующего программного обеспечения.

*Таблица 2.1.* ***Классификация задач оптимизации процессов и принятия решений***

| *Область применения* | *Управление* | *Проектирование* | *Разработка технологических процессов* |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Производство<br>Образование<br>Культура<br>Бизнес<br>Экономика<br>Финансы | Различные задачи распределения ресурсов (материальных, финансовых, информационных, трудовых) | 1. Оптимизация параметров объекта проектирования<br>2. Оптимизация структуры объекта проектирования | 1. Оптимизация маршрута изготовления изделия<br>2. Оптимизация параметров технологических процессов |

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| Искусство<br>Бытовая сфера<br>Принятие решений | | 3. Оптимизация функционирования | 3. Выбор режима работы, обеспечения качества и эффективности |

Основные задачи управления деятельностью человека можно отнести к классу задач распределения и оптимизации ресурсов. Любой объект в процессе управления, проектирования или эксплуатации характеризуется своим устройством и действием, причем устройство определяется его структурой и параметрами, а действие — процессом функционирования. Например, технологический процесс можно определить как последовательность работ, которые обусловливают превращение сырья в готовую продукцию; такую последовательность работ называют *маршрутом*; каждую операцию, входящую в маршрут, можно охарактеризовать определенными режимами обработки, управления, контроля, функционирования. Заметим, что и процессы функционирования объекта проектирования, и технологические процессы характеризуются изменением некоторых параметров во времени, которые подразделяются на непрерывные и дискретные (непрерывные процессы протекают в металлургии, энергетике, химии и др., а дискретные — в машиностроении, экономике, образовании и т. п.).

В любых математических моделях можно выделить следующие элементы (**рис. 2.1**): исходные данные, зависимости, описывающие целевую функцию, и ограничения.

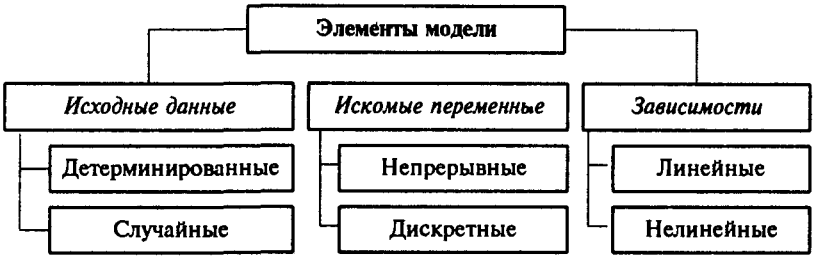



*Рис. 2.1.* ***Разновидности элементов математической модели***

Зависимости между переменными, как целевые функции, так и ограничения, могут быть линейными и нелинейными. Напом-

ним, что *линейными* называют такие зависимости, в которые переменные входят в первой степени и нет их произведения; если переменные входят не в первой степени или есть произведение переменных, то зависимости являются *нелинейными*. Сочетание разнообразных элементов модели приводит к различным классам задач оптимизации, требующим разных методов решения и разных программных средств (табл. 2.2).

Для экономических систем наиболее характерны задачи оптимизации и распределения ресурсов, решаемые методом линейного программирования, для которого разработаны надежные алгоритмы, реализованные в поставляемом с ЭВМ программном обеспечении; более сложные задачи (целочисленные, нелинейные) оптимизации можно свести к задачам линейного программирования. Большинство задач оптимизации, присущих техническим системам, как правило, относится к задачам нелинейного программирования. В целом методы математического программирования являются частью науки, традиционно называемой *исследованием операций*.

*Таблица 2.2.* ***Распространенные задачи математического программирования***

| *Исходные данные* | *Переменные* | *Зависимости* | *Задачи оптимизации* |
|---|---|---|---|
| Детерминированные или постоянные | Непрерывные | Линейные | Линейного программирования (ЛП) |
| | Целочисленные | | Целочисленного программирования (ЦЧП) |
| | Непрерывные, целочисленные | Нелинейные | Нелинейного программирования (НЛП) |
| Случайные | Непрерывные | Линейные | Стохастического программирования (СТП) |

Рассмотрим общие постановки задач и способы решения наиболее распространенных задач оптимизации.

## 2.2. Методы оптимизации и распределения ресурсов на основе задачи линейного программирования

Подобные методы широко применимы в производстве, транспорте, организации процессов, в обучении, руководстве персоналом и др. К числу наиболее известных задач, решаемых

этим методом, относятся задача о назначениях, транспортная задача и др. [78, 82, 128—130].

Задача о назначениях и распределении работ является частным случаем транспортной задачи, в которой приняты следующие допущения: число поставщиков $m$ равно числу потребителей $n$; запасы каждого поставщика $a_i = 1$; заявки каждого потребителя $b_j = 1$; каждый поставщик может поставлять грузы только одному потребителю; каждый потребитель может получать грузы только от одного поставщика.

Если не учитывать направление оптимизации целевой функции (max или min), что не влияет на аналитические зависимости, то модель транспортной задачи при принятых выше допущениях получает вид модели задачи о назначениях. Если сумма всех запасов $A$ у поставщика равняется сумме всех заявок $B$ потребителей, то такую транспортную задачу называют *сбалансированной*; если $A \neq B$, то задача является *несбалансированной*, и ее математическая модель может иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} & F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le a_i;\ j = \overline{1,m}; \\ & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \ge b_j;\ i = \overline{1,n}; \\ & x_{ij} \ge 0. \end{aligned}\right\}$$

Знак неравенства в ограничениях для запасов $a_i$ означает, что объем груза, вывозимый от любого $i$-го поставщика по заявкам всех потребителей, не может превышать имеющегося у него запаса, при этом часть запаса груза может остаться невывезенной. Аналогично знак неравенства в ограничениях для заявок $b_j$ означает, что груз, получаемый $j$-м поставщиком, должен быть не меньше заявки, но превышение заявки при этом допускается.

Модель сбалансированной задачи является частным случаем модели несбалансированной задачи. Несбалансированная модель транспортной задачи является достаточно универсальной моделью, описывающей множество задач распределения однородных ресурсов — работ, назначений, материальных и трудовых ресурсов, транспортировки грузов, распределения инвестиций, фи-

нансовых средств и др., которые можно успешно решить, если знать ответы на вопросы:

- В каком смысле распределение средств должно быть наилучшим?
- Какой вклад дает каждый объект (субъект) в целевую функцию?

Любая правильно составленная задача планирования имеет бесчисленное множество допустимых решений. Какое же из них выбрать? Мы уже знаем, чтобы ответить на этот вопрос, необходимо прежде всего сформулировать задачу оптимизации, при решении которой возможна лишь одна из двух взаимоисключаемых постановок: либо при заданных ресурсах максимизировать получаемый результат, либо при заданном результате минимизировать используемые ресурсы.

Если через $Q$ обозначить ресурсы, через $R$ —результат их применения, то при заданных зависимостях результата и потребных ресурсов от количества выпускаемой продукции $R = f(x_j)$; $Q = f(x_j)$ две постановки задачи распределения ресурсов можно записать следующим образом:
для первой постановки

$$F_1 = R \to \max; \quad Q \le Q_з; \tag{2.3а}$$

для второй постановки

$$F_2 = Q \to \min; \quad R \ge R_з. \tag{2.3б}$$

Значит, поставить ее можно в одном из двух следующих вариантов: либо максимизировать выпуск продукции с заданного оборудования, либо минимизировать количество оборудования, используемого при выпуске заданного объема продукции.

В общем случае математическая модель задачи распределения ресурсов с числом переменных $n$ и ограничений $m$ имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \ (\min); \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i; \\ &d_j \le x_j \le D_j; \ i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,n}, \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

где $c_j$ — коэффициенты в целевой функции; $a_{ij}$ — норма расхода $i$-го ресурса для выпуска единицы $j$-й продукции; $b_i$ —имеющийся ресурс; $d_j$ и $D_j$ — минимальное и максимальное допустимые значения $x_j$.

Так как в эту модель все переменные входят в первой степени, т. е. все зависимости являются линейными, то данную модель называют *задачей линейного программирования.* С помощью этих задач можно решать достаточно большой класс задач распределения ресурсов не только в планировании и управлении производством и экономическими объектами, но и в проектировании изделий и технологических процессов.

Если сравнить систему (2.4) с общей постановкой задачи оптимизации (2.2), то можно утверждать, что задача линейного программирования представляет собой частный случай задачи оптимизации в общем виде.

В современных условиях рыночных отношений при дефиците материальных и финансовых ресурсов, несбалансированности производственных планов по номенклатуре, нормам расходов материалов и сырья возникают договорные, производственные, финансовые и прочие нарушения, корректировки планов, приписки и др.

Сбалансированность планов по номенклатуре, заданным показателям и ресурсам можно оперативно проверить с помощью моделирования на ЭВМ не спустя какое-то время, когда обнаружатся ошибки и просчеты и когда изменить что-либо уже трудно, а сразу же при решении задачи. При этом необходимо опираться на достоверную нормативную базу, в частности, на нормы расхода ресурсов на единицу выпускаемой продукции. Именно математические модели позволяют проанализировать причины несбалансированности планов и выявлять недостоверность исходных данных.

*Чем же может помочь ЭВМ в анализе несбалансированных задач?*

**1.** Решая задачу распределения ресурсов на ЭВМ, до получения окончательного результата нам неизвестно, сбалансирована она или нет. Однако, если существует подозрение, что задача может оказаться несбалансированной, то имеет смысл сразу же так составить математическую модель, чтобы она учитывала возможную недостачу ресурсов.

**2.** Если нам желательно минимизировать дополнительные ресурсы $y_i$ при получении прибыли от производства и выпуска продукции, то целевую функцию следует записать с учетом этого условия

$$F_1 = y_1 + y_2 + \dots y_i + \dots + y_m \to \min,$$

а условие получения прибыли включить в состав ограничений.

Результаты решения подобных задач на ЭВМ позволяют промоделировать возможные ситуации и определить, сколько и какие ресурсы требуются и каким станет план, если полностью изыскать необходимые дополнительные ресурсы. Конечно, ЭВМ не может заменить недостающие ресурсы, но она позволяет при составлении полной и корректно сформулированной математической модели показать, что необходимо осуществить, чтобы выполнить несбалансированный план. Польза от такого анализа несомненна в любых ситуациях.

В общем преодолеть несбалансированность производственного плана можно или увеличением ресурсов при возможности их изыскания, а при невозможности добавления дополнительных ресурсов путем уменьшения нижнего предела выпуска продукции, или сокращения норм расходов каждого ресурса на выпуск единицы продукции. Если удастся преодолеть несбалансированность планов за счет увеличения ресурсов или снижения выпуска продукции и расхода ресурсов, то план производства будет обоснованным, и такие планы нужно выполнять.

Определение координат вершин *области допустимых решений* (ОДР) в реальных задачах со многими переменными и ограничениями связано с очень большими объемами вычислений. Поэтому для аналитического решения задач линейного программирования разработан специальный алгоритм направленного перебора вершин, называемый *симплекс-методом*, с переходом от одной вершины к другой в направлении, при котором значение целевой функции от вершины к вершине улучшается. Определение значения целевой функции и переменных в одной вершине считается и т е р а ц и е й . Число итераций зависит от числа искомых переменных и в реальных задачах может измеряться сотнями. Вручную с помощью симплекс-метода можно решать задачи, содержащие не более десяти переменных. В реальных ситуациях без ЭВМ и прикладных программ вычислений поиск оптимального решения практически невозможен.

Так как оптимальное решение задачи линейного программирования соответствует вершине ОДР, то можно сформулировать следующие выводы:

1) если оптимальным решением являются координаты вершин ОДР, то сколько вершин имеет ОДР, столько оптимальных решений может иметь задача;

2) чем больше существует ограничений в модели задачи, тем больше будет число вершин и, следовательно, число оптимальных решений;

3) введение дополнительных ограничений никогда не улучшает оптимального решения (этот вывод особенно важен для практики планирования: если мы хотим улучшить принятую целевую функцию, т. е. результат работы, мы должны стремиться к тому, чтобы иметь как можно меньше ограничений).

## 2.3. Методы многопараметрической оптимизации в процессах планирования, управления и принятия решений

Любой вид производства или сферу деятельности можно охарактеризовать двумя основными параметрами: *объемом выпуска продукции Об*, определяемым различными показателями (валовой, реализованной, чистой нормативной продукцией и др. или просто в рублях) и *ее качеством К*. При анализе производственно-хозяйственных ситуаций часто принимают, что объем выпуска продукции измеряется стоимостными показателями (руб.), а качество выпускаемой продукции —трудоемкостью (чел.-ч). На практике обычно стремятся к увеличению как выпуска продукции, так и к повышению ее качества, т. е. переходят к решению *многопараметрических задач*.

Для решения подобных задач обычно применяется *метод последовательных уступок*, суть которого заключается в том, что один из оптимизируемых параметров принимается в качестве целевой функции, а для других задаются некоторые предельные значения граничных условий. Задачи решаются обычно с привлечением ЭВМ в нескольких вариантах, отличающихся друг от друга предельно задаваемыми значениями. Результаты решения подобных задач при разных вариантах исходных условий, значениях объемов и уровня качества продукции позволяют сформулировать следующие выводы:

**1.** В задачах многопараметрической оптимизации, как и в задачах распределения ресурсов, возможны две постановки: **а)** максимизация объемов при обеспечении качества не ниже заданного значения; **б)** максимизация качества при обеспечении объемов не меньше заданного значения. В общем виде эти постановки задач можно записать следующим образом:

Первая постановка $Об = f(K_з)$:

$$\left.\begin{aligned} &Об = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \to \max; \\ &K = \sum_{j=1}^{n} s_j\, x_j \geq K_з; \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq b_i; \\ &d_j \leq x_j \leq D_j;\ j = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}. \end{aligned}\right\}$$

Вторая постановка $K = f(Об_з)$:

$$\left.\begin{aligned} &K = \sum_{j=1}^{n} s_j\, x_j \to \max; \\ &Об = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \geq Об_з; \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq b_i; \\ &d_j \leq x_j \leq D_j;\ j = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}. \end{aligned}\right\}$$

Применяя метод последовательных уступок, можно удовлетворять желания ЛПР, устанавливая строгие зависимости объема выпуска продукции от ее качества, и наоборот, и на их основе выбирать взаимосвязанные оптимальные значения параметров *Об* и *K*. Обобщая вышеприведенные модели на любое число оптимизируемых параметров, можно решать задачу максимизации по $L$ параметрам, при этом один из них следует принимать в качестве целевой функции, а остальные $(L-1)$ параметров переводить в разряд ограничений.

**2.** В ряде ситуаций при использовании методов многопараметрической оптимизации исходят из относительной важности, или значимости, каждого оптимизируемого параметра, при этом наиболее часто пользуются назначением *коэффициентов веса*, определяемых обычно с помощью методов экспертных оценок с непосредственным назначением коэффициентов веса, оценкой важности параметров в баллах, парных соотношений, поиском компромиссного решения при многопараметрической оптимизации (между оптимизируемыми параметрами и формированием специальной целевой функции) с отысканием компромиссной целевой функции и применением многоцелевого программирования, подробно рассмотренных, например, в [16,78,82,128—130].

В реальных ситуациях принятие оптимального решения часто связывается с выбором наилучшего варианта из множества допустимых или имеющихся в наличии. Трудность такого выбора обусловливается не числом вариантов, а тем, что ЛПР часто не может сформулировать, в каком смысле вариант должен быть лучшим (по быстродействию, стоимости, надежности, качеству и т. п.). Обычно цель принятия оптимального решения состоит в определении совокупности значений параметров, обеспечи-

вающих принятой целевой функции оптимальное в определенном смысле значение из всех возможных: при максимизации целевая функция приобретает максимально возможное значение (max $F$). Если же стоит задача выбора вариантов, то после принятия некоторого критерия $K_i$ выбирается тот вариант, для которого значение $K$ является максимальным лишь из всех сравниваемых вариантов, т. е. max $K$ = max $\{K_i\}$, где $i$ — номер варианта.

При этом нет оснований утверждать, что лучший из выбранных вариантов является действительно оптимальным, т. е. лучшим из всех возможных. Более того, обычно получается, что max $K <$ max $F$.

***Пример 2.1.*** Пусть требуется из четырех вариантов системы, характеризуемой параметрами: *производительностью* $Q$ (шт./мин) и *стоимостью* $C$ (руб.), приведенными в табл. 2.3, выбрать наилучший вариант по интегральному критерию, характеризующему обобщенные свойства каждого варианта системы.

*Таблица 2.3.* ***Исходные данные для выбора лучшего варианта системы***

| *Параметры системы* | *Варианты системы* | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *1* | *2* | *3* | *4* |
| $Q$, шт./мин | 20 | 30 | 60 | 50 |
| $C$, руб. | 100 | 400 | 500 | 200 |

*Таблица 2.4.* ***Решение примера при трех случаях***

| *Ситуации* | *Весовые коэффициенты* | | *Варианты системы* | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_1$ | $a_2$ | *1* | *2* | *3* | *4* |
| 1 | 1 | 0 | 0,33 | 0,5 | 1 | 0,83 |
| 2 | 0,5 | 0,5 | 0,666 | −0,15 | 0 | 0,22 |
| 3 | 0 | 1 | −0,2 | −0,8 | −1,0 | −0,4 |

Р е ш е н и е . Аналогично свойству компромиссной целевой функции выбранный интегральный критерий должен обеспечивать операции с параметрами различной размерности, включая нормирование по некоторому заданному значению и учет относительной важности каждого параметра с помощью коэффициентов веса. Улучшение желательных параметров должно увеличивать значение критерия, а рост нежелательных параметров — снижать его значение. В качестве критерия, удовлетворяющего приведенным требованиям, принимается зависимость, аналогичная компромиссной целевой функции, которая для данной рассматриваемой задачи может быть записана следующим образом:

$$K_i = a_1 \cdot Q_i/Q_н - a_2 \cdot C_i/C_н, \qquad (2.5)$$

где $a_1$, $a_2$ — коэффициенты веса; $Q_н$, $C_н$ — нормирующие значения производительности $Q$ и стоимости $C$ системы (*минус* перед вторым членом показывает, что рост стоимости снижает значение критерия).

Таким образом, зависимостью (2.5) обеспечивается увеличение критерия при повышении производительности и уменьшении стоимости сравниваемых вариантов. Следовательно, лучшим является вариант, для которого значение $K$ будет наибольшим, т. е.

$$\max K = \max \{K_1, K_2, K_3, K_4\}.$$

Для определения критерия в качестве нормирующих значений принимаем: $Q_н = Q_{max} = 60$; $C_н = C_{max} = 500$. При этом зависимость приобретает вид: $K_i = a_1 \cdot Q_i/60 - a_2 \cdot C_i/500$ (относительную важность параметров оценим коэффициентами веса).

Определим значения критерия $K_i$ для трех основных ситуаций, при которых: **а)** важна лишь производительность (при этом $a_1 = 1$, $a_2 = 0$); **б)** производительность и стоимость одинаково важны (при этом $a_1 = 0{,}5$, $a_2 = 0{,}5$); **в)** важна лишь стоимость (при этом $a_1 = 0$, $a_2 = 1$).

Значения критерия $K_i$, применимые к выделенным ситуациям и четырем сравниваемым вариантам системы, приведены в табл.2.4, откуда следует, что *наибольшее значение критерия зависит не только от параметров вариантов, но и от принятых коэффициентов веса.* Для ситуации *1* лучшим оказывается вариант *3*, для ситуации *2* — вариант *1*, для ситуации *3* — вариант *1* (вариант *2* в каждой из трех рассмотренных ситуаций будет худшим).

Таким образом, вариант, выбранный как лучший, является им лишь в смысле принятого критерия при заданных нормирующих значениях параметров и назначенных коэффициентах веса. При изменении критерия, значений нормирующих элементов или коэффициентов веса лучшими могут оказаться совершенно другие варианты.

## 2.4. Задачи линейного программирования в оперативном управлении производством и принятии решений

Так как любое предприятие функционирует в организационно-деловой среде, оперативно решая сложные повседневные проблемы в соответствии с поставленными целями и возникающими ситуациями, связанными с бесперебойным обеспечением ресурсами производственного процесса, то задачи, присущие динамике оперативного управления производством, решаются обычно на основе математических моделей, аналогичных рас-

сматриваемым ранее для целей оптимального планирования. Проиллюстрируем это на следующем примере [78,82].

***Пример 2.2.*** Пусть предприятием выпускается продукция четырех видов П1—П4 с использованием для этого ресурсов, виды и нормы расхода по которым, а также уровень получаемой от их реализации прибыли приведены в табл. 2.5. Необходимо получить вариант оптимального плана производства по критерию максимума прибыли.

Решение. Нам уже известно, что математическую модель данной задачи можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &F = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \to \max;\\ &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 16;\\ &6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110;\\ &4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \le 100;\\ &x_j \ge 0;\ \ j = \overline{1,4}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

*Таблица 2.5.* ***Исходные данные задачи плана производства***

| *Элемент модели* | *Вид продукции* | | | | *Располагаемый ресурс* |
|---|---|---|---|---|---|
| | П1 | П2 | П3 | П4 | |
| Ресурсы: | | | | | |
| трудовые | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 |
| сырье | 6 | 5 | 4 | 3 | 110 |
| оборудование | 4 | 6 | 10 | 13 | 100 |
| Прибыль с единицы продукции плана | 60 | 70 | 120 | 130 | — |
| План | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | — |

При решении данной системы неравенств на ЭВМ получен следующий оптимальный план производства видов продукции: $x_1^* = 10$; $x_2^* = 0$; $x_3^* = 4$, при этом величина прибыли составляет $F = 1320$.

В процессе производства постоянно возникает множество вопросов по результативности оперативного управления. Например, нас интересует, чего можно достичь, если: **а)** 6 человек из 16 работающих отвлечь на другие работы; **б)** поставку ресурсов снизить на 15%; **в)** увеличить производительность оборудования на 15%, и как это отразится на структурном сдвиге в выпуске продукции и др.

Известен ряд идей, способов и приемов поиска альтернатив и нахождения оптимального решения из множества допустимых на основе аналитического решения задачи линейного программирования.

**Типовые приемы нахождения допустимых и оптимального вариантов.** Пусть в результате составления математической модели задачи нами получена система неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m; \\ x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,n}. \end{array}\right\} \qquad (2.7)$$

Переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются *основными*.

Если от системы неравенств (**2.7**) перейти к системе уравнений, то в каждое неравенство необходимо добавить по одной дополнительной переменной $y_i$, $i = \overline{1, m}$. Тогда получим следующее:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + y_m = b_m. \end{array}\right\} \qquad (2.8)$$

В системе (**2.6**) общее число переменных $N = n + m$, где $n$ — число основных переменных, $m$ —число дополнительных переменных. Все множество переменных подразделяется на основные и дополнительные или на базисные и свободные (*свободными* переменными называют переменные, равные нулю). Известно, что $n$ переменных в допустимом решении должны равняться нулю (хотя по количеству они совпадают с основными, но из этого не следует, что все основные переменные равняются нулю). Если из общего числа ($n + m$) переменных свободными являются $n$ переменных, то $m$ переменных являются базисными (или неравными нулю). Тогда можно сказать, что *целью решения задачи линейного программирования является нахождение базисных и свободных переменных.*

Поясним это на решении примера **2.2**, исходные данные которого приведены в табл. 2.6. В математическую модель этой задачи (**2.6**), в ограничения системы введем дополнительные переменные $y_1$, $y_2$, $y_3$ и запишем ограничения в виде уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} F = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \to \max; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 = 16; \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + y_2 = 110; \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 + y_3 = 100; \\ x_j \ge 0; \quad j = \overline{1, 4}; \quad y_i \ge 0; \quad i = \overline{1, 3}. \end{array}\right\} \qquad (2.9)$$

Перепишем систему уравнений (**2.9**) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &F = 0 - (-60x_1 - 70x_2 - 120x_3 - 130x_4) \to \max;\\ &y_1 = 16 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4);\\ &y_2 = 110 - (6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4);\\ &y_3 = 100 - (4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4);\\ &x_j \geq 0. \end{aligned}\right\} \quad (2.10)$$

Систему (**2.10**) можно представить в виде *симплекс-таблицы* (табл. 2.6), составляемой следующим образом: целевую функцию и базисные переменные, находящиеся в уравнениях слева, запишем в первый столбец таблицы; свободные переменные, заключенные в скобки, вынесем в верхнюю строку таблицы, а в остальные столбцы запишем свободные члены и коэффициенты перед свободными переменными (симплекс-таблица служит основой для решения задач линейного программирования). В этой таблице переменные, являющиеся свободными (в данном случае $x_1$-$x_4$), по условию равны нулю. Так как свободные переменные равны нулю, то из системы (**2.10**) следует, что базисные переменные $y_1$-$y_3$, а также целевая функция $F$ равны свободным членам, т. е. $y_1 = 16$, $y_2 = 110$, $y_3 = 100$, $F = 0$.

*Таблица 2.6.* ***Симплекс-таблица для примера 2.2***

| *Величина* | *Свободный член* | *Вид продукции* | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
| $F$ | 0 | −60 | −70 | −120 | −130 |
| Базисные переменные: | | | | | |
| $y_1$ | 16 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $y_2$ | 110 | 6 | 5 | 4 | 3 |
| $y_3$ | 100 | 4 | 6 | 10 | 13 |

Для задачи линейного программирования, записанной в виде симплекс-таблицы, можно сформулировать признаки допустимого и оптимального решений. Решение является *допустимым*, если в симплекс-таблице в столбце свободных членов все значения, относящиеся к базисным переменным, являются неотрицательными; *оптимальное* решение связано с минимумом или с максимумом целевой функции $F$, определяется по двум признакам: **а)** целевая функция имеет минимальное значение, если решение является *допустимым* (т. е. свободные члены являются неотрицательными) и все элементы в строке целевой функции

(свободный член при этом не учитывается) являются отрицательными; б) целевая функция при этом равняется свободному члену. Таким образом, по виду табл. 2.6 можно сделать вывод, что нами получено оптимальное решение для случая минимизации целевой функции.

Если вернуться к системе (**2.6**), то можно заметить, что в ней максимизируется целевая функция по прибыли. Решение же, полученное в табл. 2.6, соответствует минимизации прибыли (действительно, если $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, значит, никакая продукция не выпускается и прибыль $F = 0$). Дополнительные переменные $y_1$–$y_3$, показывающие объем неиспользованного ресурса, соответственно составляют 16, 110, 100 (действительно, если ничего не выпускается, то и не расходуются ресурсы, т. е. неиспользованные ресурсы оказываются равными их первоначальным значениям). Следовательно, данные в табл. 2.6 соответствуют такой вершине области допустимых решений, где целевая функция приобретает минимальное значение.

Признак *максимизации целевой функции* формулируется следующим образом: целевая функция имеет максимальное значение, если решение является допустимым и все элементы в строке целевой функции (свободный член не рассматривается) являются положительными. Так как табл. 2.6 не удовлетворяет данному признаку, то необходимо перейти к другой вершине. Переход от одной вершины к другой производится по довольно сложному алгоритму симплекс-метода, заключающемуся в обмене переменными. Каждый переход от одной вершины к другой, называемый итерацией, состоит в том, что базисная переменная приравнивается к нулю (т. е. переходит в свободную), а одна свободная переменная переводится в базисную. На каждой итерации проверяется условие выполнимости признаков допустимого и оптимального решений (подобная процедура длится до тех пор, пока не будут удовлетворены оба признака).

Применительно к нашей задаче симплекс-таблица, полученная после второй итерации, приобретет вид табл. 2.7, из которой видно, что в столбце свободных членов все элементы положительные, следовательно, решение является допустимым. В строке целевой функции все элементы также положительные, следовательно, это решение является оптимальным при максимизации целевой функции. При этом *оптимальным планом* являются $x_1^* = 10$, $x_3 = 6$ (они являются базисными); $x_2^* = x_4^* = 0$ (они являются свободными). При этом целевая функция $F = 1320$ (этот результат решения задачи получен при решении на ЭВМ). Од-

нако с помощью симплекс-таблицы можно не только найти ответ, но и узнать еще множество полезных сведений и приемов, которые можно использовать для целей анализа и возможных вариантов ведения производства.

*Таблица 2.7.* ***Симплекс-таблица после второй итерации***

| *Величина* | *Свободный член* | *Вид продукции* | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $y_1$ | $x_2$ | $y_3$ | $x_4$ |
| $F$ | 1320 | 20 | 10 | 10 | 20 |
| $x_1$ | 10 | 5/3 | 2/3 | −1/6 | −1/2 |
| $y_2$ | 26 | −22/3 | −1/3 | 1/3 | 0 |
| $x_3$ | 6 | −2/3 | 1/3 | 1/6 | 3/2 |

Так, например, из табл. 2.7 следует, что свободные переменные $y_1 = y_3 = 0$, а базисная переменная $y_2 = 26$, что означает равенство нулю в оптимальном плане резервов трудовых ресурсов и оборудования (данные ресурсы используются в производстве полностью). Вместе с тем резерв ресурсов сырья составляет $y_2 = 26$, что свидетельствует об его излишках (эти полезные сведения можно легко почерпнуть из симплекс-таблицы, и этим они не ограничиваются). Такова вкратце идея симплекс-метода.

**Понятие о двойственности решений**. Как известно, каждой исходной задаче линейного программирования соответствует двойственная задача. Правила записи двойственной задачи рассмотрим на следующем примере.

***Пример 2.3.*** Пусть задана следующая исходная модель задачи:

$$\left.\begin{aligned} &F = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 \to \max; \\ &x_1 + x_2 + 2x_3 \le 16; \ (\text{а}) \\ &7x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 25. \ (\text{б}) \end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

Для того чтобы записать двойственную задачу, необходимо знать следующие приемы.

**1.** Каждому $i$-му ограничению исходной задачи соответствует переменная двойственной задачи, называемая ***двойственной переменной***, обозначаемая $z_i$. В системе **(2.11)** ограничению **(а)** соответствует переменная $z_1$, а ограничению **(б)** — переменная $z_2$.

**2.** Каждой переменной исходной задачи соответствует ограничение двойственной задачи; так как в системе **(2.11)** имеется три переменных $x_1$—$x_3$, то двойственная задача также должна иметь три ограничения.

3. Матрица коэффициентов при двойственных переменных в ограничениях двойственной задачи является *транспонированной матрицей* коэффициентов при переменных, состоящих в ограничениях. Так как в нашей исходной задаче (2.11) имеется два ограничения, то матрица их коэффициентов $A$ и ее транспонированный аналог $A^T$ (столбцы превращаются в ряды) имеют вид:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix}; \quad A^T = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

4. Если в исходной задаче ограничения имеют знаки неравенств типа *меньше* (≤), то в двойственной они изменяются на противоположные типа *больше* (≥).

5. Правые части ограничений в двойственной задаче равняются коэффициентам при переменных в исходной задаче, а коэффициенты при двойственных переменных в целевой функции двойственной задачи равняются правым частям ограничений исходной задачи.

6. Максимизация целевой функции исходной задачи заменяется минимизацией целевой функции двойственной задачи.

Таким образом, для исходной модели задачи (2.11) двойственную задачу можно записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &F_д = 16z_1 + 25z_2 \to \min; \\ &z_1 + 7z_2 \ge 4; \\ &z_1 + 5z_2 \ge 5; \\ &2z_1 + 3z_2 \ge 9; \\ &z_i \ge 0;\ i = 1, 2. \end{aligned}\right\} \qquad (2.12)$$

В общем виде исходную задачу и соответствующую ей двойственную задачу можно записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i; \\ &x_j \ge 0;\ i = \overline{1,m};\ i = \overline{1,n}, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} &F_д = \sum_{i=1}^{n} b_i z_i \to \min; \\ &\sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i \ge c_j; \\ &z_i \ge 0;\ i = \overline{1,m}. \end{aligned}\right\}$$

Важным свойством двойственной задачи является то, что $\max F = \min F_д$, при этом

$$\max F = \sum_{i=1}^{m} b_i z_i . \qquad (2.13)$$

Двойственная переменная $z_i$ выступает коэффициентом при $b_i$ и, следовательно, определяет зависимость целевой функции от изменения ресурсов $b_i$ на единицу.

Таким образом, *двойственная переменная оценивает влияние изменения каждого вида ресурса на целевую функцию* (в связи с этим двойственные переменные часто называют *двойственными оценками*, при этом существенно, что для нахождения двойственных оценок не требуется решать двойственную задачу).

Значения двойственных оценок уже получены в симплекс-таблице оптимального решения исходной задачи (см. табл. 2.7). Узнать значение двойственных оценок можно следующим образом. Если некоторый $i$-й ресурс используется не полностью, то дополнительная переменная в ограничении для данного ресурса больше нуля. В анализируемом примере таким ресурсом выступает сырье, так как $b_2 = 110$ и его резерв $y_2 = 26$ (если сырья было бы не 110, а 112, то резерв равнялся бы не 26, а 28, при этом увеличения целевой функции не произошло бы). Следовательно, для второго ограничения $z_2 = 0$.

Таким образом, если по определенному ресурсу имеется резерв, то дополнительная переменная является базисной, а двойственная оценка такой переменной равняется нулю. В рассматриваемом примере трудовые ресурсы и оборудование использованы полностью, поэтому их дополнительные переменные равны нулю. В табл. 2.7 $y_1$ и $y_3$ являются свободными переменными, значит, $y_1 = y_2 = 0$. Если ресурс используется полностью, то его изменение (увеличение или уменьшение) повлияет на объем выпускаемой продукции и в конечном счете на целевую функцию: целевая функция увеличится или уменьшится на размер двойственной оценки. А значение двойственной оценки находится по симплекс-таблице (см. табл. 2.7) на пересечении строки целевой функции со столбцом данного дополнительного переменного (так, для трудовых ресурсов при $y_1 = 0$ двойственная оценка $z_1 = 20$, а для оборудования при $y_3 = 0$ двойственная оценка $z_3 = 10$).

Значения дополнительных переменных и двойственных оценок из табл.2.7 перенесем для наглядности в табл. 2.8, откуда видно, что

при росте трудовых ресурсов на единицу целевая функция возрастет на 20 единиц, достигнув значения $F = 1340$ (1320 + 20 = 1340), а при их уменьшении $F = 1300$ (1320 —20 = 1300). Аналогично рост оборудования на единицу вызовет увеличение целевой функции на 10 ($F$ = 1320 + 10 = 1330), а при его снижении на единицу $F = 1310$ (1320 —10 = 1310).

*Таблица 2.8.* ***Значения дополнительных переменных z***

| *Ресурсы* | *Дополнительная переменная* | *Двойственная оценка* |
|---|---|---|
| Трудовые | $y_1 = 0$ | $z_1 = 20$ |
| Сырье | $y_2 = 26$ | $z_2 = 0$ |
| Оборудование | $y_3 = 0$ | $z_3 = 10$ |

**Анализ ситуаций отклонения ресурсов**. При оперативном управлении особенно важно принимать верные решения в ситуациях отклонения ресурсов от первоначально запланированных. Рассмотрим эти вопросы на условиях примера **2.2**.

Прежде всего появившееся отклонение следует включать в модель задачи. Начнем с отклонений для сырья. Допустим, отклонение в поставке сырья составляет $\Delta b_2$. Тогда в математической модели (**2.6**) ограничение для сырья имеет вид: $6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq -110 + \Delta b_2$. Данное ограничение в системе уравнений (**2.10**) приобретет вид:

$$y_2 = 110 + \Delta b_2 - (6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4),$$

а в симплекс-таблице отразится это изменение (табл. 2.9). После нахождения решения с учетом $\Delta b_2$ получим симплекс-таблицу, отличие которой от аналогичной ей табл. 2.7 приведено в табл. 2.10 (согласно ей в оптимальном решении $\Delta b_2$ вошло только в свободный член для $y_2 = 26 + \Delta b_2$).

Так как оптимальное решение прежде всего должно быть *допустимым*, то в симплекс-таблице все свободные члены должны быть неотрицательными. В нашем случае решение будет оптимальным при условии $y_2 = 26 + \Delta b_2 \geq 0$ (т. е. оно соблюдается, если $\Delta b_2 \geq -26$). Следовательно, уменьшение сырья на 26 единиц (т. е. на 23,6% от первоначального объема в 110 единиц) не скажется на выполнении плана. Тем самым получен ответ на вопрос: «*Что будет, если..*?»

*Таблица 2.9.* ***Учет изменений ресурсов табл.2.6***

| *Величина* | *Свободный член* | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|
| $F$ | 0 | | |
| $y_1$ | 16 | | |
| $y_2$ | $110+\Delta b_2$ | | |
| $y_3$ | 100 | | |

*Таблица 2.10.* ***Изменения двойственных оценок***

| *Величина* | *Свободный член* | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|---|
| $F$ | 1320 | | |
| $x_1$ | 10 | | |
| $x_2$ | $26+\Delta b_2$ | | |
| $x_3$ | 6 | | |

При анализе влияния отклонения трудовых ресурсов $\Delta b_1$ первое ограничение в модели **(2.6)** запишем как:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 16 + \Delta b_1.$$

Соответственно дополнительную переменную определим как

$$y_1 = 16 + \Delta b_1 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$

и аналогично изменится свободный член в начальной симплекс-таблице (см. табл. 2.3). Симплекс-таблица приобретет вид табл. 2.11 (в ней значения в столбце $y_1$ те же, что и для основной задачи в табл. 2.7, к которым прибавлены элементы столбца $y_1$, умноженные на $\Delta b_1$).

*Таблица 2.11.* ***Полученная симплекс-таблица***

| *Величина* | *Свободный член* | $y_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|
| $F$ | $1320 + \Delta b_1$ | 20 | |
| $x_1$ | $10 + 5/3(\Delta b_1)$ | 5/3 | |
| $y_2$ | $26 - 22/3(\Delta b_1)$ | −22/3 | |
| $x_3$ | $6 - 2/3(\Delta b_1)$ | −2/3 | |

Анализ данных табл. 2.11 позволяет сделать следующие выводы.

**1.** Требование о сохранении допустимого решения обусловливает выполнение условия неотрицательности свободных членов:

$$\left.\begin{aligned} &10 + 5 / 3(\Delta b_1) \geq 0; \\ &26 - 22 / 3(\Delta b_1) \geq 0; \\ &6 - 2 / 3(\Delta b_1) \geq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

**2.** Из решения первого неравенства системы (**2.14**) находим:

$$5/3\ (\Delta b_1) \geq -10;\ \Delta b_1 \geq -10/5/3;\ \Delta b_1 \geq -6.$$

Аналогичным образом из второго и третьего неравенств находим: $\Delta b_1 \leq 3{,}55$; $\Delta b_1 \leq 9$.

Таким образом, определяем, что диапазон изменения $\Delta b_1$ составляет $-6 \leq \Delta b_1 \leq 3{,}55$.

**3.** Переходя от приращений ресурсов к их предельным значениям, находим, что $\min b_1 = 16 - 6 = 10$; $\max b_1 = 16 + 3{,}55 = 19{,}55$; окончательно диапазон изменения $b_1$ составляет $10 \leq b_1 \leq 19{,}55$.

**4.** Найденные пределы показывают, каковы могут быть колебания трудовых ресурсов, чтобы структура оптимального плана (номенклатура выпускаемой продукции) оставалась стабильной. А это означает, что при изменении трудовых ресурсов в найденных пределах оптимальным (обеспечивающим наибольшую прибыль) является выпуск той же самой продукции ($x_1$ и $x_3$), но в объеме, составляющем $x_1 = 10 + 5/3(\Delta b_1)$; $x_3 = 6 - 2/3(\Delta b_1)$; при этом целевая функция составит $F = 1320 + 20\Delta b_1$.

Н а п р и м е р , если шесть человек отвлечь на другие работы, то оптимальным планом с учетом $\Delta b_1 = -6$ являются следующие показатели:

$$x_1^* = 10 + 5/3 \cdot (-6) = 10 - 9{,}9999996 = 0{,}0000004 = 0;$$
$$x_1^* = 6 - 2/3 \cdot (-6) = 6 + 3{,}99999 = 9{,}4;$$
$$F^* = 1320 + 20 \cdot (-6) = 1200.$$

При отвлечении лишь пяти человек на другие работы имеем:

$$\left.\begin{aligned} &x_1^* = 10 + 5 / 3 \cdot (-6) = 1{,}7; \\ &x_3^* = 6 - 2 / 3 \cdot (-5) = 9{,}3; \\ &F^* = 1320 + 20 \cdot (-5) = 1220. \end{aligned}\right\} \qquad (2.15)$$

Таким образом, уменьшение объема трудовых ресурсов на шесть человек, или на 37,5% ((6/16) · 100 = 37,5), приведет к ухудшению целевой функции только на 9,09% ((1320–1200) ×

$\times 100/1320 = 9{,}9$), а на пять человек, или на 31% ($(5/16)\cdot 100 = 31{,}2$), ухудшит значение целевой функции на 7,6% ($(1320 - 1220)\cdot 100/1320 = 7{,}575$), что совсем не очевидно для любого субъекта управления.

**5.** Относительно оборудования можно определить, что структура оптимального плана сохранится в пределах $64 \le b_3 \le 160$; при этом останутся верными зависимости, приведенные в табл. 2.12 в столбце свободных членов.

На базе этих зависимостей можно получить ответ на вопрос: *Сколько необходимо выпустить продукции для обеспечения максимальной прибыли* при увеличении числа оборудования на 10 или 15 ед.?

*Таблица 2.12.* ***Зависимости для оборудования***

| *Величина* | *Свободный член* | $y_3$ |
|---|---|---|
| $F$ | $1320 + 10\Delta b_3$ | 10 |
| $x_1$ | $10 - 1/6(\Delta b_3)$ | $-1/6$ |
| $y_2$ | $26 + 1/3(\Delta b_3)$ | 1/3 |
| $x_3$ | $6 + 1/6(\Delta b_3)$ | 1/6 |

Используя данные табл. 2.12, при увеличении оборудования на 10 и 15 единиц соответственно получаем системы:

$$\left.\begin{aligned} x_1^* &= 10 - (1/6)\cdot 10 = 8{,}3; \\ x_3^* &= 6 + (1/6)\cdot 10 = 7{,}7; \\ F^* &= 1320 + 10\cdot 10 = 1420. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.16)}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1^* &= 10 - (1/6)\cdot 15 = 7{,}5; \\ x_3^* &= 6 + (1/6)\cdot 15 = 8{,}5; \\ F^* &= 1320 + 10\cdot 15 = 1470. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.17)}$$

**6.** Без этих расчетов невозможно представить, что при увеличении оборудования для обеспечения максимизации прибыли выпуск продукции $x_1$ целесообразно уменьшить, а продукции $x_3$ —увеличить. Такое решение можно объяснить следующим: из условий задачи (см. табл. 2.5) видно, что прибыль с единицы продукции $c_1 = 70$, $c_3 = 120$, т. е. единица продукции вида П3 в 1,7 раза ($120/70 = 1{,}7$) дает большую прибыль по сравнению с единицей продукции вида П1. В связи с этим целесообразно

предусмотреть перераспределение выпуска продукции, получив еще один ответ на вопрос «*Что будет, если..?*». В целом математические модели позволяют отвечать на интересующие нас вопросы без дополнительного решения задачи при использовании лишь симплекс-таблицы основной задачи (табл. 2.7).

7. Полученные предельные значения отклонений ресурсов дают возможность установить еще одно очень важное положение. Так как двойственные оценки отражают влияние на целевую функцию изменения ресурсов на единицу и при этом нами определено, что с увеличением трудовых ресурсов на единицу целевая функция возрастает на 20, то напрашиваются следующие вопросы:

**а)** Увеличится ли целевая функция, например, на 200 при росте ресурсов, скажем, на 10 единиц?

**б)** В каком интервале изменения ресурсов справедливы найденные значения двойственных оценок?

Анализ показывает, что двойственные оценки сохраняют свое значение в том же самом интервале изменения ресурсов, при котором сохраняется структура оптимального плана; следовательно, в нашем случае для трудовых ресурсов двойственные оценки справедливы при изменении ресурсов в интервале $10 \leq b_1 \leq 19{,}55$; аналогично анализу влияния ресурсов $b_1$ можно также установить степень влияния коэффициентов в целевой функции $c_j$, а также норм расхода ресурсов или производительности труда и оборудования $a_{ij}$.

В целом *наиболее предпочтительной* процедурой проведения анализа задач на этапах как предварительного планирования, так и оперативного управления являются поиск и выбор наиболее приемлемых решений в каждой из складывающихся ситуаций. Создание соответствующего программного обеспечения позволит руководителю любого ранга осуществлять моделирование оптимальных решений в условиях неопределенности исходной информации и риска.

# Глава 3
# Усложненные методы математического программирования и сетевые модели в оптимизации процессов и принятии решений

К числу усложненных методов оптимизации можно отнести методы целочисленного и стохастического программирования и ряд сетевых моделей.

Задачи оптимизации, решением которых должны быть целые числа, называют задачами *целочисленного программирования*. В том случае, если ограничения и целевая функция задачи представляют собой линейные зависимости, задачу называют *целочисленной задачей линейного программирования*; если же хотя бы одна зависимость является нелинейной, задачу называют *целочисленной задачей нелинейного программирования*.

Рассмотрим специфику решения целочисленных задач линейного программирования, или сокращенно, целочисленных задач.

## 3.1. Задачи целочисленного программирования в управлении производством и принятии решений

Математическую модель задачи целочисленного программирования можно записать так:

$$\left.\begin{aligned} & F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \ (\min); \\ & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i; \ i = \overline{1,\ m}; \\ & d_j \le x_j \le D_j; \ j = \overline{1,n}; \\ & x_j \ (j = 1,\ldots,k \le n) \ - \text{ целые.} \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Система **(3.1)** с точки зрения зависимостей ничем не отличается от задачи линейного программирования **(2.4)** и ей подобных. Единственное отличие состоит в том, что в ней есть строка, где $x_j$ ($j = 1,...,k \le n$) — целые, которая оказывает существенное влияние на решение задачи и значительно его усложняет. Число целочисленных переменных $k$ может удовлетворять одному из двух вариантов.

Если $k = n$, где $n$ —общее число всех переменных, то в ответе все переменные должны быть только целыми; в этом случае задачу называют *полностью целочисленной.* Если $k < n$, т.е. в ответе только $k$ переменных должны быть целыми, а остальные в заданных граничных условиях могут принимать любые значения, то задачу называют *частично целочисленной.* Следует отметить, что для решения задачи все целочисленные переменные обязательно должны иметь верхнюю границу.

Решение целочисленных и непрерывных задач оптимизации имеет принципиальные различия, суть которых заключается в следующем.

Как следует из гл. 2, непрерывные задачи обычно решаются симплекс-методом с построением симплекс-таблиц, при этом каждой итерации соответствует своя симплекс-таблица, на основании ряда признаков по которым можно получить ответы на вопросы: имеет ли задача допустимое решение и является ли решение на данной итерации допустимым или оптимальным? При наличии решения задачу решают до тех пор, пока не выявятся определенные признаки (решение является *допустимым*, если удовлетворяется один признак, и *оптимальным*, если удовлетворяются оба признака). Для целочисленных задач такие признаки отсутствуют, поэтому по задаче нельзя судить о том, имеет ли она вообще допустимое решение и является ли полученное решение оптимальным. Рассмотрим решение целочисленной задачи на следующем примере.

***Пример 3.1.*** Пусть целочисленная задача имеет математическую модель вида **(3.1)**. Необходимо найти ее допустимые и оптимальное решения:

$$\left.\begin{aligned} &F = x_1 + x_2 \to \max; \\ &11x_1 + 4{,}5x_2 \le 49{,}5; \\ &5x_1 + 19x_2 \le 95; \\ &x_1, x_2 \ge 0 \text{ – целые.} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.2)}$$

Р е ш е н и е . Решим эту задачу путем построения прямых в отрезках и выделения области допустимых решений. Требование целочисленности переменных проявляется в том, что решением задачи мо-

гут выступать точки, находящиеся на пересечении целочисленных значений $x_1$ и $x_2$ (оптимальным решением задачи без учета требований целочисленности являются координаты точки $A$ (2,8; 4,3), приведенные в табл. 3.1. Однако эти значения $x_1$ и $x_2$ в точке $A$ требованиям целочисленности не удовлетворяют, поэтому получить целочисленное решение можно путем округления полученных непрерывных значений Округленные координаты, принадлежащие точке $B$ (3;4), оказываются за пределами области допустимых решений. В точке $C$ (3;3) мы получим допустимое решение. Поэтому остается еще одна точка $D$ (2;4), являющаяся оптимальным решением задачи ($F = 6$), но не являющаяся ближайшей к непрерывному оптимальному решению.

На основании решения рассмотренного примера можно сделать следующие выводы: **а)** округление оптимальных значений переменных в непрерывном решении даже в меньшую сторону может привести к недопустимому решению; **б)** оптимальным решением целочисленной задачи может оказаться такое, в котором значения переменных не являются ближайшими к оптимальному решению непрерывной задачи.

*Таблица 3.1.* ***Результаты решения примера 3.1***

| *Точка оптимального решения задачи* | $x_1$ | $x_2$ | $F$ | *Решение* |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 2,8 | 4,3 | 5,14 | Непрерывное |
| $B$ | 3 | 4 | — | Недопустимое |
| $C$ | 3 | 3 | 3,9 | Допустимое |
| $D$ | 2 | 4 | 4,6 | Оптимальное |

Таким образом, оказывается, что решение целочисленных задач является весьма трудоемкой процедурой, и для нахождения оптимального решения подобных целочисленных задач используются специальные методы с учетом конечности числа возможных решений любой целочисленной задачи.

Так, например, в задаче с переменными $x_1$ и $x_2$, удовлетворяющими граничным условиям $0 \le x_1 \le 4$; $0 \le x_2 \le 5$, число возможных решений $N$ может составить: $N = 4 \cdot 5 = 20$. При этом последовательно переходя от значения к значению, можно проанализировать всевозможные сочетания координат $x_1$ и $x_2$, проверить, удовлетворяют ли они заданным ограничениям (являются ли допустимыми решениями) и выбрать затем из них наилучшее в смысле принятой целевой функции.

Подобный метод характеризуется высокой трудоемкостью операций перебора при росте числа переменных и расширении

области граничных условий. Поэтому для решения реальных задач прибегают к эвристическим методам, в которых все множество альтернатив не рассматривается. Наиболее распространен *метод ветвей и границ*, применение которого рассмотрим на следующем примере.

***Пример* 3.2.** Пусть целочисленная задача имеет математическую модель вида (3.3). Необходимо найти ее оптимальное решение.

$$\left.\begin{aligned} &F = 7x_1 + 3x_2 \to \max;\\ &5x_1 + 2x_2 \le 20;\\ &8x_1 + 4x_2 \le 38;\\ &x_1, x_2 \ge 0 \text{ – целые.} \end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

Р е ш е н и е . Решение задачи разобьем на ряд подзадач. Эту задачу без наложения требований целочисленности назовем *задачей 1*. В результате ее решения графическим путем как непрерывной задачи найдем оптимальное решение: это —точка $A$ с координатами $x_1^1 = 1$, $x_2^1 = 7{,}5$ и $F_1 = 29{,}5$ (верхний индекс у переменных и нижний у целевой функции соответствуют номеру задачи). Однако из полученного решения видно, что $x_2 = 7{,}5$ не удовлетворяет требованию целочисленности, поэтому для дальнейшего решения составим следующие две задачи (*задачи 2 и 3*) с граничными условиями, исключающими возможность получения $x_2 = 7{,}5$:

*Задача 2*

$$\left.\begin{aligned} &F = 7x_1 + 3x_2 \to \max;\\ &5x_1 + 2x_2 \le 20;\\ &8x_1 + 4x_2 \le 38;\\ &x_1 \ge 0;\ \ 0 \le x_2 \le 7. \end{aligned}\right\}$$

*Задача 3*

$$\left.\begin{aligned} &F = 7x_1 + 3x_2 \to \max;\\ &5x_1 + 2x_2 \le 20;\\ &8x_1 + 4x_2 \le 38;\\ &x_1 \ge 0;\ \ x_2 \ge 8. \end{aligned}\right\}$$

Решение непрерывных *задач 2* и *3* позволяет получить следующие значения: $x_1^2 = 1{,}2$; $x_2^2 = 7$; $F_2 = 29{,}4$; $x_1^3 = 0{,}75$; $x_2^3 = 8$; $F_3 = 29{,}25$. Однако из полученных результатов видно, что в обеих задачах вновь нарушается требование целочисленности переменных, из-за чего процедура выделения задач повторяется вновь (*задачи 4* и *5* —для *задачи 2* и *задачи 6* и *7* —для *задачи 3*), но с ограничениями на граничные условия переменной $x_1$ (рис. 3.1, табл. 3.2).

В табл. 3.2 приведены результаты решения непрерывной *задачи 1* и *задач 4—6*, удовлетворяющих требованиям целочисленности, из анализа которых следует:

**а)** решение *задачи 4* наиболее близко к непрерывному по значениям переменных, однако оно не является оптимальным;

**б)** оптимальным является решение *задачи 5*, в котором значения переменных существенно отличны от значений непрерывного решения;

**в)** округление оптимального решения непрерывной задачи не обеспечивает получения оптимального решения целочисленной задачи.

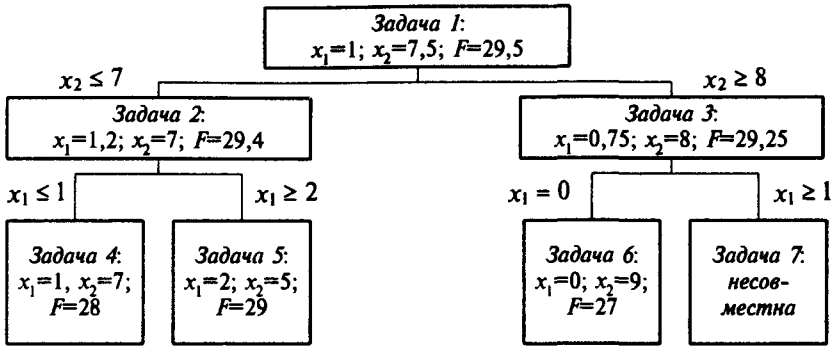



*Рис. 3.1.* ***Алгоритм решения примера 3.2 по методу ветвей и границ***

*Таблица 3.2.* ***Результаты решения задачи***

| *Задача* | $x_1$ | $x_2$ | $F$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 7,5 | 29,5 |
| 4 | 1 | 7 | 28 |
| 5 | 2 | 5 | 29 |
| 6 | 0 | 9 | 27 |

Метод ветвей и границ позволяет накладывать требования целочисленности на любое число переменных: **а)** при наложении его на все переменные, входящие в модель, получают *полностью* целочисленное решение; **б)** при наложении его на часть переменных — *частично* целочисленную задачу, которую следует также решать с помощью метода ветвей и границ (при этом дополнительные требования на граничные значения непрерывных переменных накладывать не следует).Схему расчета задач на основе метода ветвей и границ часто называют *принятием решения на дереве возможных вариантов.*

Заметим, что к многочисленным процессам, описываемым моделями задач целочисленного программирования, относятся и процессы разнообразного (линейного, объемного, комплектного, позаказного и т.п.) раскроя различных материалов — изготовления штучных заготовок, выкроек одежды, корпусов вагонов, судов, самолетов и др. Раскрой может осуществляться как самой ЭВМ, так и человеком, принимающим ряд вариантов раскроя с последующим отбором ЭВМ наилучшего из них. Считается, что в любой ситуации ЭВМ должна выбирать аналогичные варианты

раскроя. Более подробно анализ этих ситуаций, составление математических моделей задач данного класса и их решение рассмотрены в [78,82 и др.].

В целом целочисленные задачи имеют достаточно широкую сферу применения, включая раскрой материалов, планирование и производство крупных изделий и др.

**Задачи целочисленного программирования с булевыми переменными.** Во многих практических случаях искомые переменные $x_j$ принимают не любые целые значения, а лишь одно из двух: либо 0, либо 1. Такие переменные называют *булевыми* (чтобы отличать их от обычных целочисленных переменных и не писать каждый раз $x_j[0;1]$ при их упоминании, будем обозначать их $\delta_j$). С помощью булевых переменных решаются разнообразные по содержанию задачи, связанные с процессами выбора различных вариантов и дискретного программирования. Проанализируем данный класс задач более подробно.

**Задачи выбора вариантов.** Особенности решения данной задачи проиллюстрируем на решении следующего примера.

***Пример* 3.3.** Чтобы получить прибыль, нам необходимы материальные и трудовые ресурсы, при этом возможны четыре варианта расхода ресурсов и получения прибыли (табл. 3.3). Требуется определить, какие варианты принять для реализации при условии, чтобы общее число принятых вариантов $k$ не превышало трех ($k \leq 3$).

*Таблица 3.3.* ***Исходные данные примера 3.3***

| *Показатели* | *Варианты* | | | | *Наличие ресурса* |
|---|---|---|---|---|---|
| | *1* | *2* | *3* | *4* | |
| Прибыль | 65 | 80 | 90 | 210 | — |
| Ресурсы: | | | | | |
| материалы | 200 | 180 | 240 | 250 | 800 |
| трудовые | 10 | 15 | 22 | 28 | 50 |

*Таблица 3.4.* ***Ряд условий решения примера***

| *Вариант решения* | *Логические условия* | | |
|---|---|---|---|
| | *Нет* | $\delta_2 = \delta_4$ | $\delta_3 + \delta_4 = 1$ |
| Прибыль | 300 | 290 | 235 |
| $\delta_1$ | 0 | 0 | 1 |
| $\delta_2$ | 0 | 1 | 1 |
| $\delta_3$ | 1 | 0 | 1 |
| $\delta_4$ | 1 | 1 | 0 |

Р е ш е н и е . Для составления математической модели задачи принимаем, что $j$-му варианту соответствует переменная $\delta_j$ ($j = \overline{1,4}$). При этом $\delta_j = 1$, если $j$-й вариант принимается, и $\delta_j = 0$, если $j$-й вариант не принимается. Тогда имеем математическую модель вида:

$$\left.\begin{aligned} &F = 65\delta_1 + 80\delta_2 + 90\delta_3 + 210\delta_4 \to \max;\\ &200\delta_1 + 180\delta_2 + 240\delta_3 + 250\delta_4 \le 800;\\ &10\delta_1 + 15\delta_2 + 22\delta_3 + 28\delta_4 \le 50;\\ &\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \le 3. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.4)}$$

Последняя строка системы **(3.4)** отражает дополнительное требование, что общее число принятых вариантов не превышает трех. Результаты решения задачи приведены в первом столбце табл. 3.4, откуда видно, что наибольшая прибыль $F = 300$ получается, если принимаются варианты *3, 4.* С помощью булевых переменных можно накладывать дополнительные логические условия связи между вариантами (например, если потребовать, чтобы варианты *2* и *4* принимались только вместе, то данное условие можно записать как $\delta_2 = \delta_4$ или в форме записи ограничений, как $\delta_2 - \delta_4 = 0$; если потребовать выбора только одного из вариантов *3* или *4*, то это условие можно записать так: $\delta_3 + \delta_4 = 1$). Результаты решения задачи с учетом этих условий сведены также в колонки 2 и 3 табл. 3.4, откуда видно, что введение этих логических условий снижает уровень прибыли.

Переходя к задаче выбора вариантов в общем случае, получим:

$$\left.\begin{aligned} &F = \sum_{j=1}^{n} c_j\delta_j \to \max(\min);\\ &\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot\delta_j \le b_i,\ i = \overline{1,m};\\ &p \le \sum_{j=1}^{s\le n}\delta_j \le k. \quad \textbf{(а)} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.5)}$$

В данной системе ограничение **(а)** может учитывать самые разнообразные условия и требования, например:

**а)** «должен», при этом в ограничениях ставится знак равенства; «может»—знак неравенства;

**б)** логической функции «И»(«ИЛИ») —делается запись вида:

$$\sum_{j=1}^{s}\delta_j \ge 1 \quad \left(\sum_{j=1}^{s}\delta_j = 1\right);$$

**в)** *выбор вариантов 1* и *3* —запись вида $\delta_1 + \delta_3 \ge 1$;

г) *выбор варианта 1* или *3* («ИЛИ искл.»), т.е. из двух вариантов надо принять любой один —запись вида $\delta_1 + \delta_3 = 1$;

д) обозначив $\delta_б$ —«быть», $\delta_{н\,б}$ —*«не быть»*, альтернативу *«быть или не быть»* можно записать как $\delta_б + \delta_{н.б} = 1$ (в этом случае есть два допустимых решения: 1) $\delta_б = 1$; $\delta_{н.б} = 0$, что означает *«быть»*; 2) $\delta_б = 0$; $\delta_{н.б} = 1$ — *«не быть»*). Так как целевая функция еще не сформулирована, то принять верное решение пока невозможно.

**Задачи дискретного программирования**. В данной ситуации результатом решения задачи дискретного программирования выступают только целые, но лишь определенные числа. Поясним это на примере.

***Пример 3.4.*** Допустим, что субъект хозяйствования выпускает мебельные наборы — диваны, кресла и стулья. Требуется определить, сколько следует изготовить спинок диванов, подлокотников кресел и ножек стульев исходя из объемов требуемых и наличных материальных и трудовых ресурсов (табл. 3.5) по критерию максимума общего дохода. Необходимо учесть, что готовый выпуск спинок диванов может принимать любое целое значение, подлокотники кресел изготавливают парами — они должны быть кратными 2, а ножки стульев — 4.

Р е ш е н и е . С учетом сформулированных требований математическая модель задачи принимает следующий вид:

*Таблица 3.5.* ***Исходные данные для решения примера 3.4***

| *Требуемые ресурсы* | *Комплектующие изделия* | | | *Количество наличных ресурсов* |
|---|---|---|---|---|
| | *Спинка дивана* | *Подлокотник кресла* | *Ножка стула* | |
| Цена | 20 | 6 | 8 | — |
| Древесина | 10 | 5 | 3 | 100 |
| Трудовые ресурсы | 2 | 7 | 4 | 50 |
| | *Обозначение комплектующих* | | | |
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |

$$\left.\begin{aligned} &F = 20x_1 + 6x_2 + 8x_3 \to \max;\\ &10x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 100;\\ &2x_1 + 7x_2 + 4x_3 \le 50;\\ &0 \le x_1 \le 10;\ \ 0 \le x_2 \le 8;\\ &0 \le x_3 \le 12. \end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

При этом наложены дополнительные логические условия:

$$x_2 = 2\delta_{21} + 4\delta_{22} + 6\delta_{23} + 8\delta_{24};$$
$$x_3 = 4\delta_{31} + 8\delta_{32} + 12\delta_{33},$$

где $\delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \delta_{24} = 1$; $\delta_{31} + \delta_{32} + \delta_{33} = 1$.

Эти булевые переменные реализуют условия выпуска комплектующих мебели в кратном заданном количестве (применительно к подлокотникам кресел переменная $x_2$ может принимать следующие значения: если в результате решения $\delta_{21} = 1$, а остальные $\delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{24} = 0$, то $x_2 = 2$; если $\delta_{22} = 1$, а остальные $\delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{24} = 0$, то $x_2 = 4$ и т.п.). Для учета дополнительных условий введены еще семь переменных и четыре ограничения, что привело к росту размерности задачи (если бы нам потребовалось определить выпуск комплектующих (спинок, подлокотников и ножек) только для одного изделия, то можно было бы записать: $x_2 = 2x_1$; $x_3 = 4x_1$ и не вводить дополнительных ограничений и булевых переменных, а это —другая задача).

В результате решения задачи (**3.6**) на ЭВМ получены следующие значения: $F = 320$; $x_1 = 10$; $x_2 = 4$; $x_3 = 12$; $\delta_{22} = \delta_{33} = 1$; $\delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{24} = \delta_{31} = \delta_{32} = 0$. При этом оказалось, что ресурсы избыточны: резерв древесины составил 44, а трудовых ресурсов — 4 ед. (такая ситуация характерна для целочисленных задач: ресурс избыточен, но его недостаточно для увеличения выпуска продукции).

Модель задачи распределения ресурсов с учетом требования дискретного значения переменных в общем виде имеет такую запись:

$$\left.\begin{aligned} & F = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,\delta_{ij} \to \max(\min); \\ & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m}; \\ & x_j = \sum_{k=1}^{kj} d_{ik} \cdot \delta_{ik} \quad j = \overline{1,n}; \\ & \sum_{k=1}^{kj} \delta_{ik} \le k \quad , \end{aligned}\right\} \qquad (3.7)$$

где $d_{1j}$, $d_{ij}$,..., $d_{ik}$ —дискретные значения, которые может принимать переменная $x_j$.

Система (3.7) отличается от обычной задачи распределения ресурсов, имеющей вид (3.8), тем, что в ней добавлены булевые переменные и увеличено число ограничений (при этом подтверждается тот вывод, что за удовлетворение дополнительных требований приходится платить, и такой платой в данном случае оказывается увеличение размерности задачи и ее целочисленность):

$$\left.\begin{aligned} &F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min); \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i; \\ &d_j \le x_j \le D_j. \end{aligned}\right\} \qquad (3.8)$$

На практике к задачам с булевыми переменными сводится множество различных задач, особенно там, где возникает проблема выбора наилучшего из набора вариантов.

В целом задачи с булевыми переменными можно решать: **а)** как обычные задачи целочисленного программирования с применением метода ветвей и границ (при этом на каждую переменную накладываются требования, что они должны быть в пределах $\delta_j$ [0;1] и иметь целые значения — 0 или 1); **б)** методом полного, или сплошного, перебора. Рассмотрим применение *метода полного перебора* на примере.

***Пример 3.5.*** Необходимо решить задачу с булевыми переменными, описываемую следующей системой:

$$\left.\begin{aligned} &F = 3\delta_1 - 2\delta_2 + 5\delta_3 \to \max; \\ &\delta_1 + 2\delta_2 - \delta_3 \le 2; \quad \textbf{(а)} \\ &\delta_1 + 4\delta_2 + \delta_3 \le 4; \quad \textbf{(б)} \\ &\delta_1 + \delta_2 \le 3; \quad \textbf{(в)} \\ &\delta_1 + \delta_3 \le 6. \quad \textbf{(г)} \end{aligned}\right\} \qquad (3.9)$$

Так как переменные $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$ могут принимать значения 0 или 1 в любом сочетании, то рассмотрим их всевозможные комбинации (табл. 3.6).

Алгоритм при полном переборе имеет следующий вид [78,82]:

*Таблица 3.6.* ***Исходные данные и дополнительные условия для решения примера 3.5***

| *Вариант* | *Переменные* | | | *Условия* | | | | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\delta_1$ | $\delta_2$ | $\delta_3$ | *(1)* | *(2)* | *(3)* | *(4)* | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 4 | 3 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 2 | 4 | 1 | 0 | −2 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | −1 | 1 | 0 | 1 | 5 |
| 6 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 5 | 8 |
| | *Требования* | | | ≤ 2 | ≤ 4 | ≤ 3 | ≤ 6 | max |

*Таблица 3.7.* ***Рост операций при росте n и m***

| *Число переменных n* | *Число ограничений m* | | |
|---|---|---|---|
| | 4 | 10 | 15 |
| 3 | 40 | 88 | 120 |
| 5 | 160 | 352 | 512 |
| 10 | 5120 | 11264 | 16384 |

**1.** Заполняются в таблице все возможные варианты сочетаний допустимых значений $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$.

**2.** Определяются значения левых частей ограничений (**а**)—(**г**) системы (**3.9**) и целевой функции.

**3.** Исключаются те варианты, у которых не выполняется хотя бы одно ограничение (в данном примере ограничение **а** не удовлетворяется в вариантах **4**, **7** и **8**, которые исключаем из дальнейшего рассмотрения как приводящие к недопустимым решениям).

**4.** Из оставшихся вариантов принимается тот, в котором целевая функция приобретает максимальное значение (в данном примере в варианте 6 $F = 8$, при этом он является оптимальным вариантом, имеющим характеристики: $\delta_1 = 1$; $\delta_2 = 0$; $\delta_3 = 0$; $F = 8$).

**5.** В общем случае число вычислительных процедур при полном переборе быстро возрастает (табл. 3.7) и составляет число $N = 2^n(m + 1)$, где $n$ —число переменных, $m$ —число ограничений.

Так, например, анализ примера (**3.5**) показывает, что из возможных восьми вариантов для каждого из них необходимо вычислить четыре ограничения и целевую функцию и в целом выполнить 40 вычислительных операций: $8(4 + 1) = 40$.

Сокращения трудоемкости процедуры полного перебора можно достичь с помощью ряда специальных методов, к числу которых относятся методы фильтрующего ограничения, адаптивного фильтра, метод Балаша с фильтром и др.

## 3.2. Задачи стохастического программирования в управлении производством и принятии решений

Как нам уже известно, значительную долю управленческих решений можно рассматривать как решение задач оптимизации, выбора, управления и распределения ресурсов, математической моделью которых выступает задача линейного программирования, в которой переменные величины $a_{ij}$, $b_i$, $c_j$ являются строго детерминированными при их точных и известных значениях.

Однако на практике такая определенность существует редко: нам часто неизвестны сроки, условия и объемы поставок ресурсов и реализации товаров (данные параметры, в свою очередь, зависят еще от множества случайных внешних и внутренних факторов —выделенных фондов, соответствия качества ресурса предъявляемым требованиям, своевременности и полноты поставки, уровня оперативности и исполнительности персонала и др.), которые физически заранее определить просто невозможно; причем чем больше период планирования или прогнозирования, тем выше степень неопределенности в однозначной оценке возможных значений ресурсов $b_i$, норм расхода $a_{ij}$, коэффициентов целевой функции $c_j$. Однако и в этих ситуациях необходимо принимать четкие управленческие решения, уметь составлять детерминированные планы, оценивать случайные (благоприятные и не совсем) ситуации с помощью методов теории вероятностей.

Так как случайные величины или процессы описываются количественными характеристиками (математическим ожиданием, дисперсией, средним квадратическим отклонением, коэффициентом вариабельности и др.) или законами распределения, то рассмотрим особенности составления математических моделей и решения задач оптимизации и распределения ресурсов в условиях неопределенности.

**Задачи оптимизации распределения ресурсов с учетом неопределенности**. Так как множество задач принятия решений по форме обычно сводится к задачам составления планов, а по содержанию — к задачам распределения ресурсов и в условиях реальной жизни величины $a_{ij}$, $b_i$, $c_j$ математической модели задачи распределения ресурсов оказываются случайными, то ЛПР вынуждено решать задачи не линейного, а *стохастического* программирования (СТП).

Так как случайные величины могут определяться как реализациями, так и их количественными характеристиками и законом распределения, то на этапе планирования, как правило, реализации обычно неизвестны и поэтому пользуются только характеристиками случайных величин и законами их распределения. Составление математической модели начинается с рассмотрения целевой функции. Если величины $c_j$, входящие в целевую функцию, являются случайными, то задача стохастического программирования может быть сформулирована в двух $M$- или $P$-постановках.

При $M$-постановке целевая функция, означающая максимизацию (минимизацию) математического ожидания, записывается в виде:

$$F = M\left[\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j\right] \to \max(\min).$$

Если от математического ожидания целевой функции перейти к математическим ожиданиям случайных величин $c_j$, то получим:

$$F = \sum_{j=1}^{n} M\left[c_j\right] x_j \to \max(\min). \qquad \textbf{(3.10)}$$

Таким образом, при $M$-постановке задачи стохастического программирования для ее решения требуется найти такие значения искомых переменных $x_j$, при которых математическое ожидание целевой функции имеет *оптимальное* (максимум или минимум) *значение*.

При $P$-постановке задача стохастического программирования формулируется несколько иначе. Прежде всего должно быть дополнительно задано *предельно* допустимое наихудшее значение целевой функции. При максимизации задается *минимально* допустимое значение $F_{\min}$ и требуется выполнение условия $F \geq F_{\min}$. При минимизации задается *максимально* допустимое значение $F_{\max}$ и нужно выполнить условие $F \leq F_{\max}$.

Суть $P$-постановки заключается в том, что необходимо найти такие значения $x_j$, при которых максимизируется вероятность того, что целевая функция будет *не хуже* предельно допустимого значения.

Целевая функция в $P$-постановке задачи СТП имеет вид:

**а)** при максимизации

$$F = P\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \geq F_{\min}\right) \to \max; \qquad \textbf{(3.11)}$$

б) при минимизации

$$F = P\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le F_{\max}\right) \to \min. \qquad (3.12)$$

Здесь как при минимизации, так и при максимизации целевой функции следует стремиться к *максимизации вероятности.* Но при максимизации целевой функции наименьшее допустимое значение задается как $F_{\min}$, а при минимизации целевой функции — как $F_{\max}$. Поэтому, чтобы при максимизации увеличивать значение целевой функции, следует увеличивать значение $F_{\min}$ в **(3.11)**. Аналогично при минимизации целевой функции следует уменьшать значение $F_{\max}$ в **(3.12)**.

Таким образом, целевые функции **(3.10)—(3.12)** в *M*- и *P*-постановках задачи СТП *принципиально различаются* между собой.

Посмотрим, как учитывается *фактор неопределенности при записи ограничений.* Так как в ограничения задачи входят величины $a_{ij}$ и $b_i$, то учесть случайность этих величин можно, как и для целевой функции, в двух вариантах. В первом варианте (*M*-постановке задачи СТП) случайные величины определяются их математическими ожиданиями, и ограничения записываются в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} \; x_j \le \bar{b}_i ,$$

где $\bar{a}_{ij}$, $\bar{b}_i$ — математические ожидания случайных величин $a_{ij}$ и $b_i$.

В этом случае стохастический характер задачи по сути никак не учитывается.

Во втором варианте (*P*-постановке задачи СТП) каждое *i*-е ограничение должно быть записано следующим образом:

$$P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i\right] \ge g_i . \qquad (3.13)$$

Эта запись означает, что вероятность выполнения каждого заданного ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \; x_j \le b_i$$

должна быть не менее назначенной величины $g_i$. Задачу, включающую условия **(3.13)**, называют *задачей с вероятностными ограничениями.* Объединив полученные целевую функцию и ограничения, запишем задачу СТП в двух постановках.

Таким образом, при $M$-постановке задача СТП имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} & F = M\left[\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right] \to \max(\min); \\ & P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i\right] \ge g_i; \\ & d_j \le x_j \le D_j;\ j = \overline{1,n};\ i = \overline{1,m}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.14)$$

При $P$-постановке с учетом условий максимизации или минимизации целевой функции задачи СТП различаются между собой.

Так, при *максимизации* с учетом целевой функции вида (3.11) $P$-постановка задачи СТП имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} & F = P\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge F_{\min}\right) \to \max; \\ & P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i\right] \ge g_i; \\ & d_j \le x_j \le D_j;\ j = \overline{1,n};\ i = \overline{1,m}, \end{aligned}\right\} \qquad (3.15)$$

а при *минимизации* с учетом целевой функции вида (3.12) $P$-постановка задачи СТП имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} & F = P\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge F_{\max}\right) \to \min; \\ & P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i\right] \ge g_i; \\ & d_j \le x_j \le D_j;\ j = \overline{1,n};\ i = \overline{1,m}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.16)$$

В общем случае задачи (3.14)—(3.16) как в $M$-, так и в $P$-постановках непосредственно не решаются. Возможным методом решения этих задач является переход к их детерминированным эквивалентам, в основе которого лежит использование закона распределения случайных величин. Рассмотрим эти вопросы более подробно.

**Детерминированный эквивалент для постановок задач СТП.** Если принять, что случайные величины $a_{ij}$, $b_i$, $c_j$ подчиняются *нормальному* закону распределения, то *детерминированный эквивалент целевой функции* в $P$-постановке можно записать следующим образом:

**а)** при максимизации целевой функции

$$F = \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j - F_{\max}\right) \Bigg/ \left(\sum_{j=1}^{n} G_j^2 x_j^2\right)^{1/2} \to \max;$$

**б)** при минимизации целевой функции

$$F = \left(F_{\max} - \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j\right) \Bigg/ \left(\sum_{j=1}^{n} G_j^2 x_j^2\right)^{1/2} \to \max,$$

где $\bar{c}_j$, $G_j$ —математическое ожидание и дисперсия случайной величины $c_j$.

Данные зависимости достаточно сложны для вычислений и поэтому обычно неприменимы на практике, поэтому $P$-постановка задачи СТП далее не рассматривается.

Детерминированный эквивалент для $M$-постановки задачи СТП имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} & F = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j \to \max(\min); \\ & \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j \le \bar{b}_i - t_{g_i}\left(\sum_{j=1}^{n} G_{ij}^2 x_j^2 + V_i^2\right)^{1/2}, \quad \text{(а)} \\ & d_j \le x_j \le D_j; \ j = \overline{1,n}; \ i = \overline{1,m}, \quad \text{(б)} \end{aligned}\right\} \qquad (3.17)$$

где $\bar{c}_j$ — математическое ожидание случайной величины $c_j$; $\bar{a}_{ij}$, $\bar{b}_i$, $G_{ij}^2$ —соответственно математические ожидания и дисперсии случайных величин $a_{ij}$ и $b_i$; $t_{g_i}$ — значение $t$ в нормальном законе распределения, соответствующее заданному уровню вероятности соблюдения ограничений $g_i$.

Система (3.17) — основа для анализа принятия оптимальных решений в условиях неопределенности. В этой модели переменные $x_j$ входят во второй степени с извлечением из их суммы квадратного корня, т.е. ограничения модели являются *нелинейными*, а для решения нелинейной задачи (3.17) обычно используют метод кусочно-линейной аппроксимации. Обычно решение такой задачи СТП сводится к решению задачи линейного программирования, но большей размерности, с использованием известного нам симплекс-метода.

**Анализ влияния неопределенности на решение задач СТП.** Проведем анализ особенностей модели (3.17). Для удобства анализа введем обозначение $z_i$, соответствующее вычитаемому члену, содержащемуся в ограничении **а** задачи (3.17):

$$z_i = t_{\alpha_i}\left(\sum_{j=1}^{n} G_{ij}^2 x_j^2 + V_i^2\right)^{1/2}. \qquad (3.18)$$

Тогда детерминированный эквивалент задачи СТП (3.17) можно записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &F = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j \to \max(\min);\\ &\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j \le \bar{b}_i - z_1;\\ &d_j \le x_j \le D_j;\ \ j = \overline{1,n};\ \ i = \overline{1,m}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.19)$$

Сравнение данной системы с задачей линейного программирования для детерминированных величин позволяет сделать *выводы.*

**1.** Детерминированный эквивалент задачи СТП *отличается* от задачи линейного программирования тем, что

**а)** выполнен переход от значений детерминированных величин $a_{ij}$, $b_i$, $c_j$ к математическим ожиданиям случайных величин $\bar{a}_{ij}$, $\bar{b}_i$, $\bar{c}_j$;

**б)** во всех ограничениях располагаемый ресурс $\bar{b}_i$ уменьшается на величину $z_i$ (величины $a_{ij}$ и $b_i$ здесь являются уже случайными, что приводит фактически к уменьшению располагаемого ресурса), т.е. за принятие решений в условиях неопределенности приходится *платить*, и подобной «платой» оказывается необходимость в *дополнительном* ресурсе $z_i$, который в ряде ситуаций может остаться и неиспользованным, но для гарантии выполнения плана иметь его необходимо (в этом суть влияния неопределенности на происходящие события, своеобразная плата за риск или страхование от риска).

Таким образом, для гарантии выпуска продукции в заданном объеме в условиях неопределенности располагаемый ресурс необходимо увеличивать на величину $z_i$. В противном случае может оказаться

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \ge b_i,$$

что приведет к уменьшению выпуска продукции (следует принимать альтернативу: выпускать тот же объем продукции при

большем ресурсе или при прежнем ресурсе изготовлять меньше продукции). Это условие составляет величину «платы», равной $z_i$, за принятие решений в условиях неопределенности.

**2.** Как видно из выражения (**3.18**), на величину $z_i$ влияют все вероятностные характеристики задачи: $t_{g_i}$ — заданная вероятность соблюдения $i$-го ограничения; $G_{ij}^2$ —дисперсия значений норм расхода $a_{ij}$; $V_i^2$ —дисперсия ресурсов $b_i$. Увеличение заданного уровня вероятности $g_i$ приводит, в свою очередь, к росту времени $t_{ij}$, а также к росту $G_{ij}^2$ и $V_i^2$, что вызывает увеличение $z_i$, а следовательно, при этом растет плата за неопределенность (чем продолжительнее плановый период $T$, тем больше неопределенность и выше плата за неопределенность $z_i$). Данные выводы являются *качественной оценкой влияния неопределенности.* Для уточнения степени ее влияния полезно осуществить количественную оценку, для чего введем коэффициенты:

*относительное ухудшение* $\beta$ *целевой функции*

$$\beta = |F_0 - F| \,/\, F_0 \cdot 100\% ;$$

*относительное увеличение* $\zeta$ *ресурса* (относительная плата за неопределенность)

$$\zeta = z_i \,/\, \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + z_i \right) \cdot 100\%,$$

где $F_0$ и $F$ — соответственно значения целевой функции при $z_i = 0$ и в задаче СТП.

**3.** Приведенные коэффициенты позволяют не только оценить влияние на результат решения задачи величины $z_i$ (зависящей, в свою очередь, от многих факторов, характеризующих стохастический характер модели), но и исследовать влияние на оптимальное решение заданного уровня вероятности $g_i$ и дисперсии случайных величин $G_{ij}^2$ и $V_i^2$. При анализе влияния величины $g_i$ нужно установить, как в зависимости от $g_i$ изменяется оптимальное решение (нахождение такой закономерности позволит более обоснованно задавать значение $g_i$). При анализе дисперсий $G_{ij}^2$ и $V_i^2$ следует иметь в виду, что они являются величинами, определяющими степень целесообразности применения методов стохастического программирования: если дисперсии существенно влияют на оптимальный план, то их необходимо учитывать; в противном случае можно решать обычные

задачи линейного программирования, при этом «существенность» в смысле изменения целевой функции при СТП может установить только сам пользователь, задаваясь допустимым значением относительного ухудшения целевой функции $\beta$. Поясним эти выводы с решением и анализом задачи СТП на относительно простом примере.

***Пример 3.6.*** Пусть имеет место задача распределения двух видов ресурсов для выпуска двух типов продукции. Составить математическую модель решения задачи СТП в *М*-постановке.

Р е ш е н и е. Такую задачу можно записать следующей моделью:

$$\left.\begin{aligned} &F = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max; \\ &a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le b_1; \\ &a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \le b_2; \\ &d_1 \le x_1 \le D_1;\ \ d_2 \le x_2 \le D_2, \end{aligned}\right\} \qquad (3.20)$$

где величины $a_{ij}$, $b_i$, $c_j$ являются случайными.

На основании (**3.14**), применимой к *М*-постановке задачи СТП, можно записать:

$$\left.\begin{aligned} &F = M[c_1 x_1 + c_2 x_2] \to \max; \\ &P(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le b_1) \ge \Delta_1; \\ &P(a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \le b_2) \ge \Delta_2; \\ &d_1 \le x_1 \le D_1;\ \ d_2 \le x_2 \le D_2, \end{aligned}\right\}$$

где $\Delta_1$, $\Delta_2$ — заданные уровни вероятности соблюдения каждого ограничения.

Чтобы решить данную задачу, необходимо прежде всего перейти к ее детерминированному эквиваленту. Согласно модели (**3.17**) детерминированный эквивалент задачи СТП в *М*-постановке имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &F = \bar{c}_1 x_1 + \bar{c}_2 x_2 \to \max; \\ &\bar{a}_{11} x_1 + \bar{a}_{12} x_2 \le \bar{b}_1 - t_{g_1}\left(G_{11}^2 x_1^2 + G_{12}^2 x_2^2 + V_1^2\right)^{1/2}; \\ &\bar{a}_{21} x_1 + \bar{a}_{22} x_2 \le \bar{b}_2 - t_{g_2}\left(G_{21}^2 x_1^2 + G_{22}^2 x_2^2 + V_2^2\right)^{1/2}; \\ &d_1 \le x_1 \le D_1;\ \ d_2 \le x_2 \le D_2. \end{aligned}\right\}$$

Исходные данные, необходимые для решения этой задачи, сведены в табл. 3.8 и 3.9. Если задать уровни вероятности $a_{1,2} = 0{,}6$, для которых $t_g = 0{,}25$, то после подстановки исходных данных получим детерминированный эквивалент задачи СТП:

$$\left.\begin{aligned}
&F = 5x_1 + 8x_2 \to \max;\\
&10x_1 + 15x_2 \le 100 - 0{,}25\left(4x_1^2+9x_2^2+81\right)^{1/2};\\
&20x_1 + 14x_2 \le 150 - 0{,}25\left(36x_1^2+16x_2^2+120\right)^{1/2};\\
&2 \le x_1 \le 6;\ 3 \le x_2 \le 9.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.21)$$

Результаты решения задачи на ЭВМ для детерминированного случая ($z_i = 0$) при $a_i = 0{,}6$ сведены в табл. 3.10.

Анализ результатов решения задачи (**3.21**) позволяет сделать следующие выводы:

**1)** для обеспечения гарантированного (с вероятностью $a = 0{,}6$) выполнения плана необходим дополнительный объем (примерно до 5%) по каждому виду ресурсов;

**2)** при отсутствии дополнительных ресурсов целевая функция может уменьшиться на величину $\beta = 4\%$ из-за возможного сокращения выпуска продукции $x_2$ от 5,3 до 5,04;

**3)** подтверждается факт, что в реальных условиях для гарантированного выполнения плана необходимы дополнительные ресурсы в размере $z_i$; в противном случае возможно уменьшение выпуска продукции.

*Таблица 3.8.* ***Исходные данные примера 3.6***

| *Величина* | *c* | *d* | *D* |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 5 | 2 | 6 |
| $x_2$ | 8 | 3 | 9 |

*Таблица 3.9.* ***Коэффициенты ограничений модели задачи***

| *Ограничения* | *Случайные величины* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_{i_1}$ | | $a_{i_2}$ | | $b_i$ | |
| | $\bar{a}_i$ | $G_{i_1}$ | $\bar{a}_{i_2}$ | $G_{i_2}$ | $\bar{b}_i$ | $V_i$ |
| 1 | 10 | 2 | 15 | 3 | 100 | 9 |
| 2 | 20 | 6 | 14 | 4 | 150 | 120 |

*Таблица 3.10.* ***Результаты решения задачи СТП***

| *Величина* | $z_i = 0$ | $a_i = 0{,}6$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | 2 | 2 |
| $x_2$ | 5,3 | 5,04 |
| $F$ | 52,4 | 50,3 |
| $\beta$ | 0 | 4 |
| $z_1$ | 0 | 4,4 |
| $z_2$ | 0 | 5,8 |
| $\zeta_1$ | 0 | 4,4 |
| $\zeta_2$ | 0 | 5,1 |

Из анализа влияния на результат решения задачи величин, определяющих ее вероятностный характер (заданных уровней вероятности $a_i$ и дисперсий $G_{ij}^2$ и $V_i^2$), получены результаты, приведенные в табл. 3.11, на основе которых можно сделать следующие выводы:

**а)** для повышения заданного уровня вероятности выполнения плана $a_i$ требуется увеличение дополнительных ресурсов $z_i$ (для исполнения плана с вероятностью $a = 0{,}987$ необходим дополнительный ресурс в размере $z = 26$—33% от используемого без учета вероятностных характеристик);

*Таблица 3.11.* ***Влияние ряда величин на результат задачи***

| *Величина* | *Добавочный ресурс (%) при* $a_{1,2}$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,5 | 0,6 | 0,77 | 0,89 | 0,96 | 0,987 |
| $x_1$ | 2 | 2 | 2 | 3,71 | 3,07 | 2,16 |
| $x_2$ | 5,3 | 5,04 | 4,51 | 3 | 3 | 3 |
| $F$ | 52,4 | 50,3 | 46,1 | 42,6 | 39,3 | 34,8 |
| $\beta$ | 0 | 4 | 12 | 18,7 | 25 | 33,6 |
| $\zeta_1$ | 0 | 4,4 | 12,3 | 17,9 | 24,3 | 33,3 |
| $\zeta_2$ | 0 | 5,09 | 14,8 | 16,5 | 23,2 | 26 |

**б)** отсутствие такого увеличения ресурсов может привести к ухудшению целевой функции на величину $b = 33{,}6\%$;

**в)** рост величины $a_{1,2}$ отражается на номенклатуре выпускаемой продукции (при $a_{1,2} = 0{,}5$—0,77 значение $x_1$ сохраняется неизменным, а значение $x_2$ уменьшается; при дальнейшем увеличении $a_{1,2} = 0{,}89$—0,987 значение $x_2$ сохраняется, а $x_1$ сначала

скачком возрастает, а затем постепенно уменьшается; несмотря на то, что при $a = 0{,}89$ значения $x_1$ и $x_2$ изменяются резко, целевая функция $F$ во всем интервале изменения $a_{1,2}$ уменьшается плавно; такой характер влияния на результат решения задачи распределения ресурсов оказывают заданные уровни вероятности и ограничений.

Из анализа влияния дисперсии ресурсов $V_i^2$ на результат решения задачи, выполненного с использованием коэффициента вариации $\delta$ $i$-го ресурса ($\delta = \Delta_i / b_i$, $i = 1,2$), получены следующие выводы:

**1)** результаты решения задачи при заданной вероятности $a_{1,2} = 0{,}6$ для различных значений $\delta_{1,2}$ приведены в табл. 3.12, откуда следует, что увеличение коэффициента вариабельности $\delta$ и дисперсии $V_i^2$ для обеспечения гарантированного выполнения плана обусловливает необходимость в дополнительных ресурсах, которые могут остаться неиспользованными;

**2)** в условиях неопределенности необходим рост дополнительных ресурсов, составляющий $\zeta = 13$—$15{,}8\%$ от объема используемых ресурсов в детерминированных условиях; при отсутствии ресурсов целевая функция уменьшается примерно на 5%;

**3)** случайный характер величин, входящих в модель задачи, существенно влияет на результаты решения, и пренебрежение этим фактором приводит к формированию невыполнимых нереальных планов;

*Таблица 3.12.* ***Влияние дисперсии на результат решения задачи*** ($a_{1,2} = 0{,}6$)

| *Величина* | *Значения* $\delta_{1,2}$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
| $x_1$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| $x_2$ | 5,08 | 5,03 | 4,92 | 4,78 | 4,62 | 4,47 |
| $F$ | 50,6 | 50,2 | 49,3 | 48,2 | 47,0 | 45,7 |
| $\beta$ | 0 | 0,8 | 2,6 | 4,7 | 7,1 | 9,7 |
| $\zeta_1$ | 3,8 | 4,45 | 6,25 | 8,35 | 10,6 | 13,0 |
| $\zeta_2$ | 4,3 | 5,4 | 7,64 | 10,3 | 13,1 | 15,8 |

**4)** хотя рассмотренный пример является частным случаем общей задачи СТП, можно выводы, сделанные для примера, распространить на все задачи СТП. Принимать серьезные решения на практике без учета динамичных стохастических условий *нецелесообразно*;

5) повышения надежности исполнения планов можно добиться организацией работ в два этапа: **а)** планирования с учетом неопределенности и оценкой случайных величин законами их распределения; **б)** периодического уточнения без корректировки планов на основе конкретных реализаций (фактически полученных значений случайных величин); чем чаще уточняются элементы математической модели по фактическим значениям, тем более реальны и выполнимы планы.

## 3.3. Сетевые модели в оптимизации процессов и принятии управленческих решений

Одним из универсальных средств представления информации о специфике протекания различного рода технических, экономических, организационных процессов и функционирования систем являются *графовые модели*. Под *графом* понимают совокупность вершин, отображаемых кружочками, точками и др., и ребер (дуг), взвешенных каким-либо образом и соединяющих вершины графа. Граф, в котором связь между вершинами имеет направление, отображаясь с помощью дуг, называется *сетью*. С помощью сетей решаются различные оптимизационные задачи, связанные с пространственным перемещением объектов, временным исполнением работ субъектами и др.

Рассмотрим некоторые наиболее распространенные на практике сетевые модели и задачи.

**Задача коммивояжера**. В нашей жизни часто встречаются ситуации, которые связаны с перемещением («из пункта А в пункт Б») и разнообразным поведением $j$-го субъекта или функционированием $i$-го объекта. К числу таких задач относится задача коммивояжера, связанная с минимизацией пути при посещении ряда объектов.

Для составления математической модели задачи обычно вводят следующие обозначения: $i$ и $j$ — номера пунктов выезда и заезда; $t_{ij}$ —время переезда из пункта $i$ в пункт $j$ (в общем случае $t_{ij}$ не равняется $t_{ji}$, например, если один пункт находится на возвышенности, а другой —в долине). Кроме этого, вводятся булевые переменные, причем принимают, что $\delta_{ij} = 1$, если из пункта $i$ мы едем в пункт $j$; $\delta_{ij} = 0$ — в противном случае. Например, если из пункта $i$ выехать (въехать) только один раз в каком-то

определенном направлении в(из) любой(го) другой(го) пункт(а) $j$ из $n$ имеющихся либо оставаться в пункте $i$, то данное условие можно записать так:

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n}.$$

Общая постановка данной задачи, включающей объезд $n$ пунктов, записывается в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} & F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij}\,\delta_{ij} \to \min; \\ & \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} = 1; \; j = \overline{1,n}; \\ & \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} = 1; \; i = \overline{1,n}; \\ & \delta_{ij} = [0;1]. \end{aligned}\right\} \qquad (3.22)$$

Заметим, что система (**3.22**) включает условия, являющиеся необходимыми, но этого недостаточно. Требование непрерывности маршрута обеспечивается введением дополнительных переменных, исключающих создание подциклов.

К задаче коммивояжера сводятся задачи выбора маршрута при развозке грузов, последовательности обработки различных деталей на одном станке, проектирования технологических процессов и т.д.

**Задача поиска кратчайшего пути**. Пусть данная задача формулируется следующим образом: из пункта $i$ в пункт $j$ ведет много дорог, на одних из которых движение одностороннее, а на других — двустороннее (длина пути между пунктами указывается на каждой дуге). Требуется найти кратчайший путь из пункта $i$ в в пункт $j$.

При составлении математической модели задачи должно соблюдаться условие непрерывности маршрута и одноразовости посещения пунктов (в каждый пункт должна входить и выходить только одна дуга). Это требование выполняется, если соблюдаются условия:

**а)** для дуг, входящих в пункт,

$$N_{i\,\text{вх}} = \sum_{k=1}^{p} \delta_{ki} = 1,$$

где $\delta_{ki}$ соответствует дуге, выходящей из пункта $k$ и входящей в пункт $i$; $\delta_{ki} = 1$, если дуга $k$—$i$ входит в маршрут; $\delta_{ki} = 0$ —в противном случае;

б) для дуг, выходящих из пункта,

$$N_{j\,\text{вых}} = \sum_{j=1}^{p} \delta_{ij} = 1,$$

где $\delta_{ij}$ соответствует дуге, выходящей из пункта $i$ и входящей в пункт $j$; $\delta_{ij} = 1$, если дуга $i$—$j$ входит в маршрут; $\delta_{ij} = 0$ — в противном случае.

Все пункты маршрута подразделяются на начальный, промежуточный и конечный, и для них должно выполняться условие:

$$N_{i\,\text{вх}} - N_{i\,\text{вых}} = \begin{cases} 1 \text{ — для начального пункта;} \\ 0 \text{ — для промежуточного пункта;} \\ 1 \text{ — для конечного пункта.} \end{cases}$$

Если необходимо, чтобы маршрут имел при этом и кратчайшую длину, необходимо добавить следующую целевую функцию:

$$F = \sum_i \sum_j c_{ij}\delta_{ij},$$

где $c_{ij}$ —длина пути, а суммирование производится по всем дугам.

Объединяя ограничения и целевую функцию, запишем систему:

$$\left.\begin{array}{l} F = \sum_i \sum_j c_{ij}\delta_{ij} \to \min; \\ \sum_{k=1}^{n} \delta_{ki} - \sum_{j=1}^{l} \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ — для начального пункта;} \\ 0 \text{ — для промежуточного пункта;} \\ 1 \text{ — для конечного пункта.} \end{cases} \\ \delta_{ij} \geq 0 \end{array}\right\} \quad (3.23)$$

На переменные $\delta_{ij}$ здесь достаточно наложить только требование неотрицательности. Требование же, чтобы $\delta_{ij} = 0$ или $\delta_{ij} = 1$, можно не накладывать, так как такая задача из-за ограничений обеспечивает получение в решении для $\delta_{ij}$ только либо нуля, либо единицы. Таким образом, приведенная система является обычной задачей линейного программирования, которую можно реализовать без наложения требований целочисленности.

Реально существующие длинные маршруты трудно обозримы, сплошной же перебор всевозможных вариантов —весьма трудоемкая процедура, поэтому для нахождения кратчайшего пути необходимо решение задачи линейного программирования. В общем случае характеристика дуги $i$—$j$ может иметь самый

различный смысл: продолжительность, стоимость, трудоемкость и т.д. В целом к задаче выбора кратчайшего пути или маршрута сводятся самые разнообразные задачи, включая задачу выбора оптимального маршрута при разработке технологических процессов.

**Задача о распределении потоков в сетях**. Решение этой задачи базируется на наличии сети определенной конфигурации, по которой транспортируется продукция (нефть, газ и др.). Обычно требуется найти оптимальный вариант транспортировки продукции (потока в сети) за определенное время.

При составлении математической модели такой задачи принимают, что элементы сети (дуги и узлы) имеют характеристики. Каждая дуга $i$—$j$ характеризуется: $c_{ij}$ — стоимостью транспортировки единицы продукции по дуге; $D_{ij}$ — пропускной способностью дуги, в общем случае изменяющейся в пределах $0 \leq D_{ij} < \infty$ (отсюда имеем, что $D_{ij} = 0$ , если дуга $i$—$j$ отсутствует, т.е. узлы $i$ и $j$ не связаны между собой; $D_{ij} = \infty$, если на пропускную способность участка $i$—$j$ не накладывается никаких ограничений).

В такой сети могут быть узлы трех видов: выпускающие или потребляющие продукцию и транзитные. Характеристиками для таких узлов являются: **а)** для *выпускающего* — $A_i$ (количество продукции, выпускаемой узлом $i$ в единицу времени); **б)** для *потребляющего* — $B_j$ (количество продукции, потребляемой узлом $j$ в единицу времени); **в)** для *транзитного* узла — $A_iB_j = 0$.

В общем случае в каждый узел могут входить и выходить потоки. Суммарные потоки, соответственно входящие в $i$-й узел ($S_{вх}$) или выходящие из него ($S_{вых}$), определяются так:

$$S_{вх} = \sum_{k=1}^{p} x_{ki}; \quad S_{вых} = \sum_{j=1}^{l} x_{ij},$$

где $S_{вх} = S_{вых}$ для транзитного узла.

Подставив значения $S_{вх}$ и $S_{вых}$ для транзитного узла, получим *уравнение сохранения потока,* или *уравнение материального баланса*:

$$\sum_{k=1}^{k} x_{ki} = \sum_{j=1}^{l} x_{ij} \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{k} x_{ki} - \sum_{j=1}^{l} x_{ij} = 0.$$

Составим уравнения для выпускающего и потребляющего узлов: для *выпускающего* узла:

$$S_{вх} = A_i + \sum_{k=1}^{p} x_{ki}; \quad S_{вых} = \sum_{j=1}^{l} x_{ij}; \quad \sum_{k=1}^{p} x_{ki} - \sum_{j=1}^{l} x_{ij} = -A_i;$$

для *потребляющего* узла:

$$S_{\text{вх}} = \sum_{k=1}^{p} x_{ki}; \quad S_{\text{вых}} = \sum_{j=1}^{l} x_{ij} + B_i; \quad \sum_{k=1}^{p} x_{ki} - \sum_{j=1}^{l} x_{ij} = B_i.$$

Объединяя полученные уравнения для типов узлов, запишем:

$$\sum_{k=1}^{p} x_{ki} - \sum_{j=1}^{l} x_{ij} = \begin{cases} -A_i \text{ —для выпускающего узла;} \\ 0 \text{ — для транзитного узла;} \\ B_i \text{ —для потребляющего узла.} \end{cases}$$

Пусть в начальном узле $i = 1$ есть некоторое количество продукции $A_i$, остальные все узлы —транзитные. Составим уравнение баланса для этого случая.

Так как в начальном узле ($i = 1$) входящих дуг нет, то имеем:

$$\sum_{k=1}^{p} x_{k_1} = 0,$$

и уравнение выпускающего узла имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{l} x_{ij} = -A_i.$$

В конечном узле ($i = n$) выходящих дуг нет, т.е.

$$\sum_{j=1}^{l} x_{nj} = 0,$$

тогда в уравнении для потребляющего узла остается, что

$$\sum_{k=1}^{p} x_{kn} = B_i.$$

Объединяя уравнения для разных типов узлов, получаем:

$$\sum_{j=1}^{l} x_{1j} = A_1 \text{ — для } \textit{начального узла};$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{kn} = B_n \text{ — для } \textit{конечного узла};$$

$$\sum_{k=1}^{p} x_{ki} - \sum_{j=1}^{l} x_{ij} = 0 \text{ — для } \textit{транзитного узла}.$$

Данные уравнения обеспечивают условие *непрерывности* рассматриваемого потока, являются ограничениями, выполнение которых обеспечивает возможность получить допустимые решения.

Если мы должны решить *задачу оптимизации потока в сети*, то необходимо дополнительно сформулировать целевую функцию и граничные условия. При этом возможны различные постановки задачи оптимизации — по минимизации стоимости и по максимизации потока.

1. *Минимизация стоимости*:

$$\left.\begin{aligned} &F = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \to \min; \\ &A_1 = A_3; \\ &0 \le x_{ij} \le D_{ij}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.24)$$

2. *Максимизация потока*:

$$\left.\begin{aligned} &F = \sum_i \sum_j B_n \to \max; \\ &A_1 = A_3; \\ &\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \le C_3; \\ &0 \le x_{ij} \le D_{ij}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.25)$$

где $c_{ij}$ — стоимость транспортировки единицы продукции по дуге; суммирование проводится по всем дугам; $D_{ij}$ — пропускная способность дуги.

Первая постановка обеспечивает получение потоков в сети, которые не превышают по каждой дуге ее пропускной способности, а также минимальную стоимость транспортировки, вторая постановка — получение максимального потока, стоимость транспортировки которого по всем дугам не превышает заданной стоимости $C_3$.

Решение задач поиска варианта потока минимальной стоимости связано с анализом сети определенной конфигурации, в которой каждая дуга характеризуется стоимостью транспортировки единицы продукции, и требуется найти оптимальный вариант распределения потока в сети по критерию минимума стоимости, т.е. определить *поток минимальной стоимости*. Заметим, что при ограничении пропускной способности какой-либо дуги происходит перераспределение потоков, но без увеличения стоимости транспортировки. Если одно и то же значение целевой функции получается при различных наборах значений переменных, то такое решение называют *альтернативным*. При одинаковой стоимости различных путей из узла $i$ в узел $j$ ограничение пропускной способности по дуге ($i$—$j$) не вызывает повышения стоимости продукции, которая может продолжать транспортироваться по дуге ($k$—$j$). Дальнейшее ограничение пропускной способности дуги ($k$—$j$) приведет к тому, что про-

дукция, имеющаяся в начальном узле сети, не будет доставлена в конечный узел $j$.

Решение задачи поиска максимума потока в сети при ограничении на суммарную стоимость $A$ можно иногда находить очень просто: зная, что путь минимальной стоимости проходит через все узлы по определенным дугам графа, причем его стоимость $c_{ij}$ также известна, можно утверждать, что максимальный поток пройдет по тому же пути, а его объем (количество $Q$) составит: $Q = A/c_{ij}$.

Пояснение решения этих двух постановок задач на ряде конкретных примеров приведено в [78,82 и др.].

В целом задачи распределения потоков на сетях и оптимизации ресурсов имеют различные модификации. Множество разнообразных по содержанию приложений можно представить в виде задач оптимизации, решаемых специальными и более эффективными методами, включая применение специальных пакетов прикладных программ, реализующих методы расчета оптимальных решений, например, применяя компьютерные средства EXCEL-7.0, подробно рассмотренные в [52].

# Глава 4
# Методы и модели нелинейного программирования и их приложения

## 4.1. Задачи нелинейного программирования в процессах оптимизации ресурсов и принятия решений

Из методов математического программирования наиболее сложными считаются методы нелинейного программирования, подразделяющиеся (**рис. 4.1**) по типу оптимумов, задач и методов их решения. Дадим ряд определений и пояснений.

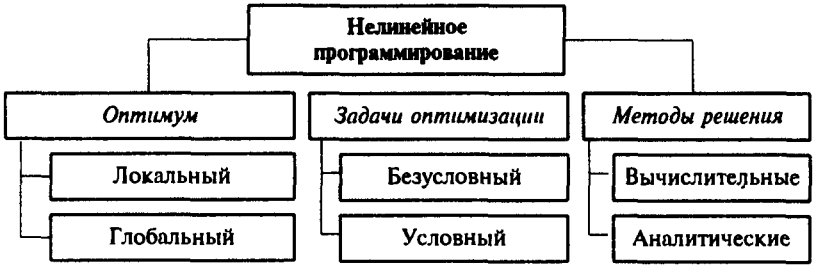



*Рис. 4.1.* ***Классификации задач нелинейного программирования***

Как известно, целевая функция $f(x)$ имеет *максимум* (*минимум*) в точке $x^*$, если в достаточной близости от этой точки (в ее окрестности) всем значениям $x$ (как большим, так и меньшим $x^*$) соответствуют значения $f$, меньшие (большие), чем $f(x^*)$. Максимум и минимум целевой функции объединяются в одно понятие *экстремум*.

Так как в практических задачах оптимизации каждая переменная $x_j$ не может изменяться от нуля до бесконечности, то для них задаются граничные условия $a_j \le x_j \le b_j$, в пределах которых может находиться искомое значение $x_j$ и целевая функция приобретает наибольшее, наименьшее и экстремальное значения (часто наибольшее или наименьшее значения целевой функции,

представляя оптимум, отличаются от экстремума и находятся на границе). Что касается линейных задач, то для них наибольшее или наименьшее значение целевой функции находится только на границе. Наибольшее (наименьшее) значение функции на границе не удовлетворяет приведенному выше описанию максимума (минимума). Поэтому наибольшее или наименьшее значение функции без учета того, где находится такое значение (внутри заданного интервала или на его границе), называют не экстремумом, а *оптимумом* (**рис. 4.2**). Оптимум — более широкое понятие, чем экстремум. Если экстремум есть не у всех функций, то в практических задачах оптимум существует всегда, причем он может быть как локальным, так и глобальным.

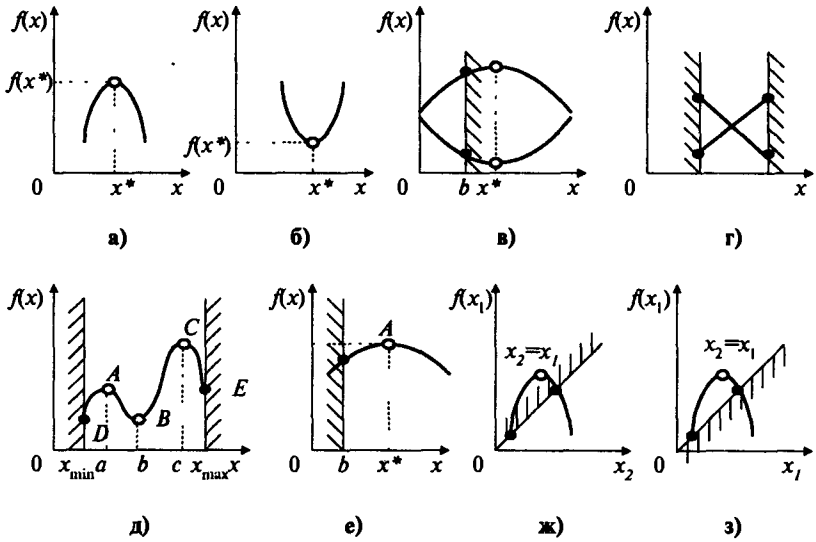



*Рис. 4.2.* ***Виды экстремумов и оптимумов функций:***

*○ — экстремум, ● — оптимум*

Заметим, что в большинстве технических и экономических задач оптимизации встречаются задачи только с локальными оптимумами; если же требуется определить глобальный и локальные оптимумы, то вместо одной задачи оптимизации придется решать несколько задач.

К задачам оптимизации в нелинейном программировании относятся задачи безусловной и условной оптимизации.

Задачами *безусловной оптимизации* называются такие, в которых задается лишь одна целевая функция $F = f(x_j) \to \max$ (min) без указания ограничений и граничных условий (эти задачи носят теоретический характер, так как на практике граничные условия задаются всегда). Поэтому в такого рода задачах при отсутствии граничных условий понятия оптимума и экстремума совпадают и для нахождения оптимума в них применяют методы нахождения экстремума.

Задачами *условной оптимизации* называются такие, когда, кроме целевой функции, в них задаются некоторые дополнительные условия, которые должны быть выполнены. Ограничения могут быть заданы в виде как уравнений, так и неравенств, при этом введение ограничений либо не влияет на оптимум, либо ухудшает его, подтверждая тем самым вывод, сделанный для задач линейного программирования, что введение дополнительных условий *не улучшает* оптимального решения, а в ряде случаев приводит к *несовместности*.

Из методов решения задач нелинейного программирования выделяются аналитические и вычислительные методы. Так как вычислительные методы основываются на аналитических методах, то рассмотрим их более подробно.

**Аналитические методы решения задач безусловной оптимизации**. Для того чтобы найти *экстремум функции одной переменной* $F = f(x)$, необходимо выполнить следующий алгоритм: **а)** найти первую производную $df/dx$; **б)** приравнять ее нулю; **в)** решить данное уравнение, из которого определить значения $x^*$, при которых функция имеет экстремум; **г)** найти вторую производную $d^2f/dx^2$ и определить знаки этой производной в точке $x^*$: если при этом $d^2f/dx^2 < 0$, то точка $x^*$ соответствует максимуму, а если $d^2f/dx^2 > 0$, то точка $x^*$ соответствует минимуму.

Проиллюстрируем работу данного алгоритма на простом примере.

***Пример 4.1.*** Требуется определить экстремум для функции от одной переменной $F_1 = -2x_1^2 + 12x_1 - 10$.

Р е ш е н и е. Для наглядности сведем ряд вычислений в табл. 4.1, построим график заданной функции (**рис. 4.3, а**), а затем произведем необходимые действия согласно вышеприведенному алгоритму.

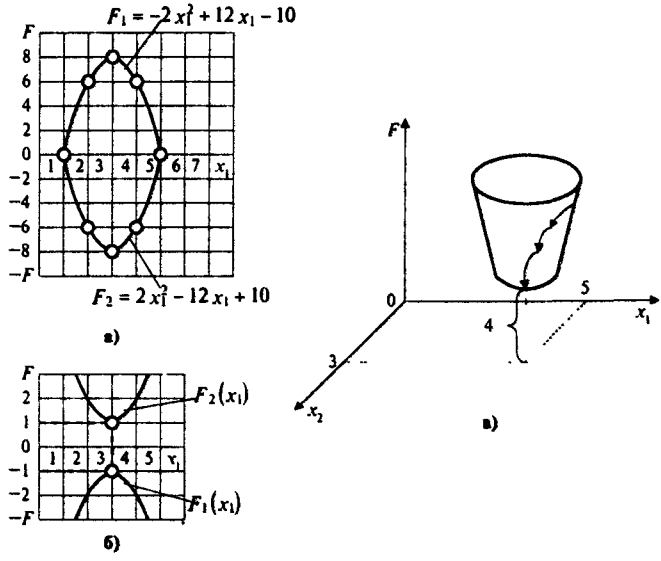



*Рис. 4.3.* ***Виды исследуемых функций***

1. Найдем первую производную заданной функции:

$$dF_1/dx = -4x_1 + 12;$$

2. Приравняем первую производную нулю и решим полученное уравнение: $-4x_1 + 12 = 0$; отсюда получим, что $x_1 = 3$.

Таким образом, получаем, что экстремум функции находится в точке с координатой $x_1^* = 3$.

3. Находим вторую производную заданной функции:

$$d^2F/dx^2 = -4 < 0,$$

т. е. в найденной точке $x_1^* = 3$ исследуемая функция имеет максимум.

Если же нам требуется найти функцию $F_1(x) \to \max$, то следует ввести другую функцию вида $F_2(x) = -F_1(x)$ и отыскать $F_2(x) \to \min$. Таким образом, переходя от заданной функции $F_1 = -2x_1^2 + 12x_1 - 10$ к функции $F_2 = -F_1$, т. е. $F_2 = 2x_1^2 - 12x_1 + 10$, получим ее значения (табл. 4.1, **рис. 4.3, а**).

*Таблица 4.1.* ***Результаты вычислений функции***

| *Функция $F_i(x_1)$* | *Значения аргумента x* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* |
| $F_1(x_1)$ | 0 | 6 | 8 | 6 | 0 |
| $F_2(x_1)$ | 0 | −6 | −8 | −6 | 0 |

Из сравнения функций $F_1$ и $F_2$ следует: **а)** вместо максимума функции $F_1$, равного max $F_1$, появляется минимум функции $F_2$, равный min $F_2$; **б)** значения $x_1^* = 3$, соответствующие экстремуму для обеих функций, одинаковые; **в)** max $F_1 = 8$; min $F_2 = -8$. Следовательно, имеем, что max $F_1 = -$min $F_2$. Значит, чтобы уменьшить число вычислений, необходимо определять только минимум функции.

Если же в задаче требуется определение *максимума* функции, то необходимо: **а)** перейти от функции $F_1$ к функции $F_2 = -F_1$; **б)** найти min $F_2$, находящийся в точке $x^*$; **в)** определить max $F_1 = -$min $F_2$, сохраняя значение $x^*$ без изменения.

Поясним работу этого алгоритма на следующем простом примере.

***Пример 4.2.*** Требуется найти $F_1 = -2(x_1 - 3)^2 - 1 \to$ max.

Решение. Перейдем к функции вида $F_2 = -F_1 = 2(x_1 - 3)^2 + 1 \to$ min, вид графиков $F_1$ и $F_2$ приведен на **рис. 4.3, б.**

Вычислим первую производную функции: $dF_2/dx_1 = 2 \cdot 2(x_1 - 3)$, откуда следует, что $x_1 = 3$. При этом min $F_2 = 2(3-3)^2 + 1 = 1$ и max $F_1 = -$min $F_2 = -1$.

Отсюда следует, что функция $F_1$ имеет максимум в точке $x_1^* = 3$, при этом max $F_1 = -1$ (с учетом этого свойства в дальнейшем будем определять только минимум функции).

Признак минимума функции одной переменной $dF/dx_1 = 0$ запишем в следующей форме:

$$[(dF/dx_1)^2]^{1/2} = 0, \qquad \textbf{(4.1)}$$

закончив определение экстремума функций от одной переменной.

Рассмотрим теперь процесс определения экстремума функций от двух переменных на следующем относительно простом примере.

***Пример 4.3.*** Необходимо найти минимум функции вида:

$$F = (x_1 - 5)^2/2 + (x_2 - 3)^2/3 + 4 \to \min,$$

график которой приведен на **рис. 4.3, в.**

Решение. В этом случае требуется найти частные производные по каждой переменной и приравнять их нулю. В результате получим:

$$\partial F/\partial x_1 = 2(x_1 - 5)/2;\ x_1^* - 5 = 0;\ x_1^* = 5;$$

$$\partial F/\partial x_2 = 2(x_2 - 3)/3;\ x_2^* - 3 = 0;\ x_2^* = 3.$$

При этом имеем, что min $F = (5 - 5)^2/2 + (3 - 3)^2/3 + 4 = 4$.

В общем случае в функциях двух переменных действует следующий алгоритм: если задана целевая функция $F$

$$F = f(x_1, x_2) \to \min,$$

то необходимо найти частные производные и решить систему

$$\partial F/\partial x_1 = 0;\ \partial F/\partial x_2 = 0,$$

корни которой и явятся координатами точки минимума функции.

Для заданной функции из примера этот алгоритм запишем так:

$$[(\partial f/\partial x_1)^2 + (\partial f/\partial x_2)^2]^{1/2} = 0. \qquad \textbf{(4.2)}$$

Записи признака минимума функции одной переменной (**4.1**) является частным случаем условия (**4.2**), определяющего признак минимума функции двух переменных. Данный признак в более компактной форме можно записать так:

$$\left[\sum_{j=1}^{2}\left(\partial f/\partial x_j\right)^2\right]^{1/2} = 0.$$

Если теперь перейти к функции от $n$ переменных, то ее графически представить нельзя, но на нее можно распространить те выводы, что сделаны для функции двух переменных. Представим функцию $n$ переменных следующим образом:

$$F = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \min.$$

Данная функция имеет *минимум* в точке, координаты которой находятся в результате решения системы уравнений:

$$\partial F/\partial x_1 = 0;\ \partial F/\partial x_2 = 0;\ ...,\ \partial F/\partial x_n = 0. \qquad \textbf{(4.3)}$$

Условие (**4.3**) по аналогии с (**4.2**) можно записать следующим образом:

$$[(\partial F/\partial x_1)^2 + (\partial F/\partial x_2)^2 + ... + (\partial F/\partial x_n)^2]^{1/2} = 0,$$

или более кратко,

$$\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\partial f/\partial x_j\right)^2\right]^{1/2} = 0. \qquad \textbf{(4.4)}$$

Условие (**4.4**) является признаком минимума функции $n$ переменных. Аналогичные признаки для двух и одной переменных являются частными случаями признака для любого числа переменных $n$.

На этом закончим рассмотрение аналитических методов нахождения экстремума в задаче безусловной оптимизации.

**Задачи условной оптимизации и методы их решения.** Пошаговое перемещение человека от подножия горы к ее вершине можно

интерпретировать как процесс поиска экстремума функции с программной реализацией вычислительных методов на ЭВМ.

Известно, что все величины подразделяются на скалярные и векторные. *Скалярная* величина (масса, объем, длина, энергия, работа и т. д.) характеризуется одним значением. *Векторная* величина, или вектор (скорость, сила, ускорение, напряженность электрического и магнитного поля и др.), характеризуется величиной и направлением. Если известны проекции вектора $OA$ на оси координат $OA_1$ и $OA_2$ в двухмерном пространстве, то нетрудно найти его величину (длину, норму или модуль) и направление.

Вектор $OA$ в $n$-мерном пространстве задается вектор-столбцом, включающим $n$ строк

$$OA = \begin{vmatrix} OA_1 \\ OA_2 \\ \dots \\ OA_n \end{vmatrix},$$

а его модуль определяется так:

$$OA = [OA_1^2 + OA_2^2 + \dots + OA_n^2]^{1/2}.$$

Пусть задана функция $n$ переменных $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, или короче $F = f(x_j)$. Ее частные производные будут равны $\partial f/\partial x_1$, $\partial f/\partial x_2$, ..., $\partial f/\partial x_n$. Из этих частных производных составим вектор-столбец, который обозначим $\Delta f(x_j)$:

$$\Delta f(x_j) = \begin{vmatrix} \partial f/\partial x_1 \\ \partial f/\partial x_2 \\ \dots \\ \partial f/\partial x_n \end{vmatrix}.$$

Такой вектор-столбец, составляющими которого являются частные производные $\partial f/\partial x_j$, называют *градиентом функции* $f(x_j)$. Градиент показывает направление наискорейшего увеличения функции. Вектор, противоположный градиенту, называют *антиградиентом*, он показывает направление скорейшего уменьшения функции. Численной мерой *градиента*, как и любого вектора, является модуль, определяемый

$$|\Delta f(x_j)| = \left[(\partial f/\partial x_1)^2 + (\partial f/\partial x_2)^2 + \dots + (\partial f/\partial x_n)^2\right]^{1/2},$$

или $$\left|\Delta f(x_j)\right| = \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\partial f/\partial x_j\right)^2\right]^{1/2}. \qquad (4.5)$$

Обозначим модуль градиента через

$$\varepsilon_м = \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\partial f/\partial x_j\right)^2\right]^{1/2}.$$

По аналогии с (**4.4**) можно утверждать, что признаком экстремума является условие

$$\varepsilon_м = 0. \qquad (4.6)$$

Если при работе с ЭВМ мы получим в некоторой точке значение модуля, например, $\varepsilon_м = 0{,}00001$, то, строго говоря, требование (**4.6**) не выполнится, хотя данную точку принять за экстремум можно. Поэтому в практических расчетах задаются некоторым малым значением и считают признаком экстремума выполнение условия

$$\varepsilon_м \le \varepsilon_м^{доп}, \qquad (4.7)$$

т. е. если оптимальное значение целевой функции порядка единицы, то за допустимое значение можно принять $\varepsilon_м^{доп} = 0{,}01$. При этом допускаемая ошибка составит менее 1%.

Для некоторых функций в точке, которую можно на практике принять за экстремум, условие (**4.7**) не выполняется. Поэтому во избежание увеличения числа шагов при вычислении (для сокращения времени поиска экстремума) вводят еще два признака экстремума:

$$\varepsilon_F = \left|F_k - F_{k-1}\right| \le \varepsilon F^{зад}; \qquad (4.8)$$

$$\varepsilon_x = \sum_{j=1}^{n}\left[x_j^k - x_j^{k-1}\right] / x_j \le \varepsilon x^{зад}. \qquad (4.9)$$

Величина $\varepsilon_F$ показывает *абсолютное значение приращения* целевой функции на $k$-м шаге (если это приращение мало, т. е. поверхность очень полога, то такую точку можно принять за экстремум). Следовательно, выполнение условия (**4.8**) обеспечивает нахождение экстремума для пологих поверхностей (для горизонтальной плоскости $\varepsilon_F = 0$). Условие (**4.9**) позволяет определить экстремум для крутых поверхностей (для вертикальной плоскости $\varepsilon_x = 0$). Допустимые значения $\varepsilon_F^{доп}$, $\varepsilon_x^{доп}$ так же, как и $\varepsilon_м^{доп}$, при целевой функции, составляющей несколько единиц, можно принять

$$\varepsilon_F^{доп} = \varepsilon_x^{доп} = \varepsilon_м^{доп} = 0{,}01.$$

Наиболее простая задача условной оптимизации имеет вид:

$$F = f(x_j) \to \min;$$

$$a_j \le x_j \le b_j,$$

т. е. на каждую переменную вводятся граничные условия. Подобная задача условной оптимизации решается следующим алгоритмом.

**1.** Производится поиск вершины, как в случае безусловной оптимизации: если в ходе поиска значение переменной $x_j$ на $k$-й итерации выходит на (или за) нижнюю границу (т. е. оказывается $x_j^k \le a_j$), то в качестве оптимального принимается значение $x_j^* = a_j$, и поиск продолжается по остальным переменным; аналогично осуществляется поиск для верхней границы;

**2.** Если в ходе поиска получается, что $x_j^k \ge b_j$, то принимается $x_j^k = b_j$. Назначение граничных условий, если оно не задается содержанием задачи, должно удовлетворять двум противоречивым требованиям: с одной стороны, интервал $b_j - a_j$ должен быть больше, чтобы в нем оказалась искомая вершина, а с другой —его желательно иметь не очень большим, чтобы нахождение вершины не требовало очень большого числа итераций (число итераций не только увеличивает продолжительность решения задачи, но и приводит к тому, что всегда присутствующие ошибки вычислений становятся соизмеримыми с искомыми величинами, и чтобы выйти из этого противоречия, лучше назначить небольшой интервал $b_j - a_j$, решить задачу и определить, как назначенные границы влияют на результат).

В общем случае задача условной оптимизации имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &F = f(x_j) \to \min; \\ &g_i(x_j) = 0; \\ &a_j \le x_j \le b_j. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.10)}$$

Известен ряд достаточно сложных методов решения подобных задач [1, 2, 16, 78, 84, 129, 130]. Рассмотрим один из таких методов, называемый *методом штрафных функций*, суть которого заключается в следующем. От задачи условной оптимизации **(4.10)** переходят к такой задаче, в которой минимизируется новая целевая функция, включающая, кроме заданной целевой функции $f(x_j)$, заданные ограничения $g_i(x_j)$. Новая целевая функция записывается следующим образом:

$$\Phi(x_j) = f(x_j) + \Psi[g_i(x_j)] \to \min, \qquad \textbf{(4.11)}$$

где $\Psi[g_i(x_j)]$ — штрафная функция.

Вводимая штрафная функция $\Psi[g_i(x_j)]$ должна удовлетворять следующим требованиям:

$\Psi[g_i(x_j)] = 0$, если $x_j$ находится в области допустимых решений;

$\Psi[g_i(x_j)] > 0$, если $x_j$ находится вне области допустимых решений.

Штрафная функция может иметь следующий вид:

$$\Psi\left[g_i(x_j)\right] = M\sum_{i=1}^{m} g_i^2(x_j), \qquad \textbf{(4.12)}$$

где $M$ — большое число (например, если ожидаемое оптимальное значение целевой функции порядка единиц, то можно принять $M = 1000$).

Если $x_j$ находится в области допустимых решений, то выполняются все ограничения и, значит, $g_i(x_j) = 0$. При этом штрафная функция (**4.12**) равняется нулю, и новая целевая функция (**4.11**) оказывается равной заданной, т. е.

$$\Phi(x_j) = f(x_j) \to \min.$$

Если $x_j$ не находится в области допустимых решений, то не выполняются ограничения, т. е. $g_i(x_j) \neq 0$. Значит, $g_i^2(x_j) > 0$, а большое число $M$ приводит к тому, что в новой целевой функции (**4.11**) штрафная функция (**4.12**) оказывается существенно больше заданной целевой функции $f(x_j)$. Поэтому в ходе минимизации благодаря большому градиенту в первую очередь уменьшается штрафная функция $\Psi[g_i(x_j)]$, пока она не станет равной нулю (т. е. пока значения $x_j$ не войдут в область допустимых решений или пока мы не получим допустимого решения), а далее начинается процесс минимизации заданной целевой функции, о чем уже упоминалось.

***Пример 4.4.*** Нужно решить задачу условной оптимизации вида:

$$\left.\begin{aligned} &F = x_2 \to \min;\\ &x_2 = 2\left(x_1-2\right)^2 + 1;\\ &\left(x_1-3\right)^2 + \left(x_2-0{,}5\right)^2 \geq 4;\\ &0 \leq x_1 \leq 4,\ 0 \leq x_2 \leq 3. \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е . Первое ограничение представляет собой параболу с координатами вершины $A$ (2;1), второе — часть плоскости, находящуюся вне окружности радиусом $R = 2$, центр которой имеет координаты О (3; 0,5). Без наложения второго ограничения минимум находился бы в вершине параболы в точке $A$ и имел бы значение $F_1 = 1$. Наложение дополнительного условия ухудшило результат. Минимум переместился в точку $B$ с координатой $x_1 = 1{,}4$. При этом $F_2^* = x_2 = 1{,}8$, т. е. его значение ухудшилось.

Решение этой задачи методом штрафных функций предусматривает следующий алгоритм.

1. Записывается условие задачи в виде системы (4.10):

$$\left.\begin{array}{l} F = x_2 \to \min; \\ x_2 - 2\left(x_1 - 2\right)^2 - 1 = 0; \\ \left(x_1 - 3\right)^2 + \left(x_2 - 0{,}5\right)^2 - y_1 - 4 = 0; \\ 0 \le x_1 \le 4;\ 0 \le x_2 \le 3; \\ y_1 \ge 0. \end{array}\right\}$$

Чтобы удовлетворить форме выражения (4.10), во втором ограничении сделан переход от неравенства к уравнению и введена неотрицательная переменная $y_i \ge 0$.

2. Составляется новая целевая функция, включающая штрафную функцию с числом $M = 1000$. Тогда получим:

$$\left.\begin{array}{l} F = x_2 + 1000\left\{\left[x_2 - 2\left(x_1 - 2\right)^2 - 1\right] + \left[\left(x_1 - 3\right)^2 + \left(x_2 - 0{,}5\right)^2 - y_1 - 4\right]\right\} \to \min; \\ 0 \le x_1 \le 4;\ 0 \le x_2 \le 3; \\ y_1 \ge 0. \end{array}\right\}$$

3. Далее проводится решение полученной системы.

Рассмотрим решение ряда прикладных проблем потребительского выбора с иллюстрацией на конкретных примерах и применением наиболее распространенных нелинейных методов оптимизации, в частности, метода Лагранжа с геометрической интерпретацией получаемых результатов.

## 4.2. Применение метода Лагранжа для решения задач оптимизации на условный экстремум

Суть *метода Лагранжа* состоит в построении функции вида $L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$ от трех переменных $x_1$, $x_2$, $\lambda$, называемой функцией Лагранжа, и в сведении задачи на условный экстремум в случае двух независимых переменных к задаче на абсолютный экстремум функции $L(x_1, x_2, \lambda)$ трех независимых переменных $x_1$, $x_2$, $\lambda$.

*Функция Лагранжа* $L(x_1, x_2, \lambda)$ представляет собой сумму целевой функции (**4.13**) и функции ограничения (**4.14**), умноженной на новую независимую переменную $\lambda$, называемую *множителем Лагранжа*, входящую обязательно в первой степени:

$$f(x_1, x_2) \to \max \quad (f(x_1, x_2) \to \min) \tag{4.13}$$

при условии

$$g(x_1, x_2) = 0. \tag{4.14}$$

Необходимое условие локального условного экстремума функции (**4.13**) при наличии ограничения (**4.14**) в аналитической форме имеет следующий вид: пусть функции $f(x_1, x_2)$, $g(x_1, x_2)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка по переменным $x_1$ и $x_2$; пусть $(x_1^0, x_2^0)$ —точка условного локального экстремума функции (**4.13**) при наличии ограничения (**4.14**) и пусть grad $g(x_1^0, x_2^0) = 0$. Тогда существует единственное число $\lambda^0$, такое, что (трехмерная) точка $(x_1^0, x_2^0, \lambda^0)$ удовлетворяет следующей системе трех уравнений с тремя неизвестными $x_1$, $x_2$, $\lambda$:

$$\left.\begin{aligned} &\partial L(x_1, x_2, \lambda) / \partial x_1 = 0; \\ &\partial L(x_1, x_2, \lambda) / \partial x_2 = 0; \\ &\partial L(x_1, x_2, \lambda) / \partial \lambda = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

(отметим, что всегда $\partial L(x_1, x_2, \lambda)/\partial\lambda = g(x_1, x_2)$.

Иначе говоря, если двумерная точка $(x_1^0, x_2^0)$ есть точка локального экстремума функции (**4.13**) при наличии ограничения (**4.15**), то трехмерная точка $(x_1^0, x_2^0, \lambda^0)$ — критическая точка функции Лагранжа. Отсюда следует, что для нахождения точек (условного) локального экстремума функции (**4.13**) при наличии ограничения (**4.14**) прежде всего следует найти критические точки функции Лагранжа, т. е. найти все решения системы уравнений (**4.15**). Далее критические точки функции Лагранжа следует укоротить, удалив из них последние координаты $\lambda^0$. Затем каждую укороченную критическую точку необходимо проанализировать, является ли она в действительности точкой (условного) локального экстремума функции (**4.13**) при наличии ограничения (**4.14**) или не является. При этом используют геометрические или содержательные экономические соображения.

В некоторых новых задачах на условный экстремум, появляющихся в экономике, обычно укороченная критическая точка функции Лагранжа действительно является точкой условного локального (и глобального) экстремума функции (**4.13**).

***Пример 4.5.*** Найти экстремум функции $y = x_1^2 + x_2^2$ при условии, что $x_1 + x_2 - 1 = 0$, т. е. решить задачу на условный экстремум методом Лагранжа.

Решение. Имеем $L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 1)$, откуда следует, что

$$\left.\begin{aligned} &\partial L(x_1, x_2, \lambda) / \partial x_1 = 2x_1 + \lambda = 0; \\ &\partial L(x_1, x_2, \lambda) / \partial x_2 = 2x_2 + \lambda = 0; \\ &\partial L(x_1, x_2, \lambda) / \partial \lambda = x_1 + x_2 - 1 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.16)$$

Из первых двух уравнений получаем, что $x_1 = x_2$, откуда, используя третье уравнение, получаем, что $x_1^0 = x_2^0 = 1/2$.

Таким образом, система уравнений (**4.16**) имеет единственное решение, т. е. дает единственную критическую точку функции Лагранжа $(1/2, 1/2, -1)$ $(\lambda^0 = -2x_1^0 = -2 \cdot 1/2 = -1)$. Укороченная критическая точка $(x_1^0, x_2^0) = (1/2; 1/2)$ есть точка условного локального (также и глобального) минимума заданной функции при ее заданном ограничении, так как непосредственно проверяется, что при $(x_1, x_2)$ $(x_1^0, x_2^0)$ справедливо неравенство $f(x_1, x_2) > f(x_1^0, x_2^0) = 1/2$.

Если задана общая задача (**4.17**) с ограничениями (**4.18**) на определение условного экстремума:

$$f(x_1,\ldots, x_n) \to \max \ (f(x_1,\ldots, x_n) \to \min) \qquad (4.17)$$

при условиях

$$\begin{aligned} &g_1(x_1,\ldots, x_n) = 0, \\ &\ldots\ldots \\ &g_n(x_1,\ldots, x_n) = 0 \text{ (обычно } m < n), \end{aligned} \qquad (4.18)$$

то функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x_1,\ldots, x_n, \lambda_1,\ldots, \lambda_m) = f(x_1,\ldots, x_n) + \lambda_1 g(x_1,\ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m g_m(x_1,\ldots, x_n).$$

При этом система (**4.16**) переписывается в виде системы $n + m$ уравнений с $n + m$ неизвестными $x_1,\ldots, x_n, \lambda_1,\ldots, \lambda_m$.

Критическая $(n + m)$-мерная точка $(x_1^0,\ldots, x_n^0, \lambda_1^0,\ldots, \lambda_m^0)$ функции Лагранжа после операции укорачивания приобретает вид $(x_1^0,\ldots, x_n^0)$ $n$-мерной точки.

Если использовать понятие градиента, то условия локального экстремума для функции $f(x_1, x_2)$ можно представить в компактной векторной форме:

$$\operatorname{grad} f(x_1, x_2) + \lambda \operatorname{grad} g(x_1, x_2) = 0.$$

Для критической точки $(x_1^0, x_2^0, \lambda^0)$ функции Лагранжа имеем:

$$\operatorname{grad} f(x_1^0, x_2^0) = -\lambda^0 \operatorname{grad}(x_1^0, x_2^0),$$

что эквивалентно тому, что в точке $(x_1^0, x_2^0)$ линии уровней $f(x_1^0, x_2^0)$ и 0 функций $f(x_1, x_2)$ и $g(x_1, x_2)$ соответственно касаются (напомним, что $\operatorname{grad}(x_1^0, x_2^0) = 0$).

Теперь приведем необходимое условие локального условного экстремума функции (**4.13**) при наличии ограничения (**4.14**) в *геометрической форме.*

Пусть функции $f(x_1, x_2)$, $g(x_1, x_2)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка по переменным $x_1$ и $x_2$; пусть $(x_1^0, x_2^0)$ — точка условного локального экстремума функции (**4.13**) при наличии ограничения (**4.14**) и пусть $\operatorname{grad} f(x_1^0, x_2^0) = 0$ и $\operatorname{grad} g(x_1^0, x_2^0) = 0$.

Тогда $\operatorname{grad} f(x_1^0, x_2^0)$ и $\operatorname{grad} g(x_1^0, x_2^0)$, выходящие из точки $(x_1^0, x_2^0)$, обязательно расположены на одной прямой с противоположными направлениями, что эквивалентно тому, что линии уровней функций $f(x_1, x_2)$ и $g(x_1, x_2)$, содержащие точку $(x_1^0, x_2^0)$, касаются в этой точке (**рис. 4.4, а**), являющейся точкой условного локального максимума. Фрагмент карты линий уровня целевой функции $f(x_1, x_2)$ типичен для экономической теории. Однако необходимое условие (в том числе и геометрическое) локального экстремума функции (**4.13**) при наличии ограничения (**4.14**), вообще говоря, не является достаточным, т. е. в случае касания в точке $(x_1^0, x_2^0)$ линий уровня функций $f(x_1, x_2)$ и $g(x_1, x_2)$ (это эквивалентно расположению на одной прямой градиентов $\operatorname{grad} f(x_1^0, x_2^0)$ и $\operatorname{grad} g(x_1^0, x_2^0)$, исходящих из точки $(x_1^0, x_2^0)$), точка $(x_1^0, x_2^0)$ может и не являться точкой условного локального экстремума функции (**4.13**) при наличии ограничения (**4.14**). Иллюстрацией этому может служить точка $(x_1^0, x_2^0)$ на **рис. 4.4, б** — укороченная критическая точка функции Лагранжа, которая не является точкой локального экстремума функции (**4.13**)

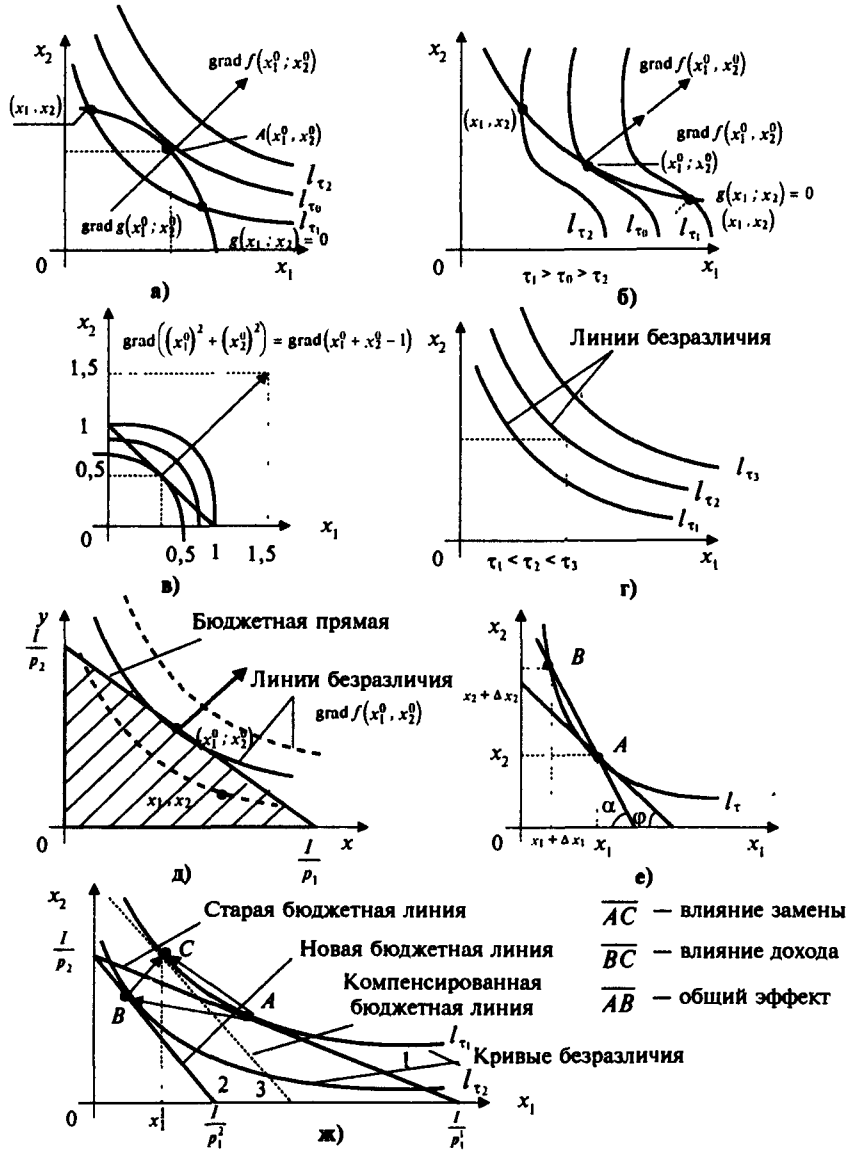



***Рис. 4.4. Определение экстремумов в задачах потребительского спроса:*** **а** — градиент функции $y = f(x_1^0; x_2^0)$ и $g(x_1^0; x_2^0)$; **б** — «укороченная» критическая точка; **в** — поиск условного экстремума; **г** — линии безразличия; **д** — график потребительского выбора; **е** — интерпретация замены благ; **ж** — процесс взаимозаменяемости и компенсационных эффектов

при наличии ограничения **(4.14)**, что очевидно из наглядных геометрических построений, так как в точках $(x_1, x_2)$, расположенных на линии $g(x_1, x_2) = 0$ строго выше точки $(x_1^0, x_2^0)$, справедливо неравенство $f(x_1, x_2) < f(x_1^0, x_2^0)(t_1 < t_0)$, а в точках $(x_1, x_2)$, расположенных на линии $g(x_1, x_2) = 0$ строго ниже точки $(x_1^0, x_2^0)$, справедливо неравенство $f(x_1, x_2) > f(x_1^0, x_2^0)$ $(t_2 > t_0)$, причем для **рис. 4.4,в** $\lambda^0 = -1/2$ (заметим, что фрагмент на **рис. 4.4, б** нетипичен для экономической теории).

В заключение отметим следующие особенности [1, 82].

**1.** Если в задаче **(4.13)**, **(4.14)** на условный экстремум ограничение **(4.14)** в виде равенства заменить на ограничение $g(x_1, x_2) \le 0$ в виде неравенства, то мы получаем частный случай задачи математического программирования:

$$f(x_1, x_2) \to \max \qquad (f(x_1, x_2) \to \min) \tag{4.13a}$$

при условии

$$g(x_1, x_2) \le 0. \tag{4.19}$$

**2.** Задача математического программирования оказывается более общей задачей по сравнению с задачами на абсолютный (если исключить все специальные и общие ограничения) и условный (если исключить все общие ограничения, а из специальных оставить одно в виде равенства) экстремумы. Однако на практике в случае задачи математического программирования речь идет только о глобальном экстремуме, а в задачах на абсолютный и условный экстремум — как о глобальном, так и о локальном экстремуме.

**3.** В экономической теории часто задача математического программирования сводится к задаче на условный экстремум (таковыми являются, к примеру, задачи потребительского выбора, или рационального поведения потребителя на рынке, рассматриваемые подробно в следующем параграфе и имеющие вид:

$$\left.\begin{aligned} &u(x_1, x_2) \to \max, \\ &p_1 x_1 + p_2 x_2 \le I, \\ &x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

Здесь $(x_1, x_2)$ —потребительский набор ($x_1$, $x_2$ — число единиц первого и второго продуктов или благ соответственно); $p_1$, $p_2$ — рыночная цена одной единицы первого и второго продуктов; $I$ — доход потребителя, который он готов потратить для

приобретения продуктов; $u(x_1, x_2)$ — функция полезности индивида.

**4.** Если геометрически интерпретировать задачу потребительского выбора, то заштрихованный треугольник на **рис. 4.4, д** показывает множество потребительских наборов $(x_1, x_2)$, доступных индивиду на рынке, но только на одном-единственном потребительском наборе $(x_1^0, x_2^0)$ потребитель максимизирует свою функцию полезности $u(x_1, x_2)$. В точке $(x_1^0, x_2^0)$ бюджетная прямая $p_1x_1 + p_2x_2 = I$ линия безразличия (см. § 4.3) касаются.

**5.** В связи с тем, что $p_1x_1^0 + p_2x_2^0 = I$, оптимальное решение $(x_1^0, x_2^0)$ ЗМП совпадает с решением $(x_1^0, x_2^0)$ следующей (более простой) задачи на условный (глобальный) экстремум:

$$u(x_1, x_2) \to \max$$

при условии

$$p_1x_1 + p_2x_2 - I = 0.$$

Таким образом, задача потребительского выбора может быть записана в виде как ЗМП, так и задачи на условный экстремум. С математической точки зрения это разные задачи, однако они имеют *одно* и то же решение $(x_1^0, x_2^0)$ —потребительский набор, который максимизирует (глобально) функцию полезности $u(x_1, x_2)$ и удовлетворяет бюджетному ограничению $p_1x_1 + p_2x_2 \le I$ как равенству $p_1x_1^0 + p_2x_2^0 = I$. На **рис. 4.4, г** также показаны градиенты функции полезности $u(x_1, x_2)$ и функции ограничения $p_1x_1 + p_2x_2 = I$ в точке $(x_1^0, x_2^0)$: grad $(x_1^0, x_2^0)$ и $(p_1, p_2)$. Эти градиенты расположены на одной прямой, проходящей через точку $(x_1^0, x_2^0)$, что, как уже отмечалось, эквивалентно касанию линии безразличия и бюджетной прямой в точке $(x_1^0, x_2^0)$.

Из сказанного следует, что конкретные задачи рационального поведения потребителя на рынке можно решать (к сожалению, не всегда) как задачи на условный экстремум.

**6.** Если в ЗМП все функции $f(x_1, x_2)$, $g_1(x_1, x_2)$,..., $g_m(x_1, x_2)$ являются линейными, имеем задачу линейного программирования, подробно рассмотренную в гл. 2, а если же хотя бы одна из приведенных функций окажется нелинейной, то имеем задачу нелинейного программирования.

Ниже на примере решения задач потребительского выбора рассмотрим модели потребительского спроса, особенности

влияния компенсационных эффектов на максимизацию функции полезности.

## 4.3. Модели потребительского спроса с учетом функции полезности и компенсационных эффектов

**Функция полезности. Задача потребительского выбора.** Пусть потребитель располагает доходом $I$, который полностью расходуется им на приобретение благ (продуктов), причем цены благ считаются заданными. Учитывая текущие структуру цен, объем дохода $I$ и собственные предпочтения, потребитель приобретает определенное количество благ. Математическая модель его поведения в этой ситуации называется *моделью потребительского выбора* (ПВ).

Рассмотрим сначала простейшую модель ПВ с двумя видами благ, что удобно интерпретировать графически, сохраняя при этом принципиальные свойства общей модели. Итак, *потребительский набор* как вектор $(x_1, x_2)$ состоит из двух благ ($x_1$ — количество единиц первого блага, $x_2$ —количество единиц второго блага).

Выбор каждого потребителя характеризуется отношением предпочтения: про каждые два набора он может сказать, что либо один из них более желателен, либо они для него равноценны (отношение предпочтения транзитивно, т. е. если набор $A = (a_1, a_2)$ предпочтительнее набора $B = (b_1, b_2)$, а набор $B$ предпочтительнее набора $C = (c_1, c_2)$, то набор $A$ предпочтительнее набора $C$.

На множестве потребительских наборов $(x_1, x_2)$ можно определить индивидуальную *функцию полезности потребителя* $u(x_1, x_2)$, значение которой на потребительском наборе $(x_1, x_2)$ соответствует его потребительской оценке по этому набору (потребительскую оценку $u(x_1, x_2)$ называют еще *уровнем* (или *степенью*) удовлетворения потребностей индивида, если он приобретает или потребляет данный набор $(x_1, x_2)$). Если набор $A$ предпочтительнее набора $B$, то $u(A) > u(B)$.

Функция полезности удовлетворяет следующим свойствам:

**1)** рост потребления одного блага при постоянном потреблении другого ведет к росту потребительской оценки. Если

$$x_1^2 > x_1^1, \text{ то } u(x_1^2, x_2) > u(x_1^1, x_2);$$

$$x_2^2 > x_2^1, \text{ то } u(x_1, x_2^2) > u(x_1, x_2^1).$$

Данное свойство вытекает из условия существования первых частных производных функции полезности:

$$\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1 = u_1' > 0; \ \partial u\ (x_1, x_2)/\partial x_2 = u_2' > 0.$$

Первые частные производные называют *предельными полезностями* благ, обозначаемых как $u_1'$, или $M_1u(x_1, x_2)$, — предельная полезность первого блага, а $u_2'$, или $M_2u(x_1, x_2)$, — предельная полезность второго блага;

2) предельная полезность каждого блага уменьшается при росте объема его потребления (данное свойство предельной полезности называется *законом убывания предельной полезности* и вытекает из условия отрицательности вторых частных чистых производных):

$$\partial^2u/\partial x_1^2 = u_{11} < 0, \qquad \partial^2u/\ \partial x_2^2 = u_{22} < 0;$$

3) предельная полезность каждого блага увеличивается, если растет количество другого блага (благо, количество которого не изменяется, оказывается относительно *дефицитным*, а каждая дополнительная его единица приобретает большую ценность и может быть потреблена более эффективно). Данное свойство справедливо лишь для благ, не являющихся полностью замещаемыми в потреблении, т. е. если

$$\partial^2u/\partial x_1\partial x_2 = u''_{12} = \text{const}; \qquad \partial^2u/\partial x_2\partial x_1 = u''_{21} > 0.$$

Линия, соединяющая потребительские наборы $(x_1, x_2)$, имеющие один и тот же уровень удовлетворения потребностей индивида, называется *линией безразличия*, или *линией уровня функции полезности*. Множество линий безразличия называется *картой линии безразличия*. Линии безразличия, соответствующие разным уровням удовлетворения потребностей, не касаются и не пересекаются (см. **рис.4.4, г, д**). Если линия безразличия $l_{r3}$ расположена выше и правее («северо-восточнее») линии безразличия $l_{r2}$, то $r_3 > r_2$. Иначе, чем «северо-восточнее» расположена линия безразличия, тем большему уровню удовлетворения потребности она соответствует. В целом свойства **1—3** означают, что линии безразличия убывают (являются нисходящими) и строго выпуклы к началу координат.

Рассмотрим фиксированную линию безразличия $l_r$, присущую потребительскому набору $(x_1, x_2)$ $l_r$. При выполнении ряда естественных предположений (непрерывность первых частных производных $u_1'$, $u_2'$ и $u_2' = 0$) справедливо (**рис.4.4, е**), что

$$dx_2/dx_1 = -\text{tg}\varphi \approx -\text{tg}\alpha = \Delta x_2''/\Delta x_1'' \approx -u_1'/u_2'.$$

Отношение ($\Delta x_2/\Delta x_1$) показывает, на сколько должен индивид увеличить (уменьшить) потребление второго продукта, если он уменьшил (увеличил) потребление первого продукта на одну единицу без изменения уровня удовлетворения своих потребностей. Геометрически этот вывод интерпретируется таким образом: точки $A$ ($x_1$, $x_2$), $B$ ($x_1 + \Delta x_1$, $x_2 + \Delta x_2$) принадлежат одной и той же линии безразличия $l_т$. Поэтому дробь $-\Delta x_2/\Delta x_1$ принято называть *нормой замены* первого блага вторым на потребительском наборе ($x_1$, $x_2$), а производную — $dx_2/dx_1$, примерно равную предельному значению $-\Delta x_2/\Delta x_1$ при $\Delta x_1 \to 0$, — *предельной нормой замены* первого блага вторым.

*Задача потребительского выбора* (задача рационального поведения потребителя на рынке) заключается в выборе такого потребительского набора $A(x_1^0, x_2^0)$, который максимизирует его функцию полезности при заданном бюджетном ограничении. Бюджетное ограничение означает, что денежные расходы на продукт не могут превышать денежного дохода:

$$p_1x_1 + p_2x_2 \le I,$$

где $p_1$ и $p_2$ —рыночные цены одной единицы первого и второго блага соответственно, $I$ —доход индивида, предназначенный для приобретения первого и второго блага (величины $p_1$, $p_2$ и $I$ заданы).

Формально задача потребительского выбора может иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} &u(x_1, x_2) \to \max, \\ &p_1x_1 + p_2x_2 \le I, \\ &x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.21)$$

Допустимое множество задачи (т. е. множество наборов благ, доступных для потребителя) представляет собой треугольник, ограниченный осями координат и бюджетной прямой (**рис. 4.4, д**). На этом множестве требуется найти точку, принадлежащую кривой безразличия с максимальным уровнем полезности. Поиск этой точки можно интерпретировать графически как последовательный переход на линии все более высокого уровня полезности (вправо-вверх) до тех пор, пока эти линии еще имеют общие точки с допустимым множеством.

**Решение задач потребительского выбора и его свойства.** Набор ($x_1^0$, $x_2^0$), являющийся решением задачи потребительского выбо-

ра, принято называть *оптимальным* для потребителя, или *локальным рыночным равновесием* потребителя. Основным важным свойством задачи потребительского выбора является то, что оптимальное решение задачи ($x_1^0$, $x_2^0$) сохраняется при любом монотонном преобразовании функции полезности $u_1(x_1, x_2)$. Так как значение $u(x_1^0, x_2^0)$ является максимальным на всем допустимом множестве, то оно остается таким и после монотонного преобразования функции полезности при сохраняющемся неизменным бюджетном ограничении (монотонное преобразование возникает при умножении функции полезности на некоторое положительное число, возведение ее в положительную степень, логарифмирование по основанию, большему единицы; заметим, что это свойство должно присутствовать у любой функции полезности.

Как видно из (**4.21**), задача потребительского выбора является задачей *нелинейного программирования*. Однако, если на каком-либо потребительском наборе ($x_1$, $x_2$) бюджетное ограничение $p_1x_1 + p_2x_2 \le I$ выполняется как строгое неравенство, то мы можем увеличить потребление какого-либо из продуктов и тем самым увеличить функцию полезности. Следовательно, набор ($x_1^0$, $x_2^0$), максимизирующий функцию полезности, должен обращать бюджетное ограничение в равенство, т. е. $p_1x_1 + p_2x_2 = I$. Графически это означает, что решение ($x_1^0$, $x_2^0$) задачи потребительского выбора должно лежать на бюджетной прямой (см. **рис. 4.4, д**), которую удобнее всего провести через точки пересечения с осями координат, где весь доход тратится на один продукт: (0; $I/p_2$) и ($I/p_1$; 0).

Таким образом, решение задачи потребительского выбора можно заменить на решение задачи на условный экстремум, для решения которой применим метод Лагранжа:

$$\left.\begin{aligned} &u(x_1, x_2) \to \max, \\ &p_1x_1 + p_2x_2 \le I, \\ &x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{aligned}\right\}$$

Функция Лагранжа имеет вид: $L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - I)$. Найдем ее первые частные производные по переменным $x_1$, $x_2$ и $\lambda$ и приравняем их к нулю:

$$\partial L/\partial x_1 = u_1' - \lambda p_1 = 0;$$

$$\partial L/\partial x_2 = u_2' - \lambda p_2 = 0;$$
$$\partial L/\partial \lambda = p_1 x_1 + p_2 x_2 - I = 0.$$

Исключив из полученной системы трех уравнений с тремя неизвестными неизвестную $\lambda$, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными $x_1$ и $x_2$:

$$u_1'/u_2' = p_1/p_2;$$
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I.$$

Решение $(x_1^0, x_2^0)$ этой системы есть «укороченная» критическая точка функции Лагранжа, которая обязательно является решением задачи потребительского выбора (за исключением угловых решений, которые здесь не рассматриваются). Заменив левую часть равенства, получим: $u_1'(x_1, x_2)/u_2'(x_1, x_2) = p_1/p_2$, т. е. в точке $(x_1^0, x_2^0)$ локального рыночного равновесия индивида отношение $u_1'(x_1^0, x_2^0)/u_2'(x_1^0, x_2^0)$ предельных полезностей $u_1'(x_1^0, x_2^0)$ и $u_2'(x_1^0, x_2^0)$ благ равно отношению их рыночных цен $p_1$ и $p_2$:

$$u_1'(x_1^0, x_2^0)/u_2'(x_1^0, x_2^0) = p_1/p_2. \qquad \textbf{(4.22)}$$

В связи с тем что отношение $u_1'(x_1^0, x_2^0)/u_2'(x_1^0, x_2^0)$ равно предельной норме замены первого блага вторым в точке локального рыночного равновесия $(x_1^0, x_2^0)$, из **(4.22)** следует, что эта предельная норма равна отношению рыночных цен $p_1/p_2$ на блага.

Геометрически решение $(x_1^0, x_2^0)$ можно интерпретировать как точку касания линии безразличия функции полезности $u_1(x_1, x_2)$ с бюджетной прямой $p_1x_1 + p_2x_2 = I$ (см. **рис. 4.4, д**). Это определяется тем, что отношение $dx_2/dx_1 = -u_1'/u_2'$ показывает тангенс угла наклона линии уровня функции полезности, а отношение $-p_1/p_2$ представляет тангенс угла наклона бюджетной прямой. Так как в точке потребительского выбора (или локального рыночного равновесия) они равны, в этой точке происходит касание данных двух линий. Из сказанного выше следует, что

$$-\Delta x_2^0 / \Delta x_1^0 = p_1/p_2, \qquad \textbf{(4.22a)}$$

т. е. отношение (со знаком минус) конечных (относительно небольших) изменений $(x, x)\Delta x_2^0$ и $\Delta x_1^0$ объемов благ в локальном рыночном равновесии $(x_1^0, x_2^0)$ приближенно равно отношению рыночных цен $p_1$ и $p_2$ на используемые блага.

Условие (**4.22а**) обусловливает примерные оценки отношения рыночных цен при известных конечных изменениях объемов благ в потребительском наборе, приобретаемом потребителем, причем координаты ($x_1^0$, $x_2^0$) решения задачи потребительского выбора — это функции параметров $p_1$, $p_2$ и $I$: $x_1^0 = f(p_1, p_2, I)$, $x_2^0 = f(p_1, p_2, I)$, называемые *функциями спроса* по первому и второму благу. Важным свойством функций спроса является то, что их значения инвариантны по отношению к пропорциональным изменениям цен и дохода (если все цены и доход изменятся в $k$-е число раз, величина спроса на продукт останется неизменной).

Пусть неизвестные количества благ равны $x_1$ и $x_2$, а их рыночные цены — $p_1$ и $p_2$. Тогда можно использовать следующую модель:

$$\left.\begin{aligned} &u(x_1, x_2) = x_1 x_2 \to \max, \\ &p_1 x_1 + p_2 x_2 \le I, \\ &x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0. \end{aligned}\right\}$$

Так как бюджетное ограничение в оптимальной точке ($x_1^o$, $x_2^o$) должно выполняться как равенство, и оба блага жизненно необходимы (полезность равна нулю, если одно из них отсутствует), то требования неотрицательности переменных тоже выполняются, и решаемая задача математического программирования превращается в классическую задачу на условный экстремум. Записав необходимые условия экстремума (согласно которым отношения предельных полезностей благ должны равняться отношениям их рыночных цен, а бюджетное ограничение выполняется как равенство), получаем систему уравнений:

$$x_2/x_1 = p_1/p_2; \qquad p_1x_1 + p_2x_2 = I.$$

Первое условие означает, что количества денег, затрачиваемые на оба блага, должны быть одинаковыми ($x_1p_1 = x_2p_2$), что вытекает из равенства весов или показателей степени переменных $x_1$, $x_2$ в функции полезности: $x_1p_1 = x_2p_2 = I/2$ и функции спроса приобретают вид: $x_1 = 0{,}5I/p_1$; $x_2 = 0{,}5I/p_2$.

Таким образом, расход на каждое благо составляет половину общего дохода потребителя, и чтобы найти необходимое количество каждого блага, следует разделить расходуемую на него сумму на его цену.

Случай потребительских наборов $(x_1,..., x_n)$ из $n$ благ принципиально аналогичен ситуации с двумя благами, но технически реализуем несколько сложнее.

**Общая модель потребительского выбора**. Рассмотрим свойства задачи потребительского выбора с произвольным числом благ и целевой функцией общего вида с последующим переходом к некоторым задачам, включая анализ компенсированного изменения цен.

Пусть заданы целевая функция предпочтения потребителя $u(x_1, x_2,..., x_n)$, где $x_i$ — количество $i$-го блага, вектор цен $\{p_i\} = (p_1, p_2,..., p_n)$ и доход $I$. Сформулируем следующую задачу:

$$u(x) \to \max \qquad (4.23)$$

при условиях

$$px \le I, \qquad x \ge 0,$$

где $x = (x_1,..., x_n)$, $p = (p_1,..., p_n)$, $px = (p_1x_1 +... + p_nx_n)$.

Считаем, что неотрицательность переменных обеспечивается свойствами целевой функции и бюджетного ограничения. В этом случае можно записать функцию Лагранжа и исследовать ее на безусловный экстремум.

Функция Лагранжа $L(x, \lambda) = u(x) + \lambda(px - I)$.

Необходимое условие экстремума состоит в равенстве нулю частных производных:

$$L_i' = u_i' + \lambda p_i = 0 \text{ для всех } i \ (i = \overline{1, n})$$

и

$$L' = px - I = 0.$$

Отсюда следует, что для всех $i$, $j$ в точке $x^0$ локального рыночного равновесия выполняется равенство:

$$u_i'/u_j' = p_i/p_j,$$

получаемое после перенесения вторых слагаемых необходимых условий в правую часть и делением $i$-го равенства на $j$-е. В точке оптимума отношение предельных полезностей любых двух благ равно отношению их рыночных цен, поэтому $u_i'/p_i = u_j'/p_j$.

Таким образом, получаем, что дополнительная полезность, приходящаяся на дополнительную единицу денежных затрат, в точке оптимума одинакова по всем видам благ (если это все было не так, то по крайней мере одну денежную единицу можно

было бы перераспределить так, чтобы выросло благосостояние, или значение функции полезности, потребителя. Если для некоторых $i$, $j$ благ достигнуто, что $u_i'/p_i > u_j'/p_j$, то можно попытаться перераспределить деньги от $i$ к $j$, увеличив уровень благосостояния потребителя.

**Модель Стоуна**. Выведем функцию спроса для конкретной функции потребительского предпочтения, называемой функцией Стоуна и имеющей следующий вид:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - a_i\right)^a \to \max,$$

$$\sum_i p_i a_i \le I.$$

Здесь $a_i$ — минимальное необходимое количество $i$-го блага, которое приобретается в любом случае и не является предметом выбора. Для того чтобы набор $\{a_i\}$ мог быть полностью приобретен, необходимо, чтобы доход $I$ был больше общего количества денег, необходимого для покупки этого набора, т. е. $I > \sum p_i a_i$. Коэффициенты степени $a_i > 0$ характеризуют относительную «ценность» блага для потребителя.

Приравняв нулю частные производные функции Лагранжа по переменным $x_i$, получаем для всех $i$ ($i = \overline{1, n}$): $c_i v\ (x)/(x_i - a_i) + \lambda p_i = 0$, откуда следует, что $x_i = a_i - c_i v\ (x)/\ \lambda p_i$.

Если к этим условиям добавляется равенство $\sum_i p_i x_i - I = 0$, выполнение которого эквивалентно равенству нулю частной производной функции Лагранжа по переменной $m$, то, умножив каждое $i$-е условие на $\lambda p_i$ и просуммировав их по $i$, получим:

$$\sum_i c_i\, v(x)_i + \lambda \sum_i p_i x_i - \lambda \sum_i p_i a_i = 0.$$

Так как в точке оптимума бюджетное ограничение выполняется как равенство, то, заменив $\sum_i p_i x_i$ на $I$, получим функцию спроса:

$$x_i = a_i + c_i\left(I - \sum_j p_j a_j\right) / \ p_i \sum_j c_i. \qquad \textbf{(4.24)}$$

Эту функцию легко проинтерпретировать и запомнить следующим образом: сначала приобретается минимально необходимое количество каждого блага $a_i$; затем рассчитывается сумма оставшихся денег, которая распределяется пропорционально «весам» важности $c_i$. Разделив количество денег на цену $p_i$, получаем дополнительно приобретаемое сверх обязательного минимума количество $i$-го блага и добавляем его к $a_i$.

Модель Стоуна имеет различные частные случаи:

1) если все $a_i = 0$, а все $c_i$ равны между собой, то получаем

$$x_i = I/np_i$$

(т. е. доход делится на $n$ равных частей и спрос на $i$-й товар рассчитывается как частное от деления полученной суммы денег на его цену; в данной ситуации спрос растет при росте дохода с эластичностью $E_x = 1$ и уменьшается с ростом цены с $E_x = -1$. Тем самым каждый товар в данной модели является нормальным и ценным, спрос растет до бесконечности при бесконечном росте дохода (в этом смысле каждый товар является как бы «предметом роскоши»);

2) для описания более разнообразных форм поведения спроса на различные товары в модель должны входить более сложные виды целевой функции предпочтения. Например, при функции предпочтения, имеющей вид $u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{b-a} (x_1 + b - a)^{-b}$, где $a$, $b$ — параметры, функция спроса является типичной:

а) для предметов первой необходимости

$$x_1 = aI/(I + bp_1);$$

б) для предметов роскоши

$$x_2 = I \cdot (I + p_1(b - a))/(I + bp_1).$$

**Взаимозаменяемость благ и эффекты компенсации**. Если функция спроса имеет вид $x_i = I/np_i$ (при $c_i$, не равных между собой, $x_i = Ic_i/p_i \sum_j c_j$), то спрос на $i$-й товар не зависит от цены на любой $j$-й товар. Вообще говоря, перекрестные функции спроса от цен характеризуют такие свойства товаров, как взаимозаменяемость и взаимодополняемость. Если при росте цены на товар $i$, при снижении спроса на $i$-й товар растет спрос на товар $j$, то эти товары взаимозаменяемы. Наоборот, если спрос на $j$-й товар также падает, они взаимодополняемы. Заметим, что реальная взаимозаменяемость может искажаться общим снижением благосостояния при росте цены $i$-го блага: $j$-е благо может заменять $i$-е в потреблении, но спрос на него может не расти, так как снизилось общее благосостояние потребителя. Для исключения этого искажения используют понятие *компенсированного изменения цены* (такого, которое сопровождается увеличением дохода потребителя для поддержания прежнего уровня благосостояния). Практически компенсированное изменение цены изображается графиком (**рис.4.4, ж**).

Пусть цена первого блага повысилась с $p_1^1$ до $p_1^2$, тогда бюджетная прямая из положения *1* перейдет в положение *2*. Точка *A* на линии безразличия $l_{\tau_1}$, касающейся первоначального бюджетного ограничения, будет заменена новой точкой оптимума *B*, где новая линия безразличия $l_{\tau_2}$ касается новой бюджетной прямой. Если мы хотим компенсировать потребителю потерю благосостояния, то увеличим его доход так, чтобы новая бюджетная прямая *3* (параллельная линии *2*) коснулась в некоторой точке *C* прежней линии безразличия $l_{\tau_1}$. Направленный отрезок *AC* показывает «эффект замены» при росте цены, т. е. изменения структуры спроса при условии поддержания прежнего уровня благосостояния. Направленный отрезок *BC* отражает «эффект дохода», т. е. изменение потребительского спроса при сохранении соотношения цен благ и изменении уровня дохода. Общий результат роста цены (при отсутствии компенсации) выражается направленным отрезком *AB*.

Для формального анализа компенсационных эффектов рассмотрим ряд примеров.

***Пример 4.7.*** Пусть целевая функция потребителя зависит от двух благ ($x_1$, $x_2$) следующим образом: $u(x_1, x_2) = x_1x_2 \to \max$. Пусть цены благ равны соответственно 10 и 2, а доход потребителя — 60. Тогда по полученной выше формуле функций спроса имеем:

$$x_1 = 60/(2 \cdot 10) = 3;\ x_2 = 60/(2 \cdot 2) = 15;\ u^* = 45.$$

Пусть теперь $p_2$ изменяется с 2 до 7. Необходимо определить необходимый размер компенсации.

Р е ш е н и е . Чтобы приобрести оптимальный набор, потребителю необходимо дополнительно $(7 - 2) \cdot 15 = 75$ денежных единиц. Однако прежняя структура потребления не будет оптимальной при новых ценах, и минимально необходимая компенсация будет меньше чем 75. Пусть потребитель получает дополнительно количество денег *M*. Тогда при новых ценах его спрос на первое и второе благо равняется:

$$x_1 = (60 + M)/10 \cdot 2;\ x_2 = (60 + M)/7 \cdot 2.$$

Целевая функция $x_1x_2$ будет равна $(60 + M)^2/10 \cdot 7 \cdot 4$, и это выражение должно равняться $u^* = 45$.

Отсюда имеем, что $M = 52{,}25 < 75$, т. е. этого недостаточно.

***Пример 4.8.*** Пусть по-прежнему $u(x_1, x_2) = x_1x_2$, цены благ равны $p_1$ и $p_2$, а доход *I*. Тогда имеем

$$x_1 = I/2p_i;\ \partial x_i/\partial p_i = -I/2p_i^2;\ \partial x_i/\partial I = 1/2p_i;\ \partial x_i/\partial p_j = 0.$$

Пусть теперь цена $p_1$ выросла в $z$ раз ($z > 1$), и при этом потребитель получает необходимую компенсацию. Новый размер дохода обозначим через $I^н$, спрос — через $x_1^н$ и $x_2^н$.

Очевидно, что $x_1^н = I^н/2zp_1$; $x_2^н = I^н/2p_2$, и условие компенсации имеет вид.

$$(I^н)^2/4zp_1p_2 = I^2/4p_1p_2,$$

откуда получаем:

$$I^н = I(z)^{1/2};\ x_1^н = x_1z^{-1/2};\ x_2^н = x_2(z)^{1/2}.$$

Таким образом, спрос на первый товар в случае с компенсацией сокращается в $(z)^{1/2}$ раз (а не в $z$ раз, как без нее), а спрос на второй товар в $(z)^{1/2}$ раз вырастет. В случае роста цены второго товара ситуация будет полностью симметричной. В целом имеем:

$$(\partial x_i/\partial p_j)_{\text{comp}} > 0$$

при $i$=1, $j$=2 или $j$=1, $i$=2; индекс comp означает, что перекрестная частная производная спроса рассчитывается при необходимой для поддержания прежнего уровня благосостояния компенсации дохода. Условие компенсации снимает «эффект дохода», оставляя лишь «эффект замены». Это позволяет более точно определять понятие взаимозаменяемости и взаимодополняемости благ и оценивать эти характеристики.

Блага $i$ и $j$ называются *взаимозаменяемыми*, если $(\partial x_i/\partial p_j)_{\text{comp}} > 0$ или $(\partial x_i/\partial p_j)_{\text{comp}} > 0$, и *взаимодополняемыми*, если $(\partial x_i/\partial p_j)_{\text{comp}} < 0$ или $(\partial x_i/\partial p_j)_{\text{comp}} < 0$.

Расчет частных производных для рассматриваемой задачи в ситуации, когда $p_1$ возрастет в $z$ раз, показывает следующее:

$$\Delta x_1 = x_1z^{-1/2} - x_1;\quad \Delta x_2 = z^{1/2}x_2 - x_2;\quad \Delta p_1 = zp_1 - p_1.$$

Тогда вычисление частных производных дает следующий результат:

$$(\partial x_1/\partial p_j)_{\text{comp}} = \lim_{z\to 1} [x_1(1 - z^{1/2})]/[p_1z^{1/2}(z-1)] =$$

$$= \lim_{z\to 1} -x_1/[p_1(z)^{1/2}(1 + z^{1/2})] = -x_1p_1/2 = -I/4p_1^2;$$

$$(\partial x_2/\partial p_1)_{\text{comp}} = \lim_{z\to 1} [x_2(z^{1/2} - 1)/p_1z^{1/2}(z-1)] =$$

$$= \lim_{z\to 1} x_2/[p_1z^{1/2}(1 + z^{1/2})] = x_2/2p_2 = I/4p_1p_2.$$

Так как $\partial x_2/\partial p_1 > 0$, это свидетельствует о взаимозаменяемости благ в рассмотренной нами задаче.

**Уравнение Слуцкого**. Российским математиком Е.Е. Слуцким в 1915 г. открыта следующая зависимость, связывающая действия эффектов замены или дохода с результирующим изменением спроса:

$$\partial x_i / \partial p_j = (\partial x_i / \partial p_j)_{\text{comp}} - (\partial x_i / \partial I)\, x_j.$$

Уменьшаемое правой части описывает *действие эффекта замены*, вычитаемое — *действие эффекта дохода*, выраженное в тех же единицах дохода (множитель $x_j$ приводит их к одной размерности). Слева записывается *результирующее воздействие на спрос*, складывающееся из изменения структуры спроса и общего его изменения при изменении уровня реального дохода.

Для ценных товаров величина $dx_i/dI > 0$, т. е. спрос растет при росте дохода. В этом случае $dx_i/dp_j < (dx_i/dp_j)_{\text{comp}}$: если спрос растет, то он растет больше при наличии компенсации, если падает — то в меньшей степени. Может оказаться и так, что $dx_i/dp_j < 0$, но $(dx_i/dp_j)_{\text{comp}} > 0$, т. е. товары $i$ и $j$ взаимозаменяемы, но представляются взаимодополняемыми без учета компенсации. Уравнение Слуцкого может рассматриваться как при разных, так и при совпадающих $i$ и $j$. Если оказывается, что $dx_i/dp_j > 0$ (спрос на товар растет при росте цены), то такие товары называются *товарами Гиффина*, и отсюда следует, если $dx_i/dI < 0$, это обязательно малоценный (худший) товар. Например, картофель как товар Гиффина удовлетворяет этому условию, а золото — нет (рост спроса на золото при росте его цены, имевший место в СССР, объясняется скрытой инфляцией и узостью сферы вложения свободных средств населения в тот период).

Если проверить уравнение Слуцкого для рассмотренной выше задачи потребительского выбора с функцией полезности $u(x_1, x_2) = x_1x_2$, то получим следующую систему:

$$dx_i/dp_i = -1/2p_i^2\,;\ dx_i/dI = 1/2p_i;$$

$$dx_2/dp_1 = 0;$$

$$(dx_1/dp_1)_{\text{comp}} = -\,Ip_1^2/4;$$

$$(dx_2/dp_1)_{\text{comp}} = Ip_1p_2/4.$$

Отсюда имеем, что $-1/2p_i^2 = -\,I/p_i^2 - 1/2p_i \cdot I/2p_i = -1/2p_i^2$ и $0 = I/4p_1p_2 - (1/2p_i \cdot 1/2p_i) = 0$.

Таким образом, условия уравнения Слуцкого (при $i = j$ и $i \neq j$) здесь выполнены. Уравнение Слуцкого можно использовать для нахождения и расчета эффекта замены и оценки взаимозаменяемости или взаимодополняемости благ, т. е. $(dx_i / dp_j)_{comp}$, так как частные производные без компенсации рассчитываются значительно легче.

Если проанализировать подробно эластичности функции спроса, то получим следующее. Эластичность спроса по цене $E_{ij}$ и доходу $E_{iI}$ составляет: $E_{ij} = \partial x_i / \partial p_j \cdot x_i / p_j$; $E_{iI} = \partial x_i / \partial I \cdot x_i / I$. Для функции $x_i = Ic_i / p_i \sum_j c_i$ эластичности составляют: $E_{ii} = -1$; $E_{ij} = 0$ $(i \neq j)$; $E_{iI} = 1$.

Если в функции спроса $x_i = x_i(p_1, p_2, .., p_n, I)$ все цены и доход увеличить в $m$ раз, то спрос $x_i$ не изменится. Таким образом, $x_i(mp, mI) = m^0 x_i(p, I) = x_i(p, I)$, т. е. функция спроса является однородной нулевой степени. Отсюда, согласно уравнению Эйлера должно выполняться следующее равенство:

$$\sum_{j=0}^{L}\left[\left(\partial x_i / \partial p_j\right) p_j\right] + \left[\left(\partial x_i / \partial I\right) I\right] = 0,$$

разделив которое на $x_i$, получим равенство $\sum E_{ij} + E_{iI} = 0$. Следовательно, сумма всех эластичностей спроса по ценам и доходам должна равняться нулю.

Покажем, что при наличии двух товаров они обязательно являются взаимозаменяемыми, для этого воспользуемся свойством $(\partial x_i / \partial p_j)_{comp} < 0$ и положительностью частных производных функции полезности. Предположим, что выросла цена первого товара $p_1$. Так как $(\partial x_1 / \partial p_1)_{comp} < 0$, то спрос на этот товар при условии компенсации падает. Если бы при этом упал спрос и на второй товар, то мы получили бы точку, в которой обоих товаров было бы меньше, чем в начальной. Следовательно, в этой точке значение функции полезности $u(x_1, x_2)$ также уменьшится (в условиях компенсации оно равняется начальному). Таким образом, спрос на второй товар при условии компенсации должен вырасти (т. е. $(\partial x_2 / \partial p_1)_{comp} > 0$), второй товар взаимозаменяем первым товаром.

## 4.4. Задачи автоматизации проектирования объектов, оптимизации ресурсов и принятия решений

До начала выпуска любой продукции, создания или внедрения в производство инноваций требуется осуществить их проек-

тирование, разработать структуру, техническое, математическое, программное и другое обеспечение. Процесс проектирования любого объекта с позиций содержания включает принятие решений и оформление документов, а с позиций формы — результаты проектирования, отображаемые в виде чертежей, расчетов, конструкторско-технической документации, служащих основой превращения проекта в будущую продукцию. Использование ЭВМ в составе *систем автоматизированного проектирования* (САПР) и *автоматизированных рабочих мест* (АРМ) ускоряет и повышает качество исполнения проектно-конструкторских работ и технической документации, а при наличии гибких производственных и информационных технологий обеспечивает быстрый переход от идеи к проектированию изделий, технологических процессов, организации и оптимизации производства и далее к созданию объекта, опытного образца системы или макета изделия. Однако сама по себе автоматизация не улучшает качества объектов проектирования, и если идея, принципы или методы создания изделия не соответствуют мировым стандартам, то выпуск документации на ЭВМ на такого рода изделия не улучшит его качества и эффективности.

**Оптимальное проектирование объектов**. Под *объектом проектирования* могут пониматься как технические, строительные, организационные и прочие объекты, так и разнообразные процессы функционирования, включая конструкторско-технологические и производственно-хозяйственные процессы, а также процессы принятия решений.

Улучшение свойств и характеристик любого объекта проектирования обычно обусловливается его удорожанием и ростом затрат. Основой создания средств новой техники являются расчеты: технические (инженерные), обеспечивающие правильное функционирование, прочность, надежность, качество и многие другие свойства; экономические, определяющие стоимость, потребность в ресурсах и затраты; технико-экономические, социальные и др., которые выполняются специалистами различного профиля и отраслей деятельности (инженерами, экономистами, финансистами, психологами, менеджерами, маркетологами и др.) в разном числе вариантов, а затем передаются ЛПР для отбора наилучшего из рассмотренных по определенному критерию с учетом ограничений и граничных условий с целью принятия им окончательного решения.

Однако нет гарантии, что принятое лучшее из предложенных вариантов решение является оптимальным. В оптимизационных

задачах важным является не столько получение решения, сколько проведение анализа решаемой задачи, включая параметрирование, когда одна из заданных величин принимается переменной и задача решается для различных значений параметрируемой величины с получением графиков, таблиц, номограмм, органично увязывающих технико-экономические параметры между собой, что гарантирует успешный исход проектирования.

Известно, что любой объект проектирования характеризуется структурой, определяющей его элементы, или звенья, и связи между ними, призванной обеспечивать надежное функционирование и достижение целей, поставленных перед объектом, и параметрами, характеризующими эти элементы.

Структуру объекта проектирования можно отображать, например, графовыми или сетевыми моделями; при этом: при непрерывных процессах функционирования объектов их элементы обычно представляются вершинами графа, а связи между звеньями — дугами графа; при дискретных процессах функционирования объектов их элементы удобно представлять сетевыми моделями.

В целом методика оптимального проектирования объектов включает этапы сбора исходных данных, составления математической модели, решения задачи и ее анализа.

*Сбор исходных данных* в задачах оптимального проектирования объектов связан с исходными данными, включающими: **а)** назначение, структуру, параметры объекта проектирования; **б)** характеристики отдельных элементов или звеньев; **в)** зависимость параметров системы от параметров звеньев.

*Составление математической модели*, как известно, предусматривает указание трех элементов —целевой функции; ограничений; граничных условий. Ограничения включают как зависимости параметров объектов проектирования от параметров звеньев, так и зависимости между параметрами звеньев и параметрами объекта. Граничные условия, так же как и целевая функция, назначаются исходя из постановки задач оптимизации. Так как в практических задачах граничные условия всегда известны, а целевая функция назначается исходя из поставленной задачи и тоже считается известной, то неизвестными обычно выступают лишь ограничения, описывающие зависимости между переменными в виде $g_i(x_j) = 0$ и подразделяющиеся по своему генезису на теоретические или статистические, устанавливаемые, к примеру, путем эксперимента.

Обычно параметры объекта проектирования исходя из физического содержания и возможностей эксперимента подразделя-

ются на *факторы и отклики*. Так как в эксперименте каждому фактору необходимо придавать различные значения, то при планировании эксперимента определяют: **а)** число необходимых экспериментов, обусловливаемое, как правило, необходимостью нахождения функций отклика; **б)** значения, придаваемые тем или иным факторам; **в)** степень сочетания и придания различным факторам различных значений.

Так как в задаче оптимизации для каждой переменной $x_j$, измеряемой в определенных натуральных единицах, должны быть заданы граничные условия, то для универсальности описания в планировании эксперимента переходят к относительным переменным $\gamma_i$ в соответствии с выражением:

$$\gamma_j = (x_j - x_j^{ц})/(\Delta x_j), \qquad \textbf{(4.25)}$$

где $x_j^{ц} = (a_j + b_j)/2$ —центральное значение $x_j$ (т. е. значение $x_j$ в середине интервала; $\Delta x_j = (b_j - a_j)/2$ —половина интервала; $b_j(a_j)$ —верхнее (нижнее) значение границы интервала.

Предположим, что параметр $100 \le x_j \le 200$, при этом имеем:

$$x_j^{ц} = (100 + 200)/2 = 150;$$
$$\Delta x_j = (200 - 100)/2 = 50$$

и относительная переменная $\gamma_j$ определяется так:

$$\gamma_j = (x_j - 150)/50.$$

При условии, что $x_j = a_j$ ($a_j$ —значение на нижней границе),

$$\gamma_j^{н\ г} = [a_j - (a_j + b_j)/2]/(b_j - a_j)/2 = (a_j - b_j)/(b_j - a_j) = -1.$$

При $x_j = b_j$ $\gamma_j^{в.\ г} = 1$ , а в центре интервала $\gamma_j^{ц} = 0$.

Таким образом, согласно (**4.25**) происходит переход от натуральной переменной $x_j$, принимающей значения в интервале $a_j \le x_j \le b_j$, к относительной переменной $\gamma_j$, принимающей значения $-1 \le \gamma_j \le 1$. Имеется и обратный переход:

$$x_j = x_j^{ц} + \Delta x_j \gamma_j.$$

С позиции значений, придаваемых каждому фактору, эксперименты могут быть двух-, трех- и многоуровневыми. В двухуровневом эксперименте факторам последовательно придаются два значения: $\gamma_j = -1$, $\gamma_j = 1$, и такой двухуровневый эксперимент можно проводить, если функция отклика представляет собой линейную зависимость, трехуровневый эксперимент дает все необходимые данные для получения функции отклика второго по-

рядка, и в нем каждому фактору придаются три значения: $\gamma_j = -1$; $\gamma_j = 0$; $\gamma_j = 1$. Многоуровневый эксперимент применяют в тех случаях, когда с помощью функций отклика второго порядка экспериментальные данные аппроксимировать не удается.

В каком сочетании следует придавать различным факторам различные значения? Число всевозможных сочетаний значений двух факторов в двухуровневом эксперименте составляет 4 ($2^2 = 4$) при комбинациях значений $\{x_1, x_2\} = \{-1, -1; -1, 1; 1, -1; 1, 1\}$, а в трехуровневом эксперименте 9 ($3^2 = 9$) при комбинациях значений $\{x_1, x_2\} = \{-1, -1; -1, 0; 0, -1; -1, 1; 1, -1; 0, 1; 1, 0; 0, 0; 1, 1\}$ и т. д. Эксперимент, в котором опыты проводят при всех возможных сочетаниях факторов, называют *полным факторным экспериментом* (ПФЭ). Число опытов $N_{ПФЭ}$ в полном факторном эксперименте:

$$N_{ПФЭ} = s^p,$$

где $s$ — число уровней; $p$ — число факторов.

Так как проведение каждого опыта — достаточно трудоемкая процедура, то стремятся к минимуму числа опытов путем *дробного факторного эксперимента* (при этом стремятся из всех опытов, необходимых при ПФЭ, отдельные сочетания исключаются по определенным правилам и опыты при этих сочетаниях не проводятся) и путем *композиционных планов* (при этом за основу принимают двухуровневый ПФЭ, добавляя к нему эксперименты, проводимые на других уровнях — как в центре, так и при различных значениях $\pm\alpha$, где $\alpha > 1$; так как $|\alpha| > 1$ выходит за заданные для факторов граничные условия, то эти варианты не рассматриваются; к принятому за основу двухуровневому ПФЭ добавляют опыты, проводимые только в центре, при $\gamma_j = 0$).

После составления плана эксперимента следует проведение самого эксперимента, получение искомых результатов и их обработка. Следует как можно точнее определить тенденцию зависимости отклика от факторов без включения в него неизбежных погрешностей. Поиск *тенденции зависимости* отклика от факторов включает: **а)** выбор аналитической зависимости $y = f(x)$; **б)** определение коэффициентов в зависимости от выбранного вида.

*Выбор вида аналитической зависимости* производится с учетом экспериментальных данных. Более подробно эти методы показаны в следующих главах и рассмотрены в [17, 33, 53, 78, 82, 130—133 и др.].

Определив функцию отклика $y_i = f(x_j)$, ее можно записать как ограничения в задаче оптимизации:

$$g_i(x_j) = f(x_j) - y_i = 0.$$

Рекомендуется следующая методика определения ограничений с помощью эксперимента [82].

**1.** Параметры объекта проектирования $x_j$ ($j = \overline{1, n}$) делятся на факторы $x_q$ ($q = \overline{1, p}$) и отклики $y_i$ ($i = \overline{1, m}$) так, чтобы $p + m = n$.

**2.** Устанавливаются граничные условия для факторов $a_j \le x_j \le b_j$.

**3.** Осуществляется переход к относительным переменным по зависимости (**4.25**).

**4.** Проводится задание порядка аппроксимирующего многочлена и установление числа искомых коэффициентов $l$.

**5.** Проводится выбор плана эксперимента.

**6.** По составленному плану проводят эксперимент (по форме табл. 4.2); число получаемых в нем откликов на план эксперимента не влияет.

**7.** С помощью имеющихся программных средств подбираются аппроксимирующие зависимости для функций отклика:

$$y_1 = f_1(x_j);\ y_2 = f_2(x_j);\ \ldots;\ y_m = f_m(x_j)$$

и оценивается точность аппроксимации.

**8.** Полученные зависимости записываются в форме ограничений:

$$\begin{aligned}
(x_{p+i}) : g_1(x_j) &= f_1(x_j) - x_{p+1} = 0;\\
g_2(x_j) &= f_2(x_j) - x_{p+2} = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
g_m(x_j) &= f_m(x_j) - x_{p+m} = 0.
\end{aligned}$$

**9.** Полученные ограничения $g_i(x_j)$ вводятся в модель задачи:

$$\left.\begin{aligned}
&F = f(x_j) \to \max\ (\min);\\
&g_i(x_j) = 0;\\
&a_j \le x_j \le b_j;\\
&i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.26)$$

*Таблица 4.2. Результаты проведенного эксперимента*

| Номер опыта | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ | ... | $\gamma_p$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_p$ | $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | |
| . | | | | | | | | | | | | |
| . | | | | | | | | | | | | |
| . | | | | | | | | | | | | |
| $N$ | | | | | | | | | | | | |

**Процессы выбора одной из множества альтернатив**. Аналогичные проблемы возникают при проектировании сложных объектов, когда приходится выбирать наилучшую из множества имеющихся альтернатив. Рассмотрим решение подобной задачи на следующем простом примере.

***Пример 4.9.*** Система гибридного интеллекта (СГИ) состоит из трех последовательно соединенных компонентов, каждый из которых реализуется несколькими способами (табл. 4.3). Система характеризуется следующими основными параметрами качества: $P_c$ —вероятностью безотказной работы; $C_c$ — стоимостью, поэтому каждый вариант реализации системы с определенными способами реализации компонентов оценивается этими же параметрами (в табл. 4.3 нижний индекс параметра соответствует варианту реализации, а верхний —виду компонента). Требуется выбрать наилучший вариант реализации системы с учетом показателей качества компонентов.

Р е ш е н и е . Качество системы обусловливается параметрами составных ее компонентов:

$$P_c = p_1 p_2 p_3; \qquad C_c = c_1 + c_2 + c_3, \tag{4.27}$$

где $p_1$, $p_2$, $p_3$ — вероятность безотказной работы соответствующего компонента системы; $c_1$, $c_2$, $c_3$ — их стоимость.

Выбор оптимального варианта состоит в отыскании такого варианта реализации каждого компонента, чтобы показатели качества системы являлись наилучшими. Сформулируем две постановки задачи (ПЗ) оптимизации:

*Первая постановка*

$$\left.\begin{aligned} &F_1 = C \to \min; \\ &P \ge P_з. \end{aligned}\right\} \tag{4.28}$$

*Вторая постановка*

$$\left.\begin{aligned} &F_2 = P \to \max; \\ &C \le C_з. \end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

Таким образом, при первой постановке задачи производится отбор таких вариантов реализации компонентов, чтобы СГИ яв-

лялась самой дешевой при условии, что вероятность ее безотказной работы будет не ниже заданной ($P \geq P_з$), во второй постановке — чтобы СГИ являлась самой надежной при условии, что ее стоимость не выше заданной.

*Таблица 4.3.* ***Исходные данные по вариантам реализации компонентов системы***

| *Варианты* | *Показатели качества компонентов* | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| 1 | $p_1^1 = 0{,}95$<br>$c_1^1 = 15$ | $p_1^2 = 0{,}99$<br>$c_1^2 = 30$ | $p_1^3 = 0{,}95$<br>$c_1^3 = 15$ |
| 2 | $p_2^1 = 0{,}99$<br>$c_2^1 = 30$ | — | $p_2^3 = 0{,}99$<br>$c_2^3 = 25$ |
| 3 | $p_3^1 = 0{,}90$<br>$c_3^1 = 20$ | — | — |

Известны два метода решения подобного рода задач: **а)** перебор всевозможных вариантов; **б)** решение задачи оптимизации.

**Оптимизация объектов путем полного перебора вариантов.** Проиллюстрируем возможность решения сформулированной выше задачи методом полного перебора вариантов СГИ. Для этого в табл. 4.4 сведем возможные варианты системы и её комплексные характеристики по надежности $P$ и стоимости $C$, рассчитанные согласно формулам (**4.27**). Общее число вариантов $N$ реализации СГИ составляет:

$$N = 3 \cdot 1 \cdot 2 = 6,$$

где 3, 1, 2 — число способов возможной реализации соответствующих (с первого по третий) компонентов СГИ (см. табл. 4.3).

В табл. 4.5, 4.6 сведены лучшие варианты реализации СГИ по критериям надежности и стоимости соответственно.

В общем случае при выборе оптимальной структуры СГИ, состоящей из $L$ компонентов, где каждый $l$-й компонент может быть реализован в $m_l$-х вариантах, общее число вариантов $N$ составляет $N = m_1, m_2, ..., m_L$. Если все компоненты реализуются одинаковым числом способов, т. е. $m_1 = m_2 = ... = m_L$, то $N = m \cdot m \cdot ... \cdot m = m^L$. Число возможных вариантов при определенных значениях $L$ ($L = 5, 10$) и $m$ ($m = 2, 6$) (табл. 4.7, 4.8) пока-

зывает, что для реальной СГИ из 10 компонентов, где каждый компонент может быть реализован одним из 6 возможных вариантов, имеется 60 млн. вариантов. Если принять, что на расчет одного варианта потребуется 10 мин, то общее время, необходимое для расчета всех вариантов, составит 475 лет.

*Таблица 4.4.* ***Перебор вариантов и искомые характеристики реализуемых СГИ***

| *Вариант системы* | *Способ реализации компонентов в СГИ* | | | *Показатели качества системы* | | *Оптимальный вариант* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | *C* | *P(t)* | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 60 | 0,893 | 2-я ПЗ |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 75 | 0,931 | — |
| 3 | 3 | 1 | 1 | 65 | 0,846 | — |
| 4 | 1 | 1 | 2 | 70 | 0,931 | 1-я ПЗ |
| 5 | 2 | 1 | 2 | 85 | 0,970 | — |
| 6 | 3 | 1 | 2 | 75 | 0,882 | — |

*Таблица 4.5.* ***Лучшие варианты СГИ по критерию надежности***

| *Варианты СГИ* | *Показатели* | |
|---|---|---|
| | *C(t)* | *P(t)* |
| 2 | 75 | 0,931 |
| 4 | 70 | 0,931 |
| 5 | 85 | 0,970 |

*Таблица 4.6.* ***Лучшие варианты СГИ по критерию стоимости***

| *Варианты СГИ* | *Показатели* | |
|---|---|---|
| | *C(t)* | *P(t)* |
| 1 | 60 | 0,893 |
| 3 | 65 | 0,846 |

*Таблица 4.7.* ***Число возможных вариантов N реализации СГИ***

| | *Число компонентов системы L* | |
|---|---|---|
| *m* | 5 | 10 |
| 2 | 32 | 1024 |
| 6 | 8000 | 60 млн. |

*Таблица 4.8. Затраты времени T на расчет вариантов СГИ*

| $m$ | Число компонентов системы $L$ | |
|---|---|---|
| | 5 | 10 |
| 2 | 5 ч | 1 мес. |
| 6 | 7,5 мес. | 475 лет |

**Выбор оптимальной структуры системы путем решения задачи оптимизации.** Выбор оптимальной структуры системы на базе решения *задачи оптимизации* предусматривает необходимость составления математической модели с использованием булевых переменных $\delta_m^l$, где $l$ — номер варианта; $m$ —номер варианта реализации, определяемый в результате решения задачи. Принимаем, что $\delta_m^l = 1$, если для $l$-го компонента принят $m$-й вариант его решения, $\delta_m^l = 0$ — в противном случае. При одновариантной реализации компонентов СГИ имеем следующую математическую модель:

$$\left.\begin{aligned} &\delta_1^1 + \delta_2^1 + \delta_3^1 = 1;\\ &\delta_1^2 = 1;\\ &\delta_1^3 + \delta_2^3 = 1, \end{aligned}\right\} \qquad (4.30)$$

где верхний индекс указывает номер компонента системы.

Стоимость каждого компонента в зависимости от принятого варианта реализации составляет (значения $c_m^l$ взяты из табл. 4.3):

$$\left.\begin{aligned} &c_1 = 15\delta_1^1 + 30\delta_2^1 + 20\delta_3^1;\\ &c_2 = 30\delta_1^2;\\ &c_3 = 15\delta_1^3 + 25\delta_2^3. \end{aligned}\right\} \qquad (4.31)$$

Действительно, если принять для первого компонента второй вариант, который стоит $c_2^1 = 30$, то $\delta_2^1 = 1$; $\delta_1^1 = \delta_3^1 = 0$. Стоимость компонента при этом равна стоимости принятого варианта $c_1 = c_2^1 = 30$. Аналогично для вероятности безотказной работы запишем следующую математическую модель:

$$\left.\begin{aligned} &p_1 = 0{,}95\delta_1^1 + 0{,}99\delta_2^1 + 0{,}90\delta_3^1;\\ &p_2 = 0{,}99\delta_1^2;\\ &p_3 = 0{,}90\delta_1^3 + 0{,}99\delta_2^3. \end{aligned}\right\} \qquad (4.32)$$

Так как параметры системы зависят от параметров компонентов согласно выражениям (**4.27**), то эти ограничения условно обозначим через (**4.33**). Таким образом, все ограничения можно обозначить через (**4.34**), записав, что (**4.34**)=(**4.30**) + (**4.31**) + +(**4.32**) + (**4.33**).

Задачу оптимизации можно сформулировать следующим образом:

*Первая постановка*:

$$\left.\begin{array}{l} F_1 = C \to \min; \\ \text{Ограничения } (4.34); \\ P \geq 0{,}93; \end{array}\right\}$$

*Вторая постановка*:

$$\left.\begin{array}{l} F_2 = P \to \max; \\ \text{Ограничения } (4.34); \\ C \geq 65. \end{array}\right\}$$

Полученные системы представляют собой задачу нелинейного программирования (зависимость всех вероятностей, входящая в ограничения (**4.34**), является нелинейной). Ее можно решать как нелинейную задачу или свести к линейной путем перехода от вероятностей к их логарифмам, записав, что $\lg P = \lg p_1 + \lg p_2 + \lg p_3$. Аналогично необходимо перейти к логарифмам и в табл. 4.3, и в системе (**4.32**). Результат решения данной задачи в обеих постановках приведен в табл. 4.9, причем в первом случае компоненты 1 и 2 СГИ реализованы первым способом, компонент 3 — вторым способом, а во втором — все три компонента СГИ реализованы первым способом.

*Таблица 4.9.* ***Результаты решения задачи по проектированию системы СГИ***

| *Целевая функция* | *Граничные условия* | $\delta_1^1$ | $\delta_2^1$ | $\delta_3^1$ | $\delta_1^2$ | $\delta_1^3$ | $\delta_2^3$ | $C$ | $P(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C \to \min$ | $P \geq 0{,}93$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 70 | 0,931 |
| $P \to \max$ | $C \leq 65$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 60 | 0,893 |

**Моделирование сложных объектов с учетом допустимых уровней их качества и надежности.** Создание сложных объектов обычно связано о большими финансовыми затратами, их предварительной оценкой, анализом и принятием окончательного решения при учете множества критериев, требований и ограничений. Качество будущих систем можно пытаться оценивать на самых ранних этапах их проектирования (на этапе технического задания), определяя их ориентировочные стоимость, величины риска вложения капитала в их производство, в достижение планируемого уровня надежности и эффективности функционирования объек-

тов. Учитывая ряд предположений о видах компонентов, типах структур систем, уровнях требуемых эффективности и вероятности безотказной работы, можно использовать обобщенные уравнения безотказности и коэффициента готовности для невосстанавливаемых и восстанавливаемых систем соответственно:

$$\Psi P^{(n-1)/n} (P-W_1)^{(n+1)/n} = W_1(1-P)^2;$$

$$(b\theta/b_1)[K_{r_1}+(1-W_0)^{1/a}-1]^{b_1+1}=[1-(1-W_0)^{1/a}](1-K_{r_1})^{b+1}K_{r_1}^{b_1-1},$$

где $\Psi=C_p/C_{Wk_1}$ — коэффициент запаса (риска); $C_p$ ($C_{Wk1}$) — коэффициент, учитывающий затраты на повышение безотказности всей системы (вероятности исполнения заданной задачи одним каналом системы); $P$ — вероятность безотказной работы; $W_1$ — заданная эффективность системы; $n$ — число имеющихся каналов в системе для исполнения поставленной задачи; $\theta = C_k (1-K^0_{r_1})^b / C_w (1-W^0_1)^{b_1}$ — коэффициент запаса (риска); $W_0$ — требуемый уровень эффективности выполнения системой задачи; $a$ — кратность резервирования системы (определенных ее подсистем); $b$, $b_1$ — коэффициенты, определяемые экспериментально ($b$, $b_1 \in [0,2]$); $C_k$, $C_w$ — стоимость аппаратуры (программно-технических средств) с существующими уровнями готовности $K^0_{r_1}$ и эффективности $W^0_1$ соответственно; $K_{r_1}$, $W_1$ — повышенные коэффициент готовности и уровень эффективности системы, причем

$$C(K_{r_1}) = C_k[1-K^0_{r_1})/(1-K^0_{r_1})^b;\ C(W_1) = C_w(1-W^0_1)/(1-W_1)^{b_1}.$$

Решая приведенные уравнения при различных условиях и диапазонах изменения параметров, можно отыскать математические модели, позволяющие количественно оценивать влияние исходных технико-экономических параметров на достижение оптимальных показателей надежности — вероятности безотказной работы системы, коэффициента готовности и др., выступающих в качестве нормативов эффективности будущих разработок или распределения усилий разработчиков по достижению поставленных целей в создании сложных объектов [79,137].

Теперь перейдем к другому классу разновидностей задач, связанных с применением экономико-статистических методов и эконометрических моделей и соответствующих программных пакетов.

# Раздел II

# Экономико-статистические методы и эконометрические модели в анализе данных и оценке эффективности деятельности

В повседневной жизни, бизнесе, научных исследованиях и т. д. мы постоянно сталкиваемся с событиями и явлениями с *неопределенным* исходом и вынуждены часто принимать очень важные решения. Для решения подобных задач требуется точный тщательный расчет, связанный с прогнозами состояния рынка и рентабельности предприятий, базирующийся на методах анализа данных или прикладной статистики. Эти методы позволяют выявлять закономерности на фоне случайностей, делать обоснованные выводы и прогнозы, давать оценки вероятностей их выполнения или неисполнения.

# Глава 5
# Экономико-статистические модели и эконометрические методы анализа данных

## 5.1. Математические модели анализа данных и программные средства

Широкому внедрению методов анализа в практику интеллектуальной деятельности и деловых расчетов способствовало появление ЭВМ, а позднее — ПЭВМ. Статистические программные пакеты сделали методы анализа данных более доступными и наглядными, устранили необходимость выполнения вручную трудоемких расчетов по сложным формулам, построение таблиц и графиков. Все эти операции выполняет ПЭВМ, оставив за человеком творческие функции: постановку задач, выбор методов их решения и интерпретацию результатов.

Появление на Западе мощных и удобных *статистических пакетов* для анализа данных на ПЭВМ резко расширило круг их пользователей, начиная от правительственных, банковских кругов и кончая представителями малого бизнеса. Практически все пакеты обеспечивают широкий набор средств визуализации данных: построение графиков, двух- и трехмерных диаграмм, а часто и различные средства деловой графики, помогающие лучше представить обрабатываемые данные, получить общее представление об их особенностях и закономерностях.

Однако для осмысленного их употребления пользователи должны обладать определенной подготовкой: понимать, в каких ситуациях применимы различные статистические методы, знать, каковы их свойства, уметь интерпретировать результаты. И если на Западе такая подготовка обеспечивается обучением основам анализа данных практически всех студентов и менеджеров, а также старшеклассников школ, то в нашей стране, к сожалению, ситуация несколько иная: в вузах, даже перегруженных математикой, методам анализа данных отводилось очень небольшое место, и даже здесь основное внимание уделялось не столько

этим методам, сколько формальным конструкциям теории множеств, теории меры, функционального анализа и теории вероятностей, которые не способствовали практическому освоению этих методов. В средней школе и массе вузов, включая педагогические, методы статистического анализа данных не упоминаются вовсе. В результате для большинства российских руководителей и менеджеров самые простейшие методы статистического анализа данных неизвестны.

Сегодня с широким распространением ПЭВМ появилась возможность использовать в практической деятельности универсальные и специализированные статистические пакеты типа «Stadia», «Эвриста», «Spss», «Stangraphics», «Systat». Множество новых пакетов разработано для среды Windows—Statistica, Статистик-Консультант и др. В качестве перспективных отечественных разработок можно назвать программные системы «Олимп: ФинЭксперт», «Олимп: СтатЭксперт», «Олимп: ТриКита», работающие в среде Windows 3.11 и Windows 95 [37, 38] и использующие интерфейс Microsoft Excel.

**Программная система «ФинЭксперт»** позволяет провести исследования структуры баланса, платежеспособности и ликвидности, финансовой устойчивости, оборачиваемости активов, эффективности использования капитала и рентабельности продаж. Программа использует следующие основные методы финансового менеджмента: расчет и использование эффектов финансовых и операционных рычагов, учет инфляционных процессов и финансовой политики предприятий. Входной информацией при этом являются данные внешней бухгалтерской отчетности (баланс, формы №2; 4; 5).

**Программная система «Олимп: СтатЭксперт»** позволяет проводить полный цикл исследований по статистическому анализу и прогнозированию данных, начиная с их ввода, проверки визуализации и кончая проведением и анализом результатов на основе широкого набора современных методов прикладной статистики. Она включает в себя: средства описательной (дескриптивной) статистики количественных данных; методы анализа и прогнозирования одномерных временных рядов; корреляционный и регрессионный анализ; ряд адаптивных моделей и методов прогнозирования — методы адаптивной фильтрации, эволюции (для двух- и трехпараметрических моделей), гармонических весов, модель Хольта—Уинтерса, модифицированные модели для применения к процессам с сильной сезонностью; авто-

регрессионные модели; факторный, кластерный, частотный, гармонический и структурный (структурных сдвигов и различий) анализ; обработку нечисловой информации; принятие решений [37, 38].

*Дескриптивная статистика* является простым и наиболее распространенным средством характеристики исходных данных, позволяя оценить особенности любого из исследуемых показателей в аналитическом или графическом видах и перспективы их использования для дальнейшего более глубокого анализа. Этой программой обеспечивается построение семи таблиц статистических данных (базисные и цепные характеристики динамики, средние характеристики, гипотеза об отсутствии тренда, проверка однородности данных, построение частных автокорреляционных функций и интервальных рядов, формирование графиков, гистограмм и др.)

*Прогнозирование временных рядов* предназначено для формирования на основе математической модели точечного и интервального прогнозов исследуемого показателя и выдачи пользователю степени доверия к полученным результатам. В качестве классов моделей используются: кривые роста, адаптивные модели Брауна и Хольта, Бокса—Дженкинса (модели авторегрессии *АР*($p$) порядка $p$) и ОЛИМПа (модели *АРСС* ($p$, $q$, $d$)) порядка $p$ и скользящего среднего порядка $q$, порядка разностного оператора $d$). Тип прогноза — прогноз вперед и ретропрогноз. Полнота выдачи результатов вычислений определяется перечнем таблиц, заказанных в блоке «Структура отчета». Отражение результатов прогноза дается на графиках аппроксимации и ретропрогнозов с указанием верхней и нижней границ, относительной и абсолютной ошибок и др.

*Корреляционный анализ* позволяет измерить степени связи двух или более переменных, отобрать факторы, оказывающие наиболее существенное влияние на результативный признак и обнаружение ранее неизвестных причинных связей. Результаты обработки отражаются в пяти таблицах (оптимальные лаги корреляции и парные корреляции на них, парные, частные и множественные коэффициенты корреляции) и соответствующих графиках.

*Регрессионный анализ* предназначен для исследования зависимости конкретной переменной от различных факторов и отображения их взаимосвязи в форме регрессионной модели и соответствующих графиков. В качестве моделей могут быть использованы регрессии: линейная множественная, пошаговая, гребневая, парная.

*Компонентный анализ* является методом определения структурной зависимости между случайными переменными, в результате использования которого получается сжатое описание малого объема, несущее почти всю информацию, содержащуюся в исходных данных. *Факторный анализ* — более общий метод преобразования исходных переменных по сравнению с компонентным анализом. Структура отчета может включать пять таблиц (собственные значения, прямая и повернутая матрицы факторов, оценки общности, значения главных факторов).

*Кластерный анализ* обеспечивает разбиение наблюдений на однородные группы (кластеры). Результаты статистической классификации существенно зависят от правильного выбора количества и состава переменных, а также алгоритма и метрики классификации. Структура отчета включает таблицу результатов кластеризации и график кластеров.

*Частотный анализ* предназначен для исследования временных рядов со строго периодическими или более или менее регулярными колебаниями. Видом анализа может быть анализ гармоник, спектральный анализ, частотная фильтрация, взаимный спектр (кросс-спектр). Для всех видов анализа, исключая частотную фильтрацию, программа автоматически диагностирует наличие тенденции в исследуемом показателе и при ее обнаружении выдает соответствующее сообщение.

При *гармоническом анализе* на выходе программы появляется соответствующий протокол с расчетными параметрами, по результатам которого можно судить о значимости гармоник. При моделях частотной фильтрации производится выделение тренда исходных данных (при высокочастотном фильтре) или его устранение (при низкочастотном фильтре). Протокол частотной фильтрации содержит две таблицы «Выход фильтра», «Передаточная функция» с отражением содержащихся в этих таблицах показателей на графиках.

При *спектральном* или *кросс-спектральном анализе* программой выбирается одно из трех окон (прямоугольное, Тьюки, Парзена) и построение соответствующих графиков спектра.

**Программная система «Олимп:ТриКита»** обеспечивает решение внутренних задач управления предприятием, связанных с планированием, учетом и контролем, всесторонне отражает реальное положение дел в финансовой сфере и динамику развития предприятия. Она позволяет: **а)** планировать сметы расходов и отслеживать их исполнение; **б)** вести полноценный учет кадров,

планировать полезную нагрузку сотрудников и ресурсные возможности предприятия; **в)** упорядочить назначение сотрудников на проекты и учитывать их фактически отработанное время по различным проектам; **г)** оценивать эффективность работы сотрудников, отделов, департаментов и филиалов; **д)** вести учет по заключенным договорам; **е)** знать текущее положение дел по закрытию договоров, выявлять должников и суммы задолженностей.

Таким образом, эти программные системы позволяют решать очень широкий круг задач современных предприятий, помогая их руководству и менеджерам принимать эффективные решения. Рассмотрим подробнее описание математических моделей этих программных систем.

## 5.2. Основные экономико-статистические модели

**Методика статистического анализа и прогнозирования данных.** При статистическом исследовании финансово-экономических показателей в ходе анализа, осуществляемого вручную или посредством ПЭВМ, вычисляют простейшие характеристики динамики их развития, выявляют закономерности прошлого развития и оценивают возможность их перенесения на будущее. Для успешного решения этого необходимо:

**1)** иметь достаточный для проявления статистических закономерностей объем данных (для годовых наблюдений — не менее пяти уровней, для сезонных процессов — не менее трех периодов сезонности);

**2)** обеспечить методологическую сопоставимость данных;

**3)** на основе содержательного анализа исследуемого показателя обосновать возможность переноса закономерностей прошлого на выбранный период прогнозирования;

**4)** получить адекватную математическую модель и на ее основе построить точечные и интервальные прогнозы.

Основной формой представления статистической информации являются временные ряды (ВР) наблюдений. Цель статистического анализа ВР — изучение соотношения между закономерностью и случайностью формирования значений уровней ряда и оценка количественной меры их влияния.

Статистические методы исследования исходят из представления уровней ряда в виде суммы нескольких компонент, отра-

жающих закономерность и случайность развития, в частности, в виде суммы нескольких компонент:

$$X(t) = f(t) + S(t) + E(t),$$

где $f(t)$ — тренд, представляющий собой устойчивое изменение показателя в течение длительного времени, являющийся детерминированной компонентой, выражает аналитическую функцию, на которой формируются прогнозные оценки; $S(t)$ — сезонная компонента, характеризующая устойчивые внутригодичные колебания уровней, представляемая квартальными или месячными данными (наличие устойчивых колебаний в суточных или недельных данных может рассматриваться как циклическое явление и может отображаться сезонной компонентой); $E(t)$ — остаточная компонента, представляющая собой расхождение между фактическими и расчетными значениями (если построена адекватная (хорошая) модель, то $E(t)$ является близкой к 0, случайной, независимой, подчиняющейся нормальному закону распределения компонентой, в противном случае модель является плохой).

Формирование уровней ряда определяется закономерностями трех основных типов: инерцией тенденции, инерцией взаимосвязи между последовательными уровнями ряда и инерцией взаимосвязи между исследуемым показателем и показателями-факторами, оказывающими на него причинное воздействие. Соответственно различают задачи анализа и моделирования тенденций, взаимосвязи между последовательными уровнями ряда; причинных взаимодействий между исследуемым показателем и показателями-факторами. Первая задача решается с помощью методов компонентного анализа, вторая — адаптивных методов и моделей, третья — эконометрического моделирования, базирующегося на методах корреляционно-регрессионного анализа.

Алгоритм статистического компонентного анализа обычно связан со следующими процедурами: постановкой задачи и подбором исходной информации; предварительным анализом исходных временных рядов и формированием набора моделей прогнозирования; численным оцениванием параметров моделей; определением качества моделей (адекватности и точности); выбором одной лучшей или построением обобщенной модели; получением точечного и интервального прогнозов.

При формулировании цели исследования осуществляется содержательный (логический и экономический) анализ исследуемого процесса; решается вопрос о выборе показателя, характеризующего его наиболее полно; определяются показатели, оказывающие влияние на ход развития; определяются наиболее разумный период упреждения прогноза, оптимальный *горизонт*

*прогнозирования,* определяемый индивидуально для каждого показателя с учетом его стабильности и статистической колеблемости данных (обычно он не превышает 1/3 объема данных).

При предварительном анализе определяется соответствие имеющихся данных требованиям, предъявляемым к ним математическими методами (объективности, сопоставимости, полноты, однородности и устойчивости); строится график динамики и рассчитываются основные динамические характеристики (приросты, темпы роста, темпы прироста, коэффициенты автокорреляции).

Набор моделей (исходная база моделей) формируется на основе интуитивных приемов (таких, например, как анализ графика динамики ряда), формализованных статистических процедур (исследование приростов уровней). При этом предпочтение отдается наиболее простым, содержательно интерпретируемым моделям, решаемым программным путем на ПЭВМ с проведением вычислений по всем доступным моделям и методам.

Основная идея оценки параметров обычно заключается в *максимальном приближении* модели к исходным данным. Оценивание параметров моделей кривых роста ведут методом наименьших квадратов (МНК), параметров адаптивных методов — специальными процедурами многомерной численной оптимизации. Экстраполяционные методы прогнозирования строят модели кривых роста и адаптивные модели, использующие лишь временный фактор, являющийся условным представителем всей совокупности причинных факторов, влияющих на интересующий нас показатель. Кривые роста исходят из равноценности всех данных, отражая общую тенденцию развития, а адаптивные модели и методы — из большей значимости последних наблюдений, лучше отражая динамику изменения.

Мощным инструментом прогнозирования являются модели Бокса—Дженкинса и «Олимп», составляющие основу рабочей базы моделей. Каждая построенная модель из 20 возможных заносится в базу моделей. Если рабочая база моделей заполнена (построено свыше 20 моделей), то вновь построенная модель сравнивается с наихудшей моделью и вытесняет ее, если новая модель имеет лучшие характеристики качества.

Информация, содержащаяся в рабочей базе моделей, — основа для построения прогноза по лучшей модели или база формирования обобщенного прогноза. Измерение качества моделей в сочетании с высоким быстродействием ПЭВМ обеспечивает быстрый просмотр множества моделей с выбором из них наилучшей по

критериям адекватности и точности. При этом адекватность моделей оценивается по свойствам остаточной компоненты (расхождениям, рассчитанным по модели уровней и фактических наблюдений), а точность модели — по степени близости расчетных данных к фактическим. На основе характеристик точности и адекватности рассчитывается обобщенный показатель качества модели, используемый для определения лучшей модели.

На основе построенной модели рассчитываются точечный (экстраполяционный) и интервальный прогнозы, причем точечный прогноз формируется подстановкой в модель (уравнение тренда) соответствующего значения временного фактора, т. е. $t = N+1, N+2,..., N+k$, а интервальные прогнозы строятся на основе точечных.

*Доверительная вероятность* прогноза (0—100%) характеризует степень уверенности в попадании прогнозируемой величины в построенный интервал прогнозирования (напомним, что при ее увеличении интервальный прогноз расширяется, поэтому полезность прогноза обратно пропорциональна доверительной вероятности).

После получения прогнозных оценок необходимо убедиться в их разумности и непротиворечивости, для чего полученный прогноз следует критически проанализировать с целью выявления возможных противоречий известным фактам и сложившимся представлениям о характере развития на периоде упреждения прогноза (при исследовании конкретных процессов часто применяют ретропрогноз).

При наличии данных о динамике других показателей можно построить модель их влияния на основной исследуемый показатель и в случае ее высокого качества получить прогнозные оценки. Для формирования набора факторов, кроме содержательных аспектов, необходимо учитывать формально-статистические аспекты, основывающиеся на коэффициентах корреляции. Следовательно, перед регрессионным анализом необходимо воспользоваться корреляционным анализом, а при необходимости получения прогнозов — еще и экстраполяционными моделями.

**Дескриптивная статистика.** В общем случае исходные данные можно охарактеризовать простейшими средствами описательной статистики, дающими представление об особенностях исследуемого показателя и перспективности использования более глубоких методов анализа. Вычисление основных характеристик данных, в которых $X_i$ — численные значения наблюдений переменной $X$ ($i$=1,2,...,$n$), проводится на базе ряда известных формул (табл. 5.1).

*Таблица 5.1.* ***Основные характеристики данных***

| *Показатель* | *Расчетные формулы* |
|---|---|
| **1. Среднее значение** | $\bar{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) / n$ |
| **2. Среднеквадратическое отклонение (СКО)** | $\sigma = \sqrt{Д_x}$ |
| **3. Дисперсия** | $Д_x = \sigma^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2\right) / n$ |
| **4. Несмещенная оценка дисперсии** | $\sigma_н^2 = n\sigma^2 / (n-1)$ |
| **5. Среднеквадратическое отклонение для несмещенной оценки дисперсии** | $\sigma_н = \sqrt{\sigma_н^2}$ |
| **6. Среднее линейное отклонение** | $l_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - \bar{x}\rvert\right) / n$ |
| **7. Моменты начальные: второго, третьего, четвертого порядка** | $\nu^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) / n$ ; $\nu^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) / n$ |
| | $\nu^4 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right) / n$ |
| **8. Моменты центральные: третьего, четвертого порядка** | $\mu^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^3\right) / n$ |
| | $\mu^4 = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^4\right) / n$ |
| **9. Коэффициент асимметрии:** | $A_S = \mu^3 / \sigma^3$ |
| **несмещенная оценка** | $A_S' = \left[\left((n-1)n\right)^{1/2} / (n-2)\right] A_s$ |
| **СКО** | $S_A = [6n\,(n-1) / (n-2)(n+1)(n+3)]^{1/2}$ |
| **10. Показатель эксцесса:** | $E = \mu^4 / \sigma^4$ |
| **несмещенная оценка** | $E = [(n-1)/(n-2)(n-3)] \times [(n+1)E + 6]$ |
| **СКО** | $S_E = [24n(n-1)^2/(n-3)(n-2)(n+3)(n+5)]^{1/2}$ |
| **11. Коэффициенты вариации:** | |
| **по размаху** | $R / \bar{x}$ |
| **по среднему линейному отклонению** | $l_0 / \bar{x}$ |
| **по СКО** | $\sigma / \bar{x}$ |
| **медиана** | $X_n/2$ |
| **мода** | $X$ (наблюдаемое наиболее часто) |
| **минимальное значение ряда** | $X_{min}$ |
| **максимальное значение ряда** | $X_{max}$ |
| **размах** | $R = X_{max} - X_{min}$ |

Относительно ряда показателей данной таблицы отметим следующее.

1. Коэффициенты асимметрии и эксцесса позволяют сделать предварительные заключения о близости изучаемого распределения к нормальному. Распределение принято считать нормальным, если выполняются условия:

$$A_S \leq 3S_A;\ E \leq 5S_E.$$

2. Для медианы — исходный ряд считается отсортированным.

3. Мода — это значение $X$, наблюдаемое наиболее часто.

Для изучения пространственных данных используют технологию их агрегирования с построением интервального ряда.

Ширина интервала для группировки $H$ определяется так:

$$H=R/L,\ L=1+3{,}322\lg(n)\ ,$$

где $L$ — количество интервалов (округляется в большую сторону); $n$ — число членов ряда.

Если установлен соответствующий параметр, то изменяется значение $H$ и пересчитывается $L$. Каждый $j$-й интервал ($j$=1,..., $L$) характеризуется определенной частотой и частостью попадания в него соответствующих наблюдений заданного ряда.

Таблица интервального ряда распределений содержит разбивку данных на интервалы, числовую характеристику интервала (начало, середину и конец), а также частоту и частость наблюдений.

Обычно характеристиками интервального ряда выступают: среднее значение, дисперсия, среднеквадратическое отклонение, коэффициенты асимметрии и эксцесса, мода и медиана. Их смысл и назначение совпадают с вариационными характеристиками, а формулы вычисления содержат компоненту, учитывающую частоту попадания наблюдений в интервалы.

*Метод бутстреп-оценки* сводится к дополнению данных фактических наблюдений данными численного моделирования. При этом моделирование производится только в рамках фактических данных, а входными параметрами метода выступают: $\{X_1, X_2,...,X_n\}$ — исходная выборка; $k$ — количество моделируемых выборок ($k$>50); $p$ — вероятностный уровень оценки математического ожидания (рекомендуемые значения 0,7—0,9). Оценку математического ожидания для малой выборки можно получить по следующему алгоритму:

1. Осуществляется моделирование выборок с использованием датчика натуральных чисел, равномерно распределенных в интервале от 1 до $n$:

$$V_j = \{ x_{N_{1j}}, x_{N_{2j}}, ..., x_{N_{nj}} \}.$$

2. Для каждой выборки $V_j$ ищется оценка математического ожидания:

$$\overline{X}_j = \left( \sum_{i=1}^{n} X_{Nj} \right) / n, \quad j = 1, \ldots, k.$$

3. Для вариационного ряда математических ожиданий выборки строится интервальный ряд.

4. С хвостов построенного интервального ряда отсекаются интервалы таким образом, чтобы суммарная частость отброшенных интервалов не превосходила $(1-p)$. Оставшиеся интервалы определяют интервальную оценку математического ожидания.

**Анализ временных рядов.** В этой операции оценивают: характеристику динамики, наличие тренда, однородности данных и автокорреляционных свойств.

Динамику изменения исследуемого показателя можно охарактеризовать по отношению к какому-то базисному (обычно первому) наблюдению величиной изменения соседних уровней. В этой связи вычисляются *базисные* и *цепные характеристики*. В качестве статистических характеристик временного ряда $Y_i$, $i = 1, ..., N$ используется ряд величин (табл. 5.2).

*Оценка наличия тренда* в исследуемом временном ряду осуществляется при помощи методов Форстера—Стюарта и средних в соответствии с методикой, изложенной в [37]. При противоречивости их выводов предпочтение отдается первому методу.

*Таблица 5.2. **Основные статистические характеристики временного ряда***

| *Характеристики цепи* | *Расчетные формулы** |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 1. **Абсолютный базисный прирост** | $\Delta Y_i^b = Y_i - Y_1$ |
| 2. **Абсолютный цепной прирост** | $\Delta Y_i^c = Y_i - Y_{i-1}$ |
| 3. **Базисный коэффициент роста** | $K_{r_i} = Y_i / Y_1$ |
| 4. **Цепной коэффициент роста** | $K_{r_i}^c = Y_i / Y_{i-1}$ |
| 5. **Базисный коэффициент прироста** | $K_{pr_i}^b = (Y_i - Y_1) / Y_1$ |

| 1 | 2 |
|---|---|
| **6. Цепной коэффициент прироста** | $K_{pr_i^c} = (Y_i - Y_{i-1}) / Y_{i-1}$ |
| **7. Темп роста** | $T_r = K_r^b \times 100\%$ |
| **8. Темп прироста** | $T_{pr} = T_r - 100\%$ |
| **9. Средняя арифметическая** | $y = \left(\sum_{j=1}^{N} Y_j\right) / N$ |
| **10. Средний абсолютный прирост** | $\overline{\Delta Y} = (Y_n - Y)^{1/(N-1)}$ |
| **11. Средний темп роста** | $\overline{T_r} = (Y_N / Y_1)^{1/(N-1)} \times 100\%$ |
| **12. Средний темп прироста** | $\overline{T_{pr}} = \overline{T_r} - 100\%$ |

* $N$ — число уровней ряда; $Y_i$ — уровни ряда. Использование показателя средней арифметической величины для характеристики процессов, представленных временными рядами с ярко выраженной тенденцией, является некорректным.

В соответствии с методом проверки существенности разности средних исходный временной ряд разбивается на две равные (или почти равные) части, после чего проверяется гипотеза о существенности разности средних для этих частей. Недостаток метода состоит в невозможности правильно определить наличие тренда в том случае, когда временной ряд содержит точку изменения тенденции в районе середины ряда.

В методе Форстера—Стюарта гипотеза об отсутствии тренда проверяется с помощью вспомогательных функций:

$$L = \sum_{t=2}^{T} l_t \; ; \qquad l_t = U_t - V_t \; ;$$

$$U_t = \begin{cases} 1, & \text{если } y_t < y_{t-1} < y_1, \\ 0, & \text{если наоборот;} \end{cases} \qquad V_t = \begin{cases} 0, & \text{если } y_t < y_{t-1} < y_1, \\ 1, & \text{если наоборот.} \end{cases}$$

Проверяется гипотеза о том, что $L = 0$. Для проверки строится $t$-статистика, которая имеет распределение Стьюдента с $T-1$ степенями свободы:

$$t_L = \frac{L}{\sigma_L},$$

где $\sigma_L^2 = 2\sum_{t=2}^{T} 1 / t$.

Гипотеза об отсутствии тенденции отклоняется, если расчетное значение больше табличного на выбранном уровне значимости 0,95.

*Проверка однородности данных* обычно проводится на основе критерия Ирвина, основанного на сравнении соседних значений ряда и расчете характеристики $\lambda_t$:

$$\lambda_t = (Y_t - Y_{t-1}) / \sigma_y .$$

Полученные значения затем сравниваются с табличными значениями. Однако этот критерий неэффективен для выявления аномальности в динамических рядах, потому что величина $\sigma_y$ характеризует отклонения значений показателя от среднего уровня по всей совокупности наблюдений, т. е. он не ловит выбросы внутри ряда наблюдений. Модификация этого метода связана с последовательным расчетом $\sigma_y$ не по всей совокупности, а по трем-четырем наблюдениям (рассчитанные с такими скользящими значениями $\sigma_y$ величины сравниваются с критическими значениями $\lambda^*$ для $n$=3).

Не проверяются временные ряды с периодом сезонности более единицы, а также уровни на концах периода наблюдений.

*Оценка автокорреляционных свойств* сводится к исследованию автокорреляционной и частной автокорреляционной функции исходного и разностного рядов.

*Автокорреляционная функция* представляет собой совокупность коэффициентов автокорреляции, вычисленных для исследуемого показателя или разностного ряда, используемую для оценки тесноты взаимосвязи уровней ряда и подбора соответствующих авторегрессионых моделей. Анализ автокорреляции выполняется с помощью графика автокорреляции; коэффициенты автокорреляции для его построения вычисляются так:

$$r_L = \left( \left( (N-L) \sum_{t=1}^{N-L} Y_t Y_{t+1} - \sum_{t=1}^{N-L} Y_t \sum_{t=1}^{N-L} Y_{t+L} \right) \Bigg/ \left\{ \left[ (N-L) \sum_{t=1}^{N-L} Y_t^2 - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \left( \sum_{t=1}^{N-L} Y_t \right)^2 \right] \cdot \left[ (N-L) \sum_{t=1}^{N-L} Y_{t+1}^2 - \left( \sum_{t=1}^{N-L} Y_{t+1} \right)^2 \right] \right\}^{1/2} \right. , \; t = 1,\ldots,N, \; L=0,1,2,..$$

*Частная автокорреляционная функция* вычисляется так:

$$\varphi_{kk} = \begin{cases} r_1 \\ \left[ r_k - \sum_{j=1}^{k-1} \varphi_{k-1}, \; , j^r k - j \right] \Big/ \left[ 1 - \sum_{j=1}^{k-1} \varphi_{k-1}, j^r j \right], k = 1.2,\ldots, K, \end{cases}$$

где $k$ — максимальная задержка (лаг) функции (обычно $k \le n/4$); $r$ — автокорреляционная функция.

«Чистые» авторегрессионные процессы имеют плавно затухающую автокореляционную функцию и резко прерывающуюся чистую корреляционную функцию (ЧАКФ). В этом случае в качестве порядка авторегрессионной модели выбирают лаг, после которого все ЧАКФ имеют незначительную величину.

**Прогнозирование временных рядов**. Для прогнозирования несезонных и сезонных процессов используется различный математический аппарат. Как известно, динамика многих финансово-экономических показателей предприятий и банков имеет устойчивую колебательную составляющую: при исследовании месячных и квартальных данных часто наблюдаются внутригодичные сезонные колебания соответственно с периодом 12 и 4; при использовании дневных наблюдений часто наблюдаются колебания с недельным (пятидневным) циклом. В этом случае для получения более точных прогнозных оценок необходимо не только правильно отобразить тренд, но и его колебательную компоненту. Решение этой задачи базируется на использовании специального класса моделей и методов.

В основе сезонных моделей лежат их несезонные аналоги, которые дополнены средствами отражения сезонных колебаний. Сезонные модели способны отражать как относительно постоянную сезонную волну, так и динамически изменяющуюся в зависимости от тренда. Первая форма относится к классу аддитивных, а вторая — к классу мультипликативных моделей. Большинство моделей имеет обе эти формы. Наиболее широко в финансовой практике используются модели Хольта—Уинтерса, авторегрессии, Бокса—Дженкинса и др.

*Кривые роста.* Для аналитического выравнивания временных рядов используются функции с одним параметром $t$, представляющим собой моменты наблюдения ($t$=1,2,...,$N$), интерпретируемым как «время». Модели этого класса получили название «кривые роста». Оценка их параметров производится аналогично построению парной регрессии, в которой объясняющей переменной является время. Для кривых роста пригодны те же вычислительные процедуры, что и в парной регрессии, и для целей краткосрочного и среднесрочного прогнозирования они являются надежным инструментом.

Метод наименьших квадратов — основа численной оценки параметров кривых роста. Оценка качества модели производится по критерию минимума средней квадратической ошибки. Аппроксимация наблюдений сложными функциями дает хорошее

приближение к фактическим наблюдениям, но снижает устойчивость модели на периоде прогнозирования. Поэтому использовать для прогнозирования такие модели (например, полином выше второй степени) следует осторожно. В перспективных программных средствах ПЭВМ используют до двух десятков моделей, из них можно выделить функции Гомперца и логистической кривой, не сводимые к модели линейной регрессии. Поиск их параметров ведется методом многомерной численной оптимизации.

Экстраполяция траектории модели за период наблюдения $t=N+1$, $N+2$... является основой прогнозирования трендовых моделей. Интервальный прогноз в каждой прогнозной точке определяется по соотношениям регрессионного анализа с задаваемой пользователем доверительной вероятностью.

## 5.3. Адаптивные методы прогнозирования

При краткосрочном прогнозировании обычно более важна динамика развития исследуемого показателя на конце периода наблюдений, а не тенденция его развития, сложившаяся в среднем на всем периоде предыстории. Свойство динамичности развития финансово-экономических процессов часто преобладает над свойством инерционности. Поэтому более эффективными являются адаптивные методы, учитывающие информационную неравнозначность данных.

Адаптивные модели и методы имеют механизм автоматической настройки на изменение исследуемого показателя. Инструментом прогноза является модель, первоначальная оценка параметров которой производится по нескольким первым наблюдениям. На ее основе делается прогноз, который сравнивается с фактическими наблюдениями. Далее модель корректируется в соответствии с величиной ошибки прогноза и вновь используется для прогнозирования следующего уровня, вплоть до исчерпания всех моментов наблюдений. Таким образом, модель постоянно «впитывает» новую информацию, приспосабливается к ней и к концу периода наблюдения отображает тенденцию, сложившуюся на текущий момент. Прогноз получается как экстраполяция последней тенденции. В различных методах прогнозирования процесс настройки (адаптации) модели осуществляется поразному. Базовыми адаптивными моделями считаются модели

Брауна и Хольта и модель авторегрессии. Первые две модели относятся к схеме скользящего среднего, последняя — к схеме авторегрессии. Многочисленные адаптивные методы базируются на этих моделях, различаясь между собой способом числовой оценки параметров, определения параметров адаптации и компоновкой.

Например, по *схеме скользящего среднего* оценкой текущего уровня является взвешенное среднее всех предшествующих уровней, причем веса при наблюдениях убывают по мере удаления от последнего (текущего) уровня, т. е. информационная ценность наблюдений тем больше, чем ближе они к концу периода наблюдений. По *схеме авторегрессии* оценкой текущего уровня является взвешенная сумма $p$ предшествующих уровней (их количество называется порядком модели). Информационная ценность наблюдений определяется не их близостью к моделируемому уровню, а теснотой связи между ними. Обе эти схемы имеют механизм отображения колебательного (сезонного или циклического) развития исследуемого процесса.

**Модель Брауна.** Если имеется временной ряд наблюдений $X(t)$, $t = 1,...,n$, то прогноз в момент времени $t$ на $\tau$ шагов вперед можно получить по формуле:

$$\overline{\overline{x}}_t(\tau) = a_{1,t} + a_{2,t}\tau,$$

где $a_{1,t}$ и $a_{2,t}$ — текущие оценки коэффициентов адаптивного полинома.

В модели Брауна модификация (адаптация) коэффициентов линейной модели осуществляется следующим образом:

$$a_{1,t} = a_{1,t-1} + a_{2,t-1} + (1-\beta^2)e_t; \quad a_{2,t} = a_{2,t-1} + (1-\beta)^2 e_t,$$

где $\beta$ — коэффициент дисконтирования данных; $e_t$ — ошибка прогнозирования ($e_t = x_t - \overline{\overline{x}}_{t-1}$).

Начальные значения параметров модели можно определить по методу наименьших квадратов на основе нескольких первых наблюдений. Оптимальное значение параметра дисконтирования находится в переделах [0;1], определяется методом численной оптимизации и является постоянным для всего периода наблюдений. Посредством оператора $B$ можно сдвигать всю последовательность на один шаг назад: $Bx(t)=x(t-1)$. Применение оператора $B$ к наблюдениям и к коэффициентам адаптивного полинома позволяет выразить модель Брауна в виде:

$$(1-B)^2 x_t = (1 - 2B\beta + B^2\beta^2)e_t.$$

Тогда модель Брауна можно трактовать как модель авторегрессии — скользящего среднего *АРСС* ($p$, $d$, $q$) с $p$=0, $d$=2, $q$=2 и коэффициентами скользящего среднего — $2\beta$ и $\beta^2$.

**Модель Хольта.** В модели коэффициенты линейной модели

$$\overline{\overline{x}}_t = a_{1,t} + a_{2,t}\tau$$

модифицируются по следующим соотношениям:

$$a_{1,t} = a_{1,t-1} + a_{2,t-1} + \alpha_1 e_t;$$

$$a_{2,t} = a_{2,t-1} + \alpha_2 e_t.$$

Начальные значения параметров модели находятся по методу наименьших квадратов на основе нескольких первых наблюдений. Оптимальные значения параметров сглаживания $\alpha_1$ и $\alpha_2$ находятся в пределах [0;1], определяются методом многомерной численной оптимизации и являются постоянными для всего периода наблюдений.

Аналогично модели Брауна, модель Хольта в терминах моделей *АРСС* представима в виде:

$$(1-B)^2 x_t = \left[1-\left(2-(\alpha_1+\alpha_1\alpha_2)B+(1-\alpha_1)\right)B^2\right]e_t.$$

Формулировка адаптивных моделей в терминах линейных параметрических моделей авторегрессии — скользящего среднего — позволяет трактовать их как подмножество класса линейных параметрических моделей. Таким образом, устанавливается соответствие между двумя, вообще говоря, различными подходами к моделированию временных рядов.

**Модель Хольта—Уинтерса.** Сезонные процессы можно отображать моделью в аддитивной и мультипликативной форме. Прогноз на $\tau$ шагов вперед для аддитивной формы строится по формуле:

$$\overline{\overline{x}}_t = a_{1,t} + a_{2,t}\tau + g_{t-s+\tau},$$

а модификация параметров производится по соотношениям:

$$a_{1,t} = \alpha_1(x_t - g_{t-s}) + (1-\alpha_1)(a_{1,t-1} + a_{2,t-1});$$

$$a_{2,t} = \alpha_3(a_{1,t} - a_{1,t-1}) + (1-\alpha_3)a_{2,t-1},$$

где $g$ — фактор сезонности; $s$ — период сезонного цикла.

Мультипликативная модель аналогична аддитивной модели с той лишь разницей, что расчетные по линейной модели значения корректируются путем их умножения на сезонные коэффициенты: Прогноз на $\tau$ шагов строится по формуле:

$$\bar{x}_t(\tau) = (a_{1,t} + a_{2,t}\tau)g_{t-s+\tau},$$

а модификация параметров производится по соотношениям:

$$a_{1,t} = \alpha_1(x_t / g_{t-s}) + (1-\alpha_1)(a_{1,t-1} + a_{2,t-1});$$

$$a_{2,t} = \alpha_3(a_{1,t} - a_{1,t-1}) + (1-\alpha_3)a_{2,t-1};$$

$$g_t = \alpha_2 x_t / a_{1,t} + (1-\alpha_2)g_{t-s},$$

где $g$ — фактор сезонности; $s$ — период сезонного цикла.

Для более точного отображения процессов с сильной сезонностью может использоваться специальная процедура корректировки параметра сглаживания уровня процесса.

Для несезонных временных рядов вычислительные формулы упрощаются за счет исключения сезонной компоненты. При построении модели производится численная оптимизация параметров адаптации в пределах [0;1].

**Метод эволюции для двух- и трехпараметрических моделей.** Для обеспечения адаптации параметра сглаживания однопараметрической модели к изменениям в динамике ряда можно, используя три различных параметра, называемых соответственно *нормальным* ($a$), *низким* ($a-h$) и *высоким* ($a+h$), получать не одну, а три оценки следующего уровня ряда. При этом оценка, полученная при нормальном значении параметра, считается прогнозом, а остальные две оценки являются контрольными величинами.

После получения нового фактического уровня ряда определяют значение параметра, давшего наименьшую абсолютную или сглаженную ошибку и, следовательно, являющегося лучшим для предыдущего и текущего шагов. Предполагается, что оно будет лучшим и на текущем шаге прогнозирования. Данное значение считается нормальным, и уже от него строятся новые низкое и высокое значения ($a \pm h$), которые должны находиться в некотором интервале ($h$, $1-h$).

Таким образом, значение параметра сглаживания, выбранное первоначально произвольно, постоянно изменяется в направлении компенсации и устранения постоянно возникающих ошибок прогнозирования.

Модель Уинтерса можно развить реализацией схемы всевозможных проб при различных сочетаниях значений параметров сглаживания, задаваемых из расчета по три значения на каждый параметр. При $k$ управляемых параметрах в каждый момент времени вычисляется ($2^k$ +1) оценок будущего наблюдения, и одна из них (точка с номером 1), соответствующая центральной точ-

ке, т. е. точке, координаты которой соответствуют нормальным значениям параметра сглаживания, считается прогнозом. На основе анализа точности пробных оценок можно принять решение о переносе центральной точки в точку плана, давшую минимальную ошибку.

**Метод адаптивной фильтрации (МАФ).** Оценка уровня динамического ряда $x_t$ ($t$=1,..., $N$) в виде МАФ осуществляется на основе регрессионной $AP(p)$-модели, не имеющей уровня $\Phi_0$. Параметры адаптивного фильтра на $j$-й итерации обновляются следующим образом:

$$\Phi^j_{t,i} = \Phi^j_{t-1,i} + 2kl_t x_{t-1},$$

где $\Phi^j_{t,i} - \Phi^j_{t-1,i}$ — соответственно векторы старых и новых весов; $l_t$ — текущая ошибка прогнозирования $(l_t = x_t - \hat{x}_t)$; $k$ — константа обучения, определяющая скорость адаптации параметров модели ($k \geq 0$).

Существует несколько модификаций МАФ, но алгоритм получения прогноза модели практически одинаков. На первой итерации ($j$=1) на основе начального набора весов $\Phi_{tj,i}$ и первых $p$ уровней ряда вычисляются $\hat{x}_t$ и ошибка $l_t$ ($t$=$p$+1). Подстановкой величины ошибки прогноза в уравнение корректировки весов получают новый набор весов $\Phi_{t,\ i}$ для следующего момента времени $t$=$p$+2. Далее эта процедура повторяется для следующих $p$-наборов $x_{t-i}$ ($i$=1, $p$; $t$=$p$+$lN$), каждый из которых образован из предыдущего путем исключения первого и добавления одного нового уровня ряда. Если оптимальные веса на $j$-й итерации не получены, то на следующей ($j$ + 1)-й итерации следует вернуться к первому набору уровней ряда $x_{p+1-i}$ ($i$=$l$, $p$), но уже с новыми начальными весами $\Phi^{(j+1)}_{i=p+1} = \Phi^{(j)}_i = N, i$.

Рассмотренную общую схему построения адаптивного фильтра можно использовать как для исходного временного ряда, так и для производных разностных рядов $t_t = \nabla^d x_t (d = 0,1,2)$, причем в последнем случае эффективность метода существенно повышается. Проблема идентификации модели в МАФ решается автоматически (хотя и не всегда удачно): для сезонных рядов порядок модели $p$ равен периоду сезонности, а для несезонных процессов — временному лагу, давшему максимальный положительный коэффициент автокорреляции.

Момент окончания процедуры корректировки параметров можно определить путем априорного задания максимально до-

пустимого числа итераций ($k_i^{j\max}$) или путем сравнения каких-либо статистик, вычисленных на двух последовательных итерациях. Корректировку весов можно заканчивать, если среднеквадратическая ошибка перестает заметно убывать.

Важным этапом реализации МАФ является определение оптимальной величины константы обучения $K_{opt}$. Результаты ряда исследований показывают, что $K_{opt}$ лежит в пределах $0 \le k \le 1/p$. Для практической работы этот интервал очень широк. Поэтому более точное значение константы обычно определяется методом проб или направленного поиска.

**Метод гармонических весов.** В этом методе, разработанном Хельвигом, идея дисконтирования данных реализована иначе, чем в других адаптивных методах. Параметр прироста линейной модели, используемой для прогнозирования, находится путем взвешивания на основе гармонических весов приростов сглаженного ряда. Сглаживание осуществляется линейной функцией для каждого из ($N$+$K$−1) перекрывающихся сегментов одинаковой длины $K$:

$$x_i(t) = a_i + b_i t \, (i = 1,2,\ldots, N - K + 1).$$

Коэффициенты всех моделей скользящего тренда определяются по формулам:

$$b_i = \left(\sum x_i t - (\sum t \sum x) / n \right) / \left[\left(\sum t^2 - \left(\sum t\right)^2\right) / k\right];$$

$$a_i = \left(\sum x_t\right) / k - \left(b_i \sum t\right) / k.$$

Здесь суммирование по $t$ производится от $i$ до ($i$+$k$−1). После получения всех ($N$−$K$+1) оценок параметров определяются сглаженные значения ряда:

$$\hat{x}_t = \left(\sum_{i=1}^{t} x_i(t)\right) / t \quad , \quad t<k \, ;$$

$$\hat{x}_t = \left(\sum_{i=t-k+1}^{t} x_i(t)\right) / k \quad , \quad k \le t \le N-k+1;$$

$$\hat{x}_t = \left(\sum_{i=t-k+1}^{N-k+1} x_i(t)\right) / (N - t + 1) \quad , \quad t<N-k+1.$$

Предполагается, что приросты сглаженного ряда являются случайной величиной, у которой оценкой математического ожидания является средний уровень $P_t$ с дисперсией $S_p$. В этом случае средний прирост можно использовать для получения про-

гноза на ряд (1, 2 и более) шагов вперед, прибавляя его к уровню процесса, в качестве которого можно принять последний уровень сглаженного ряда.

Учитывая информационную неравноценность данных, Хельвиг предложил использовать гармоническую среднюю $P$ вида:

$$\bar{\bar{p}} = \sum_{t=1}^{N-1} C_{t+1}^{N} P_{t+1} \; ; \qquad S_{p^2} = \sum_{t=1}^{N-1} C_{t+1}(P_{t+1} - p)^2,$$

где $P_{t+1}$ – приросты сглаженного ряда $\hat{x}_t$ ; $C_{t+1}$ – веса приростов.

Таким образом, все веса приростов положительны и в сумме дают единицу. Прогноз на $\tau$ шагов вперед получается по формуле:

$$\hat{x}_t = a + b(t - N), \quad (t=1,\ldots, N+\tau) \quad ,$$

где $a = \hat{x}_t, b = p$.

## 5.4. Линейные модели временных рядов

**Модель авторегрессии.** В модели авторегрессии $AP(p)$ порядка $p$ текущий уровень ряда представляется в виде взвешенной суммы $p$ предыдущих наблюдений:

$$X(t) = a_1 X(t-1) + a_2 X(t-2) + \ldots + a_p X(t-p) .$$

Параметры модели могут быть оценены по МНК (простая авторегрессия) или иным методом (как в методе Бокса—Дженкинса). Порядок авторегрессии (величина $p$) определяется путем перебора, а его начальная оценка формируется на основе анализа автокорреляционной функции. Лучшей считается величина, при которой достигнута наименьшая дисперсия ошибок.

В сезонной модели авторегрессии $AP(p)$ порядок выбирается равным периоду сезонности (колебаний). Во многих случаях сезонная $AP(p)$-модель с оценками по МНК оказывается «перегруженной» незначимыми коэффициентами и вследствие этого обычно уступает аналогичной модели Бокса—Дженкинса. Для повышения устойчивости модели в большинстве случаев целесообразно строить ее для стационарного процесса, т. е. ряда с исключенной тенденцией.

**Метод Бокса—Дженкинса.** Если временной ряд — стационарный (есть наличие статистического равновесия относительно постоянной средней), его можно представить широким классом

линейных моделей, называемых моделями авторегрессии — скользящего среднего (*АРСС*). Это значит, что

$$(z_t^* - c) = \phi_1(z_{t-1}^* - c) - \ldots - \phi_p(z_{t-p}^* - c) + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q},$$

где $z_t^* = z_t^{(\lambda)}$ — значения предварительно преобразованной переменной; $a_t$ — процесс «белого шума»; $\phi_1, \ldots, \phi_p$ — параметры авторегрессии; $\theta_1, \ldots, \theta_q$ — параметры скользящего среднего.

Если использовать оператор сдвига назад $B$, т. е. $B_z = z_{t-1}$, то *АРСС*-модель можно записать в операторной форме:

$$z_t^* - c = \theta(B)a_t \;/\; \phi(B).$$

Параметры этой модели должны удовлетворять следующим условиям: **а)** для стационарности корни уравнения $\phi(B) = 0$ должны лежать вне единичного круга для оператора авторегрессии $\phi(B)$ (ряды находятся в статистическом равновесии относительно фиксированного среднего); **б)** для обеспечения обратимости корни уравнения $\theta(B) = 0$ должны лежать вне единичного круга для оператора скользящего среднего $\theta(B)$.

Чтобы добиться экономии параметров, в модель включают одновременно операторы авторегрессии и скользящего среднего.

В целом авторегрессионные модели и модели скользящего среднего известны относительно давно, но их использование в моделировании временных рядов затруднялось из-за отсутствия соответствующих методов идентификации, оценивания и контроля этих моделей, наличия неадекватных методов для описания нестационарных рядов.

При формализации нестационарных рядов используют такие классы моделей, которые пригодны для представления широкого диапазона практических ситуаций, т. е. используют конечные разности порядка $d$:

$$w_t = \Delta^d z_t^*.$$

Конечная разность первого порядка имеет вид $\Delta z_t^* = z_t^* - z_{t-1}^*$.

Стационарный ряд можно затем представить с помощью *АРСС*-модели:

$$w_t - c = \theta(B)a_t \;/\; \varphi(B).$$

Определенная выше модель называется *авторегрессионной интегрированной моделью скользящего среднего,* или *АРИСС* ($p$, $d$, $q$).

Взаимосвязанная статистическая методика метода Бокса—Дженкинса включает: **а)** идентификацию временного ряда (т. е. определение размерностей операторов конечной разности, авторегрессии и скользящего среднего); **б)** оценивание параметров модели; **в)** проверку адекватности модели.

*Сезонная модель Бокса—Дженкинса* содержит сезонные операторы конечной разности, авторегрессии и скользящего среднего. В операторном виде она приобретает вид:

$$\Delta^d \Delta_s^D \phi(B^s) Z_t^* = \theta(B)\theta(B^2)\ Q_t\,,$$

где $S$ — период сезонности; $\Delta_s^D$ — оператор сезонной конечной разности:

$$\Delta_s z_t^* = z_t - z_{t-s}\,,$$

где $D$ — порядок сезонной конечной разности; $\Phi$ — оператор сезонной авторегрессии порядка $P$; $\theta$ — оператор сезонного скользящего среднего порядка $Q$; $d, \phi$, $Q$ определены выше.

Модель называется *сезонной моделью авторегрессии — скользящего среднего* $(p, d, q) \times (P, D, Q)$. Основные этапы разработки сезонной модели аналогичны этапам для несезонной модели.

**Метод ОЛИМП** является распространением моделей авторегрессии скользящего среднего для моделирования нестационарных временных рядов.

Формально модель ОЛИМП соответствует модели *АРСС* $(p, q)$, за исключением того, что на вход модели поступает нестационарный, вообще говоря, временной ряд. Так же как и для несезонных моделей, сезонная модель ОЛИМП отличается от авторегрессионных моделей тем, что на ее вход могут поступать нестационарные временные ряды, которые не приводятся к стационарным путем взятия конечных разностей. В операторном виде модель ОЛИМП $(p, q) \times (P, Q)$ имеет вид:

$$\phi(B)\Phi(B^s) Z_t^* = \theta(B)\theta(B^s) Q_t\,.$$

С точки зрения общих соображений размерности операторов авторегрессии для модели ОЛИМП должны быть несколько больше, чем для модели Бокса—Дженкинса при моделировании одинаковых временных рядов.

Если идентифицирована модель Бокса—Дженкинса с параметрами $p, d, q$, то соответствующая модель ОЛИМП должна иметь параметры: $p'=p+d$. Если процесс удовлетворяет стохас-

тическому разностному уравнению порядка $p$ (авторегрессионный процесс)

$$\sum_{i=0}^{p} \Phi_i y_{t-i} = u_t,$$

где $\Phi_i$ — коэффициент оператора авторегрессии; $u_t$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с дисперсией $\sigma_e^2$, $t = 0,1,...,T$, известны начальные значения $y-p$, $y-p+1,..., y-1$,
то прогноз имеет вид:

$$E(y_t|y_{t-1},\dots,y_0 = -\sum_{i=1}^{p} \Phi_i y_{t-1},$$

где $E$ — оператор математического ожидания,
будем иметь наименьшую дисперсию вне зависимости от значения корней характеристического уравнения.

Сравнительные характеристики двух подходов к моделированию авторегрессионных процессов приведены в табл. 5.3.

*Таблица 5.3.* ***Методы моделирования авторегрессионных процессов***

| *Характеристика* | *Известная схема* | *Новая схема* |
|---|---|---|
| Тип моделируемых процессов | Стационарные | Стационарные и нестационарные |
| Исходные предпосылки | Остатки независимы и одинаково распределены | Остатки независимы, одинаково распределены, заданы начальные условия |
| Базовое представление наблюдений | $y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i u_{t-1}$ | $y_t = \sum_{i=0}^{t} \delta_i u_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j y_{t-1}$ |
| Ограничения | Корни характеристического уравнения вне единичного круга | Нет ограничений |
| Вид прогноза | $E(y_t\|y_1,\dots,y_p) = -\sum_{i=1}^{p} \beta_i y_{t-1}$ | $E(y_t\|y_{t-1},\dots,y_p) = -\sum_{i=1}^{p} \beta_i y_{t-1}$ |

В целом статистические оценки модели являются состоятельными вне зависимости от значения корней характеристического уравнения. В практическом плане свойства состоятельности оценок оказываются вполне достаточны для их использования.

**Оценка качества моделей.** Проведем оценку качества модели по критериями точности и адекватности. Схема формирования интегрированных критериев точности и адекватности, а также

общего критерия качества прогнозирования состоит в следующем. С помощью механизма параметров пакета формируется состав отдельных критериев, на основе которых рассчитывается интегрированный показатель (так, точность можно характеризовать только коэффициентом детерминации, или дисперсией и средней ошибкой аппроксимации, или всеми тремя перечисленными выше критериями точности).

Предварительно для каждого отдельного критерия разрабатывается процедура его нормировки. *Нормированный* критерий получается из исходной статистики критерия таким образом, чтобы выполнялись условия: нормированный критерий равен 100, если модель абсолютно точная (*адекватная*); нормированный критерий равен 0, если модель абсолютно неточная (*неадекватная*).

Обобщенный критерий качества модели формируется как взвешенная сумма обобщенного критерия точности (его вес 0,75) и обобщенного критерия адекватности (его вес 0,25), т. е. точностным характеристикам придается большой вес. В качестве представителя характеристик точности используется нормированное значение средней относительной ошибки аппроксимации, а в качестве представителя критериев адекватности — нормированное значение критерия Дарбина—Уотсона и характеристики нормального закона распределения остаточной компоненты. Числовое значение обобщенного критерия качества лежит в диапазоне от 0 до 100 (минимум соответствует абсолютно плохой модели, а максимум — идеально отображающей развитие показателя). Опыт применения этого показателя показывает, что достаточно надежными являются модели, имеющие оценку качества не менее 75.

Так как формально-статистический выбор лучшей модели во многих случаях не дает полной уверенности в его правильности, то, кроме указанной программой модели, целесообразно просматривать результаты прогнозирования других моделей, имеющих близкое значение критерия качества. *Адекватными моделями* считаются такие, у которых остаточная компонента имеет свойства независимости, случайности и нормальности распределения. *Критерий Дарбина—Уотсона* является наиболее распространенным критерием для проверки корреляции внутри ряда. Если

$$Д = \sum_{i=2}^{n}(e_i - e_{i-1})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} e_i^2,$$

где $e_i$ — расхождение между фактическими и расчетными уровнями, имеет значение, близкое к 2, то можно считать модель регрессии достаточно адекватной.

Для построения интервального прогноза необходимо выполнение свойства нормальности распределения остаточной компоненты, оцениваемого на основе коэффициентов асимметрии и эксцесса (см. табл. 5.1).

При оценке адекватности уравнения регрессии учитывается также корреляционное отношение, которое характеризует долю дисперсии, зависимой переменной, объясняемой уравнением регрессии. Корреляционное отношение рассчитывается по формуле:

$$\eta = [1 - (\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{\bar{y}}_i)^2) / (\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_i)^2)]^{1/2},$$

где $\bar{\bar{y}}_i$ — расчетные значения зависимой переменной; $\bar{y}_i$ — среднее значение.

*Точность модели* характеризует близость расчетных наблюдений фактическим на периоде аппроксимации. Считается, что модели с меньшим расхождением между фактическими и расчетными значениями отражают исследуемый процесс. Для характеристики степени близости используются величины: среднее квадратическое отклонение (или дисперсия), учитывающее сложность модели; коэффициент детерминации (чем ближе к 1, тем более точнее модель); средняя относительная ошибка аппроксимации (чем ближе к 0, тем точнее модель); среднее значение (должно быть близко к нулю); максимальное отклонение.

Статистически *точность прогнозов* можно оценить, только используя ретропрогноз. Его суть состоит в построении модели по усеченному объему данных ($N-k$) точек с последующим сравнением прогнозных оценок с известными фактическими, но умышленно «забытыми» $k$-уровнями ряда. По результатам сравнения вычисляются следующие показатели точности: среднее значение; среднеквадратическое отклонение; средний модуль ошибок прогнозирования (%); максимальное и минимальное отклонения. Чем меньше значения этих величин, тем выше качество ретропрогноза. Данный подход дает хорошие результаты, если на периоде ретропрогноза не содержится принципиально новых закономерностей.

**Построение обобщенного прогноза.** На практике часто встречается ситуация, когда несколько моделей могут быть адекватными, с малыми различиями между их характеристиками. В этом случае целесообразно строить обобщенный прогноз, формируемый как линейная комбинация частных прогнозов:

$$\hat{y}_0 = \sum_{j=1}^{M} p_j y_j ,$$

где $M$ — число объединяемых прогнозов; $p_j$ — весовые коэффициенты частных прогнозов; $y_j$ — частные прогнозы.

Весовые коэффициенты определяются из условия минимума дисперсии ошибок обобщающего прогноза (максимума его точности), которая находится как сумма всех элементов ковариационной матрицы ошибок частных прогнозов с соответствующими весами:

$$\sigma_0^2 = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} k_{ij} p_i p_j ;$$

$$k_{ij} = \sigma_i \sigma_j r_{ij} ,$$

где $k_{ij}$ — корреляционный момент, характеризующий совместно распределение ошибок $i$ и $j$ частных прогнозов; $\sigma_i$ и $\sigma_j$ — средние квадратические ошибки; $r_{ij}$ — коэффициент корреляции между рядами ошибок частных прогнозов $y_i$ и $y_j$

Сумма весовых коэффициентов должна давать единицу (это необходимое условие того, чтобы дисперсия обобщающего прогноза не превышала дисперсии частных прогнозов. Ковариационная матрица ошибок частных прогнозов в этом случае будет иметь вид:

$$k = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & k_{12} & \dots & k_{1M} \\ k_{21} & \sigma_2^2 & \dots & k_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{M1} & k_{M2} & \dots & \sigma_M^2 \end{bmatrix},$$

а дисперсия обобщающегося прогноза соответствует сумме всех элементов матрицы:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 p_1^2 & k_{12} p_1 p_2 & \dots & k_{1M} p_1 \left(1 - \sum_{j=1}^{M-1} p_j\right) \\ k_{21} p_1 p_2 & \sigma_2^2 p_2^2 & \dots & k_{2M} p_2 \left(1 - \sum_{j=1}^{M-1} p_j\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{M1} p_1 \left(1 - \sum_{j=1}^{M-1} p_j\right) & k_{M2} p_2 \left(1 - \sum_{j=1}^{M-1} p_j\right) & \dots & \sigma_M^2 \left(1 - \sum_{j=1}^{M-1} p_j\right) \end{bmatrix}$$

В точке минимума функции все ($M$–1) первые частные производные должны обращаться в нуль.

Приравняв к нулю все ($M$–1) первые частные производные по переменным $p_1$, $p_2$,...,$p_{M-1}$, получаем систему ($M$–1) линейных уравнений с ($M$–1) неизвестными:

$$\begin{cases} p_1(\sigma_1^2 - 2k_{1M} + \sigma_M^2) + \sum_{i=2}^{M-1} p_i(k_{i1} - k_{1M} - k_{iM} + \sigma_M^2) = \sigma_M^2 - k_{1M}\,; \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ p_{M-1}(\sigma_{M-1}^2 - 2k_{(M-1)M} + \sigma_M^2) + \\ + \sum_{i=1}^{M-2} p_i(k_{i(M-1)} - k_{(M-1)M} - k_{iM} + \sigma_M^2) = \sigma_M^2 - k_{(M-1)M}\,. \end{cases}$$

Коэффициенты при переменных составят матрицу $B$, элементы которой определяются так:

$$b_{ij} = b_{ji} = \begin{cases} \sigma_M^2 + k_{ij} - k_{iM} - k_{jM}\,; \\ \sigma_M^2 - 2k_{jM} + \sigma_j^M\,. \end{cases}$$

Вектор свободных членов будет состоять из элементов $c_j$:

$$c_j = \sigma_M^2 - k_{jM}\,.$$

Такую систему уравнений можно решить с помощью линейной алгебры. Алгоритм объединения частных прогнозов имеет вид:

**1.** Вычисляются дисперсии ошибок частных прогнозов и строится ковариационная матрица:

$$\sigma_j^2 = (\sum_{t=1}^{n} e_{jt}^2) / n\,, \qquad j = 1,\dots,M\,,$$

где $e_j$ — ошибки частных прогнозов; $t$ — порядковый номер наблюдения, $t = 1,\dots,n$;

$$k_{ij} = (\sum e_{it} e_{jt}) / n\,.$$

**2.** Строятся матрица $B$ и вектор $C$ по формулам:

$$b_{ij} = b_{ji} = \sigma_M^2 + k_{ij} - k_{iM} - k_{jM}\,;$$

$$c_j = \sigma_M^2 - k_{jM}\,.$$

**3.** Из решения системы линейных уравнений определяется ($M$–1) значение $p_j$, при этом весовой коэффициент $p_M$ определяется так:

$$p_M = 1 - \sum_{j=1}^{M-1} p_j.$$

**4.** Производится проверка условия:

$$p_j > 0,\ j=1,\ldots,\ M,$$

при этом

**а)** если условие не выполняется, прогнозы $y_j$ исключаются и производится перерасчет весовых коэффициентов (с возвратом к пункту **2)**;

**б)** если все весовые коэффициенты положительны, то вычисляется значение обобщающего прогноза $y_0$ и коэффициент условной эффективности $u_{y_1/y_0}$

$$y_0 = \sum_{j=1}^{M} p_j y_j\ ;\ u_{y_1/y_0} = \sigma_0^2 / \sigma_1^2\ ,$$

где $\sigma_0^2$ — дисперсия ошибок комплексного прогноза; $\sigma_1^2$ — дисперсия ошибок наилучшего частного прогноза.

**5.** Так как в большинстве случаев точность прогнозов изменяется во времени, формулы оценки весовых коэффициентов модифицируются так, что более поздним ошибкам присваивается большее значение; этим производится корректировка обобщенного прогноза путем изменения весовых коэффициентов в сторону наилучшего частного прогноза $y_{0T}$:

$$y_{0T} = \sum_{j=1}^{M} p_{jT} y_{jT},$$

где $p_{jT}$ — весовой коэффициент частного прогноза в момент времени $T$; $y_{jT}$ — частный прогноз в момент времени $T$; $y_{0T}$ — обобщенный прогноз в момент времени $T$.

Для повышения стабильности динамики изменения весов в алгоритме их корректировки можно использовать схему экспоненциального сглаживания.

В целом для проведения обобщения необходимо иметь не менее двух адекватных моделей, а для повышения устойчивости результатов количество обобщаемых частных прогнозов не должно превышать пяти.

## 5.5. Многомерный анализ

**Корреляционный анализ** обеспечивает: **а)** измерение степени связи двух или более явлений; **б)** отбор факторов, оказывающих наиболее существенное влияние на результативный признак на

основании измерения степени связности между явлениями; в) обнаружение ранее неизвестных причинных связей (корреляция непосредственно не выявляет причинных связей между явлениями, но устанавливает численное значение этих связей и достоверность суждений об их наличии).

При проведении корреляционного анализа вся совокупность рассматривается как множество переменных (факторов), каждая из которых содержит $n$ наблюдений; $x_{ik}$ — наблюдение $i$ переменной $k$; $\bar{x}_k$ — значение $k$-й переменной; $i=1,\ldots, n$.

Основными средствами анализа являются парные, частные коэффициенты корреляции, множественные коэффициенты корреляции. Парные коэффициенты корреляции опосредованно учитывают влияние других факторов. Для исключения этого влияния определяют частные коэффициенты корреляции.

*Парный коэффициент корреляции* между $k$-м и $L$-м факторами вычисляется так:

$$r_{kp} = \sum_{i=1}^{n}\left(x_{ik} - \bar{x}_k\right)\left(x_{iL} - \bar{x}_L\right) \Bigg/ \left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ik} - \bar{x}_k\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(x_{iL} - \bar{x}_L\right)^2\right]^{1/2}.$$

Он служит показателем тесноты линейной статистической связи, но только в случае совместной нормальной распределенности случайных величин, выборками которых являются $k$-й и $L$-й факторы.

При этих же предпосылках для проверки гипотезы о равенстве нулю парного коэффициента корреляции используется $t$-статистика, распределенная по закону Стьюдента с $n-2$ степенями свободы. Сначала критическое значение $t$-статистики, а на его основе критическое значение коэффициента корреляции рассчитывается так:

$$r_{kp} = t_{kp} \,/\, (n - 2 + t^2)^{1/2}.$$

Если расчетное значение больше критического, то гипотеза о равенстве нулю данного коэффициента корреляции отвергается на соответствующем вероятностном уровне. Аналогичные выводы имеют место при проверке значимости частных коэффициентов корреляции.

*Частный коэффициент корреляции* первого порядка между $k$-м и $L$-м факторами характеризует тесноту их линейной связи при фиксированном значении $j$-го фактора. Он определяется

$$r_{kL\,j} = (r_{kL} - r_{kj} - r_{Lj}) \,/\, [(1 - r_{kj})^2 (1 - r_{Lj})^2]^{1/2}.$$

Он распределен аналогично парному коэффициенту при тех же предпосылках, и для проверки его значимости используется $t$-статистика, но в которой число степеней свободы равно $n-3$.

Частный коэффициент рассчитывается в общем виде при условии, что все переменные фиксированные, следующим образом:

$$r_{kL}\ (\text{частн.}) = -D_{kL} / (D_{kk} D_{LL})^{1/2},$$

где $D_{ij}$ — определитель матрицы, образованной из матрицы парных коэффициентов корреляции вычеркиванием $i$-й строки и $j$-го столбца.

Для каждого частного коэффициента корреляции аналогично парному рассчитываются $t$-значение для проверки значимости коэффициента, а также доверительные интервалы. При этом дисперсия $z$-преобразованной величины равняется $1/(n-L-3)$, где $L$ — число фиксированных переменных (в программе $L=m-2$).

Для определения тесноты связи между текущей $k$-й переменной и оставшимися (объясняющими) переменными используется выборочный множественный коэффициент корреляции:

$$R_k = (1 - D / D_{kk})^{1/2},$$

где $D$ — определитель матрицы парных коэффициентов корреляции.

Для проверки статистической значимости коэффициента множественной корреляции используется величина

$$F = \frac{R^2 / L}{(1 - R^2) / (n - L - 2)},$$

имеющая $F$-распределение с $L$ и $(n-L-2)$ степенями свободы соответственно.

Если рассчитанное $F$-значение больше значения $F$-распределения на соответствующем вероятностном уровне (0,9 и выше), то гипотеза о линейной связи между $k$-й переменной и остальными переменными не отвергается. В программе для каждого коэффициента множественной корреляции выводятся $F$-значение и процентная точка $F$-распределения, которая ему соответствует.

**Регрессионный анализ.** При регрессионном анализе решаются следующие задачи: **а)** установление форм зависимости (положительная, отрицательная, линейная, нелинейная); **б)** определение функции регрессии. Важно не только указать общую тенденцию изменения зависимой переменной, но и выяснить, каково было бы действие на зависимую переменную главных факторов, если

прочие (второстепенные, побочные) факторы не изменялись (находились на одном и том же среднем уровне) и исключены случайные элементы; **в)** оценка неизвестных значений зависимой переменной.

Уравнение множественной линейной регрессии имеет вид:

$$y = a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_mx_m .$$

В каждом виде регрессионного анализа необходимо выбрать зависимую переменную $Y$ (для которой строится уравнение регрессии) и одну или несколько независимых переменных $x_j$ ($i$=1,2,... $m$). Это уравнение позволяет установить статистическую взаимосвязь изучаемых показателей и в случае ее устойчивости дать аналитические и прогнозные оценки.

На базовом периоде времени строится уравнение зависимой переменной. Далее производится расчет прогнозных значений зависимой переменной по рассчитанному уравнению регрессии. При этом для всех регрессоров заранее должны быть получены их прогнозные оценки и дописаны в конец исходных данных. Для зависимой переменной в исходных данных на глубину периода прогнозирования необходимо дописать нулевые значения.

Известны различные виды множественной регрессии — линейная, пошаговая, гребневая и др.

В *линейном регрессионном анализе* рассматривается зависимость случайной величины $Y$ от ряда исходных факторов (регрессоров) $X_1$, $X_2$,..., $X_m$, которая в силу влияния неучтенных факторов будет стохастической. В матричной записи она имеет вид:

$$Y = X\beta + \varepsilon,$$

где $Y$ — вектор значений переменной, $X$ — матрица независимых переменных, $\beta$ — подлежащий определению вектор параметров; $\varepsilon$ — вектор случайных отклонений.

В регрессионном анализе действуют следующие предположения:

$$M\left[\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j\right] = 0, \qquad j \neq 1, \qquad M\left[\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j\right] = \sigma_e^2, \qquad j = 1,\ldots,m,$$

матрица $X$ детерминирована и ее столбцы линейно независимы.

МНК-оценки находятся из условия минимума функционала:

$$(Y - X\beta)^T (Y - X\beta).$$

Оценки параметров имеют вид:

$$\bar{\bar{\beta}} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y$$

и являются несмещенными и эффективными.

Если $\bar{\bar{y}} = X \cdot \bar{\bar{\beta}}$ — эмпирическая аппроксимирующая регрессия, то элементы вектора $e = Y - \bar{\bar{Y}}$ называются *остатками*. Анализ остатков позволяет судить о качестве построенного уравнения регрессии.

*Пошаговая регрессия* — один из методов определения наилучшего подмножества регрессоров для объяснения $Y$. Реализуется пошаговая процедура с последовательным включением переменных в уравнение регрессии.

Пусть в уравнение регрессии включено $L$ переменных, т. е. сделано $L$ шагов алгоритма, и осуществляется $L+1$ шаг. Основной вопрос, который решается на каждой итерации, — это вопрос о том, какую переменную включать в уравнение регрессии.

Для каждой переменной регрессии, за исключением тех переменных, которые уже включены в модель, рассчитывается величина $C_j$, равная относительному уменьшению суммы квадратов зависимой переменной. При включении переменной в уравнение регрессии она интерпретируется как доля оставшейся дисперсии независимой переменной, которую объясняет $j$-я переменная. Пусть $k$ — номер переменной, имеющей максимальное значение $j$-го элемента. Тогда, если $C_j < p$, где $p$ — определенная константа, то анализ переменных прекращается, и больше переменных не вводится в модель. В противном случае $k$-я переменная вводится в уравнение регрессии. Константа $p$ является параметром метода и может быть изменена пользователем.

*Гребневая регрессия* основана на гребневых оценках, направленных на оценивание множественных линейных регрессий в условиях мультиколлинеарности, т. е. сильной корреляции независимых переменных.

Как известно, следствием мультиколлинеарности является обусловленность матрицы $X'X$ и бесконечное возрастание по этой причине дисперсии оценок линейной регрессии.

Матрица $X'X$ регуляризуется путем добавления малого положительного числа к диагональным элементам. В программе реализован алгоритм построения однопараметрической гребневой оценки вида:

$$a(k) = (X'X + kD)X'Y, \quad k \geq 0,$$

где $k$ — параметр регуляризации; $D$ — матрица регуляризации, в качестве которой может быть выбрана единичная матрица или диагональная матрица, составленная из диагональных элементов $X'X$.

Для автоматического расчета параметра $k$ выбрана формула:

$$k = ms / a'a,$$

где $a$ — вектор оценок регрессии по МНК; $s$ — оценка остаточной дисперсии по МНК.

*Парная регрессия* устанавливает связь между откликом $Y$ и функцией, зависящей от одной входной переменной $X$, т. е. регрессия имеет вид: $Y = f(X)$.

Функции $f$, включенные в парную регрессию в настоящем пакете, удовлетворяют двум основным условиям: они распространены в практике экономических исследований, каждое из уравнений регрессии путем преобразований типа логарифмирования и возведения в степень сводится к линейной модели.

Для реализации функции парной регрессии необходимо выбрать переменную $Y$ (зависимая переменная), переменную $X$ (объясняющая переменная), а также сформировать список функций парной регрессии (табл. 5.4).

Для каждой функции параметры вычисляются по методу наименьших квадратов, а также рассчитывается критерий вида:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{\overline{y_i}}\right)^2\right) \Big/ (n-k),$$

где $k$ — число оцениваемых параметров функции.

Та функция, которой соответствует минимальное значение критерия, считается оптимальной, и для нее рассчитываются все параметры.

Заметим, что с помощью коэффициентов регрессии нельзя сопоставить факторы по степени их влияния на зависимую переменную из-за различий единиц измерения и степени колеблемости. Для устранения этого применяют коэффициент эластичности, дельта-коэффициент, бета-коэффициент.

Как с помощью частных коэффициентов эластичности, так и с помощью бета-коэффициентов можно проранжировать факторы по степени их влияния на зависимую переменную, т. е. сопоставить их между собой по величине этого влияния. Вместе с тем нельзя непосредственно оценить долю влияния фактора в суммарном влиянии всех факторов. Для этой цели используются дельта-коэффициенты.

*Таблица 5.4.* ***Основные функции парной регрессии***

| *Модель* | *Преобразование* | *Матрицы* | |
|---|---|---|---|
| | | *X* | *Y* |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| $Y=a+bX$ | Нет | $\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \dots & \dots \\ n & x_n \end{pmatrix}$ | — |
| $Y=a+bX+cXX$ | Нет | $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ n & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}$ | — |
| $Y=a+b/X$ | Нет | $\begin{pmatrix} 1 & 1/x_1 \\ 2 & 1/x_2 \\ \dots & \dots \\ n & 1/x_n \end{pmatrix}$ | — |
| $Y=1/(a+bX)$ | Возведение в степень (−1) | $\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 2 & x_2 \\ \dots & \dots \\ n & x_n \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1/y_1 \\ 1/y_2 \\ \dots \\ 1/y_n \end{pmatrix}$ |
| $Y=1/(a+b\exp(-X))$ | Возведение в степень (−1) | $\begin{pmatrix} 1 & \exp(-x_1) \\ 2 & \exp(-x_2) \\ \dots & \dots \\ n & \exp(-x_n) \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1/y_1 \\ 1/y_2 \\ \dots \\ 1/y_n \end{pmatrix}$ |
| $Y=a\exp(bX)$ | Логарифмирование | $\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 2 & x_2 \\ \dots & \dots \\ n & x_n \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \ln(y_1) \\ \ln(y_2) \\ \dots \\ \ln(y_n) \end{pmatrix}$ |
| $Y=a+b\lg(X)$ | Нет | $\begin{pmatrix} 1 & \ln(x_1) \\ 2 & \ln(x_2) \\ \dots & \dots \\ n & \ln(x_n) \end{pmatrix}$ | — |

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| $Y=ab^xc^x$ | Логарифмирование | $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 2 & x_2 & x_2^2 \\ . & \dots & \dots \\ n & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \ln(y_1) \\ \ln(y_2) \\ \dots\dots \\ \ln(y_n) \end{pmatrix}$ |
| $Y = a^{b^x}$ | Логарифмирование | $\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 2 & x_2 \\ \dots\dots & \\ n & x_n \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \ln(y_1) \\ \ln(y_2) \\ \dots\dots \\ \ln(y_n) \end{pmatrix}$ |
| $Y=a+b/\ln(x)$ | Нет | $\begin{pmatrix} 1 & 1/\ln(x_1) \\ 2 & 1/\ln(x_2) \\ \dots\dots & \\ n & 1/\ln(x_n) \end{pmatrix}$ | — |
| $Y=aX^b$ | Логарифмирование | $\begin{pmatrix} 1 & \ln(x_1) \\ 2 & \ln(x_2) \\ \dots\dots & \\ n & \ln(x_n) \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \ln(y_1) \\ \ln(y_2) \\ \dots\dots \\ \ln(y_n) \end{pmatrix}$ |
| $Y=a+bX+c(X)^{1/2}$ | Нет | $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \sqrt{x_1} \\ 2 & x_2 & \sqrt{x_2} \\ . & \dots & \dots \\ n & x_n & \sqrt{x_n} \end{pmatrix}$ | — |
| $Y=X/(a+bX)$ | Нет | $\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 2 & x_2 \\ \dots\dots & \\ n & x_n \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} x_1/y_1 \\ x_2/y_2 \\ \dots\dots \\ x_n/y_n \end{pmatrix}$ |

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| $Y=a\exp(b/X)$ | Логарифмирование | $\begin{pmatrix} 1 & 1/x_1 \\ 2 & 1/x_2 \\ & \dots\dots \\ n & 1/x_n \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \ln(y_1) \\ \ln(y_2) \\ \dots\dots \\ \ln(y_n) \end{pmatrix}$ |
| $Y=a+bX^k$ | Нет | $\begin{pmatrix} 1 & x_1^k \\ 2 & x_2^k \\ & \dots\dots \\ n & x_n^k \end{pmatrix}$ | — |
| $Y=a+bX+cXX+\ldots+dX^k$ | Нет | $\begin{pmatrix} 1 & x_1 \ldots & x_1^k \\ 2 & x_2 \ldots & x_2^k \\ . & \dots\dots & \dots \\ n & x_n \ldots & x_n^k \end{pmatrix}$ | — |

Для экономической интерпретации нелинейных связей обычно пользуются коэффициентом эластичности (табл. 5.5), который характеризует относительное изменение зависимой переменной при изменении объясняющей переменной на 1%. Если уравнение регрессии имеет вид $y=f(x)$, то коэффициент эластичности рассчитывается так:

$$Э = \frac{df}{dx} \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}},$$

где $\bar{x}$ — среднее значение переменной $x$; $\bar{y}$ — среднее значение переменной $y$, производная берется в точке $\bar{x}$.

*Дельта-коэффициент.* Доля вклада каждого фактора в суммарное влияние составляет:

$$\Delta_j = (r_j \cdot \beta_j) / R^2; \quad \sum_k \Delta_k = 1; \qquad R^2 = r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + \ldots + r_k\beta_k,$$

где $R^2$ – коэффициент множественной детерминации; $r_i$ — коэффициент парной корреляции между $i$-м фактором и зависимой переменной; $\beta_i$ — β-коэффициент.

*Таблица 5.5.* ***Расчет коэффициентов эластичности***

| № п/п | Функция | Формула коэффициента эластичности |
|---|---|---|
| 1 | $Y=a+bx$ | $Э= b(x / y)$ |
| 2 | $Y=a+bx+cx^2$ | $Э= (b+2cx)(x / y)$ |
| 3 | $Y=a+b/x$ | $Э= b / (ax+b)$ |
| 4 | $Y=1/(a+bx)$ | $Э= bx / (a+bx)$ |
| 5 | $Y=1/(a+b)e^{-x}$ | $Э= bxe^{-x} / (a+be^{-x})$ |
| 6 | $Y=ae^{bx}$ | $Э= bx$ |
| 7 | $Y=a+b\ln(x)$ | $Э= b / y$ |
| 8 | $Y=ab^x c^{x^2}$ | $Э= a(\ln(b)e^x c^{x^2} + 2b^x xe^{x^2}\ln(c))(x / y)$ |
| 9 | $Y=ab^x$ | $Э= a\ln(b)e^x(x / y)$ |
| 10 | $Y=a+b/\ln(x)$ | $Э= b / (\ln^2(x) \times y)$ |
| 11 | $Y=ax^b$ | $Э= b$ |
| 12 | $Y=a+bx+c(x)^{1/2}$ | $Э= (b-c)(x)^{1/2}(x / y)$ |
| 13 | $Y=x/(a+bx)$ | $Э=a/(a+bx)$ |
| 14 | $Y=ae^{(b/x)}$ | $Э=b/x$ |
| 15 | $Y=a+bx^k$ | $Э= bkx^k / (a+bx^k)$ |
| 16 | $Y=a_0+a_1x^1+\ldots+a_kx^k$ | $Э= (\sum_{i=1}^{k} a_i ix^i) / y$ |

При корректно проводимом анализе величины дельта-коэффициентов положительны, т. е. все коэффициенты регрессии имеют тот же знак, что и соответствующие парные коэффициенты корреляции.

Тем не менее в случаях сильной коррелированности объясняющих переменных некоторые дельта-коэффициенты могут быть отрицательными вследствие того, что соответствующий коэффициент регрессии имеет знак, противоположный парному коэффициенту корреляции.

*Бета-коэффициент.* Для устранения различий в измерении и степени колеблемости факторов используется β-коэффициент или коэффициент регрессии в стандартизованном виде:

$$\beta_j = b_j S_j / S_y,$$

где $b_j$ — коэффициент регрессии при $j$-й переменной, $S_j$ — оценка среднеквадратического отклонения $j$-й переменной, $S_y$ — оценка среднеквадратического отклонения независимой переменной.

Коэффициент показывает, на какую часть величины среднего квадратического отклонения меняется среднее значение зависимой переменной с изменением соответствующей независимой переменной на одно среднеквадратическое отклонение при фиксированном на постоянном уровне значений остальных независимых переменных.

**Факторный и компонентный анализ.** Методом определения структурной зависимости между случайными переменными служит компонентный анализ. В результате его использования получается сжатое описание малого объема, несущее почти всю информацию, содержащуюся в исходных данных. Главные компоненты $Y_1$, $Y_2$,..., $Y_m$ получаются из исходных переменных $X_1$, $X_2$,..., $X_m$ путем целенаправленного вращения, т. е. как линейные комбинации исходных переменных. Вращение производится таким образом, чтобы главные компоненты были ортогональны и имели максимальную дисперсию среди возможных линейных комбинаций исходных переменных $X$. При этом переменные $Y_1$, $Y_2$,..., $Y_m$ некоррелированы между собой и упорядочены по убыванию дисперсии (первая компонента имеет наибольшую дисперсию). Кроме того, общая дисперсия после преобразования остается без изменений. Итак, $i$-я главная компонента $Y_i$:

$$Y_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} x_j; \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}^2 = 1; \quad i = 1, \ldots, m.$$

Пусть $R$ — корреляционная матрица переменных $X$. Тогда $\alpha_{ij}$ — первый собственный вектор матрицы $R$ и т.д. Кроме того, дисперсия первой главной компоненты равна первому собственному числу матрицы $R$, дисперсия второй главной компоненты равна второму собственному числу матрицы $R$ и т.д.

*Факторный анализ* является более общим методом преобразования исходных переменных по сравнению с компонентным анализом. Модель факторного анализа имеет вид:

$$X_i = \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij} F_j + e_i,$$

где $\lambda_{ij}$ — постоянные величины, называемые факторными нагрузками, $F_j$ — общие факторы, используемые для представления всех $p$ исходных переменных, $e_i$ — специфические факторы, уникальные для каждой переменной, $p \leq m$.

Задачами факторного анализа являются: определение числа общих факторов, определение оценок $\lambda$, определение общих и

специфических факторов. Для получения оценок общностей и факторных нагрузок используется эмпирический итеративный алгоритм, сходящийся к истинным оценкам параметров, суть которого сводится к следующему:

**1.** Первоначальные оценки факторных нагрузок определяются с помощью метода главных факторов. На основании корреляционной матрицы $R$ формально определяются оценки главных компонент:

$$Y_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} x_j; \qquad \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}^2 = 1; \quad i = 1,\dots,m .$$

**2.** Оценки общих факторов ищутся в виде:

$$F_i = Y \ / (\lambda_i)^{1/2}; \ i = 1,\dots,p \ ,$$

где $\lambda_i$ — соответствующее собственное значение матрицы $R$.

**3.** Оценками факторных нагрузок служат величины

$$L_{ij} = a_{ij}(\lambda_i)^{1/2}; \quad i = 1,\dots,m; \quad j = 1,\dots,p,$$

где $a_{ij}$ — оценки $\alpha_{ij}$ ; $L_{ij}$ — оценки $\lambda_{ij}$.

**4.** Оценки общностей получаются как

$$h_i^2 = \sum_{j=1}^{p} L_{ji}^2 .$$

**5.** На следующей итерации модифицируется матрица $R$ — вместо элементов главной диагонали подставляются оценки общностей, полученные на предыдущей итерации; на основании модифицированной матрицы $R$ с помощью вычислительной схемы компонентного анализа повторяется расчет главных компонент (которые не являются таковыми с точки зрения компонентного анализа), ищутся оценки главных факторов, факторных нагрузок, общностей, специфичностей. Факторный анализ можно считать законченным, когда на двух соседних итерациях оценки общностей меняются слабо.

Преобразования матрицы $R$ могут нарушать положительную определенность матрицы $R$ и как следствие некоторые собственные значения $R$ могут быть отрицательными. Для лучшей интерпретации полученных общих факторов к ним применяется процедура варимаксного вращения.

Если факторный анализ ведется в терминах главных компонент, то значения факторов могут быть вычислены непосредст-

венно. Главные компоненты (без вращения) могут быть представлены в виде:

$$F_p = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{jp} x_j\right) / \lambda_p; \quad p = 1, \ldots, m ,$$

где $a_{jp}$ — коэффициенты при общих факторах; $\lambda_p$ — собственные значения; $x_j$ — исходные данные (вектор-столбцы); $F_p$ — главные компоненты (вектор-столбцы).

В случае вращения главных компонент соотношения, связывающие исходные переменные и значения факторов, несколько усложняются. Ниже в матричном виде приведено соотношение, оптимальное по скорости вычисления, а также не зависимое от метода вращения факторов:

$$F = B^T A \Lambda_m^{-2} A^T x ,$$

где $B^T$ — повернутая матрица $A$; $A$ — матрица коэффициентов при общих факторах; $\Lambda_m$ — диагональная матрица $m$ собственных членов; $x$ — матрица исходных данных; $F$ — матрица $m$ повернутых факторов.

При определении числа *общих факторов* руководствуются следующими критериями: число существенных факторов можно оценить из содержательных соображений, в качестве $p$ берется число собственных значений, больших либо равных единице (по умолчании), выбирается число факторов, объясняющих определенную часть общей дисперсии или суммарной мощности.

**Кластерный анализ.** Классификация объектов по осмысленным группам, называемая *кластеризацией*, является важной процедурой в различных областях научных исследований. *Кластерный анализ* (КА) — это многомерная статистическая процедура, упорядочивающая исходные данные (объекты) в сравнительно однородные группы. Общим для всех исследований, использующих КА, являются *пять* основных процедур: **1)** отбор выборки для кластеризации; **2)** определение множества признаков, по которым будут оцениваться объекты в выборке; **3)** вычисление значений той или иной меры сходства между объектами; **4)** применение метода КА для создания групп исходных данных; **5)** проверка достоверности результатов кластерного решения.

Каждый из перечисленных шагов играет существенную роль при использовании КА в прикладном анализе данных. При этом шаги **1**, **2** и **5** целиком зависят от решаемой задачи и должны определяться пользователем. Шаги **3** и **4** выполняются программой КА.

В целом многие методы КА — довольно простые эвристические процедуры, которые не имеют, как правило, строгого статистического обоснования, но позволяют свести к минимуму вероятность допущения ошибки при трактовке результатов КА.

Разные кластерные методы могут порождать различные решения для одних и тех же данных. Это обычное явление в большинстве прикладных исследований. Окончательным критерием считают удовлетворенность исследователя результатами КА.

Разработанные кластерные методы образуют *семь* основных семейств: иерархические агломеративные методы; иерархические дивизимные методы; итеративные методы группировки; методы поиска модальных значений плотности; факторные методы; методы сгущений; методы, использующие теорию графов.

По данным ряда исследований, около 2/3 приложений КА используют иерархические агломеративные методы. Рассмотрим его сущность на примере наиболее простого *метода одиночной связи.*

Процесс кластеризации начинается с поиска двух самых близких объектов в матрице расстояний. На последующих шагах к этой группе присоединяется объект, наиболее близкий к одному из уже находящихся в группе. По окончании кластеризации все объекты объединяются в один кластер.

Отметим несколько важных особенностей иерархических агломеративных методов: 1) все эти методы просматривают матрицу расстояний размерностью $N \cdot N$ (где $N$ — число объектов) и последовательно объединяют наиболее схожие объекты. Именно поэтому они называются *агломеративными* (объединяющими); 2) последовательность объединения кластеров можно представить визуально в виде древовидной диаграммы, часто называемой *дендрограммой*; 3) для понимания этого класса методов не нужны обширные знания матричной алгебры или математической статистики. Вместо этого дается правило объединения объектов в кластеры.

Для «ОЛИМП:СтатЭксперт» разработана программа кластерного анализа, основанная на иерархической агломеративной процедуре и позволяющая пользователю управлять процессом кластеризации. Кратко поясним суть предлагаемого метода.

Сначала ищутся два наиболее близких объекта (предположим, $A$ и $B$). Предположим, что расстояние между объектами $A$ и $B$ равно $R$. В один кластер объединяются объекты, расстояние между которыми меньше чем $(10-C)R$, где $C$ — четкость класси-

фикации, параметр управления процессом, принимающий значения от 1 до 10, который может меняться пользователем. При $C=10$ на каждом шаге объединяются только два самых близких элемента, т. е. имеет место иерархическая агломеративная процедура в чистом виде. Однако, как показывает практика использования КА, пользователю важнее выделить в пространстве группы объектов с разной плотностью. В этом случае величину $C$ необходимо уменьшать. Минимальное расстояние $R$ пересчитывается на каждом шаге КА.

*Объединение.* На каждом шаге КА происходит объединение объектов, т.е. из нескольких объектов образуется один кластер. Процедура кластеризации заканчивается, когда все первичные объекты исчерпаны. Допустим, на каждом шаге объединяются $n$ объектов. Из этих объектов образуется один кластер как центр тяжести этих объектов (среднее арифметическое по каждой координате).

Размерность задачи уменьшается на величину $n-1$ ($n$ объектов удаляются, один добавляется). Далее производится пересчет матрицы расстояний.

В программе реализован кластерный анализ *наблюдений,* т.е. в результате вычислительной процедуры каждое наблюдение относится к той или иной группе. Кластеризация проводится на основе одной из двух метрик:

**1)** евклидово расстояние:

$$R=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-y_i\right)^2};$$

**2)** корреляционное расстояние:

$$R=\left|1-r_{xy}\right|,$$

где $x=\{x_1, x_2,..., x_k\}$ и $y=\{y_1, y_2,..., y_k\}$ — две точки; $r_{xy}$ — парный коэффициент корреляции между $x$ и $y$.

В программе реализованы *три* метода классификации: метод «ближайшего соседа», метод «ОЛИМП», метод $K$-средних.

*Метод «ближайшего соседа»* представляет иерархический агломеративный метод. Процесс кластеризации начинается с поиска двух самых близких объектов в матрице расстояний, далее к этой группе присоединяется объект, наиболее близкий к одному из уже находящихся в группе. По окончании кластеризации все ближайшие объекты объединены в один кластер.

*Метод «ОЛИМП»* основан на иерархической агломеративной процедуре. На каждом шаге КА происходит объединение объектов, т. е. из нескольких объектов образуется один кластер. Процедура кластеризации заканчивается, когда все первичные объекты исчерпаны. Допустим, на каждом шаге объединяются $n$ объектов. Из этих объектов образуется один кластер как центр тяжести этих объектов (среднее арифметическое по каждой координате). Размерность задачи уменьшается на величину ($n$–1), так как $n$ объектов удаляются, а один добавляется. Далее производится пересчет матрицы расстояний.

*Метод К-средних* относится к итеративным методам группировки. Его достоинство — возможность управления количеством групп ($K$-групп), на которые должны быть разнесены наблюдения. Алгоритм метода:

**1.** Начать с исходного разбиения данных не некоторое заданное число кластеров; вычислить центры тяжести этих кластеров (в программе исходное разбиение выполняется методом ближайшего соседа).

**2.** Поместить каждую точку данных в кластер с ближайшим центром тяжести.

**3.** Вычислить новые центры тяжести кластеров; кластеры не заменяются на новые до тех пор, пока не будут просмотрены полностью все данные. Шаги **2** и **3** повторяются до тех пор, пока не перестанут меняться кластеры.

Содержательно этот метод направлен на поиск разбиения выборки с минимальным разбросом. В отличие от иерархических агломеративных методов, которые требуют вычисления и хранения матрицы сходств между объектами размерностью $N \cdot N$, итеративные методы работают непосредственно с первичными данными. Поэтому с их помощью возможно обрабатывать довольно большие множества данных. Более того, итеративные методы делают несколько просмотров данных и могут компенсировать последствия плохого исходного разбиения данных, тем самым устраняя самый главный недостаток иерархических агломеративных методов. Эти методы порождают кластеры одного ранга, которые не являются вложенными, и поэтому не могут быть частью иерархии. Большинство итеративных методов не допускают перекрытия кластеров.

На результаты кластеризации существенное влияние оказывает выбор *меры расстояния*. На практике их лучше бы называть

*мерами несходства:* для большинства используемых коэффициентов большие значения соответствуют большему сходству, в то время как для мер расстояния все наоборот. Считается, что два объекта идентичны, если описывающие их переменные принимают одинаковые значения. В этом случае расстояние между ними равно нулю. Меры расстояния обычно не ограничены сверху и зависят от выбора шкалы (масштаба) измерения. В программе кластеризация проводится на основе метрик: евклидово расстояние; корреляционное расстояние; расстояние городских кварталов (манхеттенское); расстояние Махаланобиса (обобщенное расстояние), вычисляемых по формулам табл. 5.6.

Главным недостатком *коэффициента корреляции* как меры сходства является его чувствительность к форме при сниженной чувствительности к величине различий между переменными. Он также часто не удовлетворяет неравенству треугольника, и корреляция, вычисленная этим способом, не имеет статистического смысла, так как среднее значение определяется по совокупности всевозможных разнотипных переменных, а не по совокупности объектов (смысл «среднего» по разнотипным переменным далеко не ясен). Однако данный коэффициент широко используется в приложениях кластерного анализа [37, 38, 40, 44 и др.].

*Таблица 5.6.* ***Расчетные формулы метрик кластеризации***

| № п/п | Показатель | Формула расчета* |
|---|---|---|
| 1 | Евклидово расстояние | $R=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-y_i\right)^2}$ |
| 2 | Корреляционное расстояние | $R=\left\|1-r_{xy}\right\|$ |
| 3 | Расстояние городских кварталов | $d_{ij}=\sum_{k=1}^{p}\left\|x_{ik}-x_{jk}\right\|$ |
| 4 | Расстояние Махаланобиса | $d_{ij}=\left(x_i-x_j\right)'\sum^{-1}\left(X_i-X_j\right)$ |

* В табл.5.6 введены следующие обозначения: для пп. 1 и 2 $x=\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ и $y=\{y_1,y_2,\ldots,y_k\}$ — две точки; $r_{xy}$ — парный коэффициент корреляции между $x$ и $y$; для пп. 3 и 4 $\Sigma$ — общая внутригрупповая дисперсионно-ковариационная матрица, а $X_i$, $X_j$ — векторы значений переменных для объектов $i$ и $j$.

Несмотря на важность евклидовой и других метрик, они имеют серьезные недостатки. Наиболее важный состоит в том, что оценка сходства сильно зависит от различий в сдвигах данных. Переменные, у которых одновременно велики абсолютные значения и стандартные отклонения, могут подавить влияние переменных с меньшими абсолютными размерами и стандартными отклонениями. Более того, метрические расстояния изменяются под воздействием преобразованной шкалы измерения переменных, при которых не сохраняется ранжирование по евклидову расстоянию. Чтобы уменьшить влияние относительных величин переменных, обычно перед вычислением расстояния переменные нормируют к единичной дисперсии и нулевому среднему.

В отличие от евклидовой и других аналогичных метрик метрика расстояния Махаланобиса с помощью матрицы дисперсий-ковариаций связана с корреляциями переменных. Когда корреляция между переменными равна нулю, расстояние Махаланобиса эквивалентно квадратичному евклидову расстоянию.

Для графической интерпретации результатов кластерного анализа приводится график расположения исходных объектов в пространстве первых двух главных компонент. При этом объекты, попавшие в один кластер, отображаются одним цветом. Иногда объекты из разных кластеров расположены столь близко, что может создаться иллюзия неправильной классификации. Это связано с тем, что классификация проводится по большому числу переменных, а график строится по двум координатам, хотя и отражающим основные особенности данных, поэтому расхождения между результатом классификации и графическим отображением неизбежны.

**Частотный анализ.** Вместе с долговременными изменениями во временных рядах часто появляются некоторые регулярные колебания, изменения наблюдаемых значений которых могут быть строго периодическими или близкими к таковым, оцениваясь в частотном аспекте. Для выявления наличия и устойчивости периода этих колебаний обычно используется математический аппарат частотного анализа: гармонический анализ, спектральный анализ, частотная фильтрация, кросс-спектральный анализ, который в совокупности позволяет с разных позиций анализировать исследуемый показатель, но он эффективен лишь при достаточно большом объеме данных (желательно иметь 200—300 наблюдений, но не менее 50 наблюдений), из которых пред-

варительно исключена тенденция (за исключением методов частотной фильтрации).

При *гармоническом анализе* временной ряд наблюдений представляется линейными комбинациями функций $\sin \omega t$—$\cos \omega t$ на основании конечного преобразования Фурье с выявлением наиболее существенных гармоник. Если $Y(t)$ — временной ряд $t=1,2,...,T$, то имеем:

$$y_t = \bar{y} + \sum_{j=1}^{s}\left(a_j \cos\left(\frac{2\pi j}{T}t\right) + b_j \sin\left(\frac{2\pi j}{T}t\right)\right) + \left[a_{T/2}(-1)^t\right], \quad S = (T-1)/2 \ ,$$

где $\bar{y}$ — оценка математического ожидания ряда $Y(t)$, а последнее слагаемое добавляется в том случае, когда $T$ — четное число.

Коэффициенты $a_j$, $b_j$, $a_{T/2}$ вычисляются так:

$$a_j = \frac{2}{T}\sum_{t=1}^{s}\left(y_t \cdot \cos\left(\frac{2\pi j}{T}\right)t\right); \quad b_j = \frac{2}{T}\sum_{t=1}^{s}\left(y_t \cdot \sin\left(\frac{2\pi j}{T}t\right)\right);$$

$$a_{T/2} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{s}\left(y_t \cdot (-1)^T\right).$$

Итак, временной ряд можно представить в виде суммы гармоник, при этом мощность каждой из них определяется как $R_k^2 = a_k^2 + b_k^2$, а $k$-я гармоника считается статистически значимой, если она вносит существенный вклад в дисперсию временного ряда (т.е. если отвергается статистическая гипотеза о том, что $R_k=0$). Для проверки гипотезы вычисляется критерий вида:

$$TR_k^2 / 4\sigma_r^2,$$

где $\sigma_k^2$ — оценка дисперсии отклонения вычисляемых значений от фактических:

$$\sigma_k^2 = \left(\sum_{t=1}^{T} y_t^2 - Ty - \left(TR_k^2\right)/2\right) / (T-3).$$

Вычисляемая величина имеет $F$-распределение с $\nu_1=2$ и $\nu_2 = T-3$ степенями свободы. Гипотеза отвергается (гармоника считается значимой), если вычисленная величина больше чем 95%-ная точка $F$-распределения с соответствующими степенями свободы.

При *спектральном анализе* периодограмму $x(t)$, $t=0,l,...,T$ временного ряда можно рассчитать так:

$$I_{xx}^{(T)}(f) = \left(\left|\sum_{t=0}^{T-1} x(t)\exp\{-i2\pi t\}\right|^2\right) / T \ .$$

Если исходные данные квантованы с интервалом 1 и частотой Найквиста, равной для них 0,5, то периодограмма и спектральная плотность рассчитываются на интервале от 0 до 0,5 в точках $f(j)=j/2M$, $j=0,1,\ldots, M$.

*Спектральную плотность* можно определить по оценке Бартлетта, являющейся усреднением периодограмм, вычисленных по непересекающимся отрезкам временных рядов. В программе «СтатЭксперт» спектральная плотность при $T=LV$ оценивается аналогично, при условии пересечения временных интервалов. Пусть имеем, что

$$I_{xx}^{(V)}(f,I)=\left(\left|\sum_{\nu=0}^{V-1}x(\nu+IV)\exp\{-i2\pi(\nu+IV)\}\right|^2\right)/V\,;\quad I=0,1,\ldots,L-1,$$

где $V$ — ширина временного интервала; $I$ — номер интервала; $S$ — смещение текущего временного интервала относительно предыдущего.

Тогда оценка спектральной плотности получается так:

$$f_{xx}(f)=\left(\sum_{I=0}^{L-1}I_{xx}^{(V)}(f,I)\right)/L.$$

Спектральные оценки можно сглаживать при помощи *окон*, обеспечивающих уменьшение дисперсии выборочной спектральной плотности. На практике из множества известных окон обычно используются: **а)** прямоугольное окно вида: $\lambda_k = 1,\ 0 \le k \le m$; **б)** окно Тьюки-Хеннинга вида: $\lambda_K = 1/2[1+\cos k\pi/m]$; **в)** окно Парзена следующего вида:

$$\lambda_K=\begin{cases}1-6k^2(1-k/m)/m^2 & \text{при } 0,\le k\le m/2\,;\\ 2(1-k/m)^3 & \text{при } m/2\le k\le m\,.\end{cases}$$

Параметры, необходимые для расчета спектра мощности, рассчитываются по следующему алгоритму: **1)** вычисляют значение $V$: $V=n/3$ ($n$ — число наблюдений); если $V<10$, то принимают $V=10$; если $V>50$, то принимают $V=50$; **2)** определяют величину смещения: $S=V/2$.

При *кросс-спектральном анализе* оценивается связь между частотными составляющими двух временных рядов на основе параметров когерентности, фазового сдвига и коэффициента усиления (табл. 5.7).

Аналогично спектру $\tilde{f}_x$ можно получить оценку спектра $\tilde{f}_y$ для ряда $y$. Интерпретация результатов кросс-спектрального анализа — тонкий процесс. Например, когерентность аналогич-

на квадрату коэффициента корреляции на соответствующей частоте, коэффициент усиления — коэффициенту линейной регрессии процесса по процессу на соответствующей частоте, фазовый сдвиг характеризует временное смещение между составляющими двух процессов.

*Таблица 5.7.* ***Расчетные параметры кросс-спектрального анализа***

| № п/п | Показатель | Формула расчета |
|---|---|---|
| 1 | Взаимные ковариационные функции | $C_{xy}(k) = \left\{\sum_{t=1}^{n-k} x_t y_{t+k} - \left(\frac{1}{n-k}\sum_{t=k+1}^{n} y_t \sum_{t=1}^{n-k} x_t\right)\right\} / (n-k)$; $C_{xy}(k) = \left\{\sum_{t=1}^{n-k} y_t x_{t+k} - \left(\frac{1}{n-k}\sum_{t=k+1}^{n} x_t \sum_{t=1}^{n-k} y_t\right)\right\} / (n-k)$ |
| 2 | Ко-спектр (действительная часть спектра) | $\tilde{q}(w_j) = \frac{\lambda_0}{4\pi}\left(C_{xy}(0) + C_{yx}(0)\right) + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\left(C_{xy}(k) + C_{yx}(k)\right)\cos\omega_j k$ |
| 3 | Квадратурный спектр (мнимая часть спектра) | $\tilde{q}(\omega_j) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\left(C_{xy}(k) + C_{yx}(k)\right)\sin\omega_j k$, $\omega_j = \frac{\pi}{m}$, $j = 0,1,\ldots,m$ |
| 4 | Когерентность | $\tilde{C}(\omega_j) = \left[\tilde{c}(\omega_j)^2 + \tilde{q}(\omega_j)^2\right] / \tilde{f}_x(\omega_j)\tilde{f}_y(\omega_j)$ |
| 5 | Фазовый сдвиг | $\tilde{\varphi}(\omega_j) = \mathrm{arctg}\left[\tilde{q}(\omega_j) / \tilde{c}(\omega_j)\right]$ |
| 6 | Коэффициент усиления | $\tilde{R}^2_{xy}(\omega_j) = \tilde{f}_x(\omega_j)\tilde{C}(\omega_j) / \tilde{f}_x(\omega_j)$ |
| 7 | Спектр $\tilde{f}_x$ для ряда $x$ | $\tilde{f}_x(\omega_j) = \left\{\lambda_0 C_x(0) + 2\sum_{k=1}^{m}\lambda_k C_x(k)\cos\omega_j k/2\pi\right.$; $C_x(k) = \left\{\sum_{t=1}^{n-k} x_t\, x_{t+k} - \left(\frac{1}{n-k}\sum_{t=k+1}^{n} x_t \sum_{t=1}^{n-k} x_t\right)\right\} / (n-k)$ |

При частотной фильтрации, осуществляемой посредством высокочастотного (ВУФ) и низкочастотного (НУФ) фильтра, для каждого из них рассчитываются соответствующие силовая и фазовая характеристики (табл. 5.8). Низкочастотный фильтр

предназначен для устранения тренда (низкочастотной составляющей временного ряда наблюдений). Высокочастотный фильтр, наоборот, предназначен для выделения тренда из исходных данных.

*Таблица 5.8.* ***Расчетные формулы параметров фильтров****

| № п/п | *Показатель* | *Расчетная формула* |
|---|---|---|
| 1 | Выход НУФ | $x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2} = a_0 e_{t-1} + a_1 e_{t-1} + a_2 e_{t-2}$; $a_0 = 1 + k^2 + k\sqrt{2}$; $a_1 = 2(k^2 - 1)$; $a_2 = 1 + k^2 - k\sqrt{2}$; $k = \mathrm{tg}(\Omega / 2)$ |
| 2 | Выход ВУФ | $x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2} = a_0 e_t + a_1 e_{t-1} + a_2 e_{t-2}$; $k = \mathrm{tg}(\Omega / 2)$; $a_0 = 1 + k^2 + k\sqrt{2}$; $a_1 = 2(k^2 + 1)$; $a_2 = 1 + k^2 - k\sqrt{2}$ |

* $\Omega$ — частота отсечки; $e_t$ — оценка ВЧ (НЧ) составляющей для НУФ (ВУФ), при их оценке теряются два первых наблюдения. Оценкой тренда в этом случае является ряд $y_t = x_t - e_t$, который может быть использован для прогнозирования.

# Глава 6
# Структурный анализ, обработка нечисловой информации и критерии принятия решений

Проведение социально-экономической политики государства отражается в изменении пропорций между отраслями, регионами, территориями, социальными группами населения и др. Для принятия эффективных решений часто необходимо определять наличие структурных изменений, оценивать их существенность в целом и в различных сравниваемых периодах, определять динамику и тенденции структурных сдвигов.

## 6.1. Структурный анализ

Для проведения статистического анализа изменения структуры необходимо иметь данные об исследуемом показателе не менее чем за два сравниваемых периода либо данные о двух объектах за один и тот же период. Исходные данные могут быть представлены в виде временных рядов наблюдений либо в фиксированный момент времени. Изменение структуры во времени называется *структурным сдвигом,* а различия между объектами в конкретный момент времени — *структурными различиями.* В зависимости от исходных данных с использованием статистических средств анализа можно оценить: **а)** структурные сдвиги во времени (за ряд лет) по одному показателю; **б)** структурные различия объектов исследования (например, предприятий, районов, областей) в конкретный момент времени.

При наличии данных по нескольким показателям (объем продукции, капитальные вложения, основные фонды и численность в одном разрезе, например, в разрезе отраслей) можно для каждого из них провести исследование, а затем, интегрировав полученные результаты, получить более полную информацию.

Указанные задачи нельзя решить средствами описательной статистики, включая графические средства, так как они способ-

ны лишь констатировать факт изменения отдельных элементов структуры. Изменение структуры любого экономического показателя происходит постоянно, но важно иметь количественную меру этих изменений, характеризующую их существенность и сравнимость по отношению к другим периодам наблюдения, тенденцию изменения структуры.

**Анализ структурных сдвигов.** Так как структурным является любой показатель, состоящий из суммы нескольких элементов и выражаемый в относительных величинах (обычно процентах), то математически его структуру можно записать так:

$$F(t,1),\ F(t,2),\ \ldots,\ F(t,j),\ldots,\ F(t,M),$$

где $M$ — количество элементов в структурном показателе; $j$ — номер элемента в структурном показателе ($j = 1,2,\ldots, M$); $N$ — количество уровней наблюдений; $t$ — порядковый номер *наблюдений* ($t = 1,2,\ldots, N$); $Y(t, j)$ — $j$-й элемент показателя в $t$-м периоде наблюдения.

Если показатель задан абсолютными значениями, то для перехода от абсолютных к относительным значениям следует просуммировать для каждого момента времени все элементы, входящие в состав сводного показателя, а затем разделить сумму на все эти наблюдения. В результате будем иметь $F(t, j)$ — для всех элементов $j$ структуры и всех периодов наблюдения. Структура в момент времени $t$ запишется как $F(t,1)$, $F(t,2),\ldots, F(t, M)$.

С учетом введенных обозначений постановку задачи анализа структурных сдвигов можно формулировать следующим образом. При помощи статистических средств на основе данных $F(t, j)$, характеризующих изменение структуры из $M$ элементов за $N$ периодов, провести анализ изменений структуры по сравнению с каким-либо конкретным моментом времени, а также определить особенности ее изменения в целом на периоде наблюдения и возможное состояние структуры в будущем.

Для сравнения структур двух наблюдений можно использовать абсолютные и относительные показатели. *Абсолютные приросты* показывают скорость изменения удельных весов, а *относительные* (темпы роста) — интенсивность их изменения. Эти показатели не пропорциональны, характеризуют разные стороны изучаемой структуры и потому должны использоваться совместно.

Для характеристики изменения структуры в одном периоде по сравнению с базисным периодом целесообразно использовать *линейные* ($Л$) и *квадратичные* ($K$), *абсолютные* ($A$) и *относитель-*

*ные* (*О*) *показатели* (*П*). В математическом виде эти коэффициенты выглядят следующим образом:

$$ЛОП = \sum\left[\left(Ft_1, j\right) - F\left(t_0, j\right)\right]; \quad ЛАП = ЛОП / M;$$

$$КОП = \sum_{j=1}^{N}\left[\left(F\left(t_1, j\right) - F\left(t_0, j\right)\right) / F\left(t_0, j\right)\right] \cdot 100\%;$$

$$КАП = \sum\left[F\left(t_1, j\right) - F\left(t_0, j\right)\right] / M,$$

где $F(t_1, j)$ — структура сравниваемого периода; $F(t_0, j)$ — структура начального периода; [ ] — знак по модулю, показывающий, что все слагаемые берутся со знаком «плюс».

Таким образом, показатель *ЛАП* является средней арифметической из абсолютных приростов удельных весов всех элементов структуры, показатель *КАП* — средней квадратической из абсолютных отклонений удельных весов всех элементов структуры (оба эти показателя указывают, на сколько процентов в среднем отклоняются друг от друга удельные веса одноименных элементов сравниваемых структур; если они близки к нулю, то изменений не произошло).

Показатель *ЛОП* равен сумме абсолютных значений разности удельных весов, а *КОП* показывает, на сколько в среднем отклоняются темпы роста отдельных частей целого от их среднего значения, равного 100%. Близость значений этих показателей к нулю свидетельствует об отсутствии структурных изменений.

Показатели *ЛАП* и *ЛОП* проще *КАП* и *КОП*, но последние точнее отражают степень структурных сдвигов. Опыт показал, что оценки по ним существенно не различаются, поэтому на практике предпочтение обычно отдают наиболее простым показателям.

Два сравниваемых уровня наблюдений могут отстоять друг от друга более чем на один шаг. Поэтому для всех этих показателей целесообразно вычислять средние значения за указанный период наблюдений. В отличие от общих значений они характеризуют не величину изменений структуры, а интенсивность ее изменения. Средние показатели позволяют более точно сравнивать изменения структуры периодов, которые имеют различный интервал. Выбор периодов сравнения может определяться календарными сроками (например, при использовании месячных данных исследовать сдвиги за квартал, а годовых данных — за пятилетку) либо конкретными экономическими соображениями (например, сравнить изменение структуры до начала и после некоторого периода действия нового хозяйственного механизма).

**Показатели изменения динамики**. Для оценки особенностей изменения структуры во времени $t$ =1,2,...,$N$ используются следующие динамические коэффициенты:

а) коэффициент $S(t)$, измеряющий структурный сдвиг за весь период с первого наблюдения до момента $t$. Он вычисляется как сумма абсолютных отклонений всех элементов структуры в периоде $t$ от базового года и аналогичен базисному темпу прироста. Если ежегодно за весь период наблюдается высокая интенсивность структурных сдвигов, а результирующий сдвиг незначителен, то состояние структуры близко к исходному, а сдвиги имели в основном колебательный характер:

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N} F(t,j) - F(1,j);$$

б) коэффициент $P(t)$, измеряющий изменение структуры за два соседних периода наблюдений (аналогичен цепному темпу прироста, показывая, произошел ли структурный сдвиг в периоде $T$ и какой именно):

$$P(t) = \sum_{j=1}^{N} F(t,j) - F(t-1,j);$$

в) коэффициент монотонности $M(t)$, показывающий, сохранил ли структурный сдвиг существующие тенденции изменения элементов структуры или нарушил их; если все элементы структуры меняют свое направление, то коэффициент принимает свое минимальное значение $M(t)$=0, а если изменяются монотонно, то $M(t)$=1:

$$M(t)=C(t) \ / \ P(t),$$

где $C(t)$ — вычисляется как $P(t)$, но только для тех элементов, у которых сохраняется направление изменения.

Значение $M(t)$ тем выше, чем больше компонент с заметным удельным весом сохраняют направление своего изменения. Если средний коэффициент монотонности больше 0,7, то изменения структуры считаются устойчивыми (монотонными). Если он меньше 0,3, то можно утверждать, что изменения носили устойчивый характер, но в противоположном начальному направлении. Значение коэффициента в интервале от 0,3 до 0,7 свидетельствует о немонотонном изменении структуры. Для этих показателей вычисляются средние значения, причем для $P(t)$ и $M(t)$ — средние арифметические, а для $S(t)$ — средняя геометрическая.

Попарное сравнение отдельных наблюдений позволяет дать оценку изменения структуры в фиксированные, наиболее интересные для пользователя моменты времени. Однако оно не позволяет выявить динамику, а следовательно, и тенденции этих изменений. При помощи статистических средств можно получить ответы на два вопроса: *как сильны структурные сдвиги* и *насколько устойчивы изменения структуры*.

Если имеется достаточно длинный период наблюдений, можно воспользоваться математическими методами для получения прогнозных оценок изменения структуры. В данном случае они рассчитываются для всех элементов структуры по линейной модели, параметры которой определены методом наименьших квадратов. При исследовании структурных сдвигов шаг наблюдения может быть любым (год, квартал, месяц и др.), но для прогнозирования он должен быть одинаковым. В целом прогнозные оценки, полученные на основе математических методов, опираются на закономерности прошлого развития и потому более точны при плавном, а не скачкообразном изменении структуры. Если же исследование провести по нескольким взаимосвязанным показателям, то можно получить характеристику их взаимных структурных сдвигов.

**Исследование структурных различий.** Задача исследования структурных различий аналогична описанной выше с той лишь разницей, что время здесь фиксировано, а объектами исследования (уровней) выступают районы, области, формы собственности и др. Для этого вместо индекса $t$ для обозначения уровней наблюдений используют $i$. При помощи статистических средств на основе данных $F(i, j)$, характеризующих изменение структуры из $M$ элементов и $N$ объектов, можно провести анализ различия структуры какого-то конкретного объекта по сравнению с другими и ответить, например, как сильно отличаются друг от друга государства, регионы, области, районы, отрасли по структуре потребления населением товаров и услуг. Специфика данных отражается на статистических показателях. Часто не нужны почти все динамические характеристики (кроме коэффициента структурных сдвигов $S(t)$) и прогнозов, а иногда целесообразно использовать лишь показатели сравнения двух наблюдений.

***Пример 6.1.*** Необходимо провести анализ безубыточности и структурных сдвигов производства двух видов продукции — $A$, $B$, выпускаемых предприятием АВС (табл. 6.1).

Решение. Реализацию продукции рассмотрим как набор относительных долей продукции в общей сумме выручки от реализации.

Если структура меняется, то объем выручки может достигать заданной величины, а прибыль может быть меньше. Влияние на прибыль может определяться сдвигом в ассортименте — в сторону низко- или высокорентабельной продукции.

Как следует из табл. 6.1, на реализацию одной единицы продукции *А* приходится 2 шт. продукции *В*. Тогда при достижении критической точки объема реализации потребуется *x* шт. продукции *А* и 2*x* шт. продукции *В*. Подставляя исходные данные в уравнение определения чистой прибыли (*ЧП*) от реализации продукции

$$ЧП = ВРП - ПрЗ \cdot Ц_i - N \cdot ПрЗ_i - ПЗ\ ,$$

где *ВРП* — выручка от реализации продукции, *ПрЗ* — переменные затраты за этот же объем реализации, *ПЗ* — постоянные затраты в общей сумме, *N* — количество единиц продукции, $Ц_i$ — цена единицы продукции, $ПрЗ_i$ — переменные затраты на единицу продукции, при условии, что в критической точке *ЧП*=0, получаем:

$$ЧП = N \cdot Ц_i - N \cdot ПрЗ_i - ПЗ;$$

$$(2000 \cdot x + 4000 \cdot 2x) - (1500 \cdot x + 2000 \cdot 2x) - 3000000 = 0.$$

Отсюда $10000x - 5500x = 30000000$; $x = 6666$.

Таким образом, в критической точке объем продукции *А* составляет 6666 шт., объем продукции *В* — 13332 шт. Критическая точка объема реализации продукции предприятия *АВС* составит 19998 шт. (6666+13332=19998).

*Таблица 6.1.* ***Продукция А, В предприятия АВС***

| *Показатели финансово-сбытовой деятельности* | *А* | *В* | *Итого* |
|---|---|---|---|
| 1. Объем реализации продукции, шт. | 10000 | 20000 | 30000 |
| 2. Цена за единицу продукции, шт. | 2000 | 4000 | — |
| 3. Выручка от реализации, тыс.руб. | 20000 | 80000 | 100000 |
| 4. Переменные расходы на шт.,руб. | 1500 | 2000 | — |
| 5. Переменные расходы на весь объем реализации, тыс.руб. | 15000 | 40000 | 55000 |
| 6. Маржинальный доход, тыс.руб. | 5000 | 40000 | 45000 |
| 7. Постоянные расходы, тыс.руб. | *x* | *x* | 30000 |
| 8. Чистая прибыль, тыс.руб. | *x* | *x* | 15000 |

Пусть в течение времени произошли изменения структуры реализованной продукции, приведенные в табл. 6.2.

*Таблица 6.2.* ***Продукция А, В предприятия АВС в результате структурных сдвигов***

| *Показатели финансово-сбытовой деятельности* | *А* | *В* | *Итого* |
|---|---|---|---|
| 1. Объем реализации продукции, шт. | 8000 | 22000 | 30000 |
| 2. Цена за единицу продукции, шт. | 2000 | 4000 | — |
| 3. Выручка от реализации, тыс.руб. | 16000 | 88000 | 104000 |
| 4. Переменные расходы на шт., руб. | 1500 | 2000 | — |
| 5. Переменные расходы на весь объем реализации, тыс.руб. | 12000 | 44000 | 56000 |
| 6. Маржинальный доход, тыс.руб. | 4000 | 44000 | 48000 |
| 7. Постоянные расходы, тыс.руб. | *x* | *x* | 30000 |
| 8. Чистая прибыль, тыс.руб. | *x* | *x* | 18000 |

Сопоставление структуры продукции и финансовых показателей в этой ситуации дает увеличение чистой прибыли и доли продукции с высоким маржинальным доходом. Расчет критической точки объема реализации продукции в этом случае составит:

$$(2000x + 2{,}75 \cdot 4000x) - (1500x + 2000 \cdot 2{,}75x) - 30000000 = 0;$$

$$(x+11x)-1{,}5x+5{,}5x) - 30000=0;$$

$$12x - 7x=30000; \quad x=6000.$$

Таким образом, критическая точка объема реализации соответствует 6000 шт. продукции *А*, 16500 шт. продукции *В* при общем объеме продукции 22500 шт. (6000 + 16500 = 22500).

Сравнивая полученные результаты с первоначальным вариантом, отметим, что критическая точка изменилась на 3502 шт. продукции в сторону увеличения объема (при неизменном объеме реализации в натуральном выражении). Следовательно, даже при контроле общего объема продаж необходим анализ структурных сдвигов, так как он дает отклонение фактической прибыли от запланированной. Максимизация реализации продукции рассматривается и с позиций обеспеченности ресурсами (дополнительные производственные мощности могут оказаться бесполезными).

Если воспользоваться при расчетах *методом маржинального дохода* (*МД*)

$$МД = ВРП - ПрЗ; \quad КТ = ПЗ / МД_i,$$

где *КТ* — критическая точка объема продаж, $МД_i$ — маржинальный доход на единицу продукции,

то для нашего примера получим следующие результаты:

$$КТ = ПЗ / МД = 30000000 / 48000000/30000 = 9000/0,48 = 18750 \text{ шт.}$$

В целом маржинальный подход обеспечивает менеджера данными о постоянных расходах, о возможности их возмещения общей маржой, о величине маржинального дохода от каждого вида продукции, о маржинальности каждого продукта (маржинальный доход, приходящийся на единицу продукции). Он лежит в основе управленческих решений, связанных с пересмотром цен, изменением ассортимента выпускаемой продукции, установлением размера премий, стимулирующих реализацию продукции, проведением рекламной кампании и др.

## 6.2. Обработка нечисловой информации

Во многих экономико-статистических исследованиях, наряду с количественными показателями, используются качественные характеристики, обработка которых требует применения специального математического аппарата.

Каждый элемент выборки одновременно классифицируется с помощью двух факторов или признаков: $A$ ($r$ классов или уровней) и $B$ ($c$ классов), это позволяет получить ($r \times c$) — таблицу сопряженности признаков для выборки объема $n$, где $f_{ij}$ обозначает число индивидов с $i$-м уровнем признака $A$ и $j$-м уровнем признака $B$, $f_i$ — общее число индивидов в строке $c$, а $f_j$ — в столбце $j$, $i = 1,..., r; j = 1,..., c$.

После построения этой таблицы можно проверить гипотезы о факторах $A$ и $B$, причем эти гипотезы можно сформулировать в терминах *независимости* факторов $A$ и $B$. В этом контексте независимость означает, что доля общего числа индивидов в строке (столбце), принадлежащая произвольному(ой), но фиксированному(ой) столбцу (строке), одна и та же для всех строк (столбцов).

В некоторых ситуациях уровни одного фактора (например, $A$) являются непересекающимися подпопуляциями $W_1, W_2,... ,W_r$ популяции $W$. В этом случае гипотезу независимости можно формулировать и как гипотезу об *однородности* фактора $B$ по отношению к уровням фактора $A$. Заметим, что в большинстве случаев уровни $A$, расслаивающие $W$ на подпопуляции, измеряются в шкале наименований, а уровни $B$ могут измеряться как в

шкале наименований, так и в порядковой шкале. Кроме того, непрерывные случайные величины, измеряемые в интервальной или относительной шкалах, могут быть преобразованы в порядковую шкалу.

Таблицу сопряженности признаков для двух случайных величин можно использовать для оценки совместного распределения этих двух величин. Поэтому частотная таблица классификации по двум признакам обобщает понятие гистограммы, а критерий независимости признаков $A$ и $B$ — и для случайных величин $X$ и $Y$. Если они обладают двумерным нормальным распределением, то более желательно вычислить выборочный коэффициент корреляции между ними и уже с его помощью проверить независимость.

Для проверки гипотезы как об однородности, так и о независимости часто используется процедура, состоящая в вычислении ожидаемой частоты $F_{ij}$ в ячейке $ij$: $F_{ij} = f_1(f \cdot j) / n$ с вычислением значения:

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} (f_{ij} - F_{ij})^2 / F_{ij}.$$

Если верна нулевая гипотеза, то это значение имеет приблизительно распределение $\chi$-квадрат с $v = (r - 1)(c - 1)$ степенями свободы, а $P$-значение равно площади под кривой плотности ($v$) справа от точки $\chi_0^2$. Нулевая гипотеза отвергается, если $P$ меньше заранее выбранного уровня значимости.

**Виды статистики и меры связанности.** Рассмотрим простейший, но достаточно распространенный случай классификации гипотез по двум факторам $A$ и $B$, каждый с двумя классами ($a_1$, $a_2$) и ($b_1$, $b_2$). Пусть $f_{ij}$ — наблюдаемая частота в ячейке $ij$, $f_i$ — сумма частот в строке $i$, $f_{ij}$ — в столбце $j$, а $n$ — общий объем выборки ($i$, $j$ =1, 2). Проверяется нулевая гипотеза об отсутствии зависимости между $A$ и $B$. Для таблиц сопряженности необходимо рассчитать ряд следующих статистик (табл. 6.3).

Для 2×2-таблицы — обычную статистику *$\chi$-квадрат* или статистику с учетом *поправки Йетса,* которая при больших $n$ распределена приблизительно как $\chi$-квадрат с одной степенью свободы, а также функции разности $D = f_{11} - f_1 \cdot f_1 / n$ между наблюдаемой и ожидаемой частотами, статистиками которых являются *коэффициенты связанности Юла Q и Y.*

*Таблица 6.3.* ***Расчетные статистики для таблиц сопряженности***

| *Виды статистик* | *Формула расчета* |
|---|---|
| *Для таблиц 2×2:* | |
| обычная χ-квадрат | $\chi_0^2 = (f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12})^2 n \,/\, f_1 f_2 f_1 f_2$ **(1)** |
| с учетом поправки Йетса | $\chi_0^2 = (f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12} - 0{,}5n)^2 n \,/\, f_1 f_2 f_1 f_2$ **(2)** |
| коэффициенты связанности Юла $Q$ и $Y$ | $Q = (f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}) \,/\, (f_{11}f_{22} + f_{21}f_{12}) = nD \,/\, (f_{11}f_{22} + f_{21}f_{12})$ **(3)** |
| | $Q = 2Y \,/\, (1+Y)^2 \,;\; Y = \left[(f_{11}f_{22})^{1/2} - (f_{21}f_{12})^{1/2}\right] \Big/ \left[\begin{matrix}(f_{11}f_{22})^{1/2} + \\ + (f_{21}f_{12})^{1/2}\end{matrix}\right]$ **(4)** |
| | $Q = Y = \begin{cases} 1, \text{если } A \text{ и } B \text{ полностью связаны,} \\ 0, \text{если } A \text{ и } B \text{ независимы,} \\ -1, \text{если } A \text{ и } B \text{ полностью отрицательно связаны.} \end{cases}$ |
| асимптотические стандартные оценки | $ASE(Q) = 1 \,/\, 2(1 - Q^2)(1 \,/\, f_{11} + 1 \,/\, f_{12} + 1 \,/\, f_{21} + 1 \,/\, f_{22})^{1/2}$ **(5)** |
| | $ASE(Y) = 1 \,/\, 4(1 - Y^2)(1 \,/\, f_{11} + 1 \,/\, f_{12} + 1 \,/\, f_{21} + 1 \,/\, f_{22})^{1/2}$ **(6)** |
| отношение перекрестных произведений (шансов) | $ASE(o) = o[1 \,/\, f_{11} + 1 \,/\, f_{12} + 1 \,/\, f_{21} + 1 \,/\, f_{22}]^{1/2} \;;\; o = f_{11}f_{22} \,/\, f_{12}f_{21}$ **(7)** |
| *Для (r×c)-таблиц:* | |
| меры на χ-квадрате: | |
| коэффициент сопряженности признаков Пирсона | $C = \left(\chi^2 \Big/ \left(n + \chi^2\right)\right)^{1/2}$ **(8)** |
| степень связанности Крамера | $V = \left[\chi^2 \Big/ \left(n(q-1)\right)\right]^{1/2} \;;\; ASE(V) = \left[n(q-1)\right]^{-1/2}$ |
| | $V = \begin{cases} 0 \text{ при отсутствии связанности } A \text{ и } B, \\ 1 \text{ при полной связанности } A \text{ и } B \end{cases}$ **(9)** |

| | | |
|---|---|---|
| мера Кендалла при $r=c$ | $P=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} f_{ij}\left(\sum_{k>i}\sum_{l>j} f_{kl}\right);\qquad Q=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} f_{ij}\left(\sum_{k>i}\sum_{l>j} f_{kl}\right)$ | (10) |
| мера Кендалла при $S=P-Q$ | $\tau_b = S \,/\, \left\{\left[n \,/\, 2(n-1)-T_1\right]\left[n \,/\, 2(n-1)-T_2\right]\right\}^{1/2}$ | (11) |
| | $T_1=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} f_i(f_i-1),\ T_2=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{c} f_i(f_i-1)$ | (12) |
| | $ASE(\tau_b)=\left[(4n+10) \,/\, 9(n^2-n)\right]^{1/2}$ | (13) |
| мера Стюарта при $r<c$ или $r>c$ | $\tau_c = 2mS \,/\, n^2(m-1);\ S=P-Q;\ m=\min(r,c)$ | (14) |
| | $ASE(\tau_c)=2m\left[n^2\sum_i\sum_j f_{ij}\left(A_{ij}-B_{ij}\right)^2-4nS^2\right]^{1/2} \,/\, n^3(m-1)$ | (15) |
| | $A_{ij}=\sum_{k>i}\sum_{l>j} f_{kl}+\sum_{k<i}\sum_{l<j} f_{kl}$ | (16) |
| | $B_{ij}=\sum_{k>i}\sum_{l>j} f_{kl}+\sum_{k<i}\sum_{l<j} f_{kl}$ | (17) |
| коэффициент ранговой корреляции Спирмана | $r_s=12\sum_i\sum_j f_{ij}\left[\left(\sum_{k<i} f_k\right)+(f_i \,/\, 2)-(n \,/\, 2)\right]\left[\left(\sum_{k<j} f_l\right)+(f_j \,/\, 2)-(n \,/\, 2)\right] \,/$ $\,/\left\{\left[n^3-n-\sum_i\left(f_i^3-f_i\right)\right]\left[n^3-n-\sum_j\left(f_j^3-f_j\right)\right]\right\};$ | (18) |
| | $ASE(r_s)=\left(\left(1-r_s^2\right) \,/\, (n-2)\right)^{1/2}$ | (19) |

Полезную меру связанности дает *отношение перекрестных произведений,* называемое еще *отношением шансов.* Его важность состоит в том, что он служит мерой относительного риска входного признака $A$ и выходного признака $B$. Отношение шансов определяется из логистической модели и ему можно приписать следующий смысл. Если исходный фактор $A$ имеет уровни $(a_1, a_2)$, а результирующий фактор $B$ — уровни $(b_1, b_2)$, то отношение шансов $o$ можно интерпретировать следующим образом: шансы на то, что индивид выйдет на уровень $b_1$, если известно, что он начинал с уровня $a_1$ в $o$ раз больше, чем если бы он начинал с $a_2$.

Рассмотрим теперь общий случай $(r \times c)$ — таблицы сопряженности признаков. Пусть $f_{ij}$ — наблюдаемая частота в ячейке $ij$, $f_i$ — сумма в строке $i$, $f_j$ — сумма в столбце ($i = 1,..., r, j = 1,..., c$), а $n$ — общий объем выборки.

Две меры, основанные на $\chi$-квадрат, используются как показатели степени связанности между признаками. Одной из них является введенный Пирсоном *коэффициент сопряженности признаков.* Эта статистика обладает рядом удобных свойств, так как она находится в [0;1], однако нежелателен тот факт, что верхний предел $C$ зависит от размера таблиц. Уровень значимости для критерия $E(C) = 0$ тот же, что и для критерия независимости хи-квадрат.

Другая мера степени связанности была введена Крамером, который показал, что процент выборочного распределения можно получить простой заменой переменных в распределении $\chi$-квадрат.

Можно вычислять также меры связанности для упорядоченных таблиц сопряженности признаков, в которых уровни $A$ упорядочены от 1 до $r$, а уровни $B$ — от 1 до $c$. Эти меры — мера Кендалла, мера Стюарта и мера Спирмана, относятся к корреляционному анализу и используются как непараметрические меры, причем мера Кендалла применяется в случае $r = c$, мера Стюарта, если $r < c$ или $r > c$. Все три меры изменяются в диапазоне [−1;+1].

Таким образом, статистики $\chi$-квадрат (обычная и скорректированная), коэффициент сопряженности, мера Крамера, а также меры Стюарта, Кендалла и Спирмана обычно вычисляются всегда. Однако для корректного использования трех последних мер необходима уверенность в упорядоченности таблиц сопряженности.

Заметим, что для таблицы 2×2, кроме этих мер, вычисляются метрики $Q$-Юла, $Y$-Юла и относительных шансов.

## 6.3. Принятие решений

Система поддержки принятия решений, осуществленная в программе «СтатЭксперт», предназначена для реализации окончательного принятия решений, когда уже определены цели и условия развития процессов и необходимо сделать выбор одного из некоторого конечного множества рассматриваемых вариантов: $E_i \in E$. Каждым вариантом $E_i$ ($E_1$, $E_2$,...$E_i$,..., $E_m$) однозначно определяется некоторый результат $e_i$ — выигрыш, полезность, надежность и др. Эти результаты должны допускать количественную оценку, и для их простоты можно отождествлять с соответствующими результатами, обозначая одним и тем же символом $e_i$. Обычно ищется вариант с экстремальным значением результата, т. е. max $e_i$ или min $e_i$.

Под результатом решения $e_{ij}$ можно понимать оценку, соответствующую варианту $E_i$ и условиям $F_j$ и характеризующую экономический эффект (прибыль) или полезность решения. Семейство решений можно описать, например, некоторой матрицей, содержащей $i$ вариантов при $i$=1,..., $n$ и $j$ условий решений при $j$=1,..., $m$.

Исходными данными при принятии решений выступает матрица решений, в которой каждому варианту ($E_i$) поставлены в соответствие условия решений ($F_j$). В последней строке матрицы решений («Вероятность») представлена вероятность реализации решений.

***Пример 6.2.*** Пусть предприятие АВС решает вопрос: производить ли ему на имеющемся оборудовании 250 тыс. комплектующих деталей или покупать их на стороне по цене 370 руб./шт. (исходные данные для расчета себестоимости приведены в табл. 6.4).

Приобретая деталь на стороне, предприятие сможет избежать переменных издержек в сумме 75 млн. руб. и снизить постоянные расходы на 10 млн. руб. Необходимо проанализировать ситуацию и выбрать наиболее выгодный для предприятия вариант решения: **а)** изготавливать всю партию деталей самостоятельно; **б)** изготавливать самостоятельно максимально возможное гарантированное количество — 200 тыс. шт. деталей, а остальные — приобретать на стороне; **в)** приобретать все детали на стороне и использовать высвободившееся оборудование для производства других деталей, что может принести прибыль в размере 18 млн. руб.

*Таблица 6.4.* ***Основные затраты предприятия АВС***

| *Показатели затрат* | *Сумма, млн. руб.* |
|---|---|
| Прямые материалы на весь объем производства деталей | –40,0 |
| Прямая зарплата | 20,0 |
| Переменные накладные расходы | 15,0 |
| Постоянные расходы | 50,0 |
| Итого | 125,0 |

Р е ш е н и е. На принятие решения оказывают влияние следующие факторы.

1) Есть сомнения в том, что комплектующие для собственного производства будут поставлены в срок. В этом случае предприятие сможет произвести только 200 тыс. шт. деталей; за каждую недопоставленную деталь предприятие выплатит 1 тыс. руб. неустойки. Вероятность этого события (событие $\alpha$) составляет $\alpha = 0{,}3$.

2) При определенном стечении обстоятельств партнер сможет обеспечить в срок поставку 125 тыс. шт. деталей. Как и в предыдущем случае, за каждую недопоставленную деталь предприятие выплатит 1 тыс. руб. неустойки. Вероятность этого события (событие $\beta$) составляет $\beta = 0{,}2$. В этих условиях возможно также приобретение небольшой партии изделий в 500 тыс. шт. по цене 600 руб./ шт. Постоянные расходы остаются на первоначальном уровне (50 млн. руб), а все переменные затраты уменьшаются пропорционально изменению объема, т. е. на 20%. Таким образом, общие затраты по данному варианту не зависят от вероятностных факторов и составляют:

$$50000 \cdot 600 + 0{,}8(40 + 20 + 15) \cdot 10^6 = 30 + (50 + 60) = 140 \text{ млн.руб.}$$

Считая, что события $\alpha$ и $\beta$ независимы, составим *матрицу полезности* (табл.6.5).

*Таблица 6.5.* ***Матрица решений для предприятия АВС, млн.руб.***

| *Вариант* | *Себестоимость продукции, млн. руб.* | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $F_1(\bar{\alpha}_1\bar{\beta}_1)$ | $F_2(\alpha\bar{\beta})$ | $F_3(\bar{\alpha}\beta)$ | $F_4(\alpha\beta)$ |
| $E_1$ | –125 | –160 | –125 | –160 |
| $E_2$ | –140 | –140 | –140 | –140 |
| $E_3$ | –114,5 | –114,5 | –193,5 | –193,25 |
| Вероятность | 0,56 | 0,24 | 0,14 | 0,06 |

В качестве элементов матрицы возьмем расчетные значения себестоимости варианта со знаком «минус» (чем ниже себестоимость, тем лучше вариант). В верхней строке таблицы приведено событие, которому соответствует расчет в столбце, а в нижней строке — оценка вероятности этого события. Так, запись «$\bar{\alpha}\ \bar{\beta}$» соответствует событию $HE\alpha$ И $HE\beta$, которое в условиях задачи $F_1$ совершится с вероятностью $(1-\alpha)(1-\beta)=(1-0{,}3)(1-0{,}2)=0{,}56$. Условие $F_1$ означает, что все комплектующие будут поставлены в срок и партнер сможет обеспечить в срок поставку готовых деталей.

Отметим, что при расчете себестоимости вариантов, связанных с событием $\alpha$, учитывается, что постоянные расходы останутся на прежнем уровне, что приведет к увеличению себестоимости единицы продукции. При расчете всех вариантов, связанных с неблагоприятными событиями, неустойка складывается с расчетной себестоимостью.

**Критерии принятия решений**. Всякое решение в условиях неполной информации (сознательно или неосознанно) принимается в соответствии с какой-либо оценочной функцией, выбор которой должен осуществляться с учетом количественных характеристик ситуации, в которой принимаются решения. В настоящее время применяют следующие критерии принятия решений: минимаксный критерий, критерий Байеса—Лапласа, критерий Сэвиджа, критерий Гурвица, критерий Ходжа—Лемана, критерий Гермейра и критерий произведений.

Эти критерии можно использовать поочередно, причем после вычисления их значений среди нескольких вариантов приходится все-таки волевым образом выделять некоторое окончательное решение, что позволяет, во-первых, лучше проникнуть во все внутренние связи проблемы принятия решений и, во-вторых, ослабить влияние субъективного фактора.

При *минимаксном критерии* используют оценочную функцию $Z_{MM}$, соответствующую позиции крайней осторожности:

$$Z_{MM} = \max_i e_{ir}\,;\ e_{ir} = \min_j e_{ij}\,.$$

Матрица решений $||e_{ij}||$ дополняется еще одним столбцом из наименьших результатов $e_{ir}$ каждой строки. Выбрать надлежит те варианты $E_{i0}$, в строках которых стоят наибольшие значения $e_{ir}$ этого столбца.

Выбранные таким образом варианты полностью исключают риск. Это означает, что принимающий решение не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется. Какие бы условия $F_j$ ни встретились, соответствующий результат не может оказаться ниже $Z_{MM}$. Это свойство заставляет считать минимаксный критерий одним из фундаментальных.

*Критерием Байеса—Лапласа* учитывается каждое из возможных следствий. Если $q_j$ — вероятность появления внешнего состояния $F_j$, то для данного критерия имеем следующую оценочную функцию $Z_{BL}$:

$$Z_{BL} = \max_i e_{ir}; \qquad e_{ir} = \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j.$$

Исходная позиция ЛПР в этом случае оптимистичнее, чем в случае минимаксного критерия, однако она предполагает более высокий уровень информированности и достаточно длинные реализации.

Оценочная функция *критерия Сэвиджа* $Z_S$ имеет вид:

$$Z_S = \min_i e_{ir} = \min_i [\max_i (\max_j e_{ij} - e_{ij})],$$

$$a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij}; \quad e_{ij} = \max_j a_{ij} = \max_j (\max_i e_{ij} - e_{ij}).$$

Величину $a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij}$ можно трактовать как максимальный дополнительный выигрыш, который достигается, если в состоянии $F_j$ вместо варианта $E_i$ выбрать другой, оптимальный для этого внешнего состояния вариант. Можно интерпретировать $a_{ij}$ и как потери (штрафы), возникающие в состоянии $F_j$ при замене оптимального для нее варианта на вариант $E_i$. При интерпретации $a_{ij}$ в качестве потерь величина $e_{ir}$ представляет собой максимальные возможные (по всем внешним состояниям) потери в случае выбора варианта $E_i$. Эти максимально возможные потери минимизируются за счет выбора подходящего варианта $E_i$. Соответствующее критерию Сэвиджа правило выбора в этом случае интерпретируется так: каждый элемент матрицы решений $\|e_{ij}\|$ вычитается из наибольшего результата $\max_i e_{ij}$ соответствующего столбца. Разности $a_{ij}$ образуют матрицу остатков $\|a_{ij}\|$. Эта матрица пополняется столбцом наибольших разностей $e_{ir}$. Выбираются те варианты $E_{i0}$, в строках которых стоит наименьшее для этого столбца значение.

Наиболее уравновешенную позицию занимает критерий Гурвица, оценочная функция $Z_{HW}$ которого находится где-то между точками зрения предельного оптимизма и крайнего пессимизма:

$$Z_{HW} = \max_i e_{ir}; \quad e_{ir} = c \min_j e_{ij} + (1 - c) \max_j e_{ij},$$

где $c$ — весовой множитель, значение которого изменяется в интервале [0;1].

Правило выбора по критерию Гурвица формулируется следующим образом. Матрица решений $\|e_{ij}\|$ дополняется столбцом, содержащим средние взвешенные наименьшего и наибольшего

результатов для каждой строки. Выбираются те варианты $E_{i0}$, в строках которых стоят наибольшие элементы $e_{ir}$ этого столбца. Для $c$=1 критерий Гурвица превращается в минимаксный критерий, при $c$=0 он превращается в критерий азартного игрока. Чаще всего $c$=0,5 без возражений принимается в качестве некоторой средней точки зрения.

При *критерии Ходжа—Лемана* происходит одновременный учет свойств минимаксного критерия и критерия Байеса—Лапласа. С помощью параметра $\nu$, значение которого изменяется в интервале [0;1], выражается степень доверия к используемому распределению вероятностей. Если это доверие велико, то предпочтение отдается критерию Байеса—Лапласа, в противном случае – минимаксному критерию. Оценочная функция $Z_{HL}$ этого критерия определяется:

$$Z_{HL} = \max_i e_{ir} \; ; \quad e_{ir} = \nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-\nu) \min_j e_{ij} \; , \; 0 \le \nu \le 1 .$$

Правило выбора, соответствующее данному критерию, формулируется следующим образом. Матрица решений $\|e_{ij}\|$ дополняется столбцом, составленным из средних взвешенных (с постоянными весами) математического ожидания и наименьшего результата каждой строки. Отбираются те варианты решений $E_{i0}$, в строках которых стоит наибольшее значение этого столбца. При $\nu$=1 критерий Ходжа—Лемана переходит в критерий Байеса—Лапласа, а для $\nu$=0 — в минимаксный критерий.

В качестве оценочной функции *критерия Гермейра* выступает функция $Z_G$:

$$Z_G = \max_i e_{ir} ; \qquad e_{ir} = \min_j e_{ij} q_j .$$

Этот критерий ориентирован на величины потерь, т. е. на отрицательные значения всех $e_{ij}$. Поскольку в хозяйственных задачах преимущественно имеют дело с ценами и затратами, условие $e_{ij} < 0$ обычно выполняется. В случае же, когда среди величин $e_{ij}$ встречаются и положительные значения, можно перейти к строго отрицательным значениям с помощью преобразования $(e_{ij}-a)$ при соответствующим образом подобранном $a < 0$ (заметим, что оптимальный вариант решения зависит от $a$).

Правило выбора согласно критерию Гермейра при этом формулируется следующим образом. Матрица решений $\|e_{ij}\|$ дополняется еще одним столбцом, содержащим в каждой строке наименьшее произведение имеющегося в ней результата на вероятность соответствующего состояния $F_j$. Выбираются те вари-

анты $E_{i0}$, в строках которых находится наибольшее значение $e_{ir}$ этого столбца. В некотором отношении критерий Гермейра обобщает минимаксный критерий. В случае равномерного распределения $q_j = 1/n$, $j=1,\ldots, n$ они становятся идентичными.

При *критерии произведений*, ориентированном на величины выигрышей, т. е. на положительные значения $e_{ij}$, оценочная функцию $Z_P$ имеет следующий вид:

$$Z_P = \max_i e_{ir}; \quad e_{ir} = \prod_j e_{ij} q_j.$$

Правило выбора в этом случае формулируется следующим образом. Матрица решений дополняется новым столбцом, содержащим произведения всех результатов каждой строки. Выбираются те варианты $E_{i0}$, в строках которых находятся наибольшие значения этого столбца. Критерий произведений адаптирован в первую очередь на случаи, когда все $e_{ij}>0$. Если указанное условие нарушается, то следует выполнить некоторый сдвиг $(e_{ij} + a)$ с некоторой константой $a > |\min_{i,j} e_{ij}|$. Разумеется, результат применения критерия существенно зависит от этой константы $a$. На практике в качестве значения $a$ обычно используют величину $|\min_{i,j} e_{ij}|+1$. Если же константа $a$ не имеет содержательного смысла, то к таким проблемам критерий произведений неприменим.

Более подробно практическое применение этих критериев в процессах принятия решений рассмотрено в разд. III настоящей книги.

# Глава 7
# Системы массового обслуживания и их модели в экономике, финансах и банковском деле

Одним из видов моделей, с помощью которых можно описывать финансово-экономические процессы и банковскую сферу, являются *системы массового обслуживания* (СМО). Ими можно описывать функционирование множества предприятий, банков, кредитных учреждений, страховых организаций, налоговых инспекций, организаций сферы обслуживания (магазинов, больниц и др.), деятельность которых связана с многократной реализацией исполнения каких-то однотипных задач и операций [2, 13, 130, 137—140].

## 7.1. Структура и параметры эффективности и качества функционирования СМО

Каждая СМО (**рис. 7.1**) включает в свою структуру некоторое число обслуживающих устройств, называемых *каналами обслуживания* (к их числу можно отнести лиц, выполняющих те или иные операции, —кассиров, операторов, менеджеров и т. п.), обслуживающих некоторый *поток заявок* (*требований*), поступающих на ее вход в случайные моменты времени. Обслуживание заявок происходит за неизвестное, обычно случайное время и зависит от множества самых разнообразных факторов. После обслуживания заявки канал освобождается и готов к приему следующей заявки. Случайный характер потока заявок и времени их обслуживания приводит к неравномерности загрузки СМО —перегрузке с образованием очередей заявок или недогрузке — с простаиванием ее каналов.

Таким образом, в СМО имеются: входящий поток заявок, очередь, поток необслуженных (покинувших очередь) заявок,

каналы обслуживания и выходной поток обслуженных заявок. Каждая СМО в зависимости от своих параметров (характера потока заявок, числа каналов обслуживания и их производительности) и правил организации ее работы обладает определенной *эффективностью функционирования* (*пропускной способностью*), позволяющей ей более или менее успешно выполнять предназначенные ей функции. Случайность характера потока заявок и длительности их обслуживания порождает в СМО *случайный процесс*, для изучения которого необходимы построение и анализ его математической модели. Изучение функционирования СМО упрощается, если случайный процесс является *марковским* (процессом без последействия, или без памяти), когда работа СМО легко описывается с помощью конечных систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка, а в предельном режиме (при достаточно длительном функционировании СМО) — посредством конечных систем линейных алгебраических уравнений. В итоге показатели эффективности функционирования СМО выражаются через параметры СМО, потока заявок и дисциплины работы СМО.

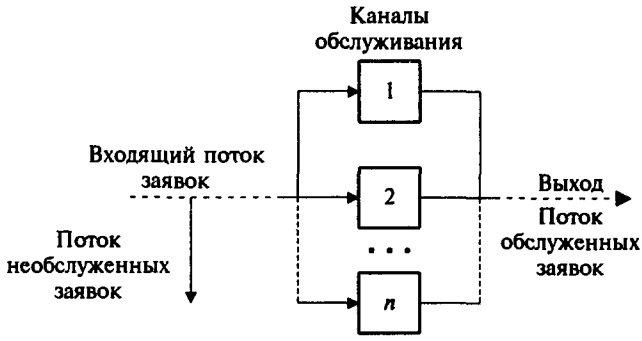



*Рис. 7.1.* ***Структура СМО***

Из теории известно, чтобы случайный процесс являлся *марковским*, необходимо и достаточно, чтобы все потоки событий (потоки заявок, потоки обслуживаний заявок и др.), под воздействием которых происходят переходы системы из состояние в состояние, являлись *пуассоновскими*, т. е. обладали свойствами *последействия* (для любых двух непересекающихся промежутков времени число событий, наступающих за один из них, не зависит от числа событий, наступающих за другой) и *ординарности* (вероятность наступления за элементарный, или малый, проме-

жуток времени более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью наступления за этот промежуток времени одного события). Для простейшего пуассоновского потока случайная величина $T$ (промежуток времени между двумя соседними событиями) распределена по показательному закону, представляя собой плотность ее распределения или дифференциальную функцию распределения.

Если же в СМО характер потоков отличен от пуассоновского, то ее характеристики эффективности можно определить приближенно с помощью марковской теории массового обслуживания, причем тем точнее, чем сложнее СМО, чем больше в ней каналов обслуживания. В большинстве случаев для обоснованных рекомендаций по практическому управлению СМО совсем не требуется знаний точных ее характеристик, вполне достаточно иметь их приближенные значения.

В зависимости от совокупности специфических факторов СМО можно классифицировать следующим образом: **а)** по характеру потоков — марковские и немарковские; **б)** по числу каналов — одно- и многоканальные; **в)** по дисциплине обслуживания — СМО с отказами (нулевым ожиданием или явными потерями), СМО с ожиданием (неограниченным ожиданием или очередью), СМО смешанного типа (ограниченным ожиданием — длиной очереди, временем пребывания в очереди или общим временем пребывания заявки в СМО), причем их обслуживание в СМО может быть как упорядоченным, так и неупорядоченным, а также с обслуживанием по приоритету; **г)** по ограничению потока заявок — на замкнутые и открытые (незамкнутые); **д)** по количеству этапов обслуживания — на одно- и многофазные СМО.

Эффективность функционирования СМО характеризуют три основные группы показателей:

1) *эффективность использования* СМО — абсолютная или относительная пропускные способности, средняя продолжительность периода занятости СМО, коэффициент использования СМО;

2) *качество обслуживания заявок* — среднее время (среднее число заявок, закон распределения) ожидания заявки в очереди или пребывания заявки в СМО; вероятность отказа заявке в обслуживании без ожидания; вероятность того, что поступившая заявка немедленно примется к исполнению;

3) *эффективность функционирования* пары «СМО — потребитель», причем под потребителем понимается как совокупность

заявок или их некоторый источник (например, средний доход, приносимый СМО за единицу времени эксплуатации, и др.).

Рассмотрим разновидности и типы СМО, показатели качества и надежности их функционирования, причем для основных видов СМО (одноканальной и многоканальной СМО с отказами) приведем более детальные результаты, а по некоторым иным типам СМО все расчетные показатели сведем в приложение к книге (табл. П1—П7). Ими можно воспользоваться при реализации конкретных относительно долговременных ситуаций, присущих функционированию реальных экономических объектов, систем или организационных структур управления разнообразных субъектов рынка. Так как внешние неконтролируемые воздействия со стороны окружающей деловой среды меняются в зависимости от самых различных факторов (политических, экономических, социальных, рыночных и т. п.), то желательно, чтобы структуры систем управления могли адаптироваться к ним, осуществляя свою реструктуризацию в соответствии с поставленными целями, динамикой изменения внешних факторов и имеющимися ограничениями на каждый фиксируемый момент времени. При этом особенности функционирования субъектов рынка могут описываться различными типами СМО, и цель высших менеджеров предприятий состоит в выборе такой структуры, которая позволила бы добиваться наивысшей эффективности и качества работы предприятий и фирм.

## 7.2. Эффективность и качество функционирования разновидностей СМО

**Одноканальная и многоканальная СМО с отказами.** Одноканальная СМО содержит один канал ($n = 1$), и на ее вход поступает пуассоновский поток заявок $П_{вх}$, интенсивность (среднее число событий в единицу времени) которого $\text{in}П_{вх} = \lambda$. Так как интенсивность входящего потока может изменяться во времени, то вместо $\lambda$ записывают $\lambda(t)$. Тогда время обслуживания каналом одной заявки $T_{об}$ распределено по показательному закону и записывается в виде: $f(t)=\lambda\, e_{\lambda}^{-t}$, где $\lambda$ —интенсивность отказов.

Состояние СМО характеризуется простаиванием или занятостью ее канала, т. е. двумя состояниями: $s_0$ — канал свободен и простаивает, $s_1$ — канал занят. Переход системы из состояния $s_0$ в состояние $s_1$ осуществляется под воздействием входящего потока

заявок $П_{вх}$, а из состояния $s_1$ в состояние $s_0$ систему переводит поток обслуживаний $П_{об}$: если в данный момент времени система находится в некотором состоянии, то с наступлением первого после данного момента времени СМО переходит в другое состояние. Плотности вероятностей перехода из состояния $s_0$ в $s_1$ и обратно равны соответственно λ и μ. Граф состояний подобной СМО с двумя возможными состояниями приведен на **рис. 7.2, а.**

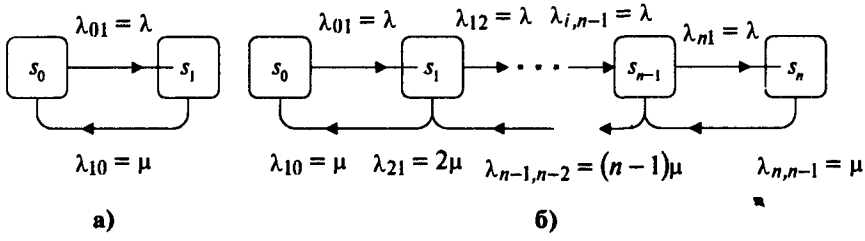



*Рис. 7.2.* ***Графы состояний одноканальной (а) и многоканальной (б) СМО***

Для многоканальной СМО с отказами ($n > 1$) при тех же условиях состояния системы обозначим по числу занятых каналов (по числу заявок, находящихся в системе под обслуживанием, так как каждый канал в СМО либо свободен, либо обслуживает только одну заявку). Таким образом, подобная СМО может находиться в одном из следующих ($n$+1) состояний: $s_0$ — все $n$ каналов свободны; $s_1$ — занят только один из каналов, остальные ($n$−1) каналов свободны; $s_i$ — заняты $i$ каналов, ($n$−$i$) каналов свободны; $s_n$ —заняты все $n$ каналов. Граф состояний такой СМО приведен на **рис. 7.2, б.** При этом имеет место

$$\lambda_{01} = \lambda_{12} = ... = \lambda_{n1} = \lambda, \qquad \text{а } \lambda_{i,\,i-1} = k\mu,\ k = 1,..., n.$$

Пользуясь общим правилом составления дифференциальных уравнений Колмогорова, можно для приведенных на рис. 7.2, а, б графов состояний составить системы дифференциальных уравнений:

**а)** например, для одноканальной СМО (**рис. 7.2, а**) имеем:

$$dp_0(t)/dt = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t);$$

$$dp_1(t)/dt = -\mu p_1(t) + \lambda p_0(t);$$

$$p_0(t) + p_1(t) = 1,\ t \geq 0;$$

**б)** для многоканальной СМО (**рис. 7.2, б**) соответственно имеем:

$$dp_0(t)/dt = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t);$$

.....

$$dp_k(t)/dt = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)\, p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t),\ k = 1,\ldots, n-1;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$dp_n(t)/dt = \lambda p_{n-1}(t) - n\mu p_n(t);$$

$$\sum_{k=0}^{n} pk(t) = 1.$$

Решив первую систему уравнений, можно найти значения $p_0(t)$ и $p_1(t)$ для одноканальной СМО и построить графики (**рис.7.3, а-в**) при трех случаях: 1) $\lambda > \mu$; 2) $\lambda = \mu$; 3) $\lambda < \mu$. Можно также определить предельную пропускную способность СМО (**рис. 7.3, г**). Решение второй системы уравнений для многоканальной СМО в аналитическом виде получить вручную сложно, и его обычно получают с помощью ЭВМ в численном виде. Более подробно методы решения данных уравнений рассматриваются в специальной литературе, например, в [13].

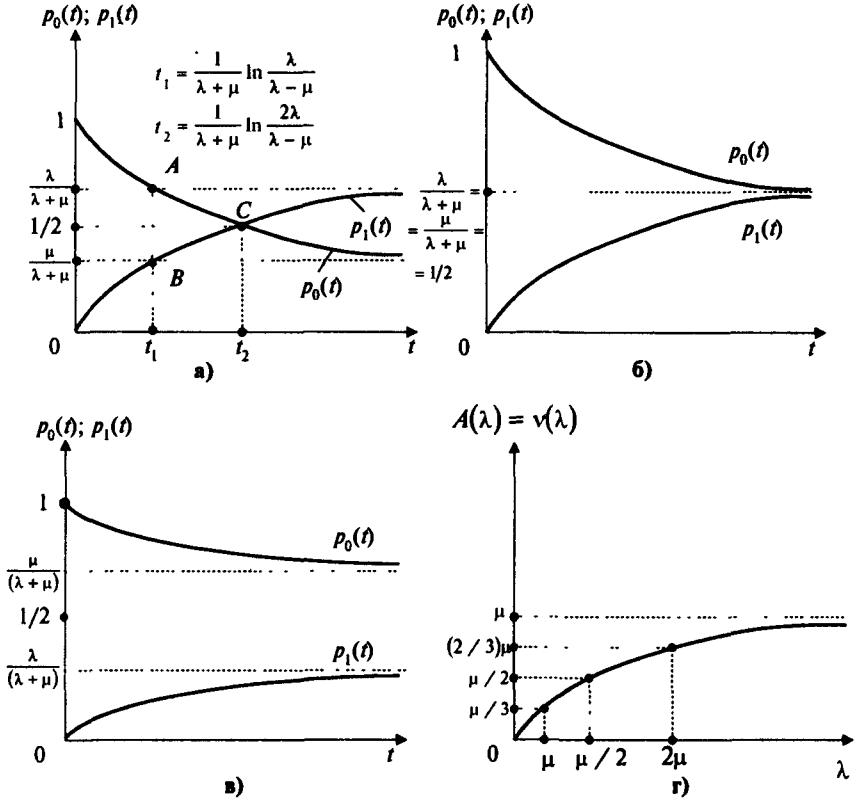



*Рис. 7.3.* ***График функций $p_0(t)$, $p_1(t)$:*** *$\lambda > \mu$ (а), $\lambda = \mu$ (б), $\lambda < \mu$ (в), $A = f(\lambda)$ (г)*

В целом характеристики одноканальной СМО с отказами приведены в табл. 7.1, 7.2 и особых пояснений не требуют.

*Таблица 7.1.* ***Характеристики эффективности функционирования одноканальной СМО с отказами***

| *Характеристика в момент времени t* | *Обозначения, формулы* |
|---|---|
| 1. Вероятность того, что канал свободен | $p_0(t) = \frac{1}{\lambda+\mu}\left(\mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}\right),\ t \geq 0$ |
| 2. Вероятность того, что поступившая заявка будет принята к обслуживанию | $p_{об}(t) = p_0(t) = \frac{1}{\lambda+\mu}\left(\mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}\right);\ t \geq 0$ |
| 3. Вероятность занятости канала | $p_1(t) = 1 - p_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1 - \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}\right);\ t \geq 0$ |
| 4. Вероятность отказа заявке | $p_{отк}(t) = p_1(t) = 1 - p_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1 - \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}\right);\ t \geq 0$ |
| 5. Относительная пропускная способность СМО (средняя доля обслуженных заявок среди поступивших) | $Q(t) = p_0(t) = \frac{1}{\lambda+\mu}\left(\mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}\right);\ t \geq 0$ |
| 6 Абсолютная пропускная способность СМО (среднее число обслуживаемых заявок за единицу времени) | $A(t) = \lambda Q(t) = \lambda p_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(\mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}\right);\ t \geq 0$ |
| 7. Интенсивность выходящего потока $\Pi_{вых}$ обслуженных заявок | $\text{in}\ \Pi_{вых}\ \nu(t) = A(t) = \lambda p_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(\mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}\right);\ t \geq 0$ |
| 8. Среднее время обслуживания заявок | $\overline{T}_{об} = \frac{1}{\mu}$ |
| 9. Среднее время пребывания заявки в системе | $\overline{T}_{сис}(t) = p_0(t) \cdot \overline{T}_{об} = \frac{1}{\lambda+\mu}\left(1 + \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}\right),\ t \geq 0.$ |

*Таблица 7.2.* ***Предельные характеристики эффективности функционирования одноканальной СМО с отказами***

| *Характеристика в момент времени t* | *Обозначения, формулы* |
|---|---|
| 1. Вероятность того, что канал свободен | $p_0 = \lim\limits_{t\to\infty} p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\overline{T}_{пр}}{\overline{T}_{об}+\overline{T}_{пр}}$ |
| 2 Вероятность того, что поступившая заявка будет принята к обслуживанию | $p_{об} = \lim\limits_{t\to\infty} p_{об}(t) = p_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\overline{T}_{пр}}{\overline{T}_{об}+\overline{T}_{пр}}$ |
| 3. Вероятность занятости канала | $p_1 = \lim\limits_{t\to\infty} p_1(t) = 1 - p_0 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = \frac{\overline{T}_{об}}{\overline{T}_{об}+\overline{T}_{пр}}$ |
| 4. Вероятность отказа заявке | $p_{отк} = \lim\limits_{t\to\infty} p_{отк}(t) = p_1 = 1 - p_0 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = \frac{\overline{T}_{об}}{\overline{T}_{об}+\overline{T}_{пр}}$ |
| 5 Относительная пропускная способность СМО | $Q = \lim\limits_{t\to\infty} Q(t) = p_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\overline{T}_{пр}}{\overline{T}_{об}+\overline{T}_{пр}}$ |
| 6. Абсолютная пропускная способность СМО | $A = \lim\limits_{t\to\infty} A(t) = \lambda Q = \lambda p_0 = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} = \frac{1}{\overline{T}_{об}+\overline{T}_{пр}}$ |
| 7. Интенсивность выходящего потока $П_{вых}$ обслуженных заявок | $\nu = \lim\limits_{t\to\infty} \nu(t) = A = \lambda p_0 = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} = \frac{1}{\overline{T}_{об}+\overline{T}_{пр}}$ |
| 8. Среднее время обслуживания заявок | $\overline{T}_{об} = \frac{1}{\mu}$ |
| 9 Среднее время пребывания заявки в системе | $\overline{T}_{сис}(t) = \frac{1}{\lambda+\mu} = \frac{\overline{T}_{об}\cdot\overline{T}_{пр}}{\overline{T}_{об}+\overline{T}_{пр}}$ |

Поясним применение СМО с отказами для оценки эффективности деятельности субъектов рынка на ряде следующих примеров.

***Пример 7.1.*** Пусть на телефонную линию филиала банка производительностью $\mu = 0{,}8$ вызовов/мин и простейшим потоком обслуживания поступает простейший поток вызовов клиентов с интенсивностью $\lambda = 0{,}9$ вызовов/мин. Определить предельные значения относительной пропускной способности $Q$, абсолютной пропускной способности $A$ и вероятности отказа $p_{отк}$ телефонной линии, влияющие на итоговый доход филиала. Определить также среднее время обслуживания одного вызова, среднее время простоя канала и вероятность того, что канал свободен или занят.

Р е ш е н и е . Так как математической моделью телефонной линии является одноканальная СМО с отказами, характеризующаяся параметрами — интенсивностью входящего потока $\text{in}\Pi_{вх} = \lambda = 0{,}9$ и интенсивностью потока обслуживания $\text{in}\Pi_{об} = \mu = 0{,}8$, то можно по формуле из табл. 7.2 определить предельную вероятность отказа так:

$$p_{отк} = \lambda/(\lambda + \mu) = 0{,}9 \,/\, (0{,}9 + 0{,}8) = 0{,}9/1{,}7 = 0{,}529, \text{ или } 52{,}9\%, \text{ т. е.}$$

в установившемся предельном режиме из каждых 100 заявок в среднем 3 получают отказ.

Далее определим предельное значение относительной $Q$ и абсолютной $A$ пропускной способности СМО, используя формулы табл. 7.2:

$$Q = 1 - p_{отк} = 1 - 0{,}529 = 0{,}471;$$

$$A = \lambda \cdot Q = 0{,}9 \cdot 0{,}471 = 0{,}424.$$

Итак, из расчета следует, что случайный характер поступления телефонных вызовов и случайный характер длительности разговоров порождают ситуацию, что абсолютная пропускная способность $A$ =0,424 разговора/мин почти в два раза меньше производительности телефонной линии $\mu = 0{,}8$ вызовов/мин (0,8:0,424 = 1,88).

Определим:

а) среднее время обслуживания (в мин) $T_{об}$ :

$$T_{об} = 1/\mu = 1/0{,}8 = 1{,}25 \text{ мин};$$

б) среднее время простоя канала $T_{пр}$ (в мин):

$$T_{пр} = 1/\lambda = 1/0{,}9 = 1{,}11 \text{ мин};$$

в) вероятность того, что канал свободен:

$$p_0 = T_{пр}/(T_{об} + T_{пр}) = 1{,}11 \,/\, (1{,}25 + 1{,}11) = 0{,}47,$$

$$\text{или } p_0 = \mu/(\lambda + \mu) = 0{,}8 \,/(0{,}9 + 0{,}8) = 0{,}47;$$

г) вероятность того, что канал занят $p_1$:

$$p_1 = 1 - p_0 = \lambda/(\lambda + \mu) = 0{,}529,$$

или $p_1 = T_{об}/(T_{об} + T_{пр}) = 1{,}25 \,/(1{,}25 + 1{,}11) = 0{,}529$.

Таким образом, вероятность того, что канал занят, больше вероятности того, что канал свободен, т. е. $p_1 > p_0$, и этого следовало ожидать, так как интенсивность входящего потока $\lambda = 0{,}9$ больше интенсивности производительности канала $\mu = 0{,}9$.

***Пример 7.2.*** Пусть в филиале $X$ банка города $N$ постоянно работают три оператора. Если клиент заходит в банк, когда все операторы заняты, то он сразу уходит, не ожидая обслуживания. Среднее число клиентов, обращающихся в банк за 1 ч, составляет 24 чел. Среднее время, затрачиваемое оператором на обслуживание одного клиента, составляет 5 мин. Определить основные характеристики эффективности функцио-

нирования данного филиала банка в предельном режиме: **а)** вероятность того, что клиент получит отказ $p_{отк}$ или будет обслужен $p_{об}$; **б)** среднее число клиентов $A$, обслуживаемых филиалом в течение 1 ч; **в)** среднее число занятых операторов $K$.

Р е ш е н и е . Рассмотрим этот филиал как многоканальную СМО с отказами, так как клиенту в центре города некогда ждать обслуживания в очереди, и если все операторы заняты обслуживанием ранее пришедших клиентов, то вновь прибывший клиент уходит необслуженным. Параметры имеющейся в наличии СМО таковы: $n = 3$; $\lambda = 24$ (чел./ч); $\mu = 1/T_{об} = 1/5$ (чел./мин) = 12 чел./ч; $\rho = \lambda/\mu = 24/12 = 2$ (эрланга).

Вычисление предельных вероятностей состояний системы удобно проводить по формулам, приведенным в [13]. Результаты вычислений сведем в табл. 7.3.

*Таблица 7.3.* ***Результаты расчета параметров многоканальной СМО с отказами***

| *Значения случайной величины k (число занятых операторов филиала банка)* | *Основные вычисления вероятностей отказов при числе занятых каналов k (k = 0,1,2,3)* | | |
|---|---|---|---|
| | $p_k/p_0$ | $p_k$ | $kp_k$ |
| 0 | 1,000 | 0,158 | 0 |
| 1 | 2,000 | 0,316 | 0,316 |
| 2 | 2,000 | 0,316 | 0,632 |
| 3 | 1,333 | 0,211 | 0,633 |
| Итого (Σ) | 6,333 | 1,001 | 1,581 |

Итак, вероятность того, что все операторы свободны, составляет: $p_0 = 1/\Sigma = 1/6{,}333 = 0{,}158$.

Значения предельной вероятности $p_k$ определяются как $p_k = p_k/p_0 \cdot p_0$, т. е. умножением значений столбца 2 табл. 7.3 на вероятность $p_0$. Сумма элементов столбца 4 табл. 7.3 соответствует среднему числу занятых каналов $\overline{k} = 1{,}581$.

Вероятность того, что клиент получит отказ, равна вероятности того, что все три оператора банка заняты, т. е. $p_3 = 0{,}211$. Тогда вероятность того, что клиент будет обслужен, т. е. относительную пропускную способность филиала $X$ банка, можно определить следующим образом:

$$Q = 1 - p_{отк} = 1 - 0{,}211 = 0{,}789 = 78{,}9\%.$$

Таким образом, имеем, что из 100 обращающихся в филиал банка клиентов 79 чел. будут обслужены и 21 чел. получит отказ.

Абсолютная пропускная способность $A$ филиала банка составит:

$$A = \lambda Q = 24 \cdot 0{,}789 = 18{,}936.$$

Заметим, что аналогичным способом $A$ можно подсчитать по иной формуле, как $A = \mu K = 12 \cdot 1{,}581 = 18{,}972$ (имеющее место расхождение связано с ошибкой округления при вычислении).

В заключение можно отметить, что оптимальное финансовое решение об организации филиала банка должно приниматься с учетом затрат на содержание каждого оператора и потерь в потенциальном доходе, связанных с долей необслуженных клиентов. Рассмотрим и этот аспект на следующем примере.

***Пример 7.3.*** Пусть банк принимает решение об открытии своего филиала в городе $N$, рассматривая его как многоканальную СМО с отказами и равномерной взаимопомощью между каналами (табл. 7.3), на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda$. Производительность каждого канала равна $\mu$. Обслуживание одной заявки (клиента) приносит средний доход $C_1$. Создание одного канала обслуживания (оператора) требует средних издержек $C_2$, а эксплуатация одного канала в единицу времени — $C_3$. Требуется определить время $\tau$, через которое филиал банка (система) начнет приносить прибыль.

Р е ш е н и е . Пусть случайный процесс, протекающий в СМО, перешел в предельный стационарный режим. Тогда СМО начнет приносить доход лишь в случае, если средний доход от обслуживания заявок одним каналом в единицу времени превысит средние издержки эксплуатации одного канала в единицу времени. Из условия задачи это условие имеет вид: $C_1 \mu > C_3$.

Средний доход, приносимый СМО за время $\tau$ ее эксплуатации в предельном режиме, можно определить как $AC_1\tau$, где $A$ — абсолютная пропускная способность СМО (среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени), $A\tau$—среднее число заявок, обслуживаемых за время эксплуатации $\tau$. Согласно [13] абсолютная пропускная способность $A$ определяется по формуле:

$$A = \mu \overline{K},$$

где $\overline{K}$ — среднее число занятых каналов.

Поэтому средний доход $D(\tau)$ за время $\tau$ составит:

$$D(\tau) = C_1 \mu \overline{K} \tau, \ \tau \geq 0.$$

*Таблица 7.4.* ***Параметры многоканальной СМО с отказами и равномерной взаимопомощью между каналами***

| *Параметры* | *Обозначения, значения, формулы* |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 1. Число каналов обслуживания | $n \geq 2$ |

| 1 | 2 |
|---|---|
| 2. Интенсивность входящего простейшего потока заявок $П_{вх}$ | in $П_{вх}=\lambda=const$ ($\lambda$ не зависит от времени $t$) |
| 3. Интенсивность простейшего «потока обслуживания» каждым каналом | $\mu=const$ ($\mu$ не зависит от времени $t$) |
| 4. Интенсивность суммарного потока обслуживания $n$ каналами | $n\mu$ |
| 5. Дисциплина взаимопомощи между каналами | «Равномерная» |

Если использовать графическую интерпретацию задачи (рис. 7.4), то график $D(\tau)$ представляет собой прямую *1*, проходящую через начало координат под углом $\alpha$, причем $tg\alpha = C_1\mu\overline{K}$.

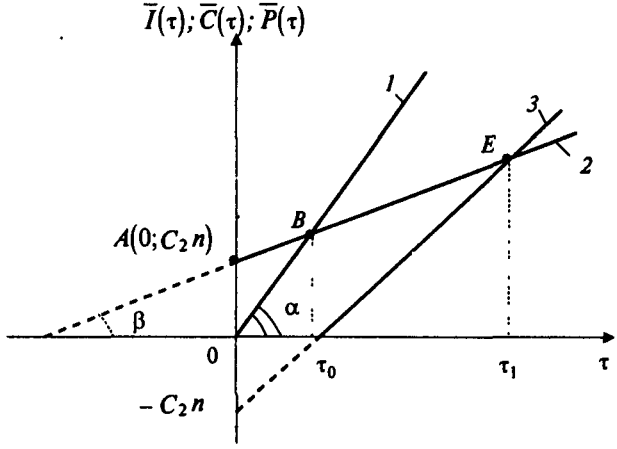



*Рис. 7.4.* ***Зависимость между доходом (1), средними издержками (2) и средней прибыльностью (3)***

Средние издержки за это же время $\overline{C}(\tau)$, состоящие из издержек $C_2n$ на создание $n$ каналов и средних издержек $C_3\overline{K}\tau$ на их эксплуатацию за время $\tau$, соответственно составят:

$$\overline{C}(\tau) = C_3\overline{K}\tau + C_2n.$$

На графике средние издержки $\overline{C}(\tau)$ от СМО представляют собой прямую *2*, проходящую через точки $A(0;\ C_2n)$ и $B$ $(1;\ C_3\overline{K} + C_2n)$ под углом $\beta$, причем $tg\beta = C_3\overline{K}$.

Так как $\mathrm{tg}\beta < \mathrm{tg}\alpha$ и, следовательно, $\beta < \alpha$, то прямые *1* и *2* пересекутся между собой в первом квадранте. Абсциссу $\tau_0$ точки пересечения *B*, в которой средний доход равняется средним издержкам, можно определить из равенства: $D(\tau_0) = \overline{C}(\tau_0)$, т. е.

$$C_1\mu\,\overline{K}\tau_0 = C_3\mu\,\overline{K}\tau_0 + C_2 n,$$

откуда получаем

$$\tau_0 = C_2 n\,/(C_1\mu - C_3)\,\overline{K}.$$

Таким образом, точка *B* выступает точкой безубыточности, т. е. через время $\tau_0$ СМО начнет приносить среднюю прибыль $\overline{P}$, равную:

$$\overline{P}(\tau) = \overline{D}(\tau) - \overline{C}(\tau) = (C_1\mu - C_3)\,\overline{K}\tau - C_2 n.$$

Если прямая средней прибыли (прямая *3*) пересекается с прямой средних издержек (прямой *2*), то абсцисса $\tau_1$ точки пересечения *E* определяется из равенства:

$$\overline{P}(\tau_1) = \overline{C}(\tau_1) \text{ или } C_1\mu\,\overline{K}\tau_1 - C_3\,\overline{K}\tau_1 - C_2 n = C_3\,\overline{K}\tau_1 + C_2 n,$$

откуда

$$\tau_1 = 2C_2 n\,/(C_1\mu - 2C_3)\,\overline{K}.$$

Так как $\tau_1 > 0$, то из вышеприведенного соотношения имеем: $C_1\mu - 2C_3 > 0$, откуда $C_1\mu > 2C_3$.

Сравнив ординаты точек *B* и *E*, получим, что в момент времени $\tau_1$ средний доход вдвое больше средних издержек.

Если же условие $C_1\mu > 2C_3$ не выполняется, т. е. $C_1\mu \le 2C_3$, то прямые *2* и *3* в первом квадранте не пересекаются. Если $C_1\mu = 2C_3$, то эти прямые параллельны.

## 7.3. Прочие разновидности СМО

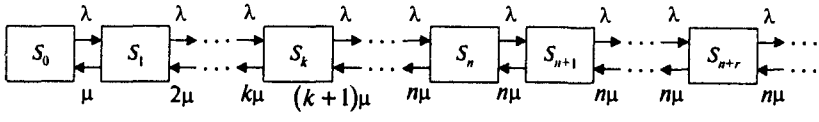
В зависимости от дополнительных условий, налагаемых на характер и особенности функционирования, можно выделить следующие типы СМО [13]:

- одно- и многоканальные СМО с ожиданием;
- одно- и многоканальные СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди;
- многоканальные СМО с ограничением времени ожидания и без ограничения на длину очереди;

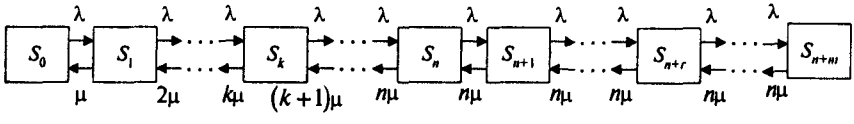
- замкнутые одно- и многоканальные СМО;
- многоканальные СМО с отказами и взаимопомощью между каналами типа «все как один»;
- многоканальные СМО с ожиданием и взаимопомощью между каналами типа «все как один»;
- многоканальные СМО с ожиданием, ограничением на длину очереди и взаимопомощью между каналами типа «все как один»;
- многоканальные СМО с отказами и «равномерной» взаимопомощью между каналами (табл. 7.4);
- многоканальные СМО с ожиданием и «равномерной» взаимопомощью между каналами;
- многоканальные СМО с ожиданием, ограничением на длину очереди и «равномерной» взаимопомощью между каналами.

Кратко рассмотрим особенности функционирования некоторых из этих систем.

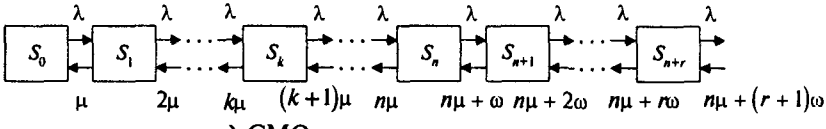
**1.** *СМО с ожиданием* характеризуется тем, что в системе из $n$ ($n \geq 1$) каналов обслуживания любая заявка, поступившая в СМО в момент, когда все каналы заняты, становится в очередь и ожидает своего обслуживания, причем любая пришедшая заявка будет обслужена. Такая система может находиться в одном из бесконечного множества состояний: $s_k$ ($k = 0,1,..., n$) — $k$ каналов заняты и очереди нет; $s_{n+r}$ ($r = 1,2,...$) — все каналы заняты и в очереди находится $r$ заявок ($r \to \infty$). Граф состояний рассматриваемой СМО имеет вид **рис. 7.5, а**, а формулы для расчета параметров приведены в табл. П1.1.



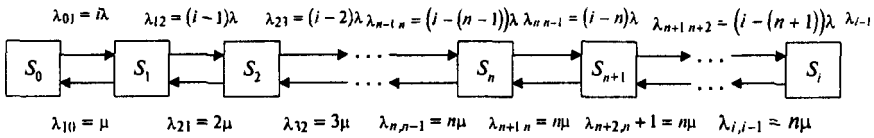

**а)** СМО с ожиданием



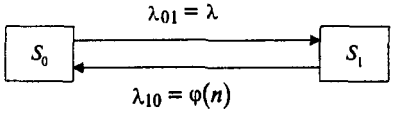

**б)** СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди



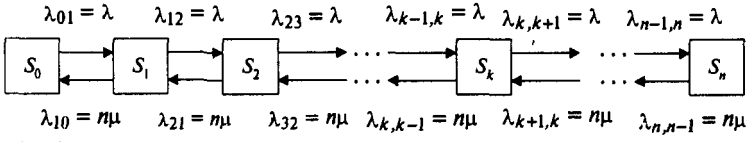

**в)** СМО с нетерпеливыми заявками



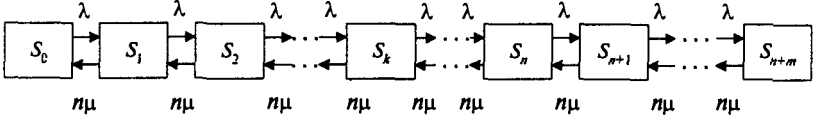

г) замкнутая СМО



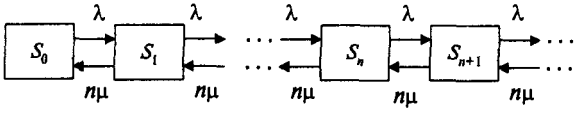

д) СМО с отказами и взаимопомощью между каналами типа «все как один»




е) СМО с отказами и «равномерной» взаимопомощью между каналами




ж) СМО с ожиданием, ограничением на длину очереди и «равномерной» взаимопомощью между каналами




з) СМО с ожиданием и «равномерной» взаимопомощью между каналами

*Рис. 7.5.* ***Графы состояний разновидностей многоканальной СМО***

**2.** *СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди* отличается от вышеприведенной тем, что эта система может находиться в одном из $n + m + 1$ состояний. В состояниях $s_0$, $s_1$,..., $s_n$ очереди не существует, так как заявок в системе или нет вообще и каналы свободны ($s_0$), или в системе есть несколько $i$ ($i \in 1,..., n$) заявок, которые обслуживает соответствующее число каналов, но очереди все равно в системе нет. В состояниях $s_{n+1}$, $s_{n+2}$,..., $s_{n+m}$ в системе имеется соответствующее ($n$+1, $n$+2,..., $n$+$r$,..., $n$+$m$) число заявок и (1, 2,..., $r$,..., $m$) заявок, стоящих в очереди. Заявка, пришедшая на вход СМО в момент времени, когда в

очереди стоят уже $m$ заявок, получает отказ и покидает систему необслуженной. Граф состояний СМО можно представить в виде рис. 7.5, б, а формулы расчета параметров подобных СМО приведены в табл. П1.2, П1.3.

3. На практике могут встречаться так называемые *СМО с нетерпеливыми заявками* (*с ограничением на время ожидания в очереди* и *без ограничения на длину очереди*), имеющие место при специфических ограничениях, налагаемых на порядок проведения банковских операций, например, на срочность и приоритетность обслуживания крупных и солидных клиентов, исполнения платежей и т. п. Граф состояний такой СМО приведен на рис. 7.5, в, а формулы расчета параметров подобных СМО — в табл. П1.4.

4. *Замкнутые СМО.* Все рассмотренные выше СМО характеризуются одним общим свойством, состоящим в том, что входящий поток заявок и его интенсивность не зависят от состояний системы, так как источник поступающих заявок находится вне системы. Если же интенсивность потока поступающих заявок определяется состоянием конкретной системы, то такие системы называются замкнутыми СМО.

Такая система может содержать конечное число источников заявок, каждый из них может находиться в одном из двух состояний — *активном* (состояние, при котором уже обслужена поданная им последняя заявка) или *пассивном* (состояние, при котором поданная источником последняя заявка еще не обслужена: она либо стоит в очереди, либо находится под обслуживанием). В активном состоянии источник может подавать заявки, в пассивном — не может. Отсюда интенсивность общего потока заявок зависит от того, сколько источников находится в пассивном состоянии, и связана с процессом обслуживания (стоит в очереди или непосредственно обслуживается).

Граф состояний подобной замкнутой многоканальной СМО (**рис. 7.5, г**) может включать в себя следующие состояния: $s_0$ — все $i$ источников находятся в активном состоянии, все $n$ каналов свободны, очереди нет; $s_1$ — один источник находится в пассивном состоянии, один канал занят обслуживанием заявки, поданной этим источником, остальные $i-1$ источников находятся в активном состоянии, $n-1$ каналов свободны, очереди нет; $s_2$ —2 источника находятся в пассивном состоянии, два канала заняты, $i-2$ источника в активном состоянии, $n-2$ канала свободны, очереди нет; .... $s_n$ —все $n$ источников находятся в пассивном

состоянии, все $n$ каналов заняты, $i-n$ источников в активном состоянии, очереди нет; $s_{n+1}$ $-n+1$ источников находятся в пассивном состоянии, $n$ каналов — заняты, одна заявка в очереди, $i-(n+1)$ источников находятся в активном состоянии;... $s_i$ — все $i$ источников находятся в пассивном состоянии, $n$ каналов заняты, $i-n$ заявок в очереди. Формулы расчета параметров подобных СМО приведены в табл. П5.

Все ранее рассмотренные СМО имели то свойство, что каждая заявка могла обслуживаться только одним каналом, что на практике соблюдается не всегда, и есть такие СМО, в которых одна и та же заявка может обслуживаться несколькими каналами. Каналы работают с взаимопомощью типа *«все как один»*, т. е. при появлении первой заявки ее начинают обслуживать все $n$ каналов, которые будут заняты до полного исполнения заявки. Если во время занятости каналов поступает заявка, то она получает отказ и покидает систему. После завершения обслуживания все $n$ каналов оказываются свободными, пока не поступит следующая заявка, на обслуживание которой переключатся опять все каналы и т. д.

Таким образом, многоканальная СМО работает по сути как одноканальная, когда все $n$ каналов работают как один с дисциплиной взаимопомощи, называемой «все как один», но с более высокой интенсивностью обслуживания. Граф состояний подобной системы (**рис. 7.5, д**) содержит всего два состояния: $s_0$ ($s_1$) — все $n$ каналов свободны (заняты). Параметры такой СМО рассчитываются по формулам, приведенным в табл. П6.

Анализ различных видов СМО с взаимопомощью типа «все как один» показывает, что такая взаимопомощь сокращает среднее время пребывания заявки в системе, но ухудшает ряд других таких характеристик, как вероятность отказа, пропускная способность, средние число заявок в очереди и время ожидания их выполнения. Поэтому для улучшения этих показателей используется изменение дисциплины обслуживания заявок с «равномерной» взаимопомощью между каналами следующим образом: **а)** если заявка поступает в СМО в момент времени, когда все каналы свободны, то все $n$ каналов приступают к ее обслуживанию; **б)** если в это время приходит следующая заявка, то часть каналов переключается на ее обслуживание; **в)** если во время обслуживания этих двух заявок поступает третья заявка, то часть каналов переключается на обслуживание этой третьей заявки и т. д., до

тех пор, пока каждая заявка, находящаяся в СМО, не окажется под обслуживанием только одного канала. При этом заявка, поступившая в момент занятости всех каналов, в СМО с отказами и «равномерной» взаимопомощью между каналами (**рис. 7.5, е**, табл. П7), может получить отказ и вынуждена покинуть систему необслуженной, в других комбинациях более сложных СМО может или ожидать в очереди определенной длины (СМО с ожиданием, ограничением на длину очереди и «равномерной» взаимопомощью между каналами, **рис. 7.5, ж**), или находиться в ней сколько угодно длительное время (СМО с ожиданием и «равномерной»взаимопомощью между каналами, **рис. 7.5, з**).

Таким образом, учет специфики моделей разновидностей СМО в практической деятельности субъектов рынка позволяет провести более глубокий анализ особенностей функционирования сложных систем и оценить их качество и эффективность с получением конкретных количественных оценок, вскрыть имеющиеся резервы и возможности по оптимизации протекающих процессов, экономии финансовых и прочих ресурсов, снижению рисков в условиях неопределенности деловой внешней и внутренней среды. Рассмотрим эти вопросы подробнее.

## 7.4. Адаптация организационных структур управления

Переход к рынку требует от всех субъектов хозяйствования повышенной надежности и эффективности функционирования производств, гибкости и живучести в ответ на динамичные изменения внешней деловой среды, снижения разновидностей рисков и потерь от запоздалых и некомпетентных управленческих решений.

*Организационные структуры управления* (ОСУ) призваны оперативно отслеживать колебания рынка и принимать в зависимости от складывающихся ситуаций компетентные управленческие решения. Так как математической моделью ОСУ являются системы массового обслуживания (СМО), рассмотренные выше, то становится понятным то внимание, которое уделяется в мире выбору эффективно функционирующих ОСУ субъектами рынка, будь то транснациональная корпорация, промышленный гигант, коммерческие банк, фирма или организация, малое предприятие и т. п.

Взамен широко распространенных в 50—90-е гг. ОСУ предприятий (иерархических, матричных, дуальных, параллельных и

др.) сегодня в мире эффективно используются альтернативные формы *многофункциональных* структур, базирующихся на принципах самоорганизации, адаптации, автономности отдельных подразделений с мягкими связями между ними. Подобной структурой обладает множество передовых зарубежных фирм, в составе которых насчитывается множество рабочих групп с сетевыми их взаимоотношениями. Популярными в последнее время считаются организации, ориентированные *на минимизацию потребления ресурсов*, имеющие явно выраженную горизонтальную форму с координацией, осуществляемой не по иерархическому признаку, а самими рабочими группами, организованными в сеть.

Альтернативными моделями, противостоящими структурам ОСУ, созданным на базе организационной логики и жесткого регулирования, являются *нечеткие структуры* без иерархических уровней и структурных подразделений, основанные на координации личной ответственности и профилировании самоуправляемых групп со следующими признаками [79,137]: **а)** наличием *относительно независимых рабочих групп* с участием представителей различных подразделений, создаваемых для решения определенных проектов и проблем, при широкой свободе действий и автономии в области координации задач и принятия решений; **б)** ликвидацией жестких связей между подразделениями ОСУ с введением гибких взаимосвязей.

На аналогичных принципах базируется современная концепция *минимизированного по ресурсам производства*: на подобных предприятиях в качестве организационных единиц используют рабочие группы с широкими полномочиями и большими возможностями самоуправления с конечной целью, заключающейся в создании разумной гибкой организации труда, опирающейся на самостоятельно действующих исполнителей, а не на синтезированные специалистами рациональные структуры; сотрудниками оцениваются возникающие проблемы, определяются возможности контактов со специалистами внутри и за пределами системы. Самоуправляемый персонал основной упор делает на самоорганизацию, заменяющую собой привнесенную извне (задаваемую сверху) жесткую упорядоченную структуру.

Крайним случаем такого подхода является создание *безорганизационной*, постоянно «размороженной», структуры со следующими свойствами: широкое творческое обсуждение любых обрабатываемых процедур и поступающих извне сигналов без

учета шаблонных решений и прошлого опыта; автономная работа членов групп с самостоятельной организацией временных взаимосвязей и производственных соглашений между партнерами по мере необходимости для решения возникающих проблем. Заметим, однако, что чрезмерное увлечение одной системной функцией — гибкостью при полном игнорировании прочих функций — интеграции, идентификации, учета и контроля, всегда о п а с н о для устойчиво функционирующих систем, так как трудно обеспечить успешную координацию в рамках данной организации без высокой квалификации сотрудников, их способности к обучению и совершенствованию, к установлению эффективных контактов и координации.

При подобной форме организации основное внимание должно уделяться созданию условий для максимального использования интеллекта человеческих ресурсов и повышения их квалификации, выделению высококвалифицированных специалистов — системщиков, увязывающих действия членов организации для достижения конечной цели. При этом в сфере системной координации существует вероятность возможных срывов, конфликтов и негативных последствий, так как ориентация на способность персонала к самоорганизации и самокоординации носит слишком общий характер. Хотя высокая компетентность, инициатива и сила воли каждого работника и влияет на жизнеспособность любой децентрализованной организации, но в целом они не могут заменить регулирующей функции целой организационной структуры.

Сегодня в мире интенсивно развивается новое направление синтеза ОСУ как *обучающихся систем*, характеризующихся следующими характерными особенностями: **а)** привлечением высококвалифицированных экспертов-специалистов к процессам восприятия и накопления информации, а также к обучению и расширению способностей персонала; **б)** постоянным изменением в процессе функционирования, расширением своих способностей взаимодействия с окружающей деловой средой и быстрой адаптацией к постоянно меняющимся внешним и внутренним условиям; **в)** широким распространением открытых компьютерных сетей, охватывающих не только отдельные организации, предприятия или их конгломераты, но и целые крупные регионы и даже совокупности стран (ЕЭС, СВИФТ и др.), что обусловливает новые возможности организации и повышения эффективности работы предприятий и отраслей в масштабах всей страны и даже всего мира.

Считается, что ОСУ должна создаваться на принципах *многофункциональности* и *многоаспектности*, позволяющих эффективно контролировать сложные рынки и распределять имеющиеся ресурсы. Из анализа мирового опыта функционирования ОСУ в условиях рынка применительно к российской экономике и ее субъектам хозяйствования можно выделить следующие рекомендации [89,137]:

1) *иерархическую* ОСУ можно сохранять и применять с минимумом риска для предприятия, если высшее руководство фирмы способно выступать в качестве координаторов проблем, а их подчиненные — в качестве «маленьких предпринимателей»; при этом предпринимательская инициатива и ответственность перемещаются с верхних в нижние эшелоны фирменной власти при исполнении иерархами действительно координаторских функций;

2) *матричную* ОСУ можно сохранять, если в фирме отсутствует механическое дублирование служебных инстанций и существует органичная сетевая структура с оптимальной коммуникацией;

3) *дуальную* ОСУ следует применять при ясности и контролируемости как ключевых связей между основными и сопутствующими структурами, так и прозрачности функций самой системы сопутствующих вторичных структур, причем они должны быть многофункциональными и многоцелевыми (типа «учебных центров»), а не специализированными, ориентированными лишь на собственные потребности;

4) *параллельную* ОСУ следует применять при сформированной конструктивной конкурентной культуре, сотрудничестве партнеров на базе доверия, терпимости, готовности разрешать конфликты, а в острых ситуациях иметь нейтральную «третейскую» инстанцию.

При наличии средних предприятий, состоящих из слабо интегрированных функциональных подразделений, на вторичные структуры можно возложить решение интеграционных проблем, но эффект от реализации этого механизма получится при осознании руководством подразделений создания структурной надстройки как средства поддержки их собственной позиции, а не как угрозу для их существования.

Развитие на стыке кибернетики, вычислительных сетей, менеджмента и социальной психологии направления *Groupware* (США), связанного с электронными информационными систе-

мами, локальными диалоговыми сетями и средствами их поддержки, обеспечивает *распределенную работу* больших коллективов людей в режиме прямого доступа, позволяя хранить в машинной памяти огромный объем информации (любую деловую, производственно-техническую и прочую документацию, совещания, переговоры организации и даже обычные разговоры ее сотрудников, а также всю предысторию и опыт работы), используя ее при необходимости для корректировки структуры, функций, задач, стратегии и тактики управления в деятельности конкретной организации. Такой подход по-новому раскрывает понятие обучающейся организации, обеспечивает проведение аналогий между процессами, протекающими в живых и в диалоговых компьютерных системах.

Если обучение и память обусловливают выживание живых систем, то аналогично организационное обучение и память влияют на эффективность деятельности любой организации при изменении деловой внешней среды. Обучение как живых, так и организационных систем обязательно ведет к структурным изменениям. Организационно правильно построенная компьютерная сеть может вызывать качественный сдвиг в улучшении корпоративной деятельности. Гибкость и широта функциональных возможностей *рабочих групп*, реализующих управление проектами при минимуме затрат на координацию их работы, обусловливают рост и качество исполнения крупных задач, стоящих перед фирмами, необходимость оптимизации функциональных подразделений и организационных структур в целом, изменения связей между функциональными единицами в зависимости от складывающихся ситуаций.

Качество *реструктуризации* в живых и организационных системах определяется совокупностью унаследованного и приобретенного поведения, эффективностью обучения и памяти, организации инфраструктур, обеспечивающих совершенствование взаимосвязей и диалогов между людьми.

Повышение скорости обучения и эффективности памяти организации зависит от способа управления взаимоотношениями и диалогами между людьми. Сегодня коммуникации —это координация действий, а не передача информации. Организационные инфраструктуры должны расширять возможности формирования и поддержки диалогов между людьми независимо от их традиций, культуры и др. Пример тому организация и распространение сети Internet и ей подобных.

# Глава 8
# Управление портфелем ценных бумаг в банковском бизнесе

Стабильность финансово-банковской системы — основа развития экономики любой страны. Главная трудность в создании стабильной финансовой системы России, например, имеет *субъективно-объективный характер*, состоящий в некомпетентности управления банковскими активами и пассивами. К руководству российскими банками должны прийти компетентные честные специалисты, соответствующие мировым стандартам.

## 8.1. Основные стратегии эффективной деятельности банков

Основными условиями эффективной деятельности банков на финансовом рынке страны сегодня являются [4—12,18—21,28—36,78,137]:

1) *качественное управление*, служащее критерием оптимального функционирования банка в сочетании с положительными личностными качествами руководителей и менеджеров банка;

2) использование комплекса разработанной *стратегии* и делового *бизнес-планирования* банка в его текущей деятельности с тщательным анализом отклонений и учетом реальности решаемых задач;

3) управление *кредитным портфелем* как основным источником банковских рисков, оптимизация операций с активами и пассивами банка, эффективная инвестиционная и трастовая политика;

4) запрет *рискованной и ненадежной банковской практики* в сочетании с достаточностью контроля и аудита, ответственностью кредитования, обеспечением ликвидности ресурсов финансирования операций, достаточности капитала, резервов по ссудам и лизингу и др.

Приход иностранных банков на финансовый рынок России обострил конкуренцию, обусловил применение банками методов стратегического планирования и управления. Любой коммерческий банк как деловой субъект хозяйствования может избрать для себя следующие стратегии (**рис. 8.1**): **а)** *традиционную* (поступать по аналогии с большинством банков, довольствуясь достигнутым); **б)** *оппортунистическую* (поиск новых сегментов финансового рынка на основе глубоких знаний ситуации на товарном, фондовом, валютном, денежном рынках); **в)** *оборонительную* (стремление не отстать от других банков) или *зависимую*, присущую обычно мелким банкам; **г)** *наступательную* (завоевание ведущей позиции на рынке банковских услуг через нестандартные решения, глубокий и обширный анализ и маркетинг рынка и другие новации).

Для российских банков наиболее перспективна *наступательная* стратегия, проявляющаяся не столько в расширении присутствия на финансовом рынке через создание сети своих филиалов и отделений, сколько в расширении спектра банковских услуг. Если в среднем зарубежные банки сегодня оказывают своим клиентам до 300 операций, то российские —лишь 15—20. Однако до ввода на рынок нового финансового продукта необходимо осуществить анализ всех связанных с ним рисков, и если при этом цена на новый продукт не дает разумной доходности, от него следует отказаться.

Сегодняшнее сдерживание процессов трансформации накоплений и инвестиций в России определяется высокими *макроэкономическими рисками*, отставанием институциональных преобразований, неопределенностью прав собственности, слабостью институтов государственной власти, неразвитостью рынка капитала. *Сокращения уровня макроэкономического риска* можно достичь: **а)** поиском равновесия между совокупным спросом и совокупным предложением; **б)** путем сопоставления выгод и издержек, оценки и моделирования риска при изменениях одного (ряда) параметра(ов) в деятельности банков; **в)** применением стратегического планирования, обеспечивающего взаимосвязь макро- и микромоделей, улучшение распределения ресурсов, внутреннюю согласованность и координацию, организационное предвидение, обоснованность прогнозов. Реализация стратегии привлечения иностранных и отечественных инвестиций в развитие производства требует разработки комплексной системы мер по минимизации рисков.

*Рис. 8.1. Этапы разработки стратегического плана*

Крайне важен анализ инвестиций, ценных бумаг, предоставления кредитов, организации эмиссии и распространения ценных бумаг. Финансовая устойчивость и риски клиентов банков должны рассматриваться с учетом стабильности и надежности банковской системы, приближения экономических нормативов ведения банковских операций, бухгалтерского учета и других видов отчетности к международным стандартам, а также ввода жестких ограничений на рискованные вложения.

Минимизации рисков добиваются на основе *комплексного метода расчета риска,* включающего: соблюдение экономических нормативов банковской ликвидности; определение размера допустимого совокупного риска банка, а также прогнозирование их развития.

*Частные методы расчета рисков* базируются на создании шкал коэффициентов риска или субъективном взвешивании риска по отдельной операции или их группам (например, операции с ценными бумагами, с краткосрочными межбанковскими депозитами, с остатками средств на корреспондентских счетах и т. п.).

*Банковский риск* — индивидуальная конкретная величина, определяемая обычно из субъективной позиции каждого банка по каждой банковской операции.

По времени основные банковские операции подвержены прошлому, текущему, а иногда и будущему риску. *Текущий риск* включает операции по выдаче гарантий, акцепты переводных векселей, документальные аккредитивные операции и др. При наступлении времени оплаты, если банк не учел вероятность потерь, он несет ответственность за выдачу гарантий. Распределение риска во времени играет важную роль в прогнозировании возможных потерь, и его учет позволяет банку избежать воздей-

ствия прошлых рисков и ошибок в будущей деятельности. Часто кредитный риск, возникающий по балансовым операциям, влияет на внебалансовые операции (например, при банкротстве предприятий, когда важно учитывать величину возможных потерь по одной и той же деятельности, проходящей по балансовым и внебалансовым счетам одновременно); при валютных операциях следует учитывать не только валютный риск, но и рыночные риски по операциям с ценными бумагами, с вексельными и казначейскими обязательствами, биржевыми индексами и др.

По степени управления риски подразделяются:

**а)** на *открытые*, управляемые с помощью методов взвешивания и дифференциации рисков при учете внешних, страновых, отраслевых, региональных рисков, анализа состояния клиента банка, его платежеспособности, рефинансирования кредитов и их диверсификации, выдачи крупных кредитов на консорционной основе, использования плавающих процентных ставок и др., что позволит банкам избежать непредусмотренных потерь и четко определить их совокупный размер;

**б)** на *внутренние* риски, возникающие при совершении финансово-денежных и валютных операций, подразделяемые на кредитные, финансовые, операционные, контрольные за правильностью проведения валютных операций.

В группе *кредитных рисков* обязательны проверка репутации контрагентов, наличия соответствующего покрытия по установленным лимитам, получение гарантии платежа. В группе *финансовых рисков* обязателен учет сроков торговли валютой, действия форвардных сделок. В группе *операционных рисков* необходим учет качества работы персонала банка, использование методов кадрового планирования, ротации, рекруитмента и маркетинга кадров, аудиторской проверки, распределения ответственности, создания систем обеспеченности информацией [146—151]. *Контрольные риски* связаны с диагностикой соответствия заключения и аннулирования сделок, противоречащих международным нормам валютных рынков, правилам обмена информацией, ведения бухгалтерского учета.

*Страхование* в банковской деятельности покрывает две разновидности рисков — *экономические*, или *коммерческие*, и *политические*, зависящие от деятельности конкретных заемщиков и действий государства. Выделяют также риски *активных* и *пассивных операций* коммерческих банков, заключающиеся в опас-

ности потерь от неплатежей по основному долгу и проценту, причитающемуся кредитору.

Объектами страхования обычно являются коммерческие кредиты, банковские ссуды, обязательства и поручительства по кредиту и др. При неплатежеспособности должника или неоплате долга по иным причинам задолженность погашается страховой организацией.

Страхование может проводиться в формах: **а)** *страхование ответственности заемщиков* за непогашение кредитов (страхователем выступает заемщик, объектом страхования — его ответственность перед банком-кредитором за своевременность и полноту погашения кредита, в том числе процентов); **б)** *страхование риска непогашения кредита* (страхователем выступает банк, объектом страхования — ответственность всех (части) заемщиков перед банком за погашение кредита).

При оценке *инвестиционных* рисков необходимо учитывать: неопределенность интересов и поведения участников рынка (проекта); неполноту или неточность информации о финансовом положении, деловой репутации предприятий, о возможности неплатежей, срывов договорных обязательств, банкротств. Снижения этого вида рисков можно достичь за счет дополнительных затрат на создание резервов, на совершенствование технологий, на повышение качества продукции и ее патентозащищенности и сертификации.

Рассмотрим методы оптимизации и управления деятельностью банков на фондовом рынке и формирования портфеля ценных бумаг, являющихся относительно новым для России финансовым инструментом.

## 8.2. Управление капиталом, активами и пассивами банка

Управление *собственным капиталом* коммерческого банка должно исходить из сочетания прибыльности и ликвидности. Источники формирования собственного капитала банка, как правило: выпуск акций, продажа долговых обязательств, прирост резервов на покрытие непогашенных ссуд и распределенная прибыль, внебалансовая деятельность банка. Наиболее привлекательно увеличение собственного капитала через выпуск акций, так как по существующему законодательству банк-эмитент не

обязан выкупать акции у акционеров и даже при положительном сальдо может отказаться от выплаты дивидендов, мотивируя это решение необходимостью повышения устойчивости банка. В то же время при увеличении резервов собственного капитала растет уровень безопасности банка и его ликвидности, но при этом при прочих равных условиях снижается их доходность.

Анализ рынка банковских услуг позволяет получить информацию об условиях привлечения вкладов другими банками определенного региона (государства). Банк окажется более конкурентоспособным, если сможет предложить более выгодные условия вкладов, новые финансовые инструменты и продукты, более высокий уровень обслуживания, консалтинг и др., надежность и конфиденциальность вкладов.

**Портфельный подход** управления активами банка можно выразить целевой функцией вида:

$$M^A = p \cdot f(r^M, r^A, r^B, \ldots, W^A) \rightarrow \max D \vee \min R,$$

где $M^A$ — стоимость активов банка; $p$ — абсолютный уровень цен; $r^M$ — ставка доходности денег; $r^A$ — ставка доходности актива $A$; $r^B$ — ставка доходности актива $B$ (абсолютный уровень цен); $W^A$ — норма доходности от величины богатства банка; $D$ — доход банка; $R$ — уровень совокупного риска; $\vee$ — логический знак ИЛИ. Активы $A$, $B$ — ликвидные ценные бумаги, акции, облигации, векселя, обязательства и др.

Структура портфеля активов — функция от нормы доходности денег, активов $A$, $B$, $W^A$ (богатство банка, выраженное в труднореализуемых активах — недвижимости, драгоценных металлах, антиквариате и т. п.). Из целевой функции следует, что средний доход от портфеля активов —это средневзвешенная величина доходов от отдельных активов (банковские депозиты, ссуды, ценные бумаги, акции, облигации, векселя, государственные казначейские облигации и др.); недвижимость и другие объекты материальной собственности, принадлежащие банку. Структура портфеля активов должна строиться таким образом, чтобы получить максимально возможную в конкретной ситуации на финансовом рынке прибыль от активов.

Портфельный подход в формировании активов заключается в *максимизации полезности* (максимизации *доходности активов*) *при одновременной минимизации рисков* за счет диверсификации. Снижение риска путем сочетания активов (диверсификации портфеля) является обычным эффектом при хранении портфеля.

Управление портфелем активов; изменение его структуры с целью достижения максимума дохода базируется на методах

прогнозирования и анализа динамики процентной ставки по банковским депозитам, так как предельный доход от таких активов как разновидности ценных бумаг, недвижимости и др. должен быть не ниже доходности, получаемой от банковских депозитов. При изменении процентной ставки и уровня доходности по различным активам изменяется структура активов. При портфельном управлении активами соотношения между активами определяются стремлением банков свести к минимуму риски и добиться максимума доходности. Так как это противоречивая задача (**рис. 8.2,а**), то кривая $0F$ отражает зависимость сочетания доходности и риска от различных активов.

Поскольку формирование портфеля активов во многом определяется избранной стратегией банка, корректируемой с учетом складывающейся ситуации на финансовом рынке, то процесс управления портфелем включает в себя следующий алгоритм.

**1.** Четкое определение и формализация целей банка в виде математических критериев оптимизации при рациональном сочетании ограничений по уровням доходности и риска.

**2.** Разработка стратегии банка на основе анализа текущей ситуации на финансовом рынке, предложения новых финансовых инструментов и продуктов и выбора оптимального сочетания направлений диверсификации и новых направлений деятельности банка.

**3.** Реализация определенной стратегии банка с формированием оптимального портфеля активов на базе качественного прогноза наступления той или иной ситуации на финансовом рынке и определения вероятности ее наступления.

Заметим, что чем точнее определены текущие ситуации на финансовом рынке, тем меньше уровень риска и неопределенности — уровня инфляции, изменения процентной ставки, номинальной и реальной норм процента, определяемых по формулам:

$$r = f(P', M/P, Y),$$

где $P'$ — ожидаемые темпы инфляции, $M/P$ —реальные денежные остатки (номинальная денежная масса / уровень цен); $Y$ — фактически полученный внутренний валовой продукт;

$$r_p = r - p',$$

где $r_p$ ($r$) —реальная (номинальная) ставка процента; $p'$ —темпы роста инфляции.

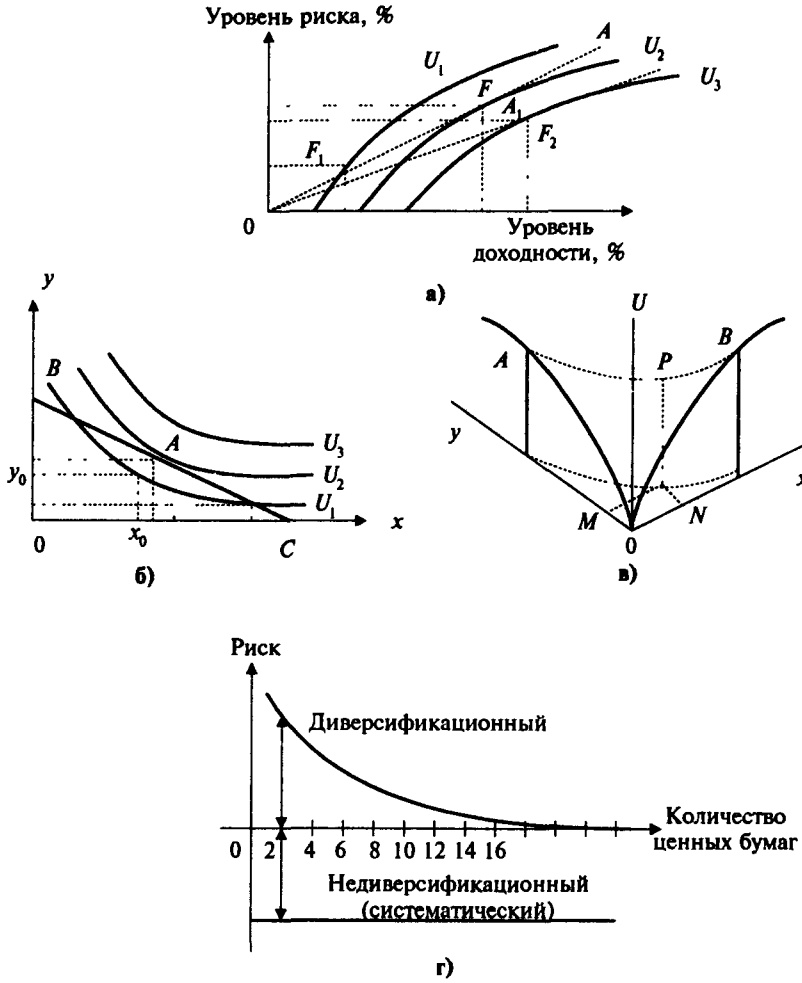



*Рис. 8.2.* ***Управление портфелем ценных бумаг:***

**а** — оптимизация величины риска в зависимости от объема активов; **б** — оптимизация портфеля ценных бумаг; **г** — распределение уровней рисков

Анализируя долю ценных бумаг в структуре активов, необходимо учитывать, что норма процента на абсолютно надежные ценные бумаги обусловлена неопределенностью будущих процентных ставок. В целом структура активов должна изменяться в

зависимости от ситуации на финансовом рынке. «Старение» активов (т. е. снижение темпов их роста применительно к стоимости акции) является предупредительным сигналом о неэффективности управления портфелем активов, поэтому для расчета *нормы дохода по портфелю* применяют формулы:

$$SA = ОД_0 \cdot (1 + T)/(R - T) = ОД_n \cdot (R - T),$$

где $SA$ — стоимость акции; $ОД_0$ ($ОД_n$) — последний выплаченный дивиденд в предыдущий период (дивиденды в течение $n$ периодов); $R$ —известная ожидаемая доходность от повторного инвестирования акции; $T$ —постоянный ожидаемый темп роста дивидендов по акциям;

$$R_n = Д_1 \cdot R_1 + Д_2 \cdot R_2 + ... + Д_k \cdot R_k = \sum Д_i \cdot R_i,$$

где $R_n$ — норма доходности всего портфеля; $R_i$ — нормы доходности отдельных активов; $Д_i$ — доли соответствующих активов в портфеле.

## 8.3. Управление портфелем ценных бумаг

Как уже отмечалось, целью формирования портфеля ценных бумаг является стремление к максимизации полезности портфеля и к достижению возможно более высокой кривой безразличия. Если отобразить взаимодействие величины активов банка, определяющих его возможности на рынке ценных бумаг, и кривых риска $U_i$ (**рис. 8.2,а**), то можно утверждать, что с ростом уровня доходности возрастает и уровень риска (их соотношение показано на кривых риска $U_1 > U_2 > U_3$ или траекториях линий безразличия между риском и доходами). Линия $0A$ (касательная из начала координат к кривой риска $U_i$) отражает потенциальные возможности банка, определяемые объемом активов, представленных в ценных бумагах. В точке пересечения кривой безразличия $U_2$ и линии возможностей $0A$ достигается оптимальное сочетание соотношений уровня риска и доходности при данных темпах роста активов.

Формирование портфеля ценных бумаг осуществляется с учетом:

**а)** равенства предельных полезностей по всем видам активов (т. е. прирост дохода от дополнительных инвестиций в акции должен быть не ниже, чем прирост дохода в облигации или другие ценные бумаги):

$$\Delta_{r1}/\Delta_{a1} = \Delta_{r2}/\Delta_{a2} = ... = \Delta_{rn}/\Delta_{ai};$$

**б)** преобладающего соотношения уровня дохода над уровнем риска (см. **рис. 8.2, а)**, т. е. чем больше размер портфеля, тем больше его полезность.

Фактор *неопределенности* выступает источником повышенной прибыли и высокого риска при формировании портфеля ценных бумаг. В этой ситуации следует учитывать: **а)** *капитальный* риск (риск вложения в ценные бумаги по сравнению с другими активами, например, в недвижимость); **б)** *селективный* риск (риск вложения в конкретные акции компаний, облигации и др.); **в)** *временной* риск, связанный с выбором момента времени покупки определенного типа ценных бумаг; **г)** риск *законодательных изменений* (изменение правил приватизации через акционирование, налоговой политики и др.); **д)** *процентный* риск (изменение процента по банковским вкладам, влияющее на текущую стоимость ценных бумаг); **е)** риск *ликвидности* (возможные потери капитала из-за сложности реализации ценных бумаг); **ж)** *кредитный* риск (угроза невыплаты процентов по ценным бумагам, например, по процентным векселям компаний, которые после их эмиссии не могут выплатить проценты); **з)** *инфляционный* риск (обесценение доходов с ценных бумаг с течением времени).

Перечисленные виды рисков можно существенно уменьшить путем формирования *диверсификационного портфеля*, содержащего самые разнообразные типы ценных бумаг. Однако полностью устранить инвестиционный риск нельзя, так как кроме диверсификационных рисков (т. е. специфических рисков, присущих конкретным корпорациям или финансовым активам и исключаемых посредством диверсификации инвестиций) при вложениях капиталов присутствуют еще и недиверсификационные, или систематические, риски, присущие конкретной экономической системе в целом или отдельному рынку и не поддающиеся диверсификации. Мерой диверсификационного риска по тому или иному финансовому активу выступает *коэффициент* β, позволяющий спрогнозировать возможные изменения на финансовом рынке, определить наиболее благоприятные условия для инвестирования, сделать выбор набора ценных бумаг для портфеля:

$$\beta = \frac{\text{Недиверсификационный (систематический) риск актива}}{\text{Риск рыночного портфеля}}$$

Как меру систематического риска коэффициент β можно определить по следующей формуле:

$$\beta = (r_i - \overline{r})\,(r_m - \overline{r}_m)/(r_m - \overline{r}_m)^2,$$

где $r_i$ —ставка доходности по конкретным ценным бумагам (акциям); $\overline{r}$ ($\overline{r}_m$) — средний доход по конкретным акциям (по рынку); $r_m$ — фактический доход по рынку.

Заметим, что понятие «*рыночный портфель* ценных бумаг» характеризуется двумя основными требованиями: 1) максимально большим количеством самых разных ценных бумаг, 2) высокой степенью риска активов портфеля.

Если β>1, то *степень риска* актива или всего портфеля ценных бумаг считается *высокой*, при β=1 — *средней*, а при β<1 — *низкой*. Коэффициент β зависит только от систематического риска, поэтому стабильность риска рыночного портфеля достаточно высока из-за пересмотра его через фиксированные интервалы времени. Чем больше разнообразие ценных бумаг, входящих в портфель, тем меньше риск (см. **рис. 8.2,г**), причем максимальный эффект диверсификация дает на 10—12 видах ценных бумаг, присущих различным компаниям или предприятиям, функционирующим в различных относительно независимых отраслях, что может дать дополнительный эффект. Следует учитывать, что при большом числе ценных бумаг ($n$>18) диверсификационный риск становится ничтожным, и общий риск определяется его систематической составляющей. Поэтому при правильной оценке систематического риска и правильном расчете объемов и количества ценных бумаг эффективность портфеля ценных бумаг может оказаться максимальной.

Следовательно, управление портфелем ценных бумаг — искусство выбора набора ценных бумаг и распоряжения им так, чтобы он не только сохранял свою стоимость, но и приносил высокий доход инвестору, не зависящий от уровня инфляции.

**Выбор наилучшей тактики при управлении портфелем ценных бумаг**. Процесс управления портфелем ценных бумаг в общем случае включает в себя следующие процедуры [23,24,78]:

**1)** формализацию целей инвестирования, задание предпочтений инвесторов для последующего выбора той или иной стратегии управления портфелем ценных бумаг;

**2)** создание портфеля ценных бумаг с выбором средств тактики управления;

3) отслеживание, анализ и контроль социо-техно-экономических факторов, влияющих или могущих вызвать изменения в структуре портфеля ценных бумаг;

4) измерение параметров эффективности портфеля (оценки соотношения уровней дохода и рисков).

Четкость формулировки целей инвестиций обусловливает правильность учета условий формирования портфеля ценных бумаг, ориентацию субъекта рынка на долго-, средне- или кратковременную отдачу от капиталовложений в виде соответственно стабильного, умеренного или высокого уровня доходов. Оценки инвестиций подразделяются на *относительные* (оценка, например, доходности акций по сравнению с доходностью облигаций и денег), *факторные* (анализ доходов, дивидендов, денежного потока) и *динамические* (анализ предыдущей деятельности, текущих операций и прогнозирование перспектив роста).

**Относительные оценки инвестиций**. Оценка доходов акций и облигаций неразрывна с оценкой рисков; при этом обычно применяют оценки гибкого реагирования, предусматривающие: **а)** формирование частных показателей (отдельных видов ценных бумаг); **б)** определение веса каждого показателя (с общей суммой весов по всем показателям, равной единице); **в)** разработку шкал относительной важности или таблицы с указанием набора видов ценных бумаг, их количественной оценкой и расчетом удельных весов по каждому частному показателю (уровням доходности $D$, ликвидности $L$, стабильности $C$ и др.) и удельных весов конкретного вида актива в портфеле ценных бумаг. Уровень риска при этом по каждому активу определяется как функция $R_i = f(D_i, L_i, C_i)$ по каждой альтернативе инвестирования в ценные бумаги. Суммарный уровень общего риска $R$ портфеля ценных бумаг можно определить по формуле:

$$R = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(L_i, D_j, C_i\right) \to \min .$$

Оценивая возможные или выбранные варианты инвестиций в ценные бумаги с позиций максимизации эффективности и минимизации риска, можно определить области их «согласия» и «компромиссов», т. е. построить кривую безразличия, на которой значения рангов предпочтения доходности и ликвидности для лиц, принимающих решения, равноценны (**рис. 8.2,в**). Если по оси ординат отложить облигации определенных эмитентов, а по оси абсцисс — акции, то прямая $0U$ означает полезность отдель-

ных активов, кривые $0B$ и $0A$ — совокупную полезность всех акций и облигаций соответственно. Откладывая количество акций и облигаций, получим график, любая точка которого $P(x_i, y_i)$ означает некоторый набор акций и облигаций, а ее проекция на ось $0U$ — величину полезности, обеспечиваемую данным набором активов. Соединив все проекции вершин точек $P$ графика на ось $0U$, получим плоскость полезности (доходности) активов, на которой кривые безразличия $U_1$, $U_2$, $U_3$ означают равенство предпочтения доходности и ликвидности (см. **рис. 8.2,б**), т. е. любая точка на кривой $U_i$ дает одинаковую доходность активов. Если провести линию бюджетных ограничений $BC$, определяемую стоимостью активов всего портфеля (из акций и облигаций), то получим точку $A(x_0, y_0)$, в которой сочетание активов при заданном объеме портфеля является оптимальным. Если в результате изменения ситуации на финансовом рынке удельный вес ценных бумаг в общей стоимости активов банка изменится, то с кривой $U_2$ перейдем на более высокую $U_3$ (при росте доли ценных бумаг) или на более низкую $U_1$ (при уменьшении этой доли). Заметим, что анализ соотношения уровней доходности и риска по ценным бумагам различных эмитентов может вестись непрерывно.

**Факторные оценки**. При факторном анализе эффективности инвестиций в ценные бумаги учитывают следующие показатели:

1) *срок окупаемости инвестиций* $T$, определяемый отношением цены ценной бумаги $p_i$ к чистой прибыли $d_i$:

$$T = p_i/d_i;$$

2) *коэффициент покрытия* $K_{пi}$, определяемый как отношение чистого дохода на одну акцию $d_i$ к дивиденду на одну акцию $V_i$:

$$K_{пi} = d_i / V_i.$$

Если $K_{пi}$ равен 1 или близок к единице, то на следующий год доходы упадут, и дивиденд окажется непокрытым. Коэффициент покрытия должен быть таким, чтобы $K_{пi} \geq 2$, так как если компания не финансирует свой рост, то она должна выпускать новые акции или брать займ, или она отмирает и исчезает с рынка;

3) *доходность акций* $D_i$ определяется отношением чистого дохода на одну акцию $d_i$ к рыночной цене акции $p_i$:

$$D_i = d_i/p_i \cdot 100\%.$$

Далее этот доход на собственность акционеров сравнивается с доходностью акций и определяется как *дивидендный доход*, отнесенный к курсовой цене акции. Пусть 50% чистого дохода идет на выплату дивидендов, тогда доходность акций составляет $2 \cdot 11{,}1 : 45 = 4{,}9\%$. Эту величину сравниваем с доходностью по депозитным вкладам. Если же при росте чистых доходов доход на одну акцию снижается, то это рассматривается как положительный показатель, свидетельствующий о развитии компании.

Эксперты могут проводить наиболее оптимальные варианты инвестиций в ценные бумаги, осуществляя поиск перспективных, но не замеченных пока рынком компаний, прогноз будущих доходов и дивидендов, дисконтируя их на настоящее время, определяя текущую стоимость будущих доходов и сопоставляя их с затратами на инвестирование.

При *долгосрочном инвестировании* банк должен проводить глубокий анализ на следующих трех уровнях экономики с целью прогноза своих будущих доходов и неизбежных рисков:

1) изучение состояния экономики страны, ее финансового рынка и прогнозирование возможных вариантов их развития;

2) детализированный тщательный анализ отраслей и подотраслей экономики страны с целью определения наиболее перспективных сфер вложения;

3) анализ макроэкономической информации с комплексом показателей, характеризующих инвестиционные риски в региональном и отраслевом разрезе.

При определении основных направлений инвестиционной политики некоторые российские банки учитывают следующие показатели: принадлежность к инвестиционно-привлекательной отрасли, региону; привлекательность для иностранного капитала; капитализация (степень реализации) проекта; сочетание инвестиционного капитала и участия в собственности предприятия; финансовое положение участников проекта; показатели эффективности (внутренняя норма доходности, срок окупаемости, денежное покрытие, показатели устойчивости проекта).

Оценку факторов регионального риска (табл. 8.1, 8.2) можно вести с учетом вероятностей наступления событий, оцениваемых в баллах (чрезвычайно высокая угроза стабильности района — 10 баллов; отсутствие угрозы —1 балл).

*Таблица 8.1.* ***Расчет оценки факторов регионального риска***

| *Разновидности ценных бумаг* | *Оценка уровней критериев и их удельный вес* | | | | | | *Удельный вес актива портфелями* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *ликвидности* | | *доходности* | | *стабильности* | | |
| | *балл* | *уд. вес* | *балл* | *уд. вес* | *балл* | *уд. вес* | |
| **Акции** | | | | | | | |
| эмитент 1 | | | | | | | |
| .... | | | | | | | |
| эмитент *n* | | | | | | | |
| **Облигации** | | | | | | | |
| эмитент 1 | | | | | | | |
| .... | | | | | | | |
| эмитент *m* | | | | | | | |
| **Векселя** | | | | | | | |
| эмитент 1 | | | | | | | |
| ... | | | | | | | |
| эмитент *q* | | | | | | | |
| **Прочие** | | | | | | | |
| ... | | | | | | | |
| | | | | | | | 100% |

*Таблица 8.2.* ***Оценка факторов регионального риска***

| *Анализируемые показатели* | *Оценка, балл* | *Направление экстремума* | *Удельный вес* |
|---|---|---|---|
| **Перспективы экономического развития:** | | | |
| развитие инфраструктуры | | max | |
| энергетический потенциал | | max | |
| наличие квалифицированной рабочей силы | | стабильно | |
| производственно-технический потенциал | | max | |
| сырьевая база и ее перспективы | | max | |
| Риск законодательных изменений | | стабильно | |
| Стабильность администрации региона | | max | |
| Социально-экономическая стабильность | | max | |
| Риск изменения налоговой политики | | min | |
| Экспортный потенциал | | max | |
| Емкость рынка для импорта | | стабильно | |
| Интегральный показатель регионального риска | | min | |

*Анализ инвестиционного риска по отраслям* связан с исследованием в динамике следующего перечня показателей:

1) объема $Q$ реализованной продукции

$$Q = \Sigma q_i \cdot p_0 \,/\, \Sigma q_0 \cdot p_0,$$

где $p_0$ — цена базисного года; $q_0$ — объем продукции базисного года; $q_i$ — объем реализации продукции в периоде $i$;

2) темпов роста цен реализации

$$P = \Sigma q_0 \cdot p_i / \Sigma q_0 . p_0;$$

3) темпов производительности труда в отрасли

$$Z = \Sigma q_i . z_i / \Sigma q_i \cdot z_0,$$

где $z$ — затраты на единицу продукции, определяемые из статей затрат сферы управленческого учета;

4) качества продукции, ее конкурентоспособности на внутреннем рынке;

5) емкости внутреннего рынка на продукцию отрасли, основных производителей;

6) материалоемкости, энергоемкости, фондоотдачи, фондоемкости продукции отрасли, ее экспортных возможностей, зависимости от импорта, перспектив развития потребности мирового рынка в продукции отрасли.

На основании тщательного финансового и управленческого анализа данных показателей за ряд лет и прогнозирования их развития на будущее определяют интегральный показатель инвестиционного риска, оцениваемого по модели множественной корреляции:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

где $y$ — уровень инвестиционного риска, $x_i$ ($i = \overline{1, n}$) — множество факторов, определяющих инвестиционный риск в отрасли.

По окончании расчета регионального и отраслевого рисков необходим расчет дополнительных технико-экономических показателей. Подробнее алгоритмы управления рисками и расчеты вышеприведенных показателей рассмотрены в работах [12, 23, 24, 126, 127, 137, 143].

**Тактика управления портфелем ценных бумаг**. При определении наиболее эффективных альтернатив инвестиций необходимо в зависимости от стратегии банка дифференцировать инвестиции: по *объектам* (реальное производство, финансовые активы, нематериальные инвестиции — реклама, обучение); по *целям* (создание предприятий, замена и восстановление изношенных основных производственных фондов, проведение рационализации); по *срокам* (кратко-, средне- и долгосрочные).

Инвестиции могут быть *портфельными* и *венчурными*, имеющими свои особенности в достижении определенной доходности и уровня риска. Применение банками системы перекрестного владения акциями способствует дальнейшему развитию процес

сов концентрации и централизации банковского капитала, сращивания его с промышленным и корпоративным, но в период экономического кризиса подобная взаимозависимость обусловливает нестабильность финансового рынка.

Тактику управления портфелем ценных бумаг можно выбирать на основе *матрицы* (табл. 8.3), учитывающей способности инвестора как в вопросах выбора наборов ценных бумаг, так и умения прогнозирования складывающихся ситуаций на рынке, с осуществлением комплекса оперативных действий. Например, если инвестор плохо выбирает ценные бумаги, учитывает время, ему рекомендуется делать упор на анализе и оценке общего уровня риска для его портфеля, а затем на создании хорошо диверсифицированного портфеля с постоянным уровнем риска. Если инвестор уверен в своем умении прогнозирования ситуаций на рынке, он может менять состав своего портфеля в зависимости от рыночных изменений. Если же инвестор способен на эффективный выбор ценных бумаг, ему следует отказаться от диверсификации и создавать портфель из ценных бумаг с высоким уровнем дохода.

В зависимости от принятой стратегии банки используют методы и тактику *активного* или *пассивного управления* портфелем ценных бумаг.

*Таблица 8.3.* ***Рекомендации по выбору эффективного портфеля ценных бумаг***

| *Способность ЛПР по выбору ценных бумаг* | *Способность ЛПР предсказать состояние рынка ЦБ* | |
|---|---|---|
| | *хорошая* | *плохая* |
| ***Хорошая*** | 1. Сконцентрировать средства в выбранных ценных бумагах без диверсификации<br>2. Сместить коэффициент β выше или ниже желаемого долгосрочного уровня, основанного на прогнозе рынка | 2. Держать коэффициент β на желаемом долгосрочном уровне |
| ***Плохая*** | 1. Создать диверсифицированный портфель<br>2. Сместить коэффициент β выше или ниже желаемого долгосрочного уровня, основанного на прогнозе рынка | 1. Создать максимально диверсифицированный портфель<br>2. Держать коэффициент β на желаемом долгосрочном уровне |

1. *Пассивное управление* базируется на предположении, что рынок достаточно эффективен для достижения успеха в подборе ценных бумаг или в учете времени и не следует забегать вперед (как при активном управлении). Суть *тактики* пассивного управления состоит в создании хорошо диверсифицированного портфеля с заранее заданными уровнями риска и в сознательном поддержании стабильного состояния портфеля ценных бумаг (они характеризуются, как правило, низким оборотом, минимумом накладных расходов и низким уровнем рисков). Важнейшим элементом при этом является создание *индексного фонда*, обеспечивающего контроль за риском и нормальную деятельность портфеля (*индексный фонд* — это портфель, зеркально отображающий движение выбранного индекса, характеризующего состояние фондового рынка; если доля *i*-й компании при подсчете индекса Доу—Джонсона составляет, к примеру, 10%, то инвестор, стремящийся к созданию портфеля ценных бумаг, адекватно отображающего состояние всего рынка ценных бумаг, должен также иметь в своем активе 10% акций данной компании из общего числа ценных бумаг портфеля).

Другим методом пассивного управления выступает метод *сдерживания портфелей*, суть которого состоит в инвестировании в неэффективные ценные бумаги, когда выбираются акции с минимальным соотношением цены к доходу, позволяя получать доход от спекулятивных операций на бирже (при падении цены их покупают, а при росте цены их продают).

2. *Активное управление* портфелем ценных бумаг основано на использовании *сложных технологий сокращения риска* и применении форвардных сделок, опционов, фьючерсов и свопов [12,18,78,137 и др].

*Своповые операции* при активном управлении портфелем ценных бумаг применяются с целью предотвратить обесценение портфеля активов. *Классический своп* — это взаимодействие дилеров на фондовом рынке, придерживающихся различных позиций по тенденциям изменения процентных ставок и их влияния на будущую стоимость ценных бумаг, выбору набора кратко-, средне- или долгосрочных операций, обусловливающего получение высокой прибыли. Операции свопинга означают постоянный обмен, ротацию ценных бумаг через финансовый рынок с использованием операций, основанных на продвижении учетной ставки, «подмены», «сектор-свопа» и др. Например, свопинговые операции «подмена» базируются на том, что обмениваются

две похожие, но не идентичные ценные бумаги. Например, облигации компании ABC с 15%-ным доходом и сроком погашения 10 лет и облигации финансовой компании на 8 лет с 10% дохода, причем первая ценная бумага продается на 10 пунктов больше, чем вторая. Менеджер, имеющий ценные бумаги второго вида, может провести свопирование ценных бумаг первого вида, так как 10 пунктов добавочного дохода с продлением срока действия облигации на два года являются довольно высокой прибавкой.

Довольно сложные операции «сектор-свопа» обеспечивают перемещение ценных бумаг из разных секторов экономики с различным сроком действия, доходом и т. п., а также ценных бумаг, отличающихся своими показателями от бумаг со средними показателями. При получении информации об исчезновении факторов, вызывающих эти отличия в характеристиках ценных бумаг, банк может осуществлять оперативные операции купли-продажи. В целом операции свопинга позволяют практически устранять такие виды рисков, как селективный, процентный, временной, инфляционный, но при условиях качественной проработки и выбора наилучшей стратегии банка и долгосрочных прогнозов состояния финансового и фондового рынков.

# Раздел III
# Модели и методы оценки выгодности и качества принятия инвестиционных решений

В повседневной деятельности любого субъекта рынка необходимо принимать решения. От грамотности и компетентности выбора той или иной модели или метода принятия решений зависят благополучие и процветание фирмы. По виду отражения объективной реальности эти модели могут подразделяться на математические, графические и физические. К наиболее сложным и важным в смысле оптимальности относятся математические модели принятия решений. Рассмотрим некоторые из этих моделей и методов более подробно [55—125].

# Глава 9
# Разновидности методов принятия решений при выборе инвестиционных объектов

## 9.1. Основы теории принятия решений и модели выбора инвестиций

Модель принятия решений обычно содержит следующие элементы: **а)** цели (систему целей), охватывающие(ую) как совокупность целевых функций, так и приоритетные соотношения, показывающие, с какой относительной интенсивностью достигаются различные целевые функции, а также разнообразные характерные проявления целевых функций; **б)** альтернативы (модели или отдельные варианты действий или комплекс этих действий); **в)** состояния внешней среды (состояние в будущем, факторы влияния); **г)** функции результативности.

Все *состояния внешней среды*, взаимоисключающие друг друга, формируют пространство состояний. В случае необходимости учета нескольких вариантов состояния внешней среды имеет место либо ситуация риска, при которой проявляется объективная или субъективная вероятности наступления событий внешнего характера, либо ситуация *неопределенности*.

Прогноз влияния варианта принятия решений при определенном состоянии внешней среды оценивается с помощью *функции результативности*: относительно ее ситуации могут подразделяться на *ситуации определенности, риска* или неопределенности. Для комбинации из альтернативы и состояния внешней среды однозначные последствия возникают только в ситуации определенности, а в ситуациях неопределенности и риска возможно *несколько* результатов. Неопределенность в отношении состояния внешней среды и функций результативности можно отразить в виде «*неясных качеств*».

При включении в модель принятия решения лишь одной целевой функции и наличия одной ситуации определенности можно предположить, что результат одного варианта решения

совпадает с полезностью для лиц, принимающих решения (ЛПР). Однако в большинстве случаев результаты, вытекающие из специфических действий при определенных состояниях окружающей среды и рассчитанные с помощью функции результативности, требуют оценки в отношении приоритетов, устанавливаемых ЛПР (для их учета применяются функции полезности, оценки и установления приоритетов; с помощью функции полезности каждому результату или совокупности возможных результатов присваивается *показатель полезности*). Функции результативности и полезности могут совмещаться в одной целевой функции.

Анализ моделей принятия решений (табл. 9.1) в упрощенном виде предусматривает следующие этапы: определения проблемы (характеристики ситуации, при которой принимается решение); создания модели (определения степени сходства между ситуацией, при которой принимается решение, и моделью); обеспечения данными; оценки моделей.

*Таблица 9.1.* ***Признаки моделей принятия решений***

| *Специфика проявления* | | | | | | *Критерий* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Определенность | | | Неопределенность | | | **Степень (не) определенности** |
| Единичное или программное решения | | | Полная неопределенность | Ситуация риска | Неясность | |
| Абсолютная выгода | Относительная выгода | Срок эксплуатации | Единичное решение<br>Программное решение | | | **Альтернативы** |
| Одна цель | | | Несколько целей | | | **Цели** |
| Статические модели | | | Динамические модели | | | **Аспект времени** |
| Динамические модели | | | Одноступенчатые | Многоступенчатые | | |
| | | | | жесткие | гибкие | |

**Разновидности моделей принятия решений в инвестиционной сфере деятельности**. При решении инвестиционных проблем существенное значение имеют различные целевые функции, факторы влияния и варианты принятия решения. При создании модели требуется ряд упрощений в отношении действительности, поэтому не все цели, альтернативы, факторы влияния, ограничения и взаимосвязи могут быть учтены в соответствующей действительности форме. Так, к примеру, в рамках стратегического

инвестиционного планирования преследуется цель создания потенциала успеха. Преобразование этой целевой установки в операционные и по возможности количественные целевые функции — очень важная и трудоемкая проблема. Особенно трудным является количественное отражение факторов влияния и расчета данных в случае осуществления инвестиций нематериального характера или включения в модель новых технологий или новых рынков, а также учет в модели фактора доступа к источникам информации или влияния внешних факторов и вероятности их наступления.

Выделенные при создании модели варианты решения, состояния внешней среды, функции результативности и полезности обусловливают определенные требования к обеспечению данными. Информация прогнозного характера приоритетна при обеспечении данными, причем особенно важно применение определенного круга методов составления прогнозов и сценариев развития внешней среды предприятия. Для одноразовых инвестиций наиболее применимы интуитивные методы. Для динамичных моделей расчета инвестиций характерны такие данные, как будущие поступления и платежи, относящиеся к определенным периодам и срокам, расчетные процентные ставки для конкретных периодов, вероятности для определенных сценариев в условиях риска.

Сведения, получаемые при оценке модели относительно влияния инвестиционных альтернатив, составляют основу для принятия решения. Несмотря на упрощение по отношению к реальности, анализ модели — более полезный процесс по сравнению с интуитивным подходом: он позволяет определить степень влияния нескольких альтернатив в понятной форме и интегрировать в модель фактор неопределенности в будущем. Успех анализа модели зависит от множества факторов: расчета данных, оценок и частоты их использования; лежащей в основе модели ситуации, при которой происходит планирование; приемлемости достигнутых результатов для ЛПР и др.

**Инвестиции и их разновидности**. Под *инвестициями*, как правило, понимают комплекс сложных явлений, классифицируемых по различным признакам и проявляемых в формах платежей, имущества, сочетаний приобретенных или уже имеющихся основных средств и др.

По критерию *объект инвестиций* различают инвестиции: **а)** *финансовые* (инвестиции спекулятивного характера, ориенти-

рованные на долгосрочные вложения и имеющие место при связывании капитала в формах банковских вкладов, облигаций, инвестиционных сертификатов, долей в фондах недвижимости или участия); **б)** *реальные, материальные* (или вещественные), представляющие собой средства производства (машины, ЭВМ, станки, участки земли, здания, транспорт и др.); **в)** *нематериальные* (или потенциальные), отображающие потенциал знаний (обучение или переподготовка персонала, научно-исследовательские и проектно-конструкторские работы).

По критерию *причина инвестиций* в классе реальных экономических инвестиций различают *инвестиции по созданию* предприятия (компании, банки, организации), *текущие* инвестиции (по замене изношенного и устаревшего оборудования, капитальному и прочему ремонту) и *дополняющие* инвестиции, подразделяемые на группы инвестиций: **а)** на расширение производства; **б)** на *цели изменения* (по рационализации производства, процессов и технологий; по переходу на иную производственную программу; по диверсификации); **в)** инвестиции на обеспечение безопасности (для устранения источников опасности или подготовки к ним).

По критерию *сфера инвестиций* различают инвестиции в сферах запасов (закупок), производства, сбыта, управления, кадров, исследований и разработок. Применительно к другим критериям можно заметить, что во *временном аспекте* инвестиции можно подразделить на определенные и неопределенные, одноразовые и многоразовые, по *степени взаимосвязей* —изолированные, нормальные и взаимосвязанные; по *степени неопределенности* —относительно надежные и относительно рискованные; по *степени влияния на управление предприятием* —инвестиции стратегического и нестратегического характера (отличаются масштабностью действий и объемом используемых ресурсов, весомостью и множественностью целей, влиянием на итог годовой деятельности, степенью неопределенности, уровнем и периодом планирования, степенью влияния принимаемых решений и т.п.) [55].

## 9.2. Статические модели принятия единичных решений в условиях определенности

В подобных моделях принятия единичных решений различают: **а)** абсолютную выгодность, если предпочтение отдается

инвестициям вместо альтернативы отказа от них; **б)** относительную выгодность, если $i$-й инвестиционный объект самый предпочтительный из группы взаимоисключающих объектов по определенным критериям —виду, объему капиталовложений, сроку эксплуатации и др. [55—60].

Рассмотрим некоторые статические модели принятия решений.

**Статические модели принятия решений о выгодности инвестиций при одной целевой функции.** В статических моделях рассматривают либо определенный срок эксплуатации, либо гипотетический средний период, а в качестве целевых функций — издержки, прибыль, рентабельность, срок амортизации. В соответствии с этим модели и методы в условиях определенности подразделяются на расчеты по сопоставлению: *затрат* (сравнительный учет затрат); *прибыли* (сравнительный учет прибыли); *рентабельности* (сравнительный учет рентабельности); *статические амортизационные расчеты.*

Рассмотрим эти указанные модели подробнее с пояснением их специфики на ряде примеров.

1. *Метод сравнительного учета затрат.* В сравнительном учете затрат различают следующие виды издержек: расходы на персонал, сырье и материалы; амортизационные отчисления; проценты; налоги, сборы, взносы; затраты на услуги третьих лиц. Величина этих издержек исчисляется для каждой альтернативы инвестирования как среднее значение в течение планового периода. При этом различают издержки переменные, зависящие от будущего объема производства или продаж, и постоянные (оклады управленческому персоналу, амортизационные отчисления, выплаты по процентам и др.). Оценка выгодности инвестиций с помощью метода издержек формулируется следующим правилом: *объект инвестиций абсолютно* (*относительно*) *выгоден, если его издержки ниже затрат при альтернативе отказа от инвестирования* (*на любой другой предлагаемый на выбор объект*).

***Пример 9.1.*** Для изготовления нового вида продукции и освоения производства требуются инвестиции в объекты *A* и *B*, характеризующиеся следующими данными (табл. 9.2). Альтернативой инвестированию выступают закупки объектов со стороны (альтернатива С) по цене 12,5 руб./ед. Провести сравнительный учет затрат и принять окончательное решение по инвестированию.

Решение. Для решения поставленной задачи в отношении инвестиционных альтернатив требуется провести различие между постоянными и переменными издержками. Затраты на сырье и зарплату представляют собой переменные издержки. Пусть используются ак-

кордные заработки, а наемные работники могут использоваться в других сферах производства при простоях производственных мощностей. Затем должны быть определены среднегодовые переменные и постоянные издержки инвестиционных альтернатив.

*Таблица 9.2.* ***Сравнительные характеристики альтернатив инвестирования***

| *Основные показатели* | *Объект А* | *Объект В* |
|---|---|---|
| Затраты на приобретение, тыс.руб. | 24 | 60 |
| Срок эксплуатации, лет | 6 | 6 |
| Выручка от ликвидации, тыс.руб. | 0 | 6 |
| Максимум объема производства,тыс. ед./год | 8 | 10 |
| Оклады, тыс.руб./год | 5 | 5 |
| Прочие постоянные издержки, тыс.руб./год | 4 | 16 |
| Заработная плата, тыс.руб./год | 22 | 8 |
| Сырье и материалы, тыс.руб./год | 40 | 45 |
| Прочие переменные издержки, тыс.руб./год | 3 | 3 |
| Расчетная процентная ставка, % | 8 | 8 |

Переменные издержки *ПерИ* для вариантов *А* и *В* соответственно определяются как сумма затрат на сырье, зарплату и прочих переменных затрат:

$$ПерИ_{A(x=8000)} = 40 + 22 + 3 = 65 \text{ тыс.руб./год};$$

$$ПерИ_{B(x=10000)} = 45 + 8 + 3 = 56 \text{ тыс.руб./год}.$$

Так, если приведенные переменные издержки для варианта *В* соответствуют максимальному объему производства в 10 тыс.ед./ год, а в варианте *А* максимум объема производства составляет 8 тыс. ед./год, то вариант *В* необходимо перерассчитать для объема, адекватного объему варианта *А*:

$$ПерИ_{B\ (x=8000)} = 56 \cdot 8/10 = 44{,}8 \text{ тыс.руб./год}.$$

Постоянные издержки включают расходы на выплату окладов управленческому персоналу, амортизационные отчисления, выплаты по процентам и прочие постоянные издержки.

Средние амортизационные отчисления (*САО*) имеющихся вариантов инвестиций определим по линейному методу как

*САО = (Закупочная цена − Выручка от ликвидации)/Срок эксплуатации.*

Тогда имеем, что $САО_A = (24 - 0)/6 = 4$ тыс.руб./год;
$САО_B = (60 - 6)/6 = 9$ тыс. руб. год.

Заметим, что метод амортизации и определяемый им процент начисления амортизации могут влиять на величину средних затрат капитала и величину процента.

Определение выплат по процентам в сравнительном учете затрат необходимо в том случае, если затраты на приобретение, а вместе с ними и объемы инвестируемого капитала различны по вариантам инвестиций. Величина процентов определяется путем умножения средних затрат капитала на процентную ставку.

Для исчисления средних затрат капитала можно применять различные методы. Упрощенно можно предположить, что в промежутке между привлечением капитала в размере затрат на приобретение в начале планового периода и привлечением капитала в размере выручки от ликвидации в конце планового периода происходит его непрерывная амортизация (на **рис. 9.1,а** приведен график процесса инвестирования для варианта *А*); при этом показатель *средних затрат капитала* (СЗК) определяется так:

$$СЗК = (Затраты\ на\ приобретение + Выручка\ от\ ликвидации)/2.$$

В нашем случае для варианта инвестирования *А* имеем:

$$СЗК_A = (24 - 0)/2 = 12 \text{ тыс.руб./год.}$$

Проценты для варианта *А* при заданной процентной ставке в 8% составляют в среднем 12 · 0,08 = 0,96 тыс.руб./год.

Для варианта *В* соответственно имеем (**рис.9.1,б**):

средние затраты капитала (*СЗК*) составляют: $СЗК_B = (60 + 6)/2 = 33$ тыс.руб./год, а средняя величина процентов для варианта *В* составляет:

$$33 \cdot 0{,}08 = 2{,}64 \text{ тыс.руб./год.}$$

Далее определим средние величины совокупных постоянных издержек (*СВСПИ*) по вариантам инвестиций:

$$СВСПИ_A = 5 + 4 + 4 = 0{,}96 = 13{,}96 \text{ тыс.руб./год;}$$

$$СВСПИ_B = 5 + 16 + 9 + 2{,}64 = 32{,}64 \text{ тыс.руб./год.}$$

Тогда средняя величина совокупных издержек (СВСИ) при объеме выпуска 8 тыс.ед./год по вариантам инвестиций *А* и *В* равна:

$$СВСИ_A = ПерИ_A + СВСПИ_A = 65 + 13{,}96 = 78{,}96 \text{ тыс.руб./год;}$$

$$СВСИ_B = ПерИ_B + СВСПИ_B = 44{,}8 + 32{,}64 = 77{,}44 \text{ тыс.руб./год.}$$

Для варианта *C* (приобретения закупкой со стороны по цене 12,5 руб./ед. для объема производства в 8000 ед.) получаем:

$$СВСИ_C = 12{,}5 \cdot 8 = 100 \text{ тыс.руб./год.}$$

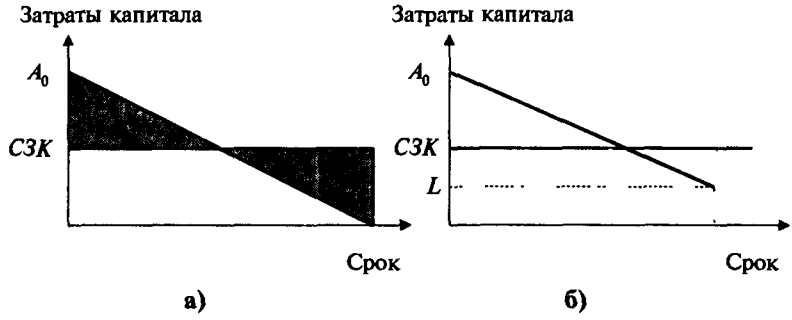



*Рис. 9.1.* ***Инвестирование для альтернативы А при выручке от ликвидации L=0 (а) и для альтернативы В при L>0 (б)***

Таким образом, из сравнения вариантов инвестиций видим:

$$СВСИ_B < СВСИ_A < СВСИ_C,$$

т.е. альтернатива *B* является наиболее предпочтительной по сравнению с альтернативами *A* и *C*.

Если оценить данную модель, то можно отметить следующее:

**а)** сравнительный учет затрат относительно прост;

**б)** наибольшие трудности связаны с обеспечением необходимых и надежных данных как по общей проблеме инвестиционных расчетов, так и по качеству информации и адекватности модели реальной действительности (нет взаимосвязи с другими сферами функционирования предприятия; выработка решения ограничена одной целевой функцией; применена единая ставка процента для любого момента времени и любых размеров капитала);

**в)** применение единого срока эксплуатации, игнорирование фактора загрузки мощностей и состава издержек (наличие свободных производственных мощностей, различий в составе совокупных издержек по отдельным компонентам постоянных и переменных издержек могут иметь важное значение для принятия решения по предприятию);

**г)** при отклонении фактических объемов производства от прогнозируемых относительная выгодность инвестиций может изменяться вследствие различий в показателях переменных и постоянных затрат;

д) абстрагирование от результатов производства (невозможность выдачи оценки абсолютной выгодности для всех видов инвестиций; продукция, производимая в рамках различных вариантов инвестирования, предполагается равноценной по качеству и др.).

2. *Метод сравнительного учета прибыли.* В сравнительном учете прибыли наряду с издержками учитываются и результаты производства. Целевой функцией является средняя прибыль, оцениваемая как разница между результатами и издержками. Часто производственные результаты отождествляются с оборотом. В остальном остаются допущения, принятые для сравнительного учета издержек, и действует следующее *правило*: объект инвестиций *абсолютно* (*относительно*) *выгоден,* если его прибыль выше нуля (выше прибыли любого другого предлагаемого на выбор объекта). Поясним данный метод на примере.

***Пример 9.2.*** Пусть для фирмы имеется две альтернативы инвестиций *A* и *B* ( табл. 9.3). Требуется оценить абсолютную и относительную выгодность этих вариантов и выбрать лучший вариант.

*Таблица 9 3.* ***Сравнительные характеристики альтернатив инвестирования***

| *Основные показатели* | *Объект A* | *Объект B* |
|---|---|---|
| Затраты на приобретение, тыс.руб. | 180 | 200 |
| Срок эксплуатации, лет | 5 | 5 |
| Выручка от ликвидации, тыс.руб. | 12 | 17 |
| Объемы производства и сбыта, тыс.ед./год | 9 | 12 |
| Цена продажи, руб./год | 10 | 10 |
| Прочие постоянные издержки, тыс.руб/год | 5 | 20 |
| Транспортные издержки, тыс.руб./год | 15 | 25 |
| Расходы на монтаж, тыс.руб./год | 2 | 2 |
| Переменные издержки за ед.прод.,руб./год | 2 | 1,9 |
| Расчетная процентная ставка, % | 6 | 6 |

Р е ш е н и е. Для оценки абсолютной и относительной выгодности обоих вариантов требуется определить средние величины оборота издержек. Годовые обороты (*ГО*) обоих вариантов инвестирования составляют·

$$ГО_A = 9 \cdot 10 = 90 \text{ тыс.руб./год}; \; ГО_B = 12 \cdot 10 = 120 \text{ тыс.руб./год}.$$

Средние издержки можно рассчитать аналогично алгоритму, приведенному выше в примере 9.1 (для сокращения расчетов вычисленные значения отдельных компонентов и величины средних совокупных издержек альтернатив *A* и *B* сведены в табл. 9.4).

*Таблица 9.4.* ***Сравнительные компоненты издержек вариантов инвестиций***

| *Компоненты и виды издержек* | *Объекты инвестиций, тыс.руб./год* | |
|---|---|---|
| | *A* | *B* |
| Амортизационные отчисления | 37,0 | 42,0 |
| Проценты | 6,27 | 7,32 |
| Прочие постоянные издержки | 5,0 | 20,0 |
| Переменные издержки | 18,0 | 22,8 |
| Совокупные издержки (СИ) | 66,27 | 91,12 |

Отсюда средние значения прибыли (СЗП) для вариантов инвестиций *A* и *B* составят:

$$СЗП_A = ГО_A - СИ_A = 90 - 66{,}27 = 23{,}73 \text{ тыс.руб./год;}$$

$$СЗП_B = ГО_B - СИ_B = 120 - 92{,}12 = 27{,}88 \text{ тыс.руб./год.}$$

В итоге средние значения прибыли для обоих вариантов положительны, поэтому оба варианта *A* и *B* *абсолютно выгодны*, но относительно более выгодной является альтернатива *B*, так как $СЗП_в > СЗП_A$ (все замечания, сделанные при оценке модели сравнительного учета затрат, за исключением пункта о производственных результатах вариантов инвестиций, применимы и к этому методу).

3. *Метод сравнительного учета рентабельности.* Сравнительный учет рентабельности отличается от сравнительного учета прибыли лишь видом целевой функции (под *рентабельностью* понимается отношение величины прибыли к объему инвестируемого капитала). Величина прибыли и объем инвестируемого капитала могут определяться по-разному: затраты на приобретение, учитываемые при расчете средних значений амортизационных отчислений и процентов, складываются из цены закупки и дополнительных затрат на приобретение (затрат на монтаж, транспортных расходов и др.). Вполне целесообразно в качестве объема инвестируемого капитала взять среднюю величину затрат капитала. Величину прибыли можно рассчитать как сумму средней прибыли и средних процентов, тогда рентабельность определяется так:

*Рентабельность = Средние (прибыль + проценты)/Средние затраты капитала = Прирост выручки /Средние затраты капитала.*

Этим определением рентабельности устанавливаются совокупные проценты, уплачиваемые на среднюю величину инве-

стируемого капитала. Средние проценты рассчитываются как проценты, уплачиваемые со средних затрат капитала в размере расчетной процентной ставки (будучи компонентами издержек, они вычитаются из оборота при расчете средней величины прибыли). Но сумма средней прибыли и средних процентов представляет собой прирост выручки, отношение которого к средним затратам капитала определяется при расчете рентабельности, при этом справедливо следующее правило: инвестиционный объект *абсолютно (относительно) выгоден,* если его рентабельность выше заданного предельного значения (выше рентабельности любого иного предлагаемого на выбор объекта). Предельное значение устанавливается ЛПР и зависит от имеющихся инвестиционных возможностей (если допустить возможность свободно вкладывать и брать взаймы финансовые средства по расчетной процентной ставке, то последняя представляет собой подходящую предельную величину).

***Пример 9.3.*** Исходными данными по деятельности предприятия служат условия примера 9.2. Требуется определить абсолютную и относительную выгодность имеющихся для него альтернатив инвестирования *А* и *В*. В качестве предельной величины возьмем расчетную процентную ставку в размере 6%.

Р е ш е н и е. Для определения рентабельности требуются средние значения прибыли, процентов и затрат (в примере 9.2 $СЗП_A$ = =23,73 тыс.руб./год; $СЗП_B$ = 27,78 тыс.руб./год; средние значения процентов —6,27 тыс.руб./год (вариант *А*), 7,32 тыс.руб./год (вариант *В*); $СЗК_A$ =104,5 тыс.руб./год; $СЗК_B$ =122,0 тыс.руб./год. Тогда показатели рентабельности *Рен* для обоих вариантов равны:

$$Рен_A = (23{,}73 + 6{,}27)/104{,}5 = 0{,}2871 = 28{,}71\%;$$

$$Рен_B = (27{,}78 + 7{,}32)/122) = 0{,}2885 = 28{,}85\%.$$

Таким образом, *оба варианта инвестирования абсолютно выгодны, так как начисляемый по ним совокупный процент (рентабельность) выше минимально уплачиваемой 6%-ной ставки, но относительно более выгоден вариант инвестирования В, у которого более высокая рентабельность* — 28,85% (28,71% для варианта *А*).

Оценка этой модели схожа с моделями сравнительного учета затрат и прибыли, но в отличие от первого метода явно учитываются результаты инвестиционных проектов, а от второго метода отличается видом целевой функции и предположением об уравновешивании различий в объеме инвестирования (при сравнительном учете прибыли допускается компенсация путем начисления процентов по расчетной процентной ставке, а при

учете рентабельности — дифференцированный подход к компенсации различных объемов вкладываемого капитала).

В целом при большом числе вариантов инвестиций с очень высоким уровнем рентабельности, конкурирующих между собой за ограниченные финансовые ресурсы, рекомендуется использовать *сравнительный учет рентабельности*. Если же этих вариантов немного и справедливо предположение о применении метода сравнительного учета прибыли (вложение капитала по расчетной процентной ставке), то этот метод более предпочтителен. Путем приближения расчетной ставки процента к показателям рентабельности инвестиционных вариантов можно достигнуть высокого уровня адекватности результатов сравнительного учета прибыли и рентабельности.

4. *Метод статических амортизационных расчетов*. При амортизационном расчете целевой функцией выступает *срок амортизации* (в течение которого вложенный капитал восстанавливается за счет притока денежных средств или превышения поступлений от эксплуатации объекта над платежами) или *восстановительный срок* объекта инвестиций с определением как среднего значения, так и суммарного (кумулятивного) расчета. Срок амортизации является мерой, определяющей риск, связанный с инвестированием. Определение выгодности в рамках амортизационных расчетов можно вести на основе следующего правила: объект инвестиций *абсолютно (относительно) выгоден*, если его амортизационный срок *ниже* какой либо заранее заданной предельной величины (ниже амортизационного срока любого другого предлагаемого на выбор объекта).

Срок амортизации (*СА*) можно рассчитать так:

$$СА = ОВ / СВПДС,$$

где *ОВ* — объем вложения инвестируемого капитала (затраты на приобретение), *СВПДС* — средняя величина притока денежных средств (сальдо текущих поступлений и платежей).

Если *СВПДС* выводится из средней прибыли (*СП*), то к этому показателю средней прибыли следует прибавить величину амортизационных отчислений (*АО*): $СВПДС = СП + АО$. Иногда к *СВПДС* следует прибавлять и проценты: это зависит от того, являются ли проценты одновременно и платежами, как в случае привлечения заемного капитала, или нет, как при использовании собственного капитала. Проиллюстрируем расчет амортизационных сроков на примере.

*Пример 9.4.* Исходные данные для расчета срока амортизации возьмем из примера 9.2 (они сведены в табл. 9.5). Необходимо оценить выгодность обоих вариантов инвестирования *A* и *B* по критерию сроков эксплуатации, если для определения абсолютной выгодности вариантов взять предельный показатель в 4 года.

Р е ш е н и е. Амортизационные сроки $T_i$ по вариантам инвестиций *A* и *B* соответственно составляют:

$$T_A = OB/СВПДС = OB/(СП + AO) = 197 / (23{,}73 + 37{,}00) = 3{,}24 \text{ лет};$$

$$T_B = 227{,}00 / (27{,}88 + 42{,}00) = 3{,}25 \text{ лет}.$$

*Таблица 9.5.* ***Исходные данные по предприятию***

| *Показатели деятельности предприятия* | *Объекты инвестирования* | |
|---|---|---|
| | *A* | *B* |
| Средняя прибыль, тыс. руб./год | 23,73 | 27,88 |
| Амортизационные отчисления, руб./год | 37,00 | 42,00 |
| Объем инвестирования, тыс. руб. | 197,00 | 227,00 |

Расчет показал, что оба объекта инвестирования абсолютно выгодны, имеют примерно равные сроки амортизации, но вариант *A* незначительно относительно выгоден по сравнению с вариантом *B*.

Если оценить приведенную модель, то можно отметить, что здесь выводы аналогичны приведенным выше методам, но из-за абстрагирования от последствий, проявляющихся по истечении срока амортизации, данные расчеты не должны быть единственным критерием для принятия инвестиционных решений. В то же время амортизационные расчеты могут использоваться для оценки возможной степени связанного с инвестициями риска, а амортизационный срок можно рассматривать как критический показатель срока эксплуатации или как результат анализа чувствительности системы.

## 9.3. Простые динамические модели принятия решений о выгодности инвестиций при одной целевой функции

Инвестиционные объекты при использовании динамических моделей связаны с многократными поступлениями и выплатами во времени. Эти поступления и выплаты имеют определенные

значения и их можно спрогнозировать и соотнести с конкретными сроками. Исследование динамики показателей поступлений и выплат по нескольким периодам — существенная специфика отличия динамических моделей от статических моделей. Рассмотрим их подробнее с классификацией моделей.

**Некоторые финансово-математические преобразования**. В динамических моделях платежи производятся в различные сроки, причем из-за зависимости размера платежей от срока их реализации их нельзя предварительно суммировать, а необходимо проводить финансово-математические преобразования, например, ревальвацию или дисконтирование [7,21,55,130,131]. Рассмотрим их более подробно.

При *ревальвации*, или премии (*дисконтировании*, или вычете), определяют, какую стоимость $C$ приобретет инвестированная к определенному моменту времени сумма капитала (здесь момент времени $t = 0$) в более поздний срок времени ($t = t_n$) с учетом начисления процентов и сложных процентов. Если процентная ставка $i$ для всех периодов (исчисление времени в годах) постоянна, то показатель $C$ определяется так:

для ревальвации

$$C = N \cdot (1 + i)^t,$$

для дисконтирования

$$C = N \cdot (1 + i)^{-t},$$

где $N$ — инвестируемый капитал, $(1 + i)^t$ —коэффициент ревальвации, $(1 + i)^{-t}$ — коэффициент дисконтирования (для сокращения записи часто принимается $q = 1 + i$, тогда получаем $q^t = (1 + i)^t$).

При неодинаковых процентных ставках ($q_1$, $q_2$,..., $q_T$) для всех периодов наблюдений ($t_1$, $t_2$,...,$t_T$) имеем, что стоимость инвестированного капитала $C$ определяется так:

$$C = N \cdot (1 + i_1)(1 + i_2)...(1 + i_T).$$

Для подсчета *фактической стоимости*, т.е. вычисления стоимости в начальный момент времени ($t = 0$) для ряда платежей одинакового размера $N$, которые ежемесячно осуществляются в конце каждого года в течение $t$ лет, применяется следующая формула:

$$C = N \cdot [(1 + i)^t - 1] / (1 + i)^t \cdot i,$$

здесь $K$ ($K = [(1 + i)^t - 1] / (1 + i)^t \cdot i$ и на него умножается сумма платежа $N$) называется *коэффициентом фактической стоимости периодических поступлений*, где $k = 1/K$ — *коэффициент восстановления*.

Подобным образом можно произвести расчет *периодических поступлений* путем преобразования имеющейся на нулевой момент времени стоимости $N$ в ряд отнесенных на конец года платежей $W$ равной величины, которые осуществляются до момента $t$:

$$W = N \cdot (1 + i)^t \cdot i / [(1 + i)^t - 1].$$

***Пример 9.5.*** Пусть первоначальный объем инвестируемого капитала составляет 10 тыс. руб. Определить его стоимость через три года, если происходит ревальвация (дисконтирование) и ежегодные процентные ставки составляют: **а)** постоянную величину, равную $q = 10\%$; **б)** величины, изменяющиеся по годам и соответственно равные $q_1 = 10\%$, $q_2 = 12\%$, $q_3 = 15\%$. Определить фактическую стоимость капитала по ставке 10% и размер периодических поступлений $W$.

Р е ш е н и е. Подставив численные значения в приведенные выше формулы, получим величину инвестированного капитала при *ревальвации* через три года:

**а)** при постоянной ежегодной процентной ставке

$$C = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}10)^3 = 13\,300 \text{ руб.};$$

**б)** при изменяющихся процентных ставках

$$C = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}1)(1 + 0{,}12)(1 + 0{,}15) = 14\,168 \text{ руб.}$$

Аналогичные показатели при *дисконтировании* составляют:

**а)** при постоянной ежегодной процентной ставке

$$C = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}10)^{-3} = 7\,513{,}15 \text{ руб.};$$

**б)** при изменяющихся процентных ставках

$$C = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}1)^{-1}(1 + 0{,}12)^{-1}(1 + 0{,}15)^{-1} = 7\,058{,}16 \text{ руб.}$$

*Фактическая стоимость инвестиций* при ежегодной процентной ставке в 10%, ежегодных платежах в размере 10 тыс. руб. составит:

$$C = N \cdot [(1 + i)^t - 1] / (1 + i)^t \cdot i = 10\,000 \cdot [(1 + 0{,}1)^3 - 1] /$$
$$/ (1 + 0{,}1)^3 \cdot 0{,}1 = 24\,868{,}85 \text{ руб.}$$

Размер периодических поступлений составляет:

$$W = N \cdot (1 + i)^t \cdot i / [(1 + i)^t - 1] =$$
$$= 10\,000 \cdot (1 + 0{,}1)^3 \cdot 0{,}1 / [(1 + 0{,}1)^3 - 1] = 4\,021{,}15 \text{ руб.}$$

**Динамические модели оценки выгодности инвестиций**. Этот класс динамических моделей можно подразделить на две основные группы: в моделях *первой* группы предполагается существование рынка совершенного капитала, когда платежи ревальви-

руются или дисконтируются по единой ставке процента; в моделях *второй* группы процентные ставки различаются при вложении и привлечении финансовых средств, что применимо в деятельности банков.

Рассмотрим перечисленные модели более подробно с возможным пояснением на конкретных примерах.

**1.** *Метод определения стоимости капитала* предполагает наличие совершенного рынка и служит для оценки альтернатив инвестиций относительно целевой функции стоимости капитала, представляющей собой сумму всех дисконтируемых или ревальвируемых по единой процентной ставке на какой-либо момент времени поступлений и выплат, возникших при инвестировании объекта. Таким образом, по сути стоимость капитала представляет собой *фактическую* стоимость, характеризующую прирост имущества в денежной форме, приносимый инвестиционным объектом в начале планового периода с учетом процентов. При этом можно использовать следующее правило: инвестиционный объект *абсолютно (относительно) выгоден,* если стоимость его капитала *выше нуля* (выше подобного показателя любого иного, предлагаемого на выбор объекта).

Так как расчетная процентная ставка одинакова для всех периодов, то стоимость капитала ($CK$) на начало планового периода ($t = 0$) определяется так:

$$CK = \sum_{t=0}^{T} (e_t - a_t) q^{-t},$$

где $t$ — индекс времени; $T$ —последний момент времени, в который осуществляются платежи; $e_t$ ($a_t$) — поступления (выплаты) в момент времени $t$; $q^{-t}$ —коэффициент дисконтирования на момент времени $t$.

Рассчитанная для отдельных моментов времени разница ($e_t - a_t$) называется *чистым платежом* (может представлять превышение либо поступлений над выплатами, либо выплат над поступлениями).

Если имеются следующие допущения: **а)** можно пренебречь налогами и трансфертными платежами; **б)** с помощью объекта инвестирования выпускают лишь один вид продукции, причем объем производства совпадает с объемом сбыта; **в)** платежи производятся в следующие сроки: выплаты на приобретение — в начале первого периода ($t = 0$), текущие поступления и выпла-

ты — по окончании каждого периода, выручка от ликвидации — по окончании срока эксплуатации ($t = T$), то определить стоимость капитала можно по формуле:

$$CK = -A_0 + \sum_{t=0}^{T}\left(\left(p_t - a_{Vt}\right)x_t - A_{ft}\right)q^{-t} + Lq^{-t},$$

где $t$ —индекс времени; $T$ —окончание срока эксплуатации; $A_0$ — выплаты на приобретение; $p_t$ —цена продажи в момент времени $t$; $a_{Vt}$ — выплаты за единицу в момент времени $t$, определяемые объемами сбыта или производства; $x_t$ —объем сбыта или производства в момент времени $t$; $A_{ft}$ —выплаты в момент времени $t$, не зависящие от объемов сбыта или производства; $L$ —выручка от ликвидации; $q^{-t}$ — коэффициент дисконтирования на момент времени $t$.

Относительную выгодность двух инвестиционных объектов $A$ и $B$ можно определить как разницу стоимостей их капиталов, т.е.

$$\Delta CK = CK_A - CK_B = \sum_{t=0}^{T}\left(e_{tA} - a_{tA}\right)q^{-t} - \sum_{t=0}^{T}\left(e_{tB} - a_{tB}\right)q^{-t}.$$

Если $\Delta CK > 0$, то объект $A$ является относительно более выгодным по сравнению с объектом $B$, в противном случае — наоборот (при определении разницы можно пренебречь величинами, одинаково влияющими на оба объекта инвестирования, что упрощает расчет).

Абсолютную выгодность нельзя оценить с помощью инвестиций для определения разницы, а при большом числе альтернатив следует сформировать и оценить множество инвестиций такого рода.

***Пример 9.6.*** Для расширения производства на предприятии можно применить два инвестиционных проекта $A$ и $B$, имеющих данные, приведенные в табл. 9.6. Требуется оценить абсолютную и относительную выгодность инвестиционных проектов с помощью метода стоимости капитала.

Р е ш е н и е. Определим стоимость капитала инвестиционных объектов $A$ и $B$ согласно вышеприведенной формуле:

$$CK_A = -A_0 + \sum_{t=0}^{T}\left(e_t - a_t\right)q^{-t} = -100000 + 28000 \cdot 1{,}08^{-1} + 30000 \cdot 1{,}08^{-2} +$$
$$+ 35000 \cdot 1{,}08^{-3} + 32000 \cdot 1{,}08^{-4} + 5\,000 \cdot 1{,}08^{-5} = 26\,771{,}59 \text{ руб.}$$

*Таблица 9.6.* ***Основные сравнительные показатели двух инвестиционных объектов***

| | *Основные показатели денежных потоков* | *Объекты инвестиций* | |
|---|---|---|---|
| | | *A* | *B* |
| 1. | Выплаты на приобретение, тыс. руб. | 100,0 | 60,0 |
| 2. | Срок эксплуатации, лет | 5 | 4 |
| 3. | Выручка от ликвидации, тыс. руб. | 5,0 | 0 |
| 4. | Приток денежных средств, тыс. руб.: | | |
| | в период $t = 1$ | 28,0 | 22,0 |
| | $t = 2$ | 30,0 | 26,0 |
| | $t = 3$ | 35,0 | 28,0 |
| | $t = 4$ | 32,0 | 28,0 |
| | $t = 5$ | 30,0 | — |
| 5. | Расчетная процентная ставка, % | 8 | 8 |

Аналогичным образом

$$CK_B = -60000 + 22000 \cdot 1{,}08^{-1} + 26000 \cdot 1{,}08^{-2} +$$

$$+28000 \cdot 1{,}08^{-3} + 28000 \cdot 1{,}08^{-4} = 1\ 302{,}27 \text{ руб.}$$

Так как $CK_A > 0$ и $CK_B > 0$, то можно сделать вывод об *абсолютной выгодности* инвестиционных объектов *A* и *B*: полученная стоимость капитала в 26 771,59 руб. (1 302,57 руб.) — это прирост имущества в денежной форме, приносимый в результате инвестирования объекта *A* (объекта *B*) при $t = 0$ с учетом выплаты по расчетной процентной ставке в 8%, не зависящий от типа финансирования и осуществляемый за счет собственных или заемных средств. Однако объект *A* имеет более высокую стоимость капитала по сравнению с объектом *B* и поэтому он вроде бы относительно более выгоден.

Пусть финансирование производится полностью за счет заемных средств в сумме 126 771,59 руб., включающих кредит, взятый на приобретение, равный 100 тыс. руб., и потребительский кредит в размере 26 771,59 руб. В конце каждого отчетного периода должна производиться уплата процентов в размере расчетной процентной ставки в 8% с оставшейся суммы кредита на начало периода и превышение поступлений над выплатами идет немедленно на погашение задолженности (табл. 9.7).

*Таблица 9.7.* ***Показатели планов поступлений и выплат денежных задолженностей, руб.***

| *Срок выплаты денег* | *Нетто-платежи (без $A_0$)* | *Выплата денег* | *Поступления денег* | *Изменения в денежных средствах* | | *Денежное имущество* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *по процентам* | | *Погашение кредита* | *Формирование актива* | *Кредит* | *Активы* |
| $t$ | $N_t$ | $I_t = iV_{t-1}$ | | $\Delta V_t = N_t + I_t$ | | $V_t = V_{t-1} + \Delta V_t$ | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −126771,59 | 0 |
| 1 | 28000 | −10141,7 | 0 | 17858,27 | 28000,00 | −108913,32 | 28000,00 |
| 2 | 30000 | −8713,07 | 2240,0 | 2128,693 | 32240,00 | −87626,39 | 60240,00 |
| 3 | 35000 | −7010,11 | 4819,2 | 27989,89 | 39819,20 | −59636,50 | 100059,20 |
| 4 | 32000 | −4770,92 | 8004,7 | 27229,08 | 400014,74 | −32407,42 | 140063,94 |
| 5 | 35000 | −2592,59 | 11205 | 32407,41 | 46205,12 | −0,01 | 186269,06 |

Как следует из табл. 9.7, в конце срока эксплуатации инвестиционного объекта инвестор имеет в своем распоряжении оборотные средства, выступающие конечной стоимостью имущества (*КСИ*) на сумму 186 269,06 руб. (ее нельзя сравнивать с инвестированной суммой 100 тыс. руб., так как оба эти значения относятся к различным моментам времени). При дисконтировании конечной стоимости имущества на начало планового периода по 8%-ной ставке получаем:

$$КСИ = 186\ 269{,}06 \cdot 1{,}08^{-5} = 126\ 771{,}59 \text{ руб.}$$

Разница между этой суммой и показателем инвестированного капитала в размере 100 тыс. руб. соответствует стоимости капитала, равного 26 771,59 руб. При учете условия реинвестирования при финансировании с привлечением собственных средств инвестиционный объект приносит прирост имущества в денежной форме в размере 26 771,59 руб. в момент $t = 0$, т.е. конечная стоимость имущества составляет:

$$КСИ = 100\ 000 \cdot 1{,}08^{5} = 146\ 932{,}81 \text{ руб.}$$

Разница между значениями *КСИ* при реализации объекта *А* и при инвестировании по расчетной процентной ставке составляет 39 336,25 руб. Дисконтируя эту сумму на момент $t = 0$, получаем разницу в стоимости имущества, равную 26 771,59 руб., соответствующую стоимости капитала:

$$39\ 336{,}25 \cdot 1{,}08^{-5} = 26\ 771{,}59 \text{ руб.}$$

Это также свидетельствует о том, что в модели определения стоимости капитала при оценке абсолютной выгодности в неявной форме производится сопоставление с инвестированием по расчетной ставке процента. Это вложение капитала представляет собой альтернативу отказа от реальных инвестиций.

По относительной выгодности объектов *A* и *B* следует отметить: **а)** в объект *B* можно инвестировать меньше капитала (60 тыс. руб. вместо 100 тыс. руб. в объект *A*); **б)** его срок эксплуатации на один год меньше (4 года); **в)** есть возможность совмещенных инвестиций.

Интересно исследовать, как значения стоимости капитала, рассчитанные из платежных рядов отдельных инвестиционных объектов, подходят для *оценки относительной выгоды*, если есть различия в затратах капитала на начало эксплуатации (выплаты на приобретение) и в период срока эксплуатации, а также в сроках эксплуатации сравниваемых объектов.

Такие исследования между инвестиционными объектами могут не проводиться, если компенсация различий в этих условиях производится посредством вложения (привлечения) финансовых средств, и ее можно не учитывать, так как это не оказывает влияния на выгодность альтернатив, если проценты в будущем начисляются по расчетной ставке процента и стоимость капитала при этом равна нулю. В целом стоимость капитала представляет собой сумму фактических стоимостей выплат на приобретение, притока денежных средств и показателей выручки от ликвидации.

При наличии конкретных данных о будущих инвестиционных объектах метод определения стоимости капитала модифицируется в так называемые *инвестиционные цепи* (они могут состоять из одинаковых или различных объектов и относиться к разным периодам —конечные или бесконечные инвестиционные цепи).

При *оценке метода определения стоимости капитала* необходимо учитывать следующие факторы:

**а)** затраты на вычисления (но они малы из-за необходимости проведения относительно несложных арифметических действий);

**б)** затраты на сбор данных (заметим, что все методы принятия решений трудоемки, так как требуется подготовка ряда прогнозов по всем моделям инвестиционных расчетов, а в данной модели определения стоимости капитала нужно спрогнозировать выплаты на приобретение, компоненты притока денежных средств в будущем, расчетную процентную ставку, срок эксплуатации и выручку от ликвидации в конце этого срока);

**в)** принятые в модели допущения (наличие лишь одной целевой функции — стоимости капитала; заданный срок эксплуатации; надежность данных; принадлежность платежей к определенным моментам времени; существование совершенного рынка

капитала; начисление процентов на будущие инвестиции по расчетной процентной ставке и вложение высвобождающихся средств; существование значимых решений относительно других инвестиций в других сферах функционирования предприятия и связанная с этим принадлежность платежей к отдельным инвестиционным объектам). Относительно указанных допущений следует отметить следующее.

При принятии решений в инвестиционной сфере обычно приходится учитывать не одну, а несколько целевых функций, поэтому их можно учитывать вне процесса расчета стоимости капитала или применять модели принятия многоцелевых решений (об этих проблемах см. § 9.4).

Срок эксплуатации устанавливается при анализе выгодности до начала применения метода определения стоимости капитала, при этом можно определить оптимальный срок эксплуатации, если только он не задан заранее посредством правовых или технических условий.

Решения относительно других видов реализуемых объектов инвестирования в смежных с ними сферах (производстве, финансировании, сбыте, закупках и т.п.) оказывают влияние на выгодность инвестиционных объектов, учитываемых обычно в форме заданных величин, влияющих на характер динамики поступлений денежных средств и платежей. При отсутствии данных о принадлежности поступлений или одинаковых величинах этих показателей для оценки выгодности можно определять фактическую стоимость выплат или производить учет фактических издержек. При низкой надежности исходных данных можно использовать методы инвестиционных расчетов в условиях неопределенности [55].

Если сроки платежей составляют менее одного года, то проценты следует начислять чаще, но в этой ситуации возрастают затраты на прогнозирование и расчеты, хотя можно производить и непрерывное начисление процентов (постоянное, моментальное начисление).

Допущение о вложении высвобождающихся средств, а также компенсации разницы в затратах капитала и сроках эксплуатации вложений или будущих инвестиций с начислением на них процентов по единой процентной ставке рассматривалось в решенном выше примере определения стоимости капитала и *не соответствует* реальной действительности, в которой существует неопределенность относительно инвестиционных возможностей в будущем.

Проблематично также допущение о совершенном рынке капитала, на котором финансовые средства имеются в любом объеме и в любой момент могут быть привлечены или вложены по единой расчетной процентной ставке: в реальности процентные ставки при инвестировании и заимствовании существенно отличаются друг от друга, составляя основу банковской прибыли, и важно определить наиболее подходящий размер этой ставки, влияющей как на сравнимость альтернатив, так и на инвестиционные возможности в настоящем и будущем. При ее расчете можно использовать средневзвешенную величину издержек собственного и заемного капитала, средний показатель долгосрочной рентабельности, а также дифференцированные ставки по вложению и привлечению финансовых средств и получаемые величины реальных доходов и расходов.

2. *Метод аннуитетов* аналогичен методу определения стоимости капитала при использовании в качестве целевой функции *аннуитета*, под которым понимаются: **а)** последовательность платежей одинаковой величины, которые производятся в каждый период рассматриваемого интервала времени; **б)** сумма, которую инвестор может изымать в каждый период при осуществлении какого-либо проекта. Аннуитет инвестиционного объекта эквивалентен стоимости капитала того же объекта; они преобразуются друг в друга по правилам финансовой математики следующим образом:

$$Ann = КСИ \cdot K_{вос} = СК \cdot (1 + i)^T \cdot i / [(1 + i)^T - 1],$$

где $Ann$ —аннуитет, $СК$ —стоимость капитала, $i$ —расчетная процентная ставка, $K_{вос}$ — коэффициент восстановления, $КСИ$ — конечная стоимость имущества.

Для метода аннуитетов действуют следующие правила выгодности: инвестиционный объект *абсолютно (относительно) выгоден,* если его аннуитет *выше нуля* (выше, чем у любого другого предлагаемого на выбор объекта).

При вычислении аннуитета платежи, представленные в определенной последовательности, обычно относятся к концу периода, причем в качестве интервала времени всегда выбирается срок эксплуатации объекта. Рассмотрим это положение на следующем примере.

***Пример 9.7.*** Пусть в качестве исходных данных рассматриваются данные табл. 9.6 примера 9.6. Определить аннуитеты и выгодность инвестиционных объектов *А* и *В*.

Р е ш е н и е. Для альтернативных объектов $A$ и $B$ имеем следующие значения аннуитетов:

$$Ann_A = 26\ 771{,}59 \cdot 1{,}08^5 \cdot 0{,}08 / (1{,}08^5 - 1) = 6\ 705{,}12 \text{ руб.};$$

$$Ann_B = 25\ 469{,}32 \cdot 1{,}08^4 \cdot 0{,}08 / (1{,}08^4 - 1) = 7\ 689{,}72 \text{ руб.}$$

Так как оба объекта ($A$ и $B$) имеют положительный аннуитет, то они *абсолютно выгодны*. При оценке относительной выгодности нужно учитывать, что аннуитеты относятся к разным срокам эксплуатации объектов, охватывая различное число платежей. В нашем случае аннуитет объекта $B$ выше аннуитета объекта $A$, т.е. $Ann_B > Ann_A$, однако объект $B$ имеет более короткий срок эксплуатации (поэтому метод аннуитета здесь можно применять лишь в порядке исключения); если же объект с более длительным сроком эксплуатации имеет также более высокое значение аннуитета, то он, несомненно, является *относительно выгодным*.

Если исходить из возможности осуществления в будущем инвестиций, приносящих проценты по расчетной процентной ставке, то вместо метода аннуитетов следует применять метод определения стоимости капитала. Если же исходить из бесконечного числа идентичных повторений реализации объектов инвестирования, то следует эти методы применять совместно, вычисляя фактическую стоимость, или стоимость капитала постоянной ренты, определяемую как $CK = Ann/i$.

Подставив, например, рассчитанные выше значения аннуитетов в эту формулу, получим:

$$CK_A = 6\ 705{,}12 / 0{,}08 = 83\ 814 \text{ руб.};$$

$$CK_B = 7\ 689{,}72 / 0{,}08 = 96\ 121{,}50 \text{ руб.}$$

Таким образом, в данной ситуации инвестиционный объект $B$ является *относительно выгодным*.

В целом оценка метода аннуитетов совпадает с оценкой определения стоимости капитала, принятыми допущениями и правилами оценки выгодности инвестиционных объектов. Аннуитет — отнесенная к определенным периодам величина, представляющая собой особую форму «средней прибыли».

3. *Метод определения внутренней процентной ставки* аналогичен методу определения стоимости капитала ($CK$), отличие состоит в компенсации различий в затратах и сроках эксплуатации, а также в применении иной целевой функции — *внутренней процентной ставки* (*ВПС*) $r$, которая в качестве расчетной процентной ставки обеспечивает нулевое значение стоимости капитала:

$$CK = \sum_{t=1}^{T}(e_t - a_t)(1+r)^{-t} = 0.$$

В данном методе определения *ВПС* используются следующие правила выгодности: инвестиционный объект *абсолютно (относительно) выгоден,* если его *ВПС выше расчетной ставки процента* (выше, чем у любого другого предлагаемого на выбор объекта).

Соотношение между результатами определения *СК* и *ВПС* зависит от платежного ряда и вида инвестиций. Можно выделить, например, *изолированно* осуществляемые инвестиции, имеющие место в том случае, если превышение поступлений над выплатами на протяжении всего планового периода направляется исключительно на выплату процентов (по *ВПС*) и на амортизацию затраченного капитала. А это означает, что в плановый период капитал не реинвестируется (инвестирование происходит изолированно, а ВПС не зависит от процентной ставки, по которой могут быть вложены высвобождающиеся средства).

При изолированно осуществляемом инвестировании (инвестиции, платежный ряд которых имеет только однократное чередование знака) стоимость предназначенного для инвестиций имущества, рассчитанная на основе *ВПС*, в любой момент планового периода *меньше* или *равна нулю*. Это соответствует действительности, если: **а)** сумма всех нетто-платежей больше или равна нулю; **б)** сумма всех приходящихся на моменты времени $t = 0,1,...,T^*$ нетто-платежей всякий раз меньше или равна нулю ($T^*$ — момент времени, на который приходится последнее превышение выплат над поступлениями), т.е.

$$\text{а)} \sum_{t=1}^{T} N_t \geq 0; \quad \text{б)} \sum_{t=1}^{T} N_t \leq 0 \text{ для } t = 0,1,...,T^*.$$

Динамика стоимости капитала в зависимости от расчетной процентной ставки для двух изолированно осуществляемых инвестиций *A* и *B* (**рис. 9.2,а**) показывает, что результаты методов определения *СК* и *ВПС* в отношении абсолютной выгодности совпадают, т.е. стоимость капитала всегда положительна, если *ВПС* превышает расчетную процентную ставку ($i$).

При сравнении же относительной выгодности альтернатив инвестиций *A* и *B* могут получиться разные по сравнению с методом определения стоимости капитала оценки (на **рис. 9.2,а**

согласно методу определения стоимости капитала следовало бы выбрать объект *A*, так как $CK_A > CK_B$, а по методу определения *ВПС* — объект *B*, так как $r_B > r_A$). Какой же объект инвестирования относительно более выгоден?

В данной ситуации метод определения *ВПС* можно использовать для оценки не относительной выгодности предлагаемых на выбор объектов инвестирования, а для определения *разницы в инвестициях*. Так, из **рис. 9.2,а** следует, что *ВПС* инвестиций для определения разницы соответствует точке $r_D$, при которой $CK_A = CK_B$, и $r_D > i$, если стоимость капитала объекта *A* с более высокими затратами на приобретение будет также более высокой. При этом применяется следующее правило оценки выгодности: инвестиционный объект *A является относительно выгодным* по сравнению с объектом *B*, если *ВПС* инвестиции для определения разницы *выше* расчетной ставки процента (т.е. $r_D > i$). Если же *ВПС* $r_D \leq 0$, то объект *B* считают *относительно выгодным* при всех $i > 0$.

При *комплексных* (неизолированно осуществляемых) инвестициях могут быть как несколько положительных процентных ставок, так их может и не быть вообще. В этом случае используют методы приблизительного вычисления *ВПС*, например, *метод интер(экстра)поляции*. При этом сначала определяется стоимость капитала $CK_1$ для процентной ставки $i_1$. Если эта стоимость положительна (отрицательна), то выбирается более высокая (более низкая) ставка $i_2$, для которой также вычисляется $CK_2$. Процентные ставки с соответствующими им показателями стоимости капитала можно использовать для примерного расчета *ВПС*. Далее осуществляется интерполяция (если один из $CK_i > 0$, а другой $CK_j < 0$) или экстраполяция (если оба показателя *CK* имеют одинаковые знаки). Формула интер(экстра)поляции базируется на теореме об отрезках, по которой рассчитывается *ВПС* (**рис. 9.2,б**). Она имеет следующий вид:

$$(r^* - i_1)/(i_2 - i_1) = CK_1 / (CK_1 - CK_2),$$

откуда получаем:

$$r^* = r \approx i_1 + KC_1(i_2 - i_1)/(KC_1 - KC_2).$$

Точность полученного приблизительного решения зависит от интервала между значениями процентных ставок $i_2$ и $i_1$, а также от отклонений значений $KC_1$ и $KC_2$ от нуля. Для получения более точного решения могут потребоваться несколько *ВПС*.

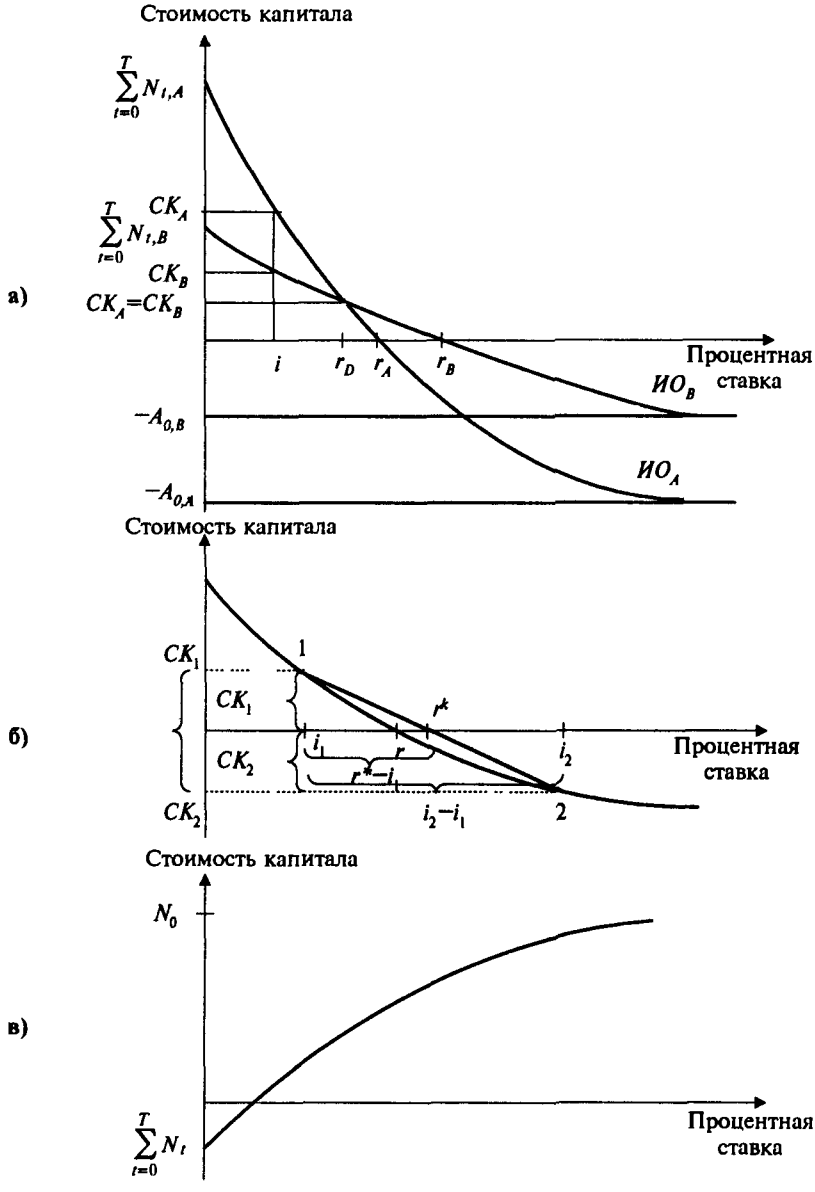



*Рис.9.2.* ***Динамика стоимости капитала в зависимости от расчетной процентной ставки при изолированно осуществляемых инвестициях*** **(а, в)** ***и интерполяция для определения внутренней процентной ставки*** **(б)**

Возможности метода определения ВПС связаны как с оценкой выгодности инвестиционных объектов, так и с расчетом фактического процента по операциям в сфере финансирования. *ВПС* платежного ряда *i*-го объекта финансирования представляет собой ставку фактического начисления процентов на него. Рассмотрим это на примере.

***Пример 9.8.*** Пусть в качестве исходных данных используются данные табл. 9.6 примера 9.6. Определить *ВПС* методом интерполяции и выгодность инвестиционных объектов *A* и *B*.

Р е ш е н и е. Как было рассчитано ранее в примере 9.6, стоимость капитала объекта *A* при процентной ставке $i_1 = 8\%$ составляет $CK_{A1} = 26\ 771{,}59$ руб. Пусть в качестве второй процентной ставки возьмем $i_2 = 18\%$. Тогда получим, что $CK_{A2} = -1\ 619{,}51$ руб.:

$$CK_{A2} = -A_0 + \sum_{t=0}^{T}(e_t - a_t)q^{-t} =$$

$$= -100\ 000 + 28000 \cdot 1{,}18^{-1} + 30000 \cdot 1{,}18^{-2} + 35000 \cdot 1{,}18^{-3} + 32000 \times$$
$$\times 1{,}18^{-4} + 5000 \cdot 1{,}18^{-5} = -1\ 619{,}51 \text{ руб.}$$

Так как разница между *ВПС* $i_1$ и $i_2$ слишком велика, то для более точного решения возьмем $i_1 = 17\%$, при которой имеем, что в этом случае $CK_{A1} = 740{,}69$ руб. Подставив эти значения в формулу интерполяции для *r*, получим:

$$r_A \approx 0{,}17 + 740{,}69 \,/\, (740{,}69 - (-1619{,}51)) \cdot (0{,}18 - 0{,}17) = 0{,}1731,$$
$$\text{или } 17{,}31\%.$$

Таким образом, $r_A = 17{,}31\% > i = 8\%$, то данная альтернатива абсолютно выгодна.

Для инвестиционного объекта *B* можно также рассчитать примерное значение *ВПС*. Если при интерполяции ставок взять 25% и 26%, то получим $r_B = 25{,}04\%$. Таким образом, инвестиционный объект *B* как абсолютно, так и относительно выгоден.

***Пример 9.9.*** Предприятие берет кредит в размере 400 тыс. руб. сроком на четыре года, платежи по процентам производятся ежегодно по ставке 9%, а погашение задолженности — в конце срока действия кредита. Оплата осуществляется с 6%-ным дисконтом в начале рассматриваемого интервала времени. Необходимо рассчитать размер *ВПС* и определить размер фактического процента для объекта финансирования.

Р е ш е н и е. Согласно условиям задачи платежный ряд объекта финансирования имеет вид:

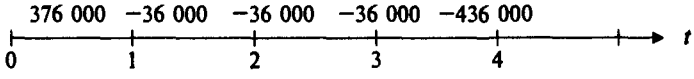



*Рис. 9.3. Платежный ряд объекта финансирования*

При 10%-ной ставке $i_1$ стоимость капитала $CK_1 = -11\ 320{,}54$ руб. Так как стоимость капитала при 10%-ной ставке отрицательна

(**рис. 9.2,в**), то можно предположить, что размер *ВПС* будет выше 10%. При $i_2$ = 11% стоимость капитала составит: $CK_2$ = 819,57 руб. Используя для интерполяции следующие формулы, получим:

$$r \approx i_1 + KC_1(i_2 - i_1)/(KC_1 - KC_2) = 0{,}10 + (-11\,320{,}54 \cdot (0{,}11-0{,}10)/ /(-11\,320{,}54 - 819{,}57) = 0{,}1093, \text{ или } r = 10{,}93\%.$$

При оценке метода определения *ВПС,* как и при методе определения капитала, требуются одни и те же данные и допущения, за исключением условия рефинансирования и различий в затратах капитала и сроке эксплуатации. Его не следует применять для оценки абсолютной выгодности, если имеют место комплексные инвестиции, и относительной выгодности на основе сравнения *ВПС* отдельных объектов. Вместо этого следует проанализировать инвестиции для определения разницы: если это изолированно осуществляемые инвестиции, то на основе сравнения ВПС с расчетной можно оценивать сравнение выгодности; если это комплексные инвестиции, то метод определения внутренней процентной ставки применять не следует для оценки выгодности. В целом *ВПС* можно рассматривать как *критическую процентную ставку* для определения абсолютной выгодности инвестиционных альтернатив в сочетании с методом определения капитала при условии ненадежных данных.

**4.** *Метод динамических амортизационных расчетов* в рамках модели определения стоимости капитала позволяет определить *срок амортизации* — период времени, за который инвестируемый капитал восстанавливается благодаря превышению поступлений от эксплуатации объекта над выплатами.

Правило определения выгодности инвестиционных объектов гласит: инвестиционный объект *абсолютно (относительно) выгоден*, если срок его амортизации *ниже* заранее заданной предельной величины (ниже подобного показателя любого другого представленного на выбор объекта).

Определение динамического срока амортизации проводится путем поэтапного вычисления кумулированной (суммарной) фактической стоимости нетто-платежей для каждого периода срока эксплуатации, начиная с первого периода, причем пока значение этого показателя отрицательно, срок амортизации еще не достигнут; если же он становится равным нулю (больше нуля), то срок амортизации достигнут (превышен). Путем интерполяции можно примерно определить время, требуемое для амортизации, а также срок амортизации.

*Пример 9.10.* Исходные данные соответствуют табл.. 9.6 примера 9.6. Провести поэтапный расчет динамического амортизационного срока эксплуатации для инвестиционных объектов *A* и *B*.

Р е ш е н и е. Сведем в табл. 9.8 заданные нетто-платежи для инвестиционного объекта *A* по пяти моментам времени, а также вычисленные по соответствующим формулам их фактическую стоимость и кумулированную фактическую стоимость нетто-платежей. Из выполненных расчетов видно, что срок амортизации для объекта *A* превышен в течение четырех периодов (кумулятивная фактическая стоимость объекта *A* впервые становится больше нуля).

Относительное точное значение срока амортизации (*CA*) объекта *A* можно определить с помощью следующей формулы интерполяции:

$$CA_A \approx t^* + CK_{t^*} / (CK_{t^*} - CK_{t^*+1}),$$

где $t^*$ —период, в который последний раз кумулированная фактическая стоимость меньше нуля.

Таким образом, для инвестиционного объекта *A* динамический срок эксплуатации составляет:

$$CA_A \approx 3 + (-20\,569{,}77) / (-20\,569{,}77 - 2\,951{,}19) = 3{,}87 \text{ года.}$$

Проведенный расчет для объекта *B* показал, что его динамический срок амортизации составляет около 2,78 года. Отсюда следует, что объект *B* относительно выгоден по сравнению с объектом *A*. Если заданная предельная величина составляет, к примеру, четыре года, то оба объекта можно характеризовать как абсолютно выгодные.

*Таблица 9.8.* ***Расчет динамического срока амортизации инвестиционного объекта A***

| *Момент времени t* | *Нетто-платежи* $N_t$, *руб.* | *Фактическая стоимость объектов (ФС)* $N_t q^{-t}$ *руб.* | *Кумулятивная ФС* $\sum_{i=1}^{n} N_i \cdot q^{-i}$, *руб.* |
|---|---|---|---|
| 0 | −100000 | −100000 | −100000 |
| 1 | 28000 | 25925,93 | −74074,07 |
| 2 | 30000 | 25720,17 | −48353,90 |
| 3 | 35000 | 27784,13 | −20569,77 |
| 4 | 32000 | 23520,96 | 2951,19 |

В целом динамические амортизационные расчеты следует проводить лишь в качестве дополнительного метода включения фактора неопределенности, касающегося определения срока эксплуатации.

## 9.4. Более сложные динамические методы принятия решений о выгодности инвестиций при одной целевой функции

**Метод определения конечной стоимости имущества**. Конечная стоимость имущества (*КСИ*) — это прирост имущества в денежной форме, вызванный реализацией инвестиционного объекта в завершающий момент планового периода, при этом предполагается наличие двух процентных ставок — *привлечения s и вложения h* в неограниченном размере финансовых средств. Правила выгодности сравниваемых при этом объектов гласят: инвестиционный объект *абсолютно (относительно) выгоден,* если его *КСИ выше нуля* (выше подобного показателя для любого другого представленного на выбор объекта).

Так как при использовании этого метода предполагается существование двух процентных ставок, то можно определить, какая часть положительных нетто-платежей используется для погашения задолженности по обязательствам и какая часть имеющихся денежных активов идет на финансирование отрицательных нетто-платежей. В общем случае для каждого момента времени необходимо регламентировать величину соответствующих долей при двух возможных ситуациях, связанных как с запретом, так и с разрешением сальдирования.

При допущении *запрета сальдирования* считается, что не происходит ни погашения задолженности из положительных нетто-платежей, ни финансирования из имеющихся денежных активов отрицательных нетто-платежей до конца планового периода. При этом рекомендуется открывать два счета — для положительных $N_t^+$ нетто-платежей (*счет имущества КСИ*$^+$) и отрицательных $N_t^-$ нетто-платежей (*счет обязательств КСИ*$^-$), тогда на счете имущества до конца планового периода по положительным нетто-платежам начисляются проценты по ставке $h$ вложения финансовых средств, а на счете обязательств по отрицательным нетто-платежам — проценты по ставке $s$ привлечения финансовых средств. Расчет показателей счетов имущества и обязательств в конце планового периода ведут по следующим формулам:

$$КСИ_T^+ = \sum_{t=0}^{T} N_t^+ \cdot (1+h)^{T-t}; \qquad КСИ_T^- = \sum_{t=0}^{T} N_t^- \cdot (1+s)^{T-t},$$

где $КСИ_T^+$ ($КСИ_T^-$) — сумма положительных $N_t^+$ (отрицательных $N_t^-$) нетто-платежей, ревальвированных на конец планового периода по ставке $h$ ($s$).

Окончательное сальдо имущества и обязательств производится лишь в конце планового периода, при этом $КСИ_T = КСИ_T^+ + КСИ_T^-$.

При *разрешении немедленного сальдирования* положительные нетто-платежи полностью идут на погашение существующей задолженности, а имеющееся имущество можно полностью использовать для финансирования отрицательных нетто-платежей При этом достаточно иметь только счет имущества с учетом на нем как положительных, так и отрицательных нетто-платежей, тогда $КСИ_T$ может иметь любые (положительные и отрицательные) значения. Начисление процентов в периоде $t$ в конце этого периода по ставке привлечения $s$ финансовых средств, если значение $КСИ_T$ — отрицательно, и по ставке вложения $h$, если значение $КСИ_T^+$ положительно.

Итак, конечная стоимость имущества к моменту времени $t$ определяется по формулам:

$$КСИ_t = N_t^+ + КСИ_{t-1} \cdot (1 + h), \text{ если } КСИ_{t-1} \geq 0;$$

$$КСИ_t = N_t^+ + КСИ_{t-1} \cdot (1 + s), \text{ если } КСИ_{t-1} < 0.$$

К концу планового периода конечную стоимость имущества определяют так:

$$КСИ_t = N_t + КСИ_{t-1} \cdot (1 + h), \text{ если } КСИ_{t-1} \geq 0;$$

$$КСИ_t = N_t + КСИ_{t-1} \cdot (1 + s), \text{ если } КСИ_{t-1} \leq 0.$$

***Пример 9.11.*** Пусть исходные данные по нетто-платежам аналогичны примеру 9.10, ставка привлечения финансовых средств $s$ = 10%, а ставка вложения —$h$ = 6%. Определить конечную стоимость имущества как с запретом, так и с разрешением немедленного сальдирования.

Р е ш е н и е. Так как расчет по методу КСИ можно вести как с запретом, так и с разрешением сальдирования, то покажем их применение последовательно друг за другом.

Сначала рассмотрим метод определения *КСИ* с учетом *запрета сальдирования*. Проведем подробный расчет *КСИ* для инвестиционного объекта *А*, при этом имеем следующее:

$$КСИ^{+}_{5A} = \sum_{t=0}^{T} N^{+}_{t}(1+h)^{T-t} = 28\,000 \cdot 1.06^4 + 30\,000 \cdot 1{,}06^3 +$$

$$+ 35\,000 \cdot 1{,}06^2 + 32\,000 \cdot 1{,}06 + 30\,000 \cdot 0{,}06 = 179\,325{,}83 \text{ руб.};$$

$$КСИ^{-}_{5A} = \sum_{t=0}^{T} N^{-}_{t}(1+s)^{T-t} = 100\,000{,}00 \cdot 1{,}10^5 = -161\,051 \text{ руб.}$$

$$КСИ_A = КСИ^{+}_{5A} + КСИ^{-}_{5A} = 179\,325{,}83 - 161\,051 = 18\,274{,}83 \text{ руб.}$$

Аналогичным образом можно вычислить *КСИ* для инвестиционного объекта *В*. Опуская промежуточные расчеты, приведем окончательный результат: $КСИ_B = 25\,249{,}95$ руб.

По окончательным значениям *КСИ* инвестиционных объектов *А* и *В* можно сказать, что оба объекта являются *абсолютно выгодными*.

Относительную выгодность этих объектов можно определить, если объекты *А* и *В* привести к одинаковым моментам времени. Для этого в объекте *В* нужно отменить запрет на сальдирование и ревальвировать конечную стоимость его имущества на момент времени 5, в этом случае получим:

$$КСИ_B = 25\,249{,}95 \cdot 1{,}06 = 26\,764{,}95 \text{ руб.}$$

Так как имеем, что у объекта *В* при запрете сальдирования получается более высокая конечная стоимость имущества ($КСИ_B > КСИ_A$ или 26 764,95 руб. > 18 274,83 руб.), то объект *В* является относительно выгодным.

При использовании способа *немедленного сальдирования* открывается, как указывалось ранее, только счет имущества *КСИ*, на котором учитываются положительные и отрицательные нетто-платежи $N_t$ (в качестве примера в табл. 9.9 приведены результаты расчета *КСИ* для объекта *А*).

В результате расчета получено, что *КСИ* объекта *А* при использовании метода сальдирования составляет: $КСИ_A = 32\,423{,}80$ руб.

Если аналогичным образом оценить *КСИ* для объекта *В*, то она составит величину, равную $КСИ_B = 31\,561{,}60$ руб., а с учетом ревальвации (на момент времени $t = 5$) —величину 33 455,30 руб.

Таким образом, получаем, что и при использовании метода немедленного сальдирования объект *В* является относительно выгодным.

*Таблица 9.9.* ***Результаты расчетов КСИ для инвестиционного объекта А***

| *Момент времени t* | *Нетто-платежи $N_t$, руб.* | *Проценты, руб* $I=h \cdot КСИ_{t-1}$ $I=s \cdot КСИ_{t-1}$ | *Изменения к денежному имуществу, руб.* $\Delta КСИ_t = I_t + N_t$ | *Денежное имущество, руб* $КСИ_t = КСИ_{t-1} + \Delta КСИ_t$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | −100 000 | 0,00 | −100 000,00 | −100 000,00 |
| 1 | 28 000 | −10 000,00 | 18 000,00 | −82 000,00 |
| 2 | 30 000 | −8 200,00 | 21 800,00 | −60 200,00 |
| 3 | 35 000 | −6 020,00 | 28 980,00 | −31 220,00 |
| 4 | 32 000 | −3 122,00 | 28 878,00 | −2 342,00 |
| 5 | 35 000 | −234,20 | 34 765,80 | 32 423,80 |

В заключение отметим, что на практике необходимо учитывать возможности компенсации различий в затратах капитала и сроках эксплуатации, уровни процентных ставок на привлечение и вложение финансовых средств, допущения способов сальдирования и начисления процентов на инвестиции в будущем. Данный метод определения КСИ более соответствует реальной действительности по сравнению с методом определения стоимости капитала. Но при этом необходимо решить проблему допущения относительно сальдирования: при малых различиях между ставками вложения и привлечения финансовых средств можно получить примерно одинаковые результаты *КСИ*, чего нельзя сказать о значениях результатов при значительных различиях между величинами процентных ставок и о стремлении субъектов рынка применять метод немедленного сальдирования с целью получения более высоких результатов *КСИ*.

**Метод определения процентной ставки привлечения финансовых средств**. В качестве целевой функции метод использует *критическую процентную ставку привлечения финансовых средств* (сокращенно *КПСПФС*), представляющую собой такую ставку, при применении которой конечная стоимость имущества (*КСИ*) равна нулю.

Практический расчет *КПСПФС* (аналогично расчету внутренней процентной ставки) можно вести по формуле:

$$КПСПФС = СПФС_1 + КСИ_1 \cdot (СПФС_2 - СПФС_1) / (КСИ_1 - КСИ_2),$$

где $СПФС_i$ — ставка привлечения финансовых средств; $КСИ_i$ — соответствующая ей конечная стоимость имущества ($i = 1,2$).

Точность приблизительного решения зависит от отклонений ставок СПФС и КСИ друг от друга и от нуля. При изолированно осуществляемых инвестициях и способе немедленного сальдирования *КПСПФС* совпадает с внутренней процентной ставкой, рассчитываемой с помощью метода интерполяции. В случае применения метода запрета сальдирования и наличия только отрицательных нетто-платежей *КПСПФС* можно легко рассчитать и без интерполяции. Рассмотрим подробнее суть данного метода на решении следующего примера.

***Пример 9.12.*** Исходные данные для этого примера приведены в примере 9.11. Необходимо определить значения *КПСПФС* для инвестиционных объектов *A* и *B* методами как запрета, так и разрешения сальдирования.

Решение. Рассчитаем сначала значение *КПСПФС* ***методом запрета сальдирования*** для инвестиционного объекта *A*. В этом случае, как следует из примера 9.11, имеем следующее соотношение:

$$КСИ^{+}_{5A} = \sum_{t=0}^{T} N^{+}_{t}(1+h)^{T-t} = 28\,000 \cdot 1{,}06^4 + 30\,000 \cdot 1{,}06^3 +$$

$$+35\,000 \cdot 1{,}06^2 + 32\,000 \cdot 1{,}06 + 30\,000 \cdot 0{,}06 = 179\,325{,}83 \text{ руб.}$$

Известно соотношение, что $КСИ^{+}_{5A} = -КСИ^{-}_{5A} \cdot КПСПФС_A$. Подставляя данные примера, получаем: $КСИ^{-}_{5A} = N^{-}_{t}(1+s)^{T}$, т.е. $-100\,000{,}00\ [1 + (КПСПФС_A)^5] = -179\,325{,}83$ руб. Отсюда вычисляем, что $КПСПФС_A = 0{,}1239$, или 12,39%.

Вычисляя аналогичным образом данные *КСИ* и *КПСПФС* для инвестиционного проекта *B*, получаем, что $КПСПФС_B = 17{,}17\%$.

Так как $СПФС = 10\% < КПСПФС_A = 12{,}39\% < КПСПФС_B = 17{,}7\%$, то оба инвестиционных объекта *A* и *B* являются абсолютно выгодными.

При ***немедленном сальдировании*** в примере 9.11 конечная стоимость имущества при инвестиционном объекте *A* составляет: $КСИ_A = 32\,423{,}80$ руб.

Как было показано выше (пример 9.8), подходящее примерное решение *КПСПФС* может быть получено на основе формулы интерполяции при ставках $СПФС_1 = 17\%$ и $СПФС_2 = 18\%$ и соответствующих им показателях $КСИ_{A1} = 1\,623{,}93$ руб. и $КСИ_{A2} = -3\,705{,}04$ руб., рассчитываемое по следующей формуле:

$$КПСПФС_A = СПФС_1 + КСИ_{A1} \cdot (СПФС_2 - СПФС_1) / (КСИ_{A1} - КСИ_{A2}) =$$

$$= 0{,}17 + 1\,623{,}93 \cdot (0{,}18 - 0{,}17) / (1\,623{,}93 - (-3\,705{,}04)) =$$

$$= 0{,}17 + 0{,}003 = 0{,}173, \text{ или } 17{,}3\%.$$

Аналогичным образом можно вычислить *КПСПФС* для инвестиционного объекта *В*, которая при ставках привлечения финансовых средств $СПФС_1$= 25% и $СПФС_2$ = 26% и соответствующих им значениях *КСИ* составит 25,04%.

Из расчетов получается, что оба инвестиционных объекта *А* и *В* абсолютно выгодны, так как *СПФС* = 10% < $КПСПФС_A$ = 17,3% < <$КПСПФС_B$ = 25,04%. Причем их значения *КПСПФС* совпадают с соответствующими значениями внутренней процентной ставки (*ВПС*), что подтверждено выше расчетами, проведенными при решении примера 9.8.

В целом оценка метода определения ставки и привлечения финансовых средств вытекает из методов определения *ВПС* и *КСИ*, причем затраты на обеспечение данными примерно совпадают, а затраты на проведение расчетов незначительно превышают аналогичные затраты в модели *КСИ*.

**Метод составления полных финансовых планов**. Для данного метода (ПФП-метода) присуще составление полного финансового плана в форме табл. 9.10, в которой отражаются платежи, относящиеся к одному финансовому объекту (вложению) и включающие как платежные ряды этого инвестиционного объекта, так и платежи, относящиеся к выплатам финансового характера по данному объекту (так называемые *дериватинные* платежи). Благодаря этому могут быть созданы условия транспарентности для привлечения и вложения финансовых средств, компенсации различий в затратах капитала и сроках эксплуатации, а также выполнен учет следующих допущений: **а)** отражение долей финансирования за счет собственных и привлеченных средств; **б)** в какой степени в определенные моменты времени долги погашаются из превышения поступлений над выплатами, и превышение выплат над поступлениями финансируется за счет имеющихся денежных средств (сальдирование); **в)** отличие ставок вложения собственного капитала от ставок реинвестирования будущих финансовых поступлений; **г)** наличие многообразных условий, проявляющихся в различных объектах финансирования за счет привлечения финансовых средств с разнообразными процентными ставками, способами погашения задолженности и сроками финансирования.

*Таблица 9.10.* ***ПФП-таблица для инвестиционного объекта при многообразии условий***

| *Финансовые показатели* | *Моменты времени эксплуатации объекта* | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *t*=0 | *t*=1 | ... | *t*=*n* |
| *Платежный ряд* | | | | |
| *Собственный капитал* | | | | |
| – изъятия | | | | |
| + вложения | | | | |
| *Кредит с погашением в рассрочку* | | | | |
| + привлечение кредита | | | | |
| – погашение | | | | |
| – % по кредиту | | | | |
| *Кредит с погашением в конце срока* | | | | |
| + привлечение кредита | | | | |
| – погашение | | | | |
| – % по кредиту | | | | |
| *Кредит с погашением путем ежегодных равных платежей* | | | | |
| + привлечение кредита | | | | |
| – погашение | | | | |
| – % по кредиту | | | | |
| *Контокоррентный кредит* | | | | |
| + привлечение кредита | | | | |
| – погашение | | | | |
| – % по кредиту | | | | |
| *Финансовые вложения в целом* | | | | |
| – денежные вложения | | | | |
| + ликвидация | | | | |
| + проценты по вкладам | | | | |
| **Сальдо финансирования** | | | | |
| *Параметры состояния кредита* | | | | |
| погашение в рассрочку | | | | |
| погашение в конце срока | | | | |
| погашение путем ежегодных равных платежей | | | | |
| контокоррентный кредит | | | | |
| * Состояние активов в целом | | | | |
| **Сальдо** | | | | |

В качестве *целевой функции* в ПФП-методе могут выступать: конечная стоимость (имущество), первоначальная или промежу-

точная стоимость, изъятие финансовых средств (для личных целей) или специфические показатели рентабельности. Чаще всего в качестве целевой функции в ПФП-методе из-за высокой степени наглядности используют *конечную стоимость* (величину денежных активов или состояние кредита в конце периода эксплуатации или вложения финансовых средств) или *стоимость имущества* (прирост денежных средств, относящийся к данному моменту времени и получаемый из полного финансового плана).

Для ПФП-метода применимы следующие правила оценки выгодности: *инвестиционный объект абсолютно (относительно) выгоден, если его конечная стоимость превышает конечную стоимость собственного капитала, относящегося к инвестиционному объекту на начало планового периода (конечную стоимость любого другого представленного на выбор объекта).*

*Расчет конечной стоимости* конкретного инвестиционного объекта *A* производят следующим образом:

1) для начального момента времени $t = 0$ в расчет включаются выплаты на приобретение для объекта *A* и относящийся к этому моменту времени собственный капитал, а также суммы кредита, которые необходимо привлечь, превышение поступлений, которое следует вложить, при учете состояния кредита и финансовых вложений;

2) для всех последующих ($t = 1, 2,...,n$) моментов времени регистрируются нетто-платежи инвестиционного объекта, ведется расчет начисления процентов, финансовой диспозиции по привлечению или погашению кредита, учет состояния кредита и денежных средств.

Рассмотрим реализацию и применение СПФП-метода на примере.

***Пример 9.13.*** Исходные данные по инвестиционным объектам *A* и *B* приведены в табл. 9.11, причем в начальный момент времени ($t$=0) есть 20 тыс. руб. собственного капитала, что принесло бы начисление 7% годовых. Процентная ставка для краткосрочных вложений высвобождаемых финансовых средств должна составлять в каждом периоде 6%. Для финансирования инвестиционных объектов *A* и *B* привлекаются сроком на четыре года кредит с погашением в конце срока и кредит с уплатой в рассрочку в размере 25% от затрат на приобретение. Начисление процентов по кредитам составляет 9%. Недостающие финансовые средства покрываются привлечением контокоррентного кредита по ставке 11%. При всех видах кредита проценты должны уплачиваться в конце периода, а их начисление должно производиться на капитал, затрачиваемый в начале периода. Составить ПФП-таблицы для обоих

инвестиционных объектов *А* и *В* и осуществить сравнение их выгодности.

*Таблица 9.11.* ***Основные сравнительные показатели двух инвестиционных проектов***

| | *Основные показатели денежных потоков* | *Объект инвестиций* | |
|---|---|---|---|
| | | *А* | *В* |
| 1. | Выплаты на приобретение, тыс. руб. | 100,0 | 60,0 |
| 2. | Срок эксплуатации, лет | 5 | 4 |
| 3. | Приток денежных средств, тыс. руб.: | | |
| | в период $t = 1$ | 28,0 | 22,0 |
| | $t = 2$ | 30,0 | 26,0 |
| | $t = 3$ | 35,0 | 28,0 |
| | $t = 4$ | 32,0 | 28,0 |
| | $t = 5$ | 30,0 | — |

Р е ш е н и е. Составим полный финансовый план (табл. 9.12, 9.13) для инвестиционных объектов *А* и *В* при указанных исходных данных и условии, что высвобождаемые финансовые средства немедленно идут на погашение контокоррентного кредита.

*Таблица 9.12.* ***ПФП-таблица для инвестиционного объекта А при многообразии условий***

| *Финансовые показатели, тыс руб.* | *Момент времени эксплуатации объектов* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $t$=0 | $t$=1 | $t$=2 | $t$=3 | $t$=4 | $t$=5 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| *Платежный ряд* | −100,0 | 28,0 | 30,0 | 35,0 | 32,0 | 35,0 |
| *Собственный капитал* | | | | | | |
| −изъятия | | | | | | |
| +вложения | 20,0 | | | | | |
| *Кредит с погашением в рассрочку* | | | | | | |
| + привлечение кредита | 25,0 | | | | | |
| − погашение | | −6,25 | −6,25 | −6,25 | −6,25 | 0 |
| − % по кредиту | | −2,25 | −1,687 | −1,125 | −562,5 | 0 |
| *Кредит с погашением в конце срока* | | | | | | |
| + привлечение кредита | 25,0 | | | | | |
| − погашение, руб. | | | | | −25,0 | |
| − % по кредиту, руб. | | −2,25 | −2,25 | −2,25 | −2,25 | 0 |
| *Контокоррентный кредит* | | | | | | |
| + привлечение кредита | 30,0 | | | | | |
| −погашение | | −13950 | −16050 | 0 | 0 | 0 |
| − % по кредиту | | −3300 | −1765,5 | 0 | 0 | 0 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Финансовые вложения в целом* | | | | | | |
| – денежные вложения, руб. | | | –1997 | –25494,82 | 412,99 | – 36624,73 |
| + ликвидация, руб. | | | | | | |
| + проценты по вкладам, руб. | | | | 119,82 | 1694,51 | 1624,73 |
| **Сальдо финансирования** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *Параметры состояния кредита* | | | | | | |
| погашение в рассрочку | 25,0 | 18,75 | 12,5 | 6,25 | 0 | 0 |
| погашение в конце срока | 25,0 | 25,0 | 25,0 | 25,0 | 0 | 0 |
| контокоррентный кредит | 30,0 | 16,05 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *Состояние активов в целом, руб.* | | | 1997,0 | 27491,82 | 27078,83 | 63703,56 |
| **Сальдо**, руб. | –80000 | –59800 | –35503 | –3758,18 | 27078,83 | 63703,56 |

*Таблица 9.13.* ***ПФП-таблица для инвестиционного объекта В при многообразии условий***

| *Финансовые показатели, тыс. руб.* | *Момент времени эксплуатации объектов* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *t*=0 | *t*=1 | *t*=2 | *t*=3 | *t*=4 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| *Платежный ряд* | –60,0 | 22,0 | 26,0 | 28,0 | 28,0 |
| *Собственный капитал* | | | | | |
| –изъятие | | | | | |
| +вложения | 20,0 | | | | |
| Кредит с погашением в рассрочку | | | | | |
| + привлечение кредита | 15,0 | | | | |
| – погашение | | –3,750 | –3,750 | –3,750 | –3,750 |
| – % по кредиту, руб. | | –1350,0 | –1012,5 | –675,0 | –337,5 |
| Кредит с погашением в конце срока | | | | | |
| + привлечение кредита | 15,0 | | | | –15,0 |
| – погашение | | –1,350 | –1,350 | –1,350 | –1,350 |
| – % по кредиту | | | | | |
| Контокоррентный кредит | | | | | |
| + привлечение кредита | 10,0 | | | | |
| – погашение | | –10,0 | | | |
| – % по кредиту | | –1,1 | | | |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| *Финансовые вложения в целом, руб.* | | | | | |
| – денежные вложения, руб. | | –4450 | –20154,5 | –23701,27 | –10460,85 |
| + ликвидация, руб. | | | | | |
| + проценты по вкладам, руб. | | | 267 | 1476,27 | 2898,35 |
| **Сальдо финансирования** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **Параметры состояния кредита** | | | | | |
| погашение в рассрочку | 15,0 | 11,25 | 7,5 | 3,75 | 0 |
| погашение в конце срока | 15,0 | 15,0 | 15,0 | 15,0 | 0 |
| контокоррентный кредит | 10,0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *Состояние активов в целом, руб.* | | 4450,00 | 24604,50 | 48305,77 | 58766,62 |
| **Сальдо**, руб. | –40000,00 | –21800,00 | –2104,50 | 29555,77 | 58766,62 |

Из расчета ПФП получено, что конечная стоимость инвестиционного объекта *A* (*B*) составляет 63703,56 (58766,62) руб. Так как она превосходит стоимость *оппортунитета* (вложения собственного капитала, относящиеся на начало планового периода) в размере 28051,03 (26212,92) руб., то инвестиционный объект *A* (*B*) является абсолютно выгодным.

Какой инвестиционный объект относительно выгоднее при этом, определить нельзя из-за различий в затратах на приобретение и сроков эксплуатации. Для компенсации разницы в сроке эксплуатации следует провести ревальвацию капитала, имеющегося в распоряжении по окончании эксплуатации инвестиционных объектов с более коротким сроком эксплуатации, по индивидуально устанавливаемой процентной ставке. Если ревальвировать конечную стоимость объекта *B* на один период для сопоставления с объектом *A*, то при процентной ставке 7% конечная стоимость для момента времени $t=5$ составит:

$$КСИ_B = 58766,62 \cdot 1,07 = 62880,28 \text{ руб.}$$

Так как $КСИ_A = 63703,56 > КСИ_B = 62880,28$ руб., то объект *A* относительно более выгоден по сравнению с объектом *B*.

В целом ПФП-метод более эффективен в применении по сравнению с другими динамическими методами: здесь используются несложные арифметические расчеты из набора данных,

содержащего платежные ряды, показатели собственного и привлеченного капитала, включая виды погашения кредитов и процентные ставки, начисление процентов на оппортунитет и проценты по срочным вкладам. Этот метод позволяет определить оптимальные сроки эксплуатации и замены с включением фактора неопределенности в модели инвестиционных расчетов, а также интегрировать как различия между процентной ставкой по привлечению и вложению финансовых средств (например, в модели конечной стоимости имущества), так и самофинансирование, учесть многообразие условий при привлечении кредитов, дифференцированность процентных ставок при вложении собственных средств (для оппортунитета и краткосрочных денежных вложений). При этом меры по финансированию могут относиться к определенным инвестиционным объектам, приближаясь к реальной картине денежных вложений и кредитования объектов.

**Учет налогов в модели стоимости капитала**. В любой оптимизационной динамической модели инвестирования важно учитывать налоговый компонент, существенно влияющий на выбор решений при оценке альтернатив инвестиционных вложений и приоритета покупки или лизинга приобретения материальных средств. При этом в модель стоит включать лишь налоги, размер которых непосредственно зависит от прибыли (разности между доходами и расходами), причем ее размер должен быть достаточным для немедленного покрытия убытков в периодах их возникновения вследствие реализации рассматриваемого инвестиционного проекта.

Расчет *стоимости капитала с учетом налогов* предусматривает два дополнительных шага, не учитываемых в ранее рассмотренных моделях: **а)** первоначальный платежный ряд следует модифицировать на платежи, связанные с налогообложением; **б)** расчетная процентная ставка должна быть изменена.

Покажем сначала, как реализуется процедура изменения первоначального платежного ряда. Нетто-платежи платежного ряда до отчисления налогов $N_t$ корректируются на величину изменения налоговых платежей $S_t$, при этом нетто-платежи $N_t^*$ после уплаты налогов получаются путем разницы или умножения налоговой ставки $s_t$ на относящееся к данному инвестиционному объекту изменение прибыли $\Delta G_t$, т.е.

$$N_t^* = N_t - S_t\text{, или } N_t^* = N_t - s_t \cdot \Delta G_t.$$

Изменение налоговых отчислений, а также нетто-платежей до уплаты налогов зависит от того, дает ли реализация инвестиционного проекта в конкретном периоде увеличение прибыли ($\Delta G_t > 0$) или ведет к убыткам ($\Delta G_t < 0$).

Далее необходимо все нетто-платежи $N_t$ до уплаты налогов разделить на компоненты, как влияющие на результат ($N_t^e$), так и нейтральные к нему ($N_t^u$) (к последним относятся, к примеру, выплаты на приобретение и выручка от ликвидации). Таким образом, изменение прибыли $\Delta G_t$ определяется нетто-платежами, влияющими на результат, до уплаты налогов $N_t^e$ и скорректированными на сумму амортизационных отчислений предметов имущества $A_t$, т.е.

$$\Delta G_t = N_t^e - A_t; \quad N_t^* = N_t - s_t \cdot (N_t^e - A_t), \; t = 0,1,...,T.$$

Включение налогов в модель влияет не только на платежный ряд инвестиционного объекта, но и изменяет используемую расчетную процентную ставку. Независимо от вида финансирования при применении модели стоимости капитала с учетом налогов необходимо использовать модифицированную расчетную процентную ставку $i^*$, рассчитываемую как $i^* = i - s_t \cdot i$.

С учетом изменений платежного ряда и расчетной процентной ставки можно определить и стоимость капитала $CK^*$ по формулам:

$$CK^* = \sum_{t=0}^{T} N_t^* \cdot \left(1+i^*\right)^{-t}, \text{ или } CK^* = \sum_{t=0}^{T} \left[N_t - s_t\left(N_t^e - A_t\right)\right]\left(1+i-s_t \cdot i\right)^{-t}.$$

В модели стоимости капитала с учетом налогов действуют те же правила определения выгодности инвестиционных объектов, что и в модели без учета налогов. Учет налогов изменяет величину стоимости капитала, причем возникающие изменения влияют на оценки абсолютной и относительной выгодности сравниваемых объектов инвестиций. Негативно влияют на стоимость капитала более низкие значения нетто-платежей, чему противостоит более низкое значение дисконтирования из-за модификации расчетной процентной ставки. Какой из факторов окажет более сильное влияние, определяется структурой платежного ряда. Покажем это на следующем примере.

***Пример 9.14.*** Пусть исходные данные по инвестиционным объектам $A$ и $B$ приведены в табл. 9.14. Налоговая ставка составляет $s_t = 50\%$, амортизационные отчисления являются линейными. Определить выгодность альтернатив объектов $A$ и $B$ с учетом налогов.

Р е ш е н и е . Для расчета стоимости капитала альтернативы $A$ необходимо определить величину амортизационных отчислений. Они составляют в данном случае 19 тыс.руб. в год (100,0 = 19,0 · 5 + 5.0).

По приведенным выше формулам произведем расчет остальных интересующих нас показателей, сведенных для удобства в табл. 9.15.

Рассчитаем модифицированную расчетную ставку процента для нашего случая: $i^* = i - s_t \cdot i = 0{,}08 - 0{,}5 \cdot 0{,}08 = 0{,}04$, или 4%.

С учетом изменений платежного ряда и расчетной процентной ставки определим стоимость капитала $CK^*$ альтернативы $A$:

$$CK^* = \sum_{t=0}^{T} N_t^* \cdot \left(1+i^*\right)^{-t} = -100{,}0 + 23{,}5 \cdot (1+0{,}04)^{-1} + 24{,}5 \cdot 1{,}04^{-2} +$$
$$+ 27 \cdot 1{,}04^{-3} + 25{,}5 \cdot 1{,}04^{-4} + 29{,}5 \cdot 1{,}04^{-5} = 15295{,}04 \text{ руб.}$$

Расчет стоимости капитала объекта $B$ аналогичен (табл. 9.16). С учетом изменений платежного ряда и расчетной процентной ставки определим стоимость капитала $CK^*$ альтернативы $B$:

$$CK^* = \sum_{t=0}^{T} N_t^* \cdot \left(1+i^*\right)^{-t} = -60{,}0 + 18{,}5 \cdot (1+0{,}04)^{-1} + 20{,}5 \cdot 1{,}04^{-2} +$$
$$+ 21{,}5 \cdot 1{,}04^{-3} + 21{,}5 \cdot 1{,}04^{-4} = 14233{,}58 \text{ руб.}$$

Таким образом, оба объекта $A$ и $B$ абсолютно выгодны, но относительно более выгодным является объект $A$.

*Таблица 9.14.* ***Основные сравнительные показатели двух инвестиционных проектов***

| | *Основные показатели денежных потоков* | *Объект инвестиций* | |
|---|---|---|---|
| | | *A* | *B* |
| 1. | Выплаты на приобретение, тыс. руб. | 100,0 | 60,0 |
| 2. | Срок эксплуатации, лет | 5 | 4 |
| 3. | Выручка от ликвидации, тыс. руб. | 5,0 | 0 |
| 4. | Приток денежных средств, тыс. руб.: | | |
| | в период $t = 1$ | 28,0 | 22,0 |
| | $t = 2$ | 30,0 | 26,0 |
| | $t = 3$ | 35,0 | 28,0 |
| | $t = 4$ | 32,0 | 28,0 |
| | $t = 5$ | 30,0 | — |
| 5. | Расчетная процентная ставка, % | 8 | 8 |

*Таблица 9.15.* ***Результаты расчета стоимости капитала для инвестиционного объекта А***

| *Финансовые показатели, тыс. руб* | *Момент времени эксплуатации объекта* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $t=0$ | $t=1$ | $t=2$ | $t=3$ | $t=4$ | $t=5$ |
| Платежный ряд до отчисления налогов $N_t$ | −100,0 | 28,0 | 30,0 | 35,0 | 32,0 | 35,0 |
| Амортизационные отчисления по годам $A_t$ | — | 19,0 | 19,0 | 19,0 | 19,0 | 19,0 |
| Нетто-платежи, влияющие на стоимость капитала $N_t^e$ | — | 28,0 | 30,0 | 35,0 | 32,0 | 35,0 |
| Нетто-платежи, не влияющие на стоимость капитала $N_t^{II}$ | −100,0 | — | — | — | — | 5,0 |
| Величина прибыли $(\Delta G_t = N_t^e - A_t)$ | — | 9,0 | 11,0 | 16,0 | 13,0 | 11,0 |
| Изменения из-за налоговых платежей $S_t = S_t \cdot \Delta G_t$ | — | 4,5 | 5,5 | 8,0 | 6,5 | 5,5 |
| Изменения платежного ряда после уплаты налогов $N_t^*$ $(N_t^* = N_t - S_t \cdot \Delta G_t)$ | −100,0 | 23,5 | 24,5 | 27,0 | 25,5 | 29,5 |

*Таблица 9.16.* ***Результаты расчета стоимости капитала для инвестиционного объекта В***

| *Финансовые показатели, тыс. руб.* | *Момент времени эксплуатации объекта* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $t=0$ | $t=1$ | $t=2$ | $t=3$ | $t=4$ |
| Платежный ряд до отчисления налогов $N_t$ | −60,0 | 22,0 | 26,0 | 28,0 | 28,0 |
| Амортизационные отчисления по годам $A_t$ | — | 15,0 | 15,0 | 15,0 | 15,0 |
| Нетто-платежи, влияющие на стоимость капитала $N_t^e$ | — | 22,0 | 26,0 | 28,0 | 28,0 |
| Нетто-платежи, не влияющие на стоимость капитала $N_t^{II}$ | −60,0 | — | — | — | — |
| Величина прибыли $(\Delta G_t = N_t^e - A_t)$ | — | 7,0 | 11,0 | 13,0 | 13,0 |
| Изменения из-за налоговых платежей $S_t = S_t \ \Delta G_t$ | — | 3,5 | 5,5 | 6,5 | 6,5 |
| Изменения платежного ряда после уплаты налогов $N_t^*$ $(N_t^* = N_t - S_t \cdot \Delta G_t)$ | −60,0 | 18,5 | 20,5 | 21,5 | 21,5 |

# Глава 10
# Модели принятия единичных решений о выгодности инвестиций при нескольких целевых функциях

Как правило, при решении множества проблем инвестиций лица, принимающие решения (ЛПР), преследуют не одну, а сразу несколько, причем противоречивых между собой целей. Особенно это присуще *стратегическим инвестициям*, ориентирующимся на серьезное повышение эффективности и качества функционирования сложных производственно-технологических и социально-экономических систем.

Рассмотрим некоторые аспекты из теории принятия решений.

## 10.1. Основы теории измерений и полезности при формировании целей и принятии решений

При оценке альтернатив (инвестиционных объектов) по нескольким целевым функциям ЛПР часто применяют количественные величины или *величины полезности*, подходящие для сравнения целевых функций *шкалы измерения* (далее они расположены в порядке возрастания уровня измеряемости): **а)** *номинальные* шкалы (объекты подразделяют на классы, к которым их можно однозначно причислить; при этом нельзя проводить никаких арифметических действий; пример такой шкалы — номера счетов банка); **б)** *шкала порядковых числительных* (здесь можно составить мнение «больше — меньше» или «много — мало», нельзя проводить сложение рангов или расчета среднего значения, однако можно сравнивать качественные свойства и специфику); **в)** *шкалы интервалов* (здесь единицы шкалы можно измерять, допустимы операции сложения, вычитания, определения среднего значения; так как расстояния между единицами шкалы и нулевой отметкой могут быть установлены произвольно, то

нельзя сформировать соотношения; пример — время и дата); г) *шкалы относительных величин* (здесь имеется естественная нулевая отметка, поэтому относительные оценки (формирование соотношений) —конкретные числовые характеристики; пример — длина и вес); д) *шкалы абсолютных величин* (шкала реальных чисел с безразмерной величиной, например, абсолютные вероятности). Последние три типа шкал относятся к шкалам *количественных числительных*.

Для альтернатив, представленных на выбор при принятии решений, характерны операции приоритетности соотношений и частичного или полного упорядочения. Из элементов множества $A$ всех альтернатив можно сформировать множество упорядоченных пар $(a, b)$, причем

$$A \times A = \{a, b \mid a \in A, b \in A\}.$$

Для множества альтернатив $A$ можно сформировать бинарные приоритетные соотношения $R$, характеризующие взаимосвязи между упорядоченными парами элементов. Если есть взаимосвязь между элементами $a$ и $b$, то данное соотношение можно обозначить как $aRb$ или $bRa$.

Соотношения элементов множества альтернатив $A$ в обобщенном виде характеризуются следующими признаками:

*полноты* (если для всех пар $(a, b)$ из элементов множества $A$ есть хотя бы одно соотношение $aRb$ или $bRa$);

*транзитивности* (если для всех элементов $a, b, c \in A$ действует правило, что из $aRb$ и $bRc$ следует $aRc$);

*рефлексивности* (если для всех $a \in A$ следует $aRa$; например, $a \geq a$);

*иррефлексивности* (если для всех $a \in A$ несправедливо соотношение $aRa$; например, $a > a$);

*симметричности* (если для всех $a, b \in A$ из $aRb$ следует $bRa$; например, если $a = b$, то и $b = a$);

*асимметричности* (если для всех $a, b \in A$ из $aRb$ не следует $bRa$; например, если $a > b$, то не следует, что $b > a$);

*антисимметричности* (если для всех $a, b \in A$ действует, что из $aRb$ и $bRa$ вытекает, что $a = b$; например, этот признак действует для соотношения «больше или равно», т. е. если $a \geq b$, $b \geq a$, то $a = b$).

Дифференцированные таким образом (приоритетные) соотношения называются (приоритетными) *порядками*. К их числу относятся:

**а)** *порядок эквивалентности*, имеющий место, если соотношение $aRb$ характеризуется признаками транзитивности, рефлексивности и симметричности, и обозначающийся знаком ~; запись $a \sim b$ означает, что $a$ и $b$ —равноценные, эквивалентные альтернативы;

**б)** *сильный,* или *иррефлексивный, порядок*, имеющий место, если соотношение $aRb$ характеризуется признаками полноты, транзитивности и асимметричности; если эти признаки присущи *приоритетному* соотношению, то имеет место *строгий* (*сильный*) *порядок,* обозначающийся знаком «$\succ$»; например, а $\succ b$ означает, что $a$ имеет преимущество перед $b$);

**в)** *слабый порядок*, имеющий место при выполнении условий полноты, транзитивности, рефлексивности и антисиммметричности и обозначаемый знаком « $\geq$ » (запись $a \geq b$ означает, что $a$ либо лучше $b$, либо равноценно ему); кроме того, при наличии признака полноты соотношение свидетельствует о *полном порядке,* а в остальных случаях — о *частичном порядке.*

При наличии приоритетного соотношения с признаками слабого порядка его можно представить *функцией полезности, приоритетности* или *ценности N.* Функция полезности для всех $a$, $b \in A$ трансформирует приоритетные соотношения эквивалентности и строгости в числовые соотношения слабости или равенства, позволяя определять предпочтение одной альтернативы перед другой:

$$a \succ b \longleftrightarrow N(a) > N(b);$$

$$a \sim b \longleftrightarrow N(a) = N(b).$$

Для учета в модели интервалов необходимо ввести функцию относительных чисел, применяемую при определенных допущениях.

## 10.2. Разновидности методов решения проблем принятия многоцелевых решений

Множество *моделей и методов нахождения единичных решений при нескольких целевых функциях* (Multi(ple) Criteria Decision Making, далее в тексте сокращенно —MCDM) можно подразделить на две большие группы: **а)** *многоцелевые* единичные *решения* (Multi(ple) Attribute Decision Making —MADM); **б)** *многообъект-*

*ные* решения, или проблемы *векторного максимума* (Multi(ple) Objective Decision Making —MODM).

Поиск решения при нескольких целевых функциях касается всех этапов планирования, формирования целей, оценки и принятия решений, требуя детального анализа для определения целей, их значений, приоритетов, конфликтов между ними и путей достижения целей с учетом имеющихся предпочтений у лиц, принимающих решения.

Рассмотрим более подробно многоцелевые единичные решения.

Многоцелевые методы принятия решений можно подразделить по ряду отличительных признаков. Например, в [55] методы подразделяются на: **а)** классические (существование слабого порядка и упорядочение множества альтернатив с целью отыскания оптимальной(ых) из них) и технологические (отсутствие слабого порядка в альтернативах, например, методы *Outranking*, *Fuzzy-Set*) методы; **б)** компенсаторные (неблагоприятные проявления в отношении одной целевой функции можно компенсировать благоприятным проявлением другой целевой функции) и некомпенсаторные методы; **в)** методы, подразделяемые по виду имеющейся в распоряжении ЛПР и используемой информации, при этом речь может идти как об уровне требований или норм замены, информации о порядковых или количественных величинах, так и об отсутствии сведений о каких-либо предпочтениях ЛПР (более подробно эти методы рассмотрены в [55—59], поэтому ниже анализируются лишь наиболее интересные из этих методов).

## 10.3. Метод анализа полезной стоимости альтернатив

При использовании метода полезной стоимости, предложенного Цангемайстером [55,60], учитывают несколько целевых функций, взвешенных по их значимости для ЛПР. При этом стремятся определить степень достижения отдельных целей посредством ряда инвестиционных объектов, указывая их в форме частичной полезной стоимости и сводя в единую полезную стоимость для каждой альтернативы с присвоением весов критериям. Это позволяет скомпенсировать неблагоприятные проявления отдельных целевых функций.

В целом *анализ полезной стоимости* включает в себя этапы: **а)** определения и взвешивания целевых критериев; **б)** определения

показателей частичной полезной стоимости и полной полезной стоимости; в) оценки выгодности инвестиционных объектов.

При определении *целевых критериев* необходимо: выбрать шкалу измерений, на которой можно определить степень достижения целей в номинальном, порядковом или количественном отношениях; обеспечить независимость полезной стоимости всех целевых критериев путем указания пределов изменения каждого из критериев без условия достижения других целевых критериев. Это обусловливает отказ от включения в анализ полезной стоимости монетарных критериев, так как поступления и выплаты (доходы и расходы) подвержены влиянию множества признаков инвестиционных объектов. Определение целевых критериев обычно связано с тщательным анализом и структурированием системы целей, разбиением целевых функций на отдельные группы и созданием многоступенчатой иерархии целей, в которой с уменьшением уровня иерархии возрастает степень конкретизации целей.

При взвешивании целевых критериев с целью учета различий в их значимости и придания весов критериям используются разнообразные методы, например, прямое и косвенное взвешивание на шкале интервалов [55,60,61].

*Прямое взвешивание* на шкале интервалов осуществляется присвоением значений целевым критериям с учетом отражения различий в предпочтениях ЛПР. При *косвенном взвешивании* на шкале интервалов сначала формируется ранговый порядок целевых критериев. В соответствии с положением в этом ранговом порядке каждый целевой критерий получает ранговое значение, причем самому важному критерию присваивается значение $K$ ($K$ —число всех целевых критериев), а самому второстепенному —1. Затем эти значения преобразуются в веса, вычисляемые с помощью шкалы интервалов. Для этого необходимо принять допущение относительно различий в приоритетах между ранговыми показателями по их расположению. Если между следующими друг за другом рангами существует одинаковое различие в приоритетах и производится вышеуказанное упорядочение, то ранговые показатели можно использовать в качестве весов. При этом нормировании суммам присваиваются значения 1—100. При многоступенчатой иерархии целей процесс взвешивания производится на каждом уровне и предполагается, что веса объективно отражают предпочтения ЛПР.

*Определение показателя частичной полезности* для каждой альтернативы и каждого критерия низшего уровня производится

двумя фазами: сначала измеряют проявления отдельных альтернатив в отношении различных целевых критериев (например, с помощью номинальной шкалы, шкалы порядковых или количественных показателей), а затем полученные подобным способом показатели степени достижения преобразуются в показатель частичной полезности, выражаемой в количественном отношении и в единой для всех целевых критериев форме. Так как данное преобразование производится в рамках субъективных оценок, то эту операцию рекомендуется осуществлять с помощью определенной функции преобразования для улучшения процесса ее понимания.

Известны три вида функций преобразования: **а)** *дискретные*, при которых специфическим классам достижения целей присваиваются определенные показатели частичной полезности с измерением степени достижения цели в порядковом выражении или с преобразованием номинально измеренных данных в порядковые показатели; **б)** *частично постоянные*, при которых все показатели определенного интервала преобразуются в специфичный показатель частичной полезности с измерением степени достижения цели в количественном отношении; **в)** *постоянные*, при которых даже незначительные различия в показателях степени достижения целей обусловливают различия в показателях частичной полезности.

При определении *полезности* предполагается, что целевые критерии условно независимы друг от друга относительно показателя полезности, и оценка показателей частичной полезности происходит с помощью единой шкалы количественных измерений. Показатели частичной полезности $n_{ik}$ альтернатив $i$ в отношении критериев $k$ низшего уровня иерархии делаются сопоставимыми посредством умножения на веса критериев $w_k$, а затем суммируются друг с другом. Полезная стоимость $N_{N_i}$ альтернативы $i$ является суммой взвешенных показателей частичной полезности, рассчитываемой как

$$N_{N_i} = \sum_{k=1}^{k} n_{ik} \cdot w_k .$$

Оценка выгодности альтернатив производится на базе следующего правила: инвестиционный объект *абсолютно (относительно) выгоден,* если его показатель полезности *превышает* заранее заданный критический показатель полезности (выше подобного показателя любого другого представленного на выбор объекта).

Иногда при оценке выгодности альтернатив используются не только показатель полезности, но и другие показатели.

Рассмотрим процесс анализа полезности на конкретном примере.

***Пример 10.1.*** Необходимо исследовать процесс анализа полезности на основе оценки относительной выгодности трех альтернатив местоположения $A_1$, $A_2$ и $A_3$ промышленного предприятия.

Решение. Пусть в процессе *определения целевых критериев* сформирована иерархия целей (**рис. 10.1**), которая, наряду с главной целью первого уровня иерархии (выбором оптимального местоположения предприятия —ВОПП), содержит четыре подцели второго уровня: земельный участок —*ЗУ*, персонал —*П*, материальные ресурсы и транспорт —*МРиТ*, влияние государства —*ВГ*), конкретизируемые группой критериев на третьем уровне иерархии: для земельного участка —его размер (*РЗУ*), цена (*ЦЗУ*), расходы на освоение (*РО*); для персонала — его потенциал (*ПП*) и конкуренция на рынке (*КР*) рабочей силы; для материальных ресурсов и транспорта —транспортная инфраструктура (*ТИ*) и виды транспортно-экспедиторских фирм (*ТЭФ*), потенциал поставщиков (*ППс*) и предложение банковских услуг (*ПБУ*); для влияния государства —меры стимулирования (*МС*) и ставка налога на деятельность (*СНД*).

На этапе *взвешивания целевых критериев* необходимо определить веса как для подцелей, так и для критериев низшего уровня. Пусть они составляют значения, указанные на **рис. 10.1.**

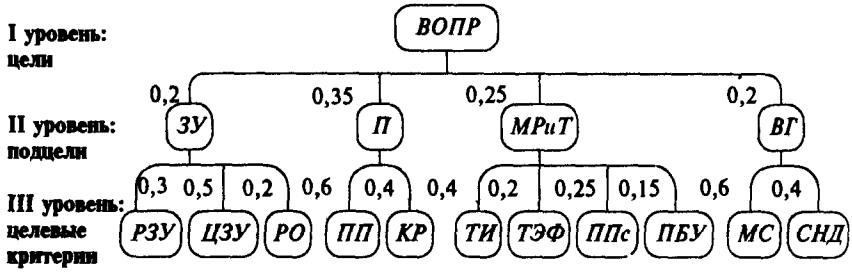



*Рис. 10.1.* ***Структура иерархии целей***

Определение *показателей частичной полезности* покажем на примере критерия «размер земельного участка»—*РЗУ*. Пусть рассматриваемые альтернативы имеют следующие значения РЗУ, тыс. м$^2$: 60 —$A_1$, 42,5 —$A_2$ и 35 —$A_3$. Для преобразования этих проявлений в показатели частичной полезности можно применить частично постоянные функции преобразования согласно **рис. 10.2**, на котором показатели частичной полезности альтернатив составляют 1,0 —для $A_1$, 0,2 —для $A_2$ и 0 —для $A_3$. Показа-

тели частичной полезности, определенные для остальных целевых критериев, сведены в табл. 10.1.

Далее определим значения *показателей полезности*, для чего необходимо взвесить показатели частичной полезности, которые рассчитываются путем умножения показателя частичной полезности на веса принадлежащего критерия и подчиненной цели. Например, для альтернативы $A_1$ и критериев *РЗУ* и *ЦЗУ* эти показатели составляют:

$$РЗУ_{A1} = 1{,}0 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06; \quad ЦЗУ_{A1} = 0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}04;$$
$$РО_{A1} = 1{,}0 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04.$$

Посредством расчета соответствующих показателей для всех других критериев и суммированием этих показателей можно определить показатели полезности $N_{N_i}$ альтернативы $A_i$:

$$N_{N_1} = 0{,}48; \; N_{N_2} = 0{,}61; \; N_{N_3} = 0{,}67.$$

Таким образом, имеем, что альтернатива $A_3$ *относительно выгодна* по сравнению с остальными альтернативами.

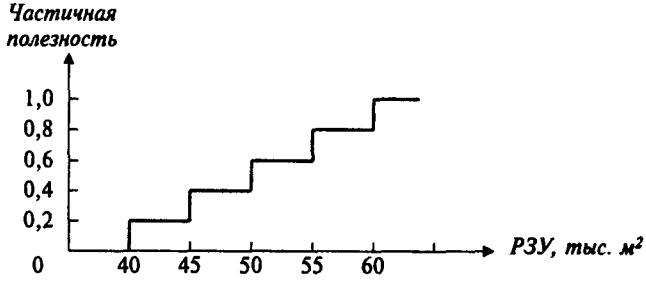



*Рис. 10.2.* ***Функция преобразования для критерия «размер земельного участка» (РЗУ)***

*Таблица 10.1.* ***Показатель частичной полезности для целевых критериев по главной цели — выбору оптимального положения предприятия***

| *Альтернативы* | *Целевой критерий* | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *РЗУ* | *ЦЗУ* | *РО* | *ПП* | *КР* | *ТИ* | *ТЭФ* | *ППс* | *ПБУ* | *МС* | *СНД* |
| $A_1$ | 1,0 | 0,4 | 1,0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 0,4 | 0,6 |
| $A_2$ | 0,2 | 0,4 | 0,2 | 0,6 | 0,8 | 0,4 | 0 | 1,0 | 0,8 | 0,8 | 1,0 |
| $A_3$ | 0 | 0,6 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 0,8 | 1,0 | 0,2 | 0,8 | 0,4 | 0,4 |

В целом анализ полезности является относительно простым способом нахождения решений при многоцелевых проблемах, ведущим к их системному структурированию, относительно легкой интерпретации результатов как нормы процента максимальной величины этого показателя. Сложно здесь определять целевые критерии, их веса, показатели степени достижения цели и в большинстве случаев — функции преобразования. Для показателей весов целей и частичной полезности, рассчитываемых с помощью функций преобразования, необходимо введение измерений в количественном выражении, а это можно сделать лишь на основе субъективных оценок (получение этих субъективных оценок связано с высоким уровнем затрат). Влияние неопределенности в практических ситуациях можно исследовать комбинацией анализа полезности и других методов инвестиционных расчетов (например, анализа чувствительности и риска [61,62]).

## 10.4. Аналитическое определение иерархии целей

**АНР-метод** предложен Т.Л. Саати в [63] для структурирования и анализа сложных ситуаций, а также подготовки решений проблем с несколькими целевыми функциями.

Этот метод предусматривает декомпозицию проблемы на отдельные ее части, обеспечивая ее структурирование и упрощение с выделением иерархии, содержащей различные главные цели, подцели, критерии или уровни мероприятий (альтернативы и инвестиционные объекты), подлежащие оценке [64]. Относительная значимость различных количественных и качественных критериев определяется в отдельности для каждого вышестоящего элемента путем сопоставления пар. Таким же образом в модель интегрируется фактор выгодности мероприятий. Для частичных целевых функций типа альтернативы можно определить общий показатель, отражающий относительную значимость или выгодность альтернатив в отношении совокупной иерархии и тем самым главной цели.

Алгоритм реализации АНР-метода включает в себя следующие этапы: **а)** формирование иерархии целей; **б)** определение приоритетов; **в)** расчет локальных векторов приоритетов, или

факторов взвешивания; г) проверка органичности оценки приоритетов; д) расчет приоритетов целей и мероприятий для иерархии в совокупности. Некоторые из этапов могут выполняться многократно, особенно при неправильной оценке приоритетов.

При *формировании иерархии целей* производится декомпозиция проблемы принятия решений с выделением главных целей, подцелей и различных целевых функций (альтернатив или инвестиционных объектов). Элементы одинаковых уровней должны быть сопоставимыми друг с другом и обладать полнотой (учетом всех существенных альтернатив и целевых функций) и одинаковой степенью значимости.

При *определении приоритетов* относительная значимость каждого элемента определяется в отношении каждого элемента вышестоящего уровня иерархии посредством сравнения альтернатив со всеми другими элементами того же уровня. Значимость при этом может интерпретироваться в отношении целевых критериев как вклад в достижение главной цели. Необходимым условием является то, что ЛПР может присвоить всем парам $i$ и $k$ из множества элементов $A$ одного уровня одно измеренное на шкале относительных показателей значение $v$, показывающее, во сколько раз $i$ более значимо, чем $k$, в отношении определенного элемента следующего более высокого уровня. Этого необходимо добиться для всех элементов более высокого уровня и всех прочих уровней. При этом должен действовать принцип обратной пропорциональности (относительное значение $i$ и $k$ должно соответствовать обратному значению этого показателя, получаемому при сравнении $k$ с $i$. В отношении элемента следующего, более высокого уровня действует правило:

$$v_{ik} = 1 / v_{ki} \qquad \text{для всех } i, k \in A.$$

Относительная величина $v_{ik}$ не должна быть бесконечной, так как тогда соответствующие целевые критерии или альтернативы несопоставимы, обусловливая тем самым повтор анализа проблемы целей. В [63] предложена следующая шкала сравнения пар (табл. 10.2), с помощью которой преобразуются суждения о сопоставимости в количественные показатели таким образом, что измерения проводятся на шкале относительных показателей. При использовании данной шкалы сравнения могут проводиться по значениям как от 1 до 9, так и от 1/9 до 1.

*Таблица 10.2.* ***Девятибалльная шкала сравнения альтернатив по Т. Саати***

| *Баллы* | *Определение* | *Пояснение* |
|---|---|---|
| 1 | Одинаковая значимость | Оба сравниваемых элемента имеют *одинаковую* значимость для элемента следующего, более высокого уровня |
| 3 | Чуть более высокая | Опыт и оценка говорят о *немного большей* значимости одного элемента по сравнению с другим |
| 5 | Более высокая значимость | Опыт и оценка говорят о *более высокой* значимости одного элемента по сравнению с другим |
| 7 | Очень высокая значимость | *Очень высокая* значимость элемента явно проявилась в прошлом |
| 9 | Абсолютно доминирующая значимость | Речь идет о *максимально возможном различии* между двумя элементами |
| 2, 4, 6, 8 | Промежуточные значения | |

Результаты сравнения пар в отношении элементов более высокого уровня можно представить в форме матрицы $V$. Для элементов $K$ составляется матрица $K \times K$ со значениями сравнения. Значения основных диагоналей этой матрицы равны соответственно 1.

Для составления матрицы сравнения пар необходимо провести сравнение пар по элементам $K$ уровня $0{,}5K\,(K-1)$. Это число рассчитывается таким образом, что вычисление значения $v_{ik}$ не требуется, если обратно пропорциональное значение $v_{ki}$ известно, так как значения основных диагоналей равны 1, и предполагается обратная зависимость. Безошибочная оценка всех сравнений пар имеет место, если для каждого элемента матрицы $v_{ik}$ справедливо правило:

$$v_{ik} = v_{ij}v_{jk},$$

где $i, j, k$ —элементы рассматриваемого уровня.

Если предположить такую безошибочную оценку, то последующие оценки можно определять из уже сделанных выводов таким образом, что потребуется проведение сравнения только $(K-1)$ пар.

При *расчете локальных векторов приоритетов* (факторов взвешивания) для каждой матрицы сравнения пар определяется сравнительная значимость элементов (альтернатив, целевых критериев), представляемая в форме вектора приоритетов. Каждая составляющая этого вектора указывает, какой сравнительной

значимостью обладает данный элемент в отношении рассматриваемого элемента более высокого уровня.

Расчет векторов приоритетов $W$ можно проводить на основе *метода определения собственного вектора*, состоящего в следующем.

Исходят из матрицы сравнения пар $V$, для которой сначала предполагается безошибочная оценка. Если значимость $w_k$ отдельных элементов $k$ известна, то элементы матрицы $v_{ik}$ определяются так:

$$v_{ik} = w_i / w_k \text{ для всех } i,\ k \in A.$$

Кроме того, действует правило:

$$\sum_{k=1}^{k} v_{ik}\ w_k / w_i = K, \qquad \sum_{k=1}^{k} v_{ik} \cdot w_k = K \cdot w_i \text{ для всех } i,\ k \in A.$$

Так как эта взаимосвязь характерна для всех строк $i$ ($i = 1,..., K$) матрицы сравнения пар, то имеем следующую систему уравнений $K$, записанную в матричной форме записи и представляющую собой *проблему определения собственной стоимости:*

$$V \cdot W = K \cdot W,$$

где $V$ и $W$ —матрицы вида:

$$V = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \cdots v_{1K} \\ v_{21} & v_{22} \cdots v_{2K} \\ & \cdots \\ v_{K1} & v_{K2} \cdots v_{KK} \end{vmatrix}, \qquad W = \begin{vmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \cdots \\ W_K \end{vmatrix}.$$

Проблема определения собственной стоимости в общем виде формулируется следующим образом [55].

Для какой-то матрицы $K \times K$ и матрицы $B$ находятся реальные числа $L$ и относящиеся к матрице векторы $X$, выполняющие условия следующего уравнения:

$$B \cdot X = L \cdot X,$$

где числа $L$ —собственные значения $B$, а векторы $X$ — собственные векторы.

Известно, что сумма собственных значений проблемы *идентична* следу матрицы (сумме значений главных диагоналей). В рассматриваемой матрице сравнений пар все значения главных диагоналей равны 1, так что след матрицы сравнений пар соот-

ветствует ее измерению $K$. В случае совершенно органичных оценок существует только положительное собственное значение, равное следу матрицы.

Однако при решении многоцелевой проблемы оценки приоритетов часто неорганичны, а векторы взвешивания неизвестны. При неорганичных оценках приоритетов существует несколько собственных значений и векторов. При применении АНР-метода определяется максимальное собственное значение $L_{max}$ матрицы сравнения пар и соответствующего ей собственного вектора (его необходимо составить так, чтобы сумма его компонентов равнялась 1, причем он может рассматриваться как вектор взвешивания $W$).

Расчет вектора такого рода целесообразен и при существовании неорганичной матрицы сравнений пар. Незначительные проявления фактора неорганичности не сильно сказываются на векторе взвешивания.

Для определения максимального собственного значения и вектора взвешивания можно проблему определения собственного значения решить следующим образом:

$$V \cdot W = L \cdot W \text{ или } (V - L \cdot E) \cdot W = 0,$$

в рамках которой $E$ характеризует $K \times K$ как матрицу единства. Для собственных значений $L$ действует правило, что детерминанта матрицы $(V - L \cdot E)$ равна нулю, т. е. $\det | V - L \cdot E | = 0$.

Максимальное значение $L$, соответствующее данному условию, является максимальным собственным значением $L_{max}$. После подстановки этого значения в приведенное выше уравнение может быть рассчитан искомый собственный вектор или вектор взвешивания. Его можно вычислить следующим образом:

$$(V - L_{max} \cdot E) \cdot W = 0, \qquad \sum_{k=1}^{k} w_k = 1 .$$

Точный расчет максимального собственного значения и вектора взвешивания часто связан с объемными арифметическими действиями, из-за чего используют ряд методов приблизительного их решения.

*Проверка органичности оценок приоритетов* производится для всех матриц сравнения пар. Эта процедура необходима, так как не всегда можно исходить из органичности всех оценок. Если при органичной оценке максимальное собственное значение со-

ответствует значению $K$, то при неорганичности их характера получается более высокое максимальное собственное значение $L_{max}$. Это значение $L_{max}$ неизвестно, если собственные векторы рассчитываются методами определения приблизительного решения. Разница между $L_{max}$ и $K$ возрастает с растущей неорганичностью в такой мере, что подходит в качестве меры определения степени органичности оценок.

Проведя дополнительное нормирование, можно определить *индекс органичности KI*, определяемый как $KI = (L_{max} - K)/(K - 1)$.

При оценке органичности матрицы учитывается, как степень отклонений зависит от величины матрицы. Рассчитывается значение органичности ($K_0W$), определяемое как

$$K_0W = KI/RI,$$

где $KI$ — индекс органичности; $RI$ — средний показатель индексов органичности равных по величине обратно пропорциональных матриц, приведенных в табл. 10.3.

*Таблица 10.3.* ***Значения средних показателей RI в зависимости от размера матриц (PM)***

| *PM* | 1;2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *RI* | 0,0 | 0,58 | 0,9 | 1,12 | 1,24 | 1,32 | 1,4 | 1,45 | 1,49 | 1,5 | 1,48 | 1,56 | 1,57 | 1,59 |

Критическое значение показателя органичности составляет 0,01, при этом матрицы сравнения пар с $K_0W \leq 0{,}1$ рассматриваются в качестве достаточно органичных, а для матриц с $K_0W > 0{,}1$ следует проводить проверку и пересмотр оценок сравнения пар.

При определении приоритетов целей и мероприятий для всей иерархии целей необходимо обобщить векторы взвешивания в отношении всех элементов вышестоящего уровня и всех последующих уровней, что является условием для оценки *глобального приоритета* (значимости отдельных целевых критериев или выгодности определенных альтернатив в отношении главной цели).

Результатом сравнения пар является *вектор взвешивания* для уровня, непосредственно подчиненного главной цели, который характеризует относительную значимость соответствующих целевых критериев относительно главной цели, представляющей собой глобальный приоритет. Этот вектор взвешивания — начало определения глобальных приоритетов для элементов после-

дующих уровней. Он умножается на матрицу весов, составляемую из вектора взвешивания последующих уровней. Результатом этого также является вектор взвешивания, представляющий для элементов последующего уровня их глобальный приоритет. Последовательное продолжение данной операции ведет к определению глобального приоритета для альтернатив, учтенных на самом нижнем уровне иерархии целей. Процесс определения глобальных приоритетов для альтернатив $A_i$ можно интерпретировать как величину полезности $N_{Ai}$, рассчитываемую по формуле:

$$N_{Ai} = \sum_{k=1}^{k} w_k \cdot n_{ik},$$

где индекс $i$ означает элементы следующего вышестоящего уровня, которые должны представлять собой целевые критерии; $w_k$ — глобальный приоритет этих целевых критериев; $n_{ik}$ — относительная значимость (выгодность) альтернативы $A_i$.

Таким образом, глобальный приоритет (аналогично показателю полезности при анализе полезности) определяется как сумма частичных приоритетов. Определенные в итоге глобальные приоритеты представляют собой веса в отношении целевых критериев. Для учитываемых на низшем уровне альтернатив они характеризуют то, как они по оценке ЛПР способствуют достижению главной цели. Для оценки относительной выгодности инвестиционных альтернатив при их главной цели, состоящей в максимизации, действует следующее правило: инвестиционный объект *относительно выгоден,* если его приоритет *выше,* чем приоритет любого другого объекта.

Рассмотрим применение АНР-метода на конкретном примере.

***Пример 10.2.*** Необходимо исследовать выгодность альтернатив $A_1$—$A_3$ на основе применения АНР-метода (**рис. 10.3**).

Решение. При формировании иерархии целей выступают: на первом уровне иерархии — выбор оптимального местоположения предприятия (ВОПП); на втором уровне — четыре подцели: земельный участок (*ЗУ*), персонал (*П*), материальные ресурсы и транспорт (*МРиТ*) и влияние государства (*ВГ*); на третьем уровне —целевые критерии: для земельного участка — его размер (*РЗУ*), цена (*ЦЗУ*), расходы на освоение (*РО*); для персонала — его потенциал (*ПП*) и конкуренция на рынке (*КР*) рабочей силы; для материальных ресурсов и транспорта — транспортная инфраструктура (*ТИ*) и виды транспортно-экспедиторских фирм (*ТЭФ*), потенциал поставщиков (*ППс*) и предложение банковских услуг (*ПБУ*); для влияния государства — меры стимулирования (*МС*) и ставка налога на деятельность (*СНД*); на низшем, четвертом, уровне — альтернативы размещения производства $A_1$, $A_2$ и $A_3$.

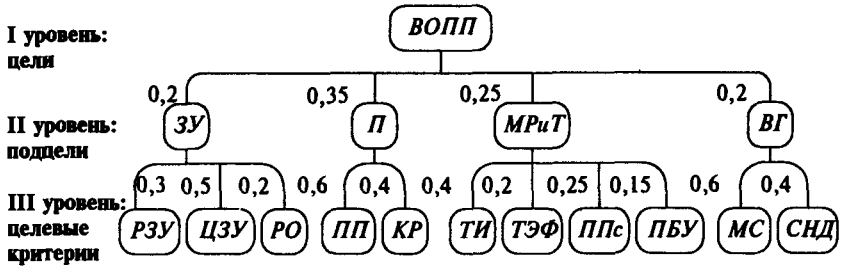



*Рис. 10.3.* ***Иерархия решений***

Определение приоритетов, локальных векторов приоритетов (факторов взвешивания), проверку органичности оценок приоритетов рассмотрим ниже на примере целевого критерия — размера земельного участка (*РЗУ*).

Сначала необходимо рассмотреть уровень альтернатив $A_1$, $A_2$ и $A_3$, который согласно данным расчетов в примере 15 составил: $N_{N_1} = 0{,}48$; $N_{N_2} = 0{,}61$; $N_{N_3} = 0{,}67$. В соответствии с ними применительно к РЗУ даются следующие приведенные ниже оценки сравнения пар в отношении выгодности альтернатив:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1/4 & 1 & 3 \\ 1/5 & 1/3 & 1 \end{vmatrix}$$

Для точного определения вектора взвешивания сначала необходимо рассчитать максимальное собственное значение $L_{\max}$ матрицы сравнения пар $V$. Для всех собственных значений $L$ матрицы действует, что детерминанта нижеприведенной матрицы $(V - L \cdot E)$ равна нулю, т. е. $\det |V - L \cdot E| = 0$. Вычисление детерминанты третьего порядка производится по правилу Саррюса (приписываются первые два столбца) и производится следующее вычисление:

$$\det V = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{matrix}$$

Используя приведенную формулу для нашей матрицы, получим:

$$\det (V - L \cdot E) = \begin{vmatrix} 1-L & 4 & 5 \\ 1/4 & 1-L & 3 \\ 1/5 & 1/3 & 1-L \\ - & - & -+ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1-L & 4 \\ 1/4 & 1-L \\ 1/5 & 1/3 \\ + & + \end{vmatrix} =$$

$$=(1-L)^3 + 4 \cdot 3 \cdot 1/5 + 5 \cdot 1/4 \cdot 1/3 - 5 \cdot (1-L) \cdot 1/5 - (1-L) \cdot 3 \cdot 1/3 -$$

$$-4 \cdot 1/4 \cdot (1-L) = (1-L)^3 - 3(1-L) + 2{,}8167.$$

На основе условия det $| V - L \cdot E | = 0$ рассчитаем величину $L_{max}$, которая составляет $L_{max} = 3{,}0858$.

Соответствующий собственный вектор, или вектор взвешивания, можно определить из уравнения $(V - L_{max} \cdot E) \cdot W = 0$:

$$(1 - 3{,}0858)\ w_1 + 4\ w_2 + 5\ w_3 = 0$$

$$1/4\ w_1 + (1 - 3{,}0858)\ w_2 + 3\ w_3 = 0$$

$$1/5\ w_1 + 1/3\ w_2 + (1 - 3{,}0858)\ w_3 = 0.$$

С помощью условия $w_1 + w_2 + w_3 = 1$ можно определить следующие локальные факторы взвешивания:

$$w_1 = 0{,}6738;\ w_2 = 0{,}2255;\ w_3 = 0{,}1007.$$

Эти значения характеризуют выгодность (локальный приоритет) альтернатив $A_1$, $A_2$ и $A_3$ относительно критерия *РЗУ*.

Из максимального собственного значения $L_{max}$ можно определить индекс органичности ($KI$):

$$KI = (L_{max} - K)/(K - 1) = (3{,}0858 - 3)/(3 - 1) = 0{,}0429.$$

Значение органичности $K_0W$ составляет:

$$K_0W = KI\ /\ RI = 0{,}0429\ /\ 0{,}58 = 0{,}0740.$$

Так как $K_0W < 0{,}1$, оценки этой матрицы сравнения пар можно рассматривать как достаточно органичные.

В соответствующей форме можно представить (табл. 10.4—10.8) и оценить также матрицы сравнения пар для сопоставления альтернатив в отношении других указанных на **рис. 10.3** целевых критериев (хотя расчет $L_{max}$ матриц 4 × 4 без ЭВМ затруднителен). Ниже приведены эти исходные матрицы и рассчитанные для них $L_{max}$, векторы взвешивания $w_1$–$w_3$ и показатели органичности $K_0W$.

*Таблица 10.4.* ***Матрица цены земельного участка — ЦЗУ (расходы на освоение — РО)***

| *Альтернатива* | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 (1) | 3 (7) | 1/4 (3) |
| $A_2$ | 1/3 (1/7) | 1 (1) | 1/6 (1/4) |
| $A_3$ | 4 (1/3) | 6 (4) | 1 (1) |

$L_{max}$=3,0536 (3,0323); $w_1$=0,2176 (0,6586); $w_2$=0,0914 (0,0786); $w_3$=0,6910 (0,2628); $K_0W$=0,0462 (0,0278).

*Таблица 10.5.* ***Матрица потенциала персонала — ПП (конкуренции на рынке — КР)***

| *Альтернатива* | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 (1) | 1/4 (1/5) | 1/9 (1/7) |
| $A_2$ | 4 (5) | 1 (1) | 1/5 (1/3) |
| $A_3$ | 9 (7) | 5 (3) | 1 (1) |

$L_{max}$=3,0713 (3,0649); $w_1$=0,0633 (0,0719); $w_2$=0,1939 (0,2790); $w_3$=0,7428 (0,6491); $K_0W$=0,0615 (0,0559).

*Таблица 10.6.* ***Матрицы транспортной инфраструктуры — ТИ (транспортно-экспедиторских фирм — ТЭФ)***

| *Альтернатива* | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 (1) | 1/2 (8) | 1/2 (4) |
| $A_2$ | 2 (1/8) | 1 (1) | 1 (1/3) |
| $A_3$ | 2 (1/4) | 1 (3) | 1 (1) |

$L_{max}$=3,0000 (3,0183); $w_1$=0,2000 (0,7167); $w_2$=0,4000 (0,0782); $w_3$=0,4000 (0,2051); $K_0W$=0 (0,016).

*Таблица 10.7.* ***Матрица потенциала поставщиков — ППс (банковских услуг — ПБУ)***

| *Альтернатива* | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 (1) | 8 (3) | 4 (3) |
| $A_2$ | 1/8 (1/3) | 1 (1) | 1/3 (1) |
| $A_3$ | 1/4 (1/3) | 3 (1) | 1 (1) |

$L_{max}$=3,0093 (3,0000); $w_1$=0,7166 (0,6000); $w_2$=0,0783 (0,2000); $w_3$=0,2051 (0,2000); $K_0W$=0,0080 (0,00).

*Таблица 10.8.* ***Матрицы мероприятий по стимулированию — МС (ставки налога на деятельность — СНД)***

| *Альтернатива* | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 (1) | 1/7 (6) | 1/2 (4) |
| $A_2$ | 7 (1/6) | 1 (1) | 6 (1/3) |
| $A_3$ | 2 (1/4) | 1/6 (3) | 1 (1) |

$L_{max}$=3,0324 (3,0536); $w_1$=0,0905 (0,6910); $w_2$=0,7583 (0,0914); $w_3$=0,1512 (0,2176); $K_0W$=0,0279 (0,0462).

Соответствующие оценки и расчеты необходимо провести для вышестоящих уровней. В табл. 10.9—10.12 приведены результаты сравнения для подцелей — земельного участка, персонала, материальных ресурсов и транспорта, влияния государства, а в табл. 10.13 — для главной цели — выбора оптимального местоположения

*Таблица 10.9.* ***Матрицы земельного участка (ЗУ)***

| *Альтернатива* | *РЗУ* | *ЦЗУ* | *РО* |
|---|---|---|---|
| *РЗУ* | 1 (1) | 1/2 (8) | 1/2 (4) |
| *ЦЗУ* | 2 (1/8) | 1 (1) | 1 (1/3) |
| *РО* | 2 (1/4) | 1 (3) | 1 (1) |

$L_{max}$=3,0093; $w_1$=0,2499; $w_2$=0,6813; $w_3$=0,0688; $K_0W$=0,0008.

*Таблица 10.10.* ***Матрица персонала (П)***

| *Альтернатива* | *ПП* | *КР* |
|---|---|---|
| *ПП* | 1 | 5 |
| *КР* | 1/5 | 1 |

$L_{max}$=2,0; $w_1$=0,8333; $w_2$=0,1667; $K_0W$=0.

*Таблица 10.11.* ***Матрицы материальных ресурсов и транспорта (МРиТ)***

| *Альтернатива* | *ТИ* | *ТЭФ* | *ЦЗУ* | *ПБУ* |
|---|---|---|---|---|
| *ТИ* | 1 | 7 | 5 | 9 |
| *ТЭФ* | 1/7 | 1 | 1/4 | 3 |
| *ППс* | 1/5 | 4 | 1 | 5 |
| *ПБУ* | 1/9 | 1/3 | 1/5 | 1 |

$L_{max}$=4,2314; $w_1$=0,6474; $w_2$=0,0899; $w_3$=0,2165; $w_4$=0,0462;
$K_0W$=0,0857.

*Таблица 10.12.* ***Матрица влияния государства (ВГ)***

| *Альтернатива* | *МС* | *СНД* |
|---|---|---|
| *МС* | 1 | 3 |
| *СНД* | 1/3 | 1 |

$L_{max}$=2,0; $w_1$=0,7500; $w_2$=0,2500; $K_0W$=0.

*Таблица 10.13.* ***Выбор оптимального положения предприятия (ВОПП)***

| *Альтернатива* | *ЗУ* | *П* | *МРиТ* | *ВГ* |
|---|---|---|---|---|
| *ЗУ* | 1 | 1/8 | 1/3 | 2 |
| *П* | 8 | 1 | 4 | 6 |
| *МРиТ* | 3 | 1/4 | 1 | 5 |
| *ВГ* | 1/2 | 1/6 | 1/5 | 1 |

$L_{max}$=4,1670; $w_1$=0,0871; $w_2$=0,6238; $w_3$=0,2281; $w_4$=0,0610; $K_0W$=0,0619.

Определение приоритетов целей и мер для всей иерархии целей проводится аналогично методу анализа полезности. Например, вклад, вносимый альтернативой $A_1$, через критерий «размер земельного участка» — *РЗУ* для достижения главной цели определяется таким образом, что локальный приоритет этой альтернативы, составляющий $w_1$ = 0,6738, умножается на соответствующие локальные приоритеты критерия *РЗУ* ($w_1$ = 0,2499 из табл. 10.9) и подчиненной главной цели ЗУ ($w_1$ = 0,0871 из табл. 10.13). Таким образом, этот вклад составляет: $w_{зу}$ = 0,6738 · 0,2499 · 0,0871 = 0,0147.

Рассчитав и просуммировав соответствующие значения альтернативы $A_i$ для всех критериев, можно определить глобальный приоритет каждой из альтернатив и сравнить их между собою. Альтернатива с самым высоким значением глобального приоритета выступит как самая относительно выгодная альтернатива.

Относительно **оценки АНР-метода** можно отметить следующее:

**а)** трудоемкость расчетов здесь очень высока по сравнению с методом анализа полезности, поэтому целесообразно применение ЭВМ, особенно при большом количестве элементов и сравнения пар в отношении каждого отдельно взятого элемента вышестоящего уровня;

**б)** в отношении этих пар допускается измерение на шкале относительных показателей при девятибалльной шкале; однако ее применение при отсутствии естественной нулевой отметки может привести к ошибкам при составлении мнения о сравнении пар; неясно также, в какой степени ЛПР может делать различия между такими оценками, как «очень большая значимость» (значение по шкале 5) и «очень высокая степень значимости» (значение по шкале 7), включая еще в модель и промежуточное значение;

**в)** важным является допущение об учете лишь существенных альтернатив, так как полученный на основе сравнения пар ранговый порядок зависит от наличных альтернатив, и их последующее включение может изменить ранговый порядок; *результат* АНР-метода *пригоден только для множества стоящих на выбор альтернатив*;

**г)** для этих альтернатив посредством определения собственного значения довольно точно учитываются приоритеты ЛПР, несмотря на неточности метода нахождения приблизительных

решений; этому способствует также проверка органичности, представляющая важную часть АНР-метода;

**д)** в отношении структурирования проблемы, функции общей полезности, интерпретации весов критериев АНР-метод идентичен методу анализа полезности; недостатком обоих этих методов является отсутствие теоретического обоснования их применения (не установлено, например, что есть одна суммарная функция совокупной полезности; для суммарных функций совокупной полезности в качестве условия для применения АНР-метода действует шкала интервалов вместо шкалы относительных показателей);

**е)** однако на практике АНР-метод можно применять и вне сферы нахождения решения при наличии многоцелевых проблем, например, для прогнозирования тенденций будущего развития, маркетинга рынка, различных сценариев в иерархии целей и др. [57,59,65,66].

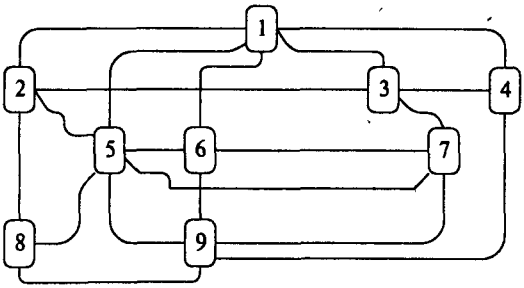
В заключение отметим, что, помимо рассмотренных методов, на практике часто применяются *методы теории полезности с многими признаками* (Multi Attribute Utility Theory, сокращенно MAUT-метод, разработанный для ситуаций в условиях *неопределенности*, но применимый и в ситуациях *определенности* (Multi Attribute Value Theory, *MAVT-метод*), что имеет место, например, при составлении прогнозов в условиях определенности, в которых вместо теории полезности применяется теория ценности с многими признаками.

Для *MAUT-метода*, например, характерно то, что многоцелевая проблема решается с помощью (единичных) функций полезности (ценности, приоритетов), выраженных в количественном отношении и основывающихся на нормах замены между признаками. Он является теоретически обоснованным методом, обеспечивающим стабильный ранговый порядок при нахождении решения при нескольких целевых функциях по сравнению с методом анализа полезности и АНР-методом.

Из более слабых условий исходит *PROMETHEE*-метод (Preference Ranking Organisation Method for Enrichment Evaluations), относящийся к методам определения преимуществ одной альтернативы над другой (Quatranking-методы). Исходным в этих методах является то условие, что ЛПР не располагают полной и непротиворечивой информацией о проблеме, что не позволяет им сформировать ни сильный, ни слабый порядок при определении оптимальных(ой) альтернатив(ы), но позволяет помочь идентифицировать несколько подходящих альтернатив при принятии решения. При желании читателя ознакомиться с этими методами рекомендуется литература [55—66].

# Глава 11
# Методы принятия инвестиционно-финансовых программных решений в условиях определенности ситуаций

При вложении инвестиций в реальную экономику банкам и другим инвесторам целесообразно учитывать не только инвестиционную программу, но и финансовую, производственно-хозяйственную и социально-экономическую деятельность предприятий. Поэтому ЛПР и его команде интересно исследовать взаимосвязь инвестиций с другими сферами (**рис. 11.1**) и прежде всего с финансированием и производством. Из литературы известно множество групп моделей синхронного планирования, связывающих воедино с инвестициями политику сбыта, управления персоналом, производством, налогообложением, размещения производственных мощностей и др. [55,61, 70—77].




1 — *управление предприятием*
2 — *финансирование*
3 — *производство*
4 — *сбыт*
5 — *инвестиции*
6 — *логистика*
7 — *персонал*
8 — *сбор и обработка данных*
9 — *закупки, запасы*

*Рис.11.1.* ***Система «предприятие» в разрезе по основным сферам его деятельности***

Все множество методов синхронного планирования можно объединить в группы моделей, позволяющих сформировать [55]:

**а)** оптимальную инвестиционную программу при заданной для отдельного инвестиционного объекта производственной программе и с заданным производственным бюджетом;

**б)** одновременно как инвестиционную, так и финансовую программы при заданной производственной программе для отдельного инвестиционного объекта;

**в)** одновременно оптимальные инвестиционную и финансовую программы при заданных финансовых средствах и при вовлечении в модель различных альтернатив финансирования.

Рассмотрим отдельные из этих методов, в которых в качестве целевой функции выступают стоимость капитала, конечная стоимость имущества или периодические изъятия финансовых средств.

## 11.1. Модель формирования оптимальной инвестиционной программы при заданных бюджете и программе производства

В данной модели в качестве целевой функции выступает *стоимость капитала инвестиционной программы*, причем здесь при заданных ограничениях (конкретной производственной программе для отдельных инвестиционных объектов и при наличии некоторых финансовых средств) требуется сформировать и определить оптимальную инвестиционную программу.

Этот метод аналогичен *методу стоимости капитала* (см. гл. 9) при следующих допущениях: **а)** представленные на выбор инвестиционные объекты равнозначимы для ЛПР; **б)** финансовые средства нельзя привлечь в неограниченном размере по расчетной процентной ставке; **в)** инвестиционная программа определяется только на начало планового периода, при этом начальные расходы не должны превышать капитальный бюджет, а инвестиционные объекты реализуются только как единое целое.

В целом модель имеет вид задачи целочисленного программирования, подробное решение которой рассмотрено в [78 —82]:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{J} c_j x_j \to \max \\ \sum_{j=1}^{J} A_{0j} x_j \le KБ \\ x_j \in \{0;1\};\ j = \overline{1,J}, \end{array}\right\}$$

Общая стоимость капитала

Требуемые финансовые средства $A_{0j} \le$ капитального бюджета ($KБ$)

где $x_j$ — бинарная переменная, значение которой определяет, будет ли реализована инвестиция ($x_j = 1$) или нет ($x_j = 0$) для всех альтернатив; $c_j$ — стоимость капитала инвестиционного объекта; $A_{0j}$ — затраты на приобретение инвестиционного объекта; $KБ$ —объем капитального бюджета.

***Пример 11.1.*** Пусть предприятие имеет пять реальных инвестиционных объектов, характеризующихся приведенными в табл. 11.1 нетто-платежными рядами. Заданный капитал составляет 340 тыс. руб., расчетная процентная ставка —10%. Требуется сформулировать модель синхронного планирования и определить оптимальную инвестиционную программу при заданных ограничениях.

Решение. Так как расчетная процентная ставка одинакова для всех периодов, то стоимость капитала ($CK$) на начало планового периода ($t = 0$) определяется по формуле

$$CK = -A_0 + \sum_{t=0}^{T}(e_t - a_t)q^{-t},$$

где $t$ —индекс времени; $T$ —последний момент времени, в который осуществляются платежи; $e_t$ ($a_t$) — поступления (выплаты) в момент времени $t$; $q^{-t}$ — коэффициент дисконтирования на момент времени $t$.

*Таблица 11.1.* ***Платежные нетто-ряды для пяти инвестиционных объектов и стоимость капитала***

| *Инвестиционный объект* | *Нетто-платежи в моменты времени, тыс. руб.* | | | | *Стоимость капитала, руб.* |
|---|---|---|---|---|---|
| | $t$=0 | $t$=1 | $t$=2 | $t$=3 | |
| 1 | −90 | 45,0 | 40,0 | 40,0 | 14 019,53 |
| 2 | −45 | 24,0 | 23,0 | 14,0 | 13 858,00 |
| 3 | −80 | 35,0 | 35,0 | 40,0 | 10 796,39 |
| 4 | −170 | 75,0 | 80,0 | 85,0 | 28 159,28 |
| 5 | −100 | 40,0 | 50,0 | 50,0 | 15 251,69 |

Для составления модели синхронного планирования требуется определить по вышеприведенной формуле значения стоимости капитала инвестиционных объектов (их значения приведены в правой колонке табл. 11.1). Например, для $ИО_1$ стоимость капитала составит:

$$CK_{ИО_1} = -A_0 + \sum_{t=0}^{T}(e_t - a_t)q^{-t} =$$

$$= -90{,}0 + 45{,}0 \cdot 1{,}1^{-1} + 40{,}0 \cdot 1{,}1^{-2} + 40{,}0 \cdot 1{,}1^{-3} =$$

$$= -90 + 40{,}90905 + 33{,}05784 + 30{,}0536 = 14\,019{,}53 \text{ руб.}$$

Остальные значения стоимости капитала инвестиционных объектов определяются аналогичным образом. Результаты расчетов стоимости капитала $ИО_2$—$ИО_5$ занесем в табл. 11.1.

Тогда формальную модель можно записать в виде целевой функции и совокупности ограничений и граничных условий:

$$14019{,}53x_1 + 13858x_2 + 10796{,}39x_3 + 28159{,}28x_4 + 15251x_5 \to \max;$$

$$90\,000x_1 + 45\,000x_2 + 80\,000x_3 + 170\,000x_4 + 100\,000x_5 \le 340\,000;$$

$$x_j \in \{0;1\}; \qquad j = \overline{1,5}.$$

Как показано в [55], решение данной системы с помощью ЭВМ обусловливает, что оптимальная инвестиционная программа состоит из инвестиционных объектов 2, 4 и 5:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 1; \quad x_5 = 1.$$

Реализация инвестиционной программы ведет при общих затратах на приобретение на сумму 315 000 руб. (45 + 170 + 100 = 315 тыс. руб.) к общей стоимости капитала в объеме 57 268,28 руб. (13858,00 + 28159,28 + 15251,00 = 57268,28 руб.).

Отсюда можно определить выгодность проекта, оцениваемую *нормативом стоимости капитала* (*НСК*), рассчитываемую через отношение стоимости капитала к затратам на приобретение. Этот показатель в нашем случае составит: *НСК* = 57268,28 / /315000 = 0,18.

## 11.2. Статическая модель синхронного инвестиционно-финансового планирования

Между инвестиционной и финансовой сферой существует важная для принятия решений сильная взаимосвязь, поэтому выгодность привлечения финансовых средств зависит от имеющихся инвестиционных возможностей и связанных с ними издержек. Рассмотрим ряд подобных моделей, предложенных в [83, 84].

**Статическая модель**. Данная относительно простая модель предложена Дж. Дином в [183] при следующих действующих допущениях: **а)** выделяется только один релевантный (существенный) период, на начало и конец которого приходятся платежи, характеризующие инвестиционные и финансовые объекты; **б)** эти объекты реализуемы и по усмотрению делимы до определенного заданного объема (затраты на приобретение или максимальная величина кредита). Целевая функция ориентируется на максимизацию конечной стоимости имущества (*КСИ*) общей инвестиционной и финансовой программ. *КСИ* определяется в конце рас-

сматриваемого периода как сальдо инвестиционных поступлений и выплат на финансирование. В этот момент времени исходят из того, что на инвестиционных объектах есть поступления, превышающие выплаты, а на финансовых объектах нужно осуществить платежи по процентам и основному долгу (негативные нетто-платежи). К началу рассматриваемого периода необходимо предоставление требуемых финансовых средств на цели инвестирования.

Математически целевая функция данной модели для момента времени $t = 1$ записывается в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{J} a_{j1} x_j + \sum_{i=1}^{J} d_{i1} y_i \to \max ,$$

где $x_j$ —объем реализации инвестиционного объекта ($j = 1,..., J$); $y_i$ — объем использования объекта финансирования ($i = 1,..., I$); $a_{ji}$ ($d_{i1}$) — нетто-платежи за единицу инвестиционного объекта $j$ (объекта финансирования $i$) в момент времени $t$ ($t = 0,1$).

Содержательно целевую функцию можно интерпретировать так, что сумма нетто-платежей инвестиционных объектов и нетто-платежей объектов финансирования должна стремиться к максимуму.

Условием финансирования проекта для начального момента времени $t = 0$ является:

$$\sum_{j=1}^{J} a_{j0} x_j + \sum_{i=1}^{I} d_{i0} y_i = 0 ,$$

т. е. сумма нетто-платежей инвестиционных объектов и объектов финансирования в начальный момент времени реализации проектов равна *нулю*.

Граничные условия реализации инвестиционно-финансового проекта:

$$0 \le x_j \le 1; \quad 0 \le y_i \le 1; \quad j = \overline{1, J}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Заметим, что инвестиционные объекты и объекты финансирования могут быть реализованы в любых долях от максимального общего объема ($x_j = 1$; $y_i = 1$). Рассмотрим этот метод на примере.

***Пример 11.2.*** У предприятия есть четыре делимых инвестиционных объекта ($ИО_1$–$ИО_4$) и четыре объекта финансирования ($ОФ_1$–$ОФ_4$) с приведенными значениями нетто-платежей на момент $t = 0,1$ и другими данными (табл. 11.2). Требуется составить модель оптимизации задачи и определить оптимальную инвестиционную и финансовую программу.

*Таблица 11.2.* ***Нетто-платежи для четырех инвестиционных (ИО) и четырех объектов финансирования (ОФ) и расчеты промежуточных результатов***

| *Исходные данные* | | | *Расчетные данные* | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *ИО, ОФ* | *Нетто-платежи, тыс. руб.* | | *Внутренняя процентная ставка, %* | *Приоритет объекта* | *Суммарное значение спроса капитала* |
| | $a_{j0}$ ($d_{i0}$) | $a_{j1}$ ($d_{i1}$) | | | |
| $ИО_1$ | −100,0 | 113,0 | 13,0 | 2 | 150 000 |
| $ИО_2$ | −60,0 | 66,0 | 10,0 | 4 | 240 000 |
| $ИО_3$ | −50,0 | 58,0 | 16,0 | 1 | 50 000 |
| $ИО_4$ | −30,0 | 33,0 | 12,0 | 3 | 180 000 |
| $ОФ_1$ | 25,0 | −27,0 | 8,0 | 3 | 105 000 |
| $ОФ_2$ | 60,0 | −64,0 | 6,6 | 2 | 80 000 |
| $ОФ_3$ | 100,0 | −120,0 | 20,0 | 4 | 205 000 |
| $ОФ_4$ | 20,0 | −21,0 | 5,0 | 1 | 20 000 |

Р е ш е н и е. Модель оптимизации проектов можно записать в виде:

*целевая функция*

$$113x_1 + 66x_2 + 58x_3 + 33{,}6x_4 - 27y_1 - 64y_2 - 120y_3 - 21y_4 \to \max;$$

*дополнительные условия финансирования*

$$-100x_1 - 60x_2 - 50x_3 - 30x_4 + 25y_1 + 60y_2 + 100y_3 + 20y_4 = 0;$$

*условия реализации проекта*

$$0 \le x_j \le 1; \quad 0 \le y_i \le 1; \quad j, i = \overline{1,4}.$$

Для определения оптимума инвестиционной и финансовой программы рассчитаем внутреннюю процентную ставку $r_j$ для инвестиционного объекта и $r_i$ для объекта финансирования по следующим формулам: $r_j = |a_{j1}/a_{j0}| - 1$ или $r_i = |d_{i1}/d_{i0}| - 1$ и занесем данные результаты расчетов в табл. 11.2. Например, для первых по счету $ИО_1$ и $ОФ_1$ соответственно имеем: $r_1 = 13\%$ $(113 - 100)/100 \cdot 100 = 13{,}0$; $d_1 = 8{,}0\%$ $(27 - 25)/25 \cdot 100 = 8{,}0$.

Заметим, что на основе делимости всех объектов из уровня начисления процентов можно сделать заключение об относительной выгоде или приоритете анализируемых объектов как инвестирования, так и финансирования. Причем выгодность объектов финансирования в отличие от инвестиционных объектов убывает при растущем начислении процентов. При ставке $r_j > 16\%$ вообще отсутствует спрос на капитал, так как реализовать $ИО_3$ при таких условиях становится невыгодно (при ставке $r_j = 16\%$ наблюдается состояние индифферентности относительно реализации

или отказа от реализации $ИО_3$), при этом затраты на финансирование совпадают с начислением процентов. Начиная с уровня 16% общий спрос на капитал, который соответствует максимальным затратам на приобретение $ИО_3$ ($a_{30}$ = 50 тыс. руб.), составит 50 тыс. руб. При меньших уровнях процентных ставок объект $ИО_3$ следует обязательно реализовать.

Инвестиционный объект $ИО_2$ имеет приоритет 2 с начислением процентов по ставке $r_j$ = 13%, которая является пределом выгодности $ИО_2$, при этом общий спрос на капитал составит уже 150 тыс. руб. (50 тыс. руб. для $ИО_3$ + 100 тыс. руб. для $ИО_2$). Аналогичным образом могут быть включены в рассмотрение остальные *ИО*, при этом общий спрос на капитал для $ИО_4$ составит 180 тыс. руб. (150 + 30 = 180), а для $ИО_2$ – 240 тыс. руб. (180 + 60 = 240) при условии, что спрос на капитал зависит от процента. В целом график спроса на капитал при четырех рассмотренных *ИО* с соответствующими процентными ставками приведен на **рис. 11.2, а**.

Аналогичным образом можно рассчитать предложения капитала и построить график зависимости максимальных сумм объектов финансирования $ОФ_i$ с соответствующими фактическими процентными ставками $r_i$ (**рис. 11.2, б**). Суммарное значение предложения капитала при этом составит: для $ОФ_4$ (приоритет 1, $r_i$ = 5%) — 20 тыс. руб., для $ОФ_2$ (приоритет 2, $r_i$ = 6,6%) — 80 тыс. руб. (20 + 60 = 80), для $ОФ_1$ (приоритет 3, $r_i$ = 8%) — 105 тыс. руб. (80 + 25 = 105), для $ОФ_3$ (приоритет 4, $r_i$ = 20%) — 205 тыс. руб. (105 + 100 = 205).

Оптимальная инвестиционно-финансовая программа получается при *равенстве спроса и предложения капитала*, когда, с одной стороны, необходимо финансировать инвестиционную программу, а с другой — желательно брать кредит в требуемом объеме и не платить за него лишние деньги. Учитывая найденные приоритеты инвестиционных объектов и объектов финансирования, выбор следует начинать с инвестиционного объекта с наибольшим приоритетом и включать далее поэтапно все остальные *ИО* до тех пор, пока их процент будет не выше, чем процент объектов финансирования, подлежащих реализации. Это соответствует движению по графикам (см. **рис. 11.2, а, б**) до точки пересечения спроса и предложения капитала, являющейся *оптимумом* реализуемой инвестиционно-финансовой программы. Следует реализовать все *ИО* и *ОФ*, лежащие слева от точки пересечения спроса и предложения капитала. При этом обычно расположенные на точке оптимума *ИО* или *ОФ* реализуются лишь частично.

Таким образом, в состав *оптимальной* инвестиционно-финансовой программы входят объекты финансирования $ОФ_4$, $ОФ_2$, $ОФ_1$ и инвестиционные объект $ИО_3$ и частично $ИО_1$ на 11/21 часть (105 —50)/105 = 55/105 = 11/21).

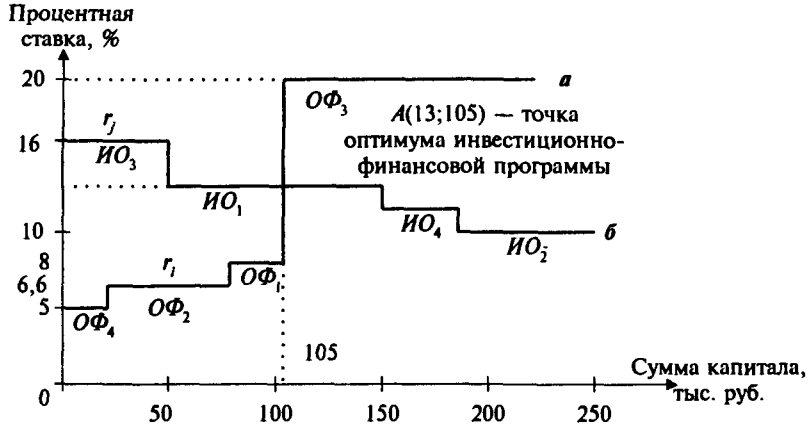



*Рис. 11.2.* ***Графики предложения (а) и спроса (б) капитала при синхронном инвестиционно-финансовом планировании***

Конечная стоимость имущества (КСИ) этой программы складывается из положительного сальдо поступлений оптимальных инвестиционных объектов за вычетом платежей по процентам и основному долгу в момент времени $t = 1$, составляющего в нашем случае: $КСИ = 58{,}0 + 11/21.113{,}0 - 21{,}0 - 64{,}0 - 27{,}0 = 5{,}190$ тыс. руб.; $КСИ = ИО_3 + ИО_1 - ОФ_4 - ОФ_2 - ОФ_1$.

Критическая (эндогенная) процентная ставка, равная процентной ставке оптимальной точки спроса и предложения, составляет 13% и представляет *порог* (*предел*) выгодности. Из анализа возможных ситуаций можно сформулировать следующее *правило*.

Инвестиционные объекты (объекты финансирования) реализуются: **а)** *полностью*, если их процентная ставка больше (меньше) критической ставки; **б)** *частично*, если их процентная ставка соответствует критической процентной ставке; **в)** *ИО* (*ОФ*) *не реализуются вообще*, если их процентные ставки меньше (больше) критической процентной ставки программы.

В целом метод стоимости капитала может применяться при несовершенных рынках капитала (как в нашем примере) для нахождения решения при условии определения «правильной» процентной ставки. Критическая же процентная ставка может быть найдена лишь в процессе оптимизации, применяясь в основном для оценки проектов, которые рассматриваются дополнительно уже после осуществления процесса оптимизации.

Однако если исключить предположение о делимости инвестиционных объектов, то из графического отображения процесса

оптимальную инвестиционно-финансовую программу получить вообще нельзя, и неизвестно, какую из возможных альтернатив (полную реализацию $ИО_1$ или ее отмену с заменой на другой инвестиционный объект с более высокой процентной ставкой) следует выбрать. Тогда необходимо сначала сформулировать все возможные инвестиционные программы, затем для каждой подобной программы установить очередность реализации финансовой программы так, чтобы ее оборот соответствовал сумме инвестиционных выплат, и далее рассчитать стоимость капитала для каждого сочетания инвестиционно-финансовой программы, определяемой как разницы между поступлениями и выплатами в момент времени $t = 1$. При этом, конечно, сразу пренебрегают инвестиционной программой, которая является невыгодной. Тогда программа с максимальной конечной стоимостью имущества является *оптимальной*. Покажем подобный вариант выбора на решении следующего примера.

***Пример 11.3.*** Исходными значениями объемов инвестиционных объектов (*ИО*) и объектов финансирования (*ОФ*) являются данные, приведенные выше в табл. 11.2 примера 11.2. Требуется найти варианты сочетаний *ИО* и *ОФ* и выбрать оптимальную инвестиционно-финансовую программу по критерию максимума конечной стоимости имущества.

Решение. Сформируем множество сочетаний инвестиционных объектов и покрывающих их по объему комбинации объектов финансирования.

*Таблица 11.3.* ***Выбор вариантов инвестиционных и финансовых программ и размеры конечной стоимости имущества их реализации***

| *Варианты инвестиционных программ* | *Спрос на капитал, тыс. руб.* | *Варианты финансовых программ покрытия* | *Расчетные значения КСИ, тыс. руб.* |
|---|---|---|---|
| $ИО_1$ | 100,0 | $0{,}8ОФ_1+ОФ_2+ОФ_4$ | 6,4 |
| $ИО_3$ | 50,0 | $0{,}5ОФ_2+ОФ_4$ | 5,0 |
| $ИО_1+ИО_3$ | 150,0 | $ОФ_1+ОФ_2+0{,}45ОФ_3+ОФ_4$ | 5,0 |
| $ИО_3+ИО_4$ | 80,0 | $ОФ_2+ОФ_4$ | 6,6 |
| $ИО_2+ИО_3$ | 110,0 | $ОФ_1+ОФ_2+0{,}05ОФ_3+ОФ_4$ | 6,0 |
| $ИО_1+ИО_4$ | 130,0 | $ОФ_1+ОФ_2+0{,}25ОФ_3+ОФ_4$ | 2,6 |
| $ИО_1+ИО_3+ИО_4$ | 180,0 | $ОФ_1+ОФ_2+0{,}75ОФ_3+ОФ_4$ | 4,6 |

На основании сформированных вариантов инвестиционных и финансовых программ, приведенных в табл. 11.3, рассчитаем величины конечной стоимости имущества (*КСИ*) по каждой синхронной реализа-

ции с учетом значений $a_{jl}$ и $d_{il}$ (результаты расчетов занесем в табл. 11.3). В итоге получаем:

а) для первого варианта

$$КСИ = ИО_1 - (0{,}8 \cdot ОФ_1 + ОФ_2 + ОФ_4) =$$

$$=113{,}0 - (0{,}8 \cdot 27{,}0 + 64{,}0 + 21{,}0) = 113{,}0 - 106{,}6 = 6{,}4 \text{ тыс. руб.};$$

б) для второго варианта

$$КСИ = ИО_1 + ИО_3 - (ОФ_1 + ОФ_2 + 0{,}45 \cdot ОФ_3 + ОФ_4) =$$

$$=58{,}0 - (0{,}5 \cdot 64{,}0 + 21{,}0) = 58{,}0 - 53{,}0 = 5{,}0 \text{ тыс. руб.};$$

в) для третьего варианта

$$КСИ = ИО_1 + ИО_3 - (ОФ_1 + ОФ_2 + 0{,}45 \cdot ОФ_3 + ОФ_4) =$$

$$=113{,}0 + 58{,}0 - (27{,}0 + 64{,}0 + 0{,}45 \cdot 120{,}0 + 21{,}0) = 5{,}0 \text{ тыс. руб.};$$

г) для четвертого варианта

$$КСИ = ИО_3 + ИО_4 - (ОФ_2 + ОФ_4) =$$

$$=58{,}0 + 33{,}6 - (64{,}0 + 21{,}0) = 6{,}6 \text{ тыс. руб.};$$

д) для пятого варианта

$$КСИ = ИО_2 + ИО_3 - (ОФ_1 + ОФ_2 + 0{,}05 \cdot ОФ_3 + ОФ_4) =$$

$$=66{,}0 + 58{,}0 - (27{,}0 + 64{,}0 + 6{,}0 + 21{,}0) = 6{,}0 \text{ тыс. руб.};$$

е) для шестого варианта

$$КСИ = ИО_1 + ИО_4 - (ОФ_1 + ОФ_2 + 0{,}25 \cdot ОФ_3 + ОФ_4) =$$

$$=113{,}0 + 33{,}6 - (27{,}0 + 64{,}0 + 30{,}0 + 21{,}0) = 4{,}6 \text{ тыс. руб.};$$

ж) для седьмого варианта

$$КСИ = ИО_1 + ИО_3 + ИО_4 - (ОФ_1 + ОФ_2 + 0{,}75 \cdot ОФ_3 + ОФ_4) =$$

$$=113{,}0 + 58{,}0 + 33{,}6 - (27{,}0 + 64{,}0 + 90{,}0 + 21{,}0) = 2{,}6 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, получаем, что наилучшей из рассмотренных 7 вариантов по критерию *КСИ* является синхронная реализация инвестиционных объектов $ИО_3$ и $ИО_4$ и объектов финансирования $ОФ_2$ и $ОФ_4$, дающая результат в 6,6 тыс. руб.

В целом рассмотренная статическая модель относительно проста, но не учитывает реальные инвестиционные и финансовые возможности программ в будущем, поэтому более реалистичны одно- и многоступенчатые динамические модели. Рассмотрим некоторые их них более подробно.

## 11.3. Одноступенчатая динамическая модель оптимизации принятия решений при синхронном инвестиционно-финансовом планировании

*Одноступенчатая динамическая модель* синхронного инвестиционно-финансового планирования предложена впервые в [85] Г. Албахом при учете цели максимизации общей стоимости капитала инвестиционной и финансовой программ и ряда ограничений, приведенных в §11.1 и дополнительных, перечисленных ниже. С помощью условий ликвидности гарантируется финансовое равновесие для всех учитываемых моментов планового периода. По условиям ликвидности собственные средства предприятия, выделяемые для инвестиционной деятельности, должны быть четко определены, а для производственной программы, заданной для отдельных инвестиционных объектов, требуется, чтобы для каждого вида продукции ее выпуск не превышал объема ее сбыта.

Учет значений стоимости капитала в целевой функции предопределяет реалистичность условий модели стоимости капитала, устанавливая, к примеру, что возможные положительные сальдо финансовых средств с начислением процента можно вкладывать по расчетной процентной ставке. К числу дополнительных условий-ограничений относятся следующие [55]: **а)** все инвестиционные объекты (*ИО*) и объекты финансирования (*ОФ*) произвольно делимы и до указанной верхней границы могут быть осуществлены многократно; **б)** платежный ряд единицы и вместе с тем стоимость капитала на единицу при всех *ИО* и *ОФ* не зависят от числа реализуемых единиц; **в)** количество видов продукции, производимой определенным *ИО*, а также максимальный объем сбыта продукции конкретного вида однозначно можно отнести к определенному периоду или моменту времени; **г)** рассмотрению подлежат только те альтернативы, которые можно реализовать к началу планового периода времени.

Математически (ниже приведены содержательные интерпретации математических выражений) данную модель можно записать в следующем виде.

*Целевая функция*

$$\sum_{j=1}^{J} c_j x_j + \sum_{i=1}^{J} v_i y_i \to \max .$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Стоимость капитала инвестиционной программы* | + | *Стоимость капитала финансовой программы* | → max, |

где $x_j$ — количество единиц инвестиционного объекта (*ИО*), $j = 1,..., J$; $y_i$ —объем использования объектов финансирования (*ОФ*) (руб.) для $i = 1,..., I$; $c_j(v_i)$ —стоимость капитала на единицу *ИО* (*ОФ*).

Отметим, что платежный ряд *ИО* и *ОФ* с параметрами $a_{jv}$ и $d_{iv}$ в отличие от статической модели здесь представляется в форме отрицательного сальдо платежей. Количество всех $ИО_j$, а также использование всех $ОФ_i$ (руб.) не должно быть отрицательным или превышать верхней границы. Оптимальное решение данной модели можно найти с помощью симплекс-метода (см., например, [78]), который далее сам по себе не излагается.

Рассмотрим формулировку данной модели на следующем примере.

***Пример 11.4.*** Предприятие ABC намерено спланировать оптимальную синхронную инвестиционно-финансовую программу для своих производственных подразделений *A* и *B* на основе одноступенчатой динамической модели с использованием пяти инвестиционных объектов (*ИО*) (табл. 11.4) и двух объектов финансирования (ОФ), являющихся кредитами $K_1$ и $K_2$ с лимитами 1 350 тыс. руб. и 800 тыс. руб. каждый, выданными банком под процентные ставки 14 и 12% соответственно. При получении кредитов поступления происходят в полном размере в момент времени $t = 0$, а погашение кредитов и уплата процентов, а также процентов на проценты осуществляются в последний период $t = 3$. Расчетная процентная ставка составляет 10%. Инвестиционные объекты $ИО_1$ и $ИО_2$ предназначены для выпуска продукции типа *Г* объемом 16,0 и 4,5 тыс. ед. соответственно, имеющей лимит сбыта продукции в 70 тыс. ед., а инвестиционные объекты $ИО_3$, $ИО_4$ и $ИО_5$ — для выпуска продукции типа *Д* объемом 17,5, 20,0 и 20,0 тыс. ед. соответственно, имеющей лимит сбыта в 130 тыс. ед. $ИО_1$ может реализовываться максимум три раза. В момент времени $t = 0$ в распоряжении предприятия имеется 50 тыс. руб. собственных средств. Требуется составить математическую модель данной синхронной инвестиционно-финансовой программы и получить оптимальное решение симплекс-методом.

Р е ш е н и е. Так как значения нетто-платежей по инвестиционным объектам в разные периоды времени соответствуют условиям примера 20 (см. § 11.1), то и расчетные значения стоимости капитала $c_j$ по соответствующим *ИО* совпадают с данными табл. 11.1 и занесены в табл. 11.4.

Расчет стоимости капитала для объектов финансирования $ОФ_1$ и $ОФ_2$ проведем с учетом их кредитных процентных ставок. Так как по-

ступления средств производятся в момент времени $t = 0$, а расчеты по кредитам —в последний период времени $t = 3$ по ставкам в 14 и 12% соответственно, то для стоимости капитала ($CK_{ОФ_i}$) $ОФ_1$ и $ОФ_2$ имеем следующие значения:

$$CK_{ОФ_1} = 1 - 1{,}14^3 \cdot 1{,}1^{-3} = 1 - 1{,}481544 \cdot 0{,}7513148 = -0{,}113106,$$

$$CK_{ОФ_2} = 1 - 1{,}12^3 \cdot 1{,}1^{-3} = 1 - 1{,}404928 \cdot 0{,}7513148 = -0{,}055543.$$

*Таблица 11.4.* ***Платежные нетто-ряды для пяти инвестиционных объектов (тыс. руб.) и стоимость капитала (СК) этих альтернатив***

| $ИО_i$ | Нетто-платежи в момент времени | | | | Стоимость капитала, руб | Объем производства | Вид товара | Лимит сбыта, тыс. ед. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $t$=0 | $t$=1 | $t$=2 | $t$=3 | | | | |
| 1 | −90 | 45 | 40 | 40 | 14 019,53 | 16 000 | тип *Г* | 70,0 |
| 2 | −45 | 24 | 23 | 14 | 13 858,00 | 4 500 | —"— | |
| 3 | −80 | 35 | 35 | 40 | 10 796,39 | 17 500 | тип *Д* | 130,0 |
| 4 | −170 | 75 | 80 | 85 | 28 159,28 | 20 000 | —"— | |
| 5 | −100 | 40 | 50 | 50 | 15 251,69 | 20 000 | —"— | |

Таким образом, целевая функция оптимальной инвестиционно-финансовой программы предприятия имеет вид:

$$14\,019{,}53x_1 + 13\,858{,}0x_2 + 10\,796{,}39x_3 + 28\,159{,}28x_4 + 15\,251{,}69x_5 - \\ -0{,}113106y_1 - 0{,}055543y_2 \to \max.$$

Ограничения в части ликвидности для момента времени $\nu = 0$; $\nu = 1$ имеют следующий общий и применительно к примеру вид:

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{\nu=0}^{t} a_{j\nu}x_j + \sum_{i=1}^{I}\sum_{\nu=0}^{t} d_{i\nu}y_i \le \sum_{\nu=0}^{t} CC_\nu .$$

Для нашего случая в общем виде можно записать, что для моментов времени $\nu = 0$ и $\nu = 1$ соответственно имеем:

$$a_{10}x_1 + a_{20}x_2 + a_{30}x_3 + a_{40}x_4 + a_{50}x_5 + d_{10}y_1 + d_{20}y_2 \le CC_0,$$

где $a_{j0}$ —отрицательные сальдо платежей $j$ *ИО* в момент времени $\nu = 0$ (см. табл. 11.4); $d_{i0}$ —объектов финансирования ($d_{10} = d_{20} = -1$, так как оба объекта $ОФ_1$ и $ОФ_2$ в момент времени $\nu = 0$ обеспечивают поступление (положительное сальдо) платежей:

$$(a_{10} + a_{11})\,x_1 + (a_{20} + a_{21})\,x_2 + (a_{30} + a_{31})\,x_3 + (a_{40} + a_{41})\,x_4 + (a_{50} + \\ + a_{51}x_5) + (d_{10} + d_{11})\,y_1 + (d_{20} + d_{21})\,y_2 \le CC_0 + CC_1.$$

Применительно к нашему примеру имеем:

**а)** для момента времени $\nu = 0$

$$90\,000x_1 + 45\,000x_2 + 80\,000x_3 + 170\,000x_4 + \\ + 100\,000x_5 - y_1 - y_2 \le 50\,000;$$

**б)** для момента времени $\nu = 1$

$$(90\,000 + (-45\,000))\,x_1 + (45\,000 + (-24\,000))\,x_2 + (80\,000 + (-35\,000))\,x_3 + \\ + (170\,000 + (-75\,000))\,x_4 + (100\,000 + (-40\,000))\,x_5 + (-1 + 0)\,y_1 + \\ +(-1 + 0)\,y_2 \le 50\,000 + 0.$$

Проведя подсчеты, при $\nu = 1$ в итоге получим:

$$45\,000x_1 + 16\,000x_2 + 45\,000x_3 + 95\,000x_4 + 60\,000x_5 - y_1 - y_2 \le 50\,000.$$

Аналогичным образом, проведя подстановки значений из табл. 11.4, для последующих моментов времени $\nu = 2; 3$ получим следующие неравенства:

**в)** для момента времени $\nu = 2$

$$5\,000x_1 - 2\,000x_2 + 10\,000x_3 + 15\,000x_4 + 10\,000x_5 - y_1 - y_2 \le 50\,000;$$

**г)** для момента времени $\nu = 3$

$$-35\,000x_1 - 26\,000x_2 - 30\,000x_3 - 70\,000x_4 - 40\,000x_5 - y_1 - y_2 \le 50\,000.$$

Ограничения условий производства и сбыта продукции имеют вид:

$$16\,000x_1 + 4\,500x_2 \le 75\,000;$$
$$17\,500x_3 + 20\,000x_4 + 20\,000x_5 \le 130\,000.$$

Граничные условия реализации проекта (программы) имеют вид:

$$x_1 \le 3;$$
$$x_j \ge 0 \text{ для } j = 1,\dots,5;$$
$$y_1 \le 1\,350\,000;$$
$$y_2 \le 800\,000;$$
$$y_i \ge 0 \text{ для } i = 1;2.$$

Итак, мы получаем следующую математическую модель:

**1)** *целевую функцию* $F = 14\,019{,}53x_1 + 13\,858{,}0x_2 + 10\,796{,}39x_3 + 28\,159{,}28x_4 + 15\,251{,}69x_5 - 0{,}113106y_1 - 0{,}055543y_2 \to \max$;

**2)** *ограничения* для моментов времени $\nu = 0,\dots,3$

**а)** в части ликвидности инвестиционных и финансовых объектов:

$$90\,000x_1 + 45\,000x_2 + 80\,000x_3 + 170\,000x_4 + 100\,000x_5 - \\ - y_1 - y_2 \le 50\,000;$$
$$45\,000x_1 + 16\,000x_2 + 45\,000x_3 + 95\,000x_4 + 60\,000x_5 - \\ - y_1 - y_2 \le 50\,000;$$
$$5\,000x_1 - 2\,000x_2 + 10\,000x_3 + 15\,000x_4 + 10\,000x_5 - \\ -y_1 - y_2 \le 50\,000;$$

$$-35\,000x_1 - 26\,000x_2 - 30\,000x_3 - 70\,000x_4 - 40\,000x_5 - \\ - y_1 - y_2 \le 50\,000;$$

б) в части условий производства и сбыта продукции

$$16\,000x_1 + 4\,500x_2 \le 75\,000;$$

$$17\,500x_3 + 20\,000x_4 + 20\,000x_5 \le 130\,000;$$

3) *граничные условия реализуемости проекта*

$$x_1 \le 3;$$
$$x_j \ge 0 \text{ для } j = 1,...,5;$$
$$y_1 \le 1\,350\,000;$$
$$y_2 \le 800\,000;$$
$$y_i \ge 0 \text{ для } i = 1;2$$

Используя симплекс-метод и решая эту систему на ЭВМ или вручную, получаем следующие результаты:

$$x_1 = 0;\ x_2 = 15{,}56;\ x_3 = 0;\ x_4 = 6{,}5;\ x_5 = 0;$$
$$y_1 = 955\,000;\ y_2 = 800\,000.$$

Если подставить значения данных переменных в целевую функцию, то получим:

$$F_{\max} = 14\,019{,}53x_1 + 13\,858{,}0x_2 + 10\,796{,}39x_3 + 28\,159{,}28x_4 + \\ +15\,251{,}69x_5 - 0{,}113106y_1 - 0{,}055543y_2 = 13\,858 \cdot 15{,}56 + 28\,159{,}28 \cdot 6{,}5 - \\ -0{,}113106 \cdot 955\,000 - 0{,}055543 \cdot 800\,000 = 215\,630{,}48 + 183\,035{,}32 - \\ -108\,016{,}23 - 44\,434{,}4 = 246\,215{,}17 \text{ руб.}$$

Таким образом, оптимум инвестиционно-финансовой программы соответствует максимальной стоимости капитала, равной 246 215,17 руб.

В целом одноступенчатая динамическая модель имеет высокую степень реалистичности, требуя более высоких затрат для нахождения оптимального решения, что обусловливает применение машинных методов расчета и применения ЭВМ для его нахождения. Устранить допущения о независимости *ИО* и *ОФ*, не всегда имеющих место на практике, а также некоторые противоречия в предпосылках, принятых в отношении целевой функции и условий ликвидности, помогает многоступенчатая динамическая модель.

## 11.4. Многоступенчатая динамическая модель оптимизации принятия решений при синхронном инвестиционно-финансовом планировании

*Динамическая многоступенчатая модель* предложена в [86, 87] Г. Хаксом и Г. Вайгартнером; при этом инвестиционные и фи-

нансовые мероприятия могут быть реализованы в различные моменты времени. Целевая функция модели связана с максимизацией конечной стоимости имущества инвестиционной и финансовой программ. Полученное перед окончанием планового периода положительное сальдо финансовых средств может быть инвестировано на какой-то период в форме краткосрочных финансовых инвестиций под конкретный постоянный процент в неограниченном объеме. Следовательно, в данной модели не требуется, как в одноступенчатой модели, расчетная процентная ставка. Здесь предполагается, что в условиях ликвидности поступления платежей и выплаты рассматриваются в определенные моменты времени; при этом инвестиционные объекты и объекты финансирования могут реализовываться неоднократно; *ИО*, как правило, являются неделимыми, а платежные ряды *ИО* и *ОФ* независимы от степени их реализации.

Целевая функция многоступенчатой динамической модели может быть сформулирована различными способами:

**а)** как функция *максимизации конечной стоимости имущества* (*КСИ*), представляющей собой положительное сальдо платежей в последний учитываемый момент времени планового периода $T$:

$$КСИ = CC_T - \sum_{j=1}^{J-1} a_{jT}\ x_j + \sum_{i=1}^{I} d_{iT} \cdot y_i + (1-h) \cdot x_{jT-1} \to \max,$$

где $CC_T$ —собственные средства; $\sum_{j=1}^{J-1} a_{jT} \cdot x_j + \sum_{i=1}^{I} d_{iT} \cdot y_i$ — отрицательные сальдо платежей (ОСП) *ИО* или *ОФ*; $(1+h) \cdot x_{jT-1}$ — ревальвированные краткосрочные финансовые инвестиции предыдущего периода (РКФИПП); $h$ — процентная ставка краткосрочной финансовой инвестиции;

**б)** если положительные сальдо в другие моменты времени учитываются в форме краткосрочных финансовых инвестиций (*КФИ*), то *КСИ* интерпретируется как гипотетическая *краткосрочная финансовая инвестиция*, и при введении соответствующей переменной $x_{jT}$ целевая функция имеет вид:

$$КСИ = x_{jT} \to \max.$$

К *дополнительным* относятся:

**а)** условия ликвидности в момент времени $t = 0$:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{J-1} a_{j0} x_j}_{ОСП\ ИО} + \underbrace{\sum_{i=1}^{I} d_{i0} y_i}_{ОСП\ ОФ} + \underbrace{x_{j0}}_{КФИ} = \underbrace{CC_0}_{СС};$$

**б)** условия ликвидности в любой другой момент времени $t = 1,\ldots, T$:

$$\sum_{j=1}^{J-1} a_{jt} x_j + \sum_{i=1}^{I} d_{it} y_i + x_{jt} - (1+h) \cdot x_{jt-1} = CC_t;$$

*ОСП ИО ОСП ОФ КФИ РКФИПП СС*

**в)** условия реализации проекта

$$0 \le x_j \le X_j;\ 0 \le y_i \le Y_i;\ x_{jt} \ge 0;\ j = \overline{1, J-1};\ i = \overline{1, I};\ t = \overline{0, T-1},$$

где $x_j$ — количество единиц инвестиционных объектов; $y_i$ — объем использования $i$-го *ОФ* (руб.); $x_{jt}$ — объем реализации *КФИ* (руб.) в момент времени $t$; $X_j$ — максимально реализуемые единицы $j$-го инвестиционного объекта; $Y_i$ — максимально реализуемый объем $i$-го объекта финансирования; $CC_t$ — имеющиеся в момент времени $t$ собственные средства.

Оптимальное решение по многоступенчатой динамической модели находится с помощью одного из методов линейного программирования по аналогии с вышерассмотренным, причем из оптимального решения определяются расчетные процентные ставки.

***Пример 11.5.*** У предприятия АВС (пример 11.4, § 11.3) расширено число инвестиционных объектов до 7, а объектов финансирования — до 3 (табл. 11.5); при этом есть следующие дополнительные возможности: **а)** две возможности инвестиций в момент времени $t = 1$ ($ИО_6$, $ИО_7$); **б)** $ОФ_3$ — кредит в момент $t = 1$ с верхней границей 1,0 млн. руб.; **в)** краткосрочные финансовые инвестиции (*КФИ*), при которых положительное сальдо финансовых средств может инвестироваться в неограниченном объеме на один период под 8%. Пределы сбыта в данном случае несущественны. В момент времени $t = 0$ в распоряжении предприятия есть собственные средства ($CC_0$) в объеме 50 тыс. руб. Требуется отыскать оптимальную инвестиционно-финансовую программу методом синхронного планирования и с помощью многоступенчатой динамической модели.

*Таблица 11.5.* ***Платежные нетто-ряды для семи инвестиционных объектов и трех объектов финансирования***

| $ИО_j$, $ОФ_i$ | *Нетто-платежи в момент времени, тыс. руб.* | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $t$=0 | $t$=1 | $t$=2 | $t$=3 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $j$=1 | −90,0 | 45,0 | 40,0 | 40,0 |
| 2 | −45,0 | 24,0 | 23,0 | 14,0 |
| 3 | −80,0 | 35,0 | 35,0 | 40,0 |
| 4 | −170,0 | 75,0 | 80,0 | 85,0 |
| 5 | −100,0 | 40,0 | 50,0 | 50,0 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 0 | −60,0 | 40,0 | 40,0 |
| 7 | 0 | −40,0 | 23,0 | 24,0 |
| $i$=1 | 1 | 0 | 0 | −1,481544 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | −1,404928 |
| 3 | 0 | 1 | −0,12 | −1,12 |

Р е ш е н и е. Сформируем многоступенчатую динамическую модель:

1) целевая функция $F = x_{83} \to \max$;

2) дополнительные условия:

а) условия ликвидности

$$t = 0: 90\,000x_1 + 45\,000x_2 + 80\,000x_3 + 170\,000x_4 + 100\,000x_5 - y_1 - y_2 + x_{80} = 50\,000;$$

$$t = 1: -45\,000x_1 - 24\,000x_2 - 35\,000x_3 - 75\,000x_4 - 40\,000x_5 + 60\,000x_6 + 40\,000x_7 - y_3 - 1{,}08x_{80} + x_{81} = 0;$$

$$t = 2: -40\,000x_1 - 23\,000x_2 - 35\,000x_3 - 80\,000x_4 - 50\,000x_5 - 40\,000x_6 - 23\,000x_7 + 0{,}12y_3 - 1{,}08x_{81} + x_{82} = 0;$$

$$t = 3: -40\,000x_1 - 24\,000x_2 - 40\,000x_3 - 85\,000x_4 - 50\,000x_5 - 40\,000x_6 - 24\,000x_7 + 1{,}481544y_1 + 1{,}404928y_2 + 1{,}12y_3 - 1{,}08x_{82} + x_{83} = 0;$$

б) условия реализации проекта:

$$x_1 \le 3;$$

$$x_j \ge 0 \text{ и в целых числах, для } j = 1,\dots,7;$$

$$y_1 \le 1\,350\,000;$$

$$y_2 \le 800\,000;$$

$$y_3 \le 1\,000\,000;$$

$$y_i \ge 0 \text{ для } i = 1,2,3;$$

$$x_{8t} \ge 0 \text{ для } t = 0,\dots,2.$$

Если решить данную систему, то получим следующее оптимальное решение: $x_1 = 0$; $x_2 = 48$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$; $x_5 = 0$; $x_6 = 36$; $x_7 = 0$; $x_{80} = 7\,407{,}41$; $x_{81} = 0$; $x_{82} = 2\,424\,000$; $x_{83} = 1\,014\,180{,}56$;

$$y_1 = 1\,317\,407{,}41; \quad y_2 = 800\,000; \quad y_3 = 1\,000\,000.$$

Таким образом, по данному решению *рекомендуется*:

а) реализовать 48 ед. $ИО_2$ и 36 ед. $ИО_6$;

б) взять кредиты в размере 1 317 407,41 руб.; 800 000 руб. и 1 000 000 руб.;

в) в моменты времени $t = 0$, $t = 2$ и $t = 3$ использовать краткосрочные финансовые инвестиции в объеме 7 407,41; 2 424 000 и 1 014 180,56 руб.

Финансовые инвестиции при $t = 3$ одновременно соответствуют значению целевой функции, или конечной стоимости имущества, для оптимальной целевой программы.

В [55] показано, что если отказаться от целочисленности параметров инвестиционных объектов, допустив их делимость, то *оптимальное* решение примет вид:

$$x_1 = 0;\ x_2 = 48{,}89;\ x_3 = 0;\ x_4 = 0;\ x_5 = 0;\ x_6 = 36{,}22;\ x_7 = 0;\ x_{80} = 0;$$
$$x_{81} = 0;\ x_{82} = 2\,453\,333{,}33;\ x_{83} = 1\,027\,795{,}42;$$
$$y_1 = 1\,350\,000;\ y_2 = 800\,000;\ y_3 = 1\,000\,000.$$

Многоступенчатая динамическая модель позволяет также определять *теневые цены вторичных условий ликвидности* в момент времени $t$, давая информацию о возможном увеличении значения целевой функции (*КСИ*), если в распоряжении инвестора дополнительно есть определенная денежная единица (собственных средств), интерпретируемая как фактор начисления процентов на применение этой денежной единицы в интервале $[t, T]$, позволяющая проводить расчет расчетных процентных ставок, подробно рассмотренный в [55].

В целом введение условия целочисленности затрудняет нахождение оптимального решения, обусловливая даже при небольшом числе переменных необходимость применения эффективных программ линейной оптимизации в целых числах на ЭВМ с учетом ряда предположений о характере краткосрочных финансовых инвестиций, взаимонезависимости ИО, заранее заданных производственной программы, сроков эксплуатации объектов и др. Взаимосвязь производственных и инвестиционных переменных налагает дополнительные условия необходимости учета загрузки производственных мощностей изготовлением определенной продукции, выбора методов производства и т. д. Подобные модели, дифференцируясь по структуре, подразделяются на линейные [188—190] и нелинейные [91—97] модели оптимизации. Специфика их составления и нахождения оптимальных решений отражена в [55].

# Заключение

Сегодня всеми в мире признается *приоритет экономики* в обеспечении внутренней и внешней безопасности государств, в регулировании социальных отношений, складывающихся в отношении производства и распределения благ в обществе на базе основополагающих принципов: эффективности производства, выражающегося в снабжении граждан государства максимальным количеством продуктов при заданном объеме затрат или в выпуске заданного количества продуктов при минимальном объеме затрат; справедливости распределения благ, выражающегося в стремлении сгладить неравенство доходов граждан страны и в увеличении доходов каждого по его вкладу в рост эффективности производства; стабильности экономической жизни государства при низких темпах инфляции и безработицы.

Конечный продукт для граждан государства или конечный продукт производственного назначения складывается из: продукта для потребительского рынка; продукта для развития социальной инфраструктуры — науки, культуры, здравоохранения, жилищно-коммунального хозяйства, бытового обслуживания, пассажирского транспорта и связи; продукта оборонного назначения; продукта для *резервов* на случай чрезвычайных ситуаций; продукта для внешнеэкономической деятельности. Исходя из государственных приоритетов должно определяться оптимальное распределение национальных ресурсов по каждому непроизводственному направлению конечного продукта.

В соответствии с принципом эффективности производства желательно использовать национальные ресурсы таким образом, чтобы получить быстрый рост конечного продукта непроизводственного назначения в оптимальном ассортименте при справедливом распределении доходов и стабильности государства. Координация роста доходов граждан в зависимости от их вклада в рост эффективности производства и сглаживание неравенства их доходов становятся основой внутренней экономической безопасности. Для гарантии стабильности государства нужен не быстрый рост, а устойчивое увеличение темпов экономического роста на базе развития отраслей, как определяющих научно-технический прогресс, так и обеспечивающих сбалансированное развитие экономики и достижение полной занятости исходя из динамики структуры конечного спроса. Естественно, что при таком ходе событий обеспечивается и стабильность национальной валюты.

Для решения этих и других более конкретных задач и применимы экономико-математические методы, рассмотренные в этой книге.

# Приложение
# Основные расчетные формулы характеристик разновидностей систем массового обслуживания

## Принятые условные обозначения

| | |
|---|---|
| $П_{вх}$ | Входящий поток заявок |
| $П_{вых}$ | Выходящий поток заявок |
| $П_{об}$ | Поток обслуживаний заявок |
| $П_{ух}$ | Поток уходов заявок из очереди необслуженными |
| $\text{in}П$ | Интенсивность потока $П$ |
| $\lambda$ | Интенсивность входящего потока $П_{вх}$ |
| $\nu$ | Интенсивность выходящего потока заявок $П_{вых}$ |
| $\mu$ | Интенсивность потока обслуживаний $П_{об}$ |
| $\alpha$ | Интенсивность потока уходов $П_{ух}$ |
| $\beta$ | Приведенная интенсивность потока уходов |
| $\rho$ | Показатель нагрузки системы (график) |
| $\psi$ | Показатель нагрузки системы, приходящейся на один канал |
| $m$ | Максимальное число мест в очереди, ограничивающее длину очереди заявок |
| $i$ | Число источников заявок |
| $s_k$ | $k$-е состояние системы, характеризующееся $k$ заявками в системе |
| $p_k$ | Вероятность $k$-го состояния системы |
| $p_0$ | Вероятность простаивания всей системы, т.е. вероятность того, что все каналы свободны |
| $p_{сис}$ | Вероятность принятия заявки в систему |
| $p_{отк}$ | Вероятность отказа заявке в принятии ее в систему |
| $p_{об}$ | Вероятность того, что заявка будет обслужена |
| $p_{ух}$ | Вероятность ухода заявки из очереди необслуженной |

| | |
|---|---|
| $p_{акт}$ | Коэффициент активности (готовности) |
| $A$ | Абсолютная пропускная способность системы |
| $Q$ | Относительная пропускная способность системы |
| $N_{оч}$ | Случайное число заявок в очереди |
| $N_{об}$ | Случайное число заявок под обслуживанием |
| $N_{сис}$ | Случайное число заявок в системе |
| $\overline{N}_{оч}$ | Среднее число заявок в очереди |
| $\overline{N}_{об}$ | Среднее число заявок под обслуживанием |
| $\overline{N}_{сис}$ | Среднее число заявок в системе |
| $T_{оч}$ | Случайное время ожидания заявки в очереди |
| $T'_{об}$ | Случайное время пребывания заявки под обслуживанием, относящееся ко всем заявкам, как обслуженным, так и получившим отказ |
| $T_{сис}$ | Случайное время пребывания заявки в системе |
| $T_{ож}$ | Случайное время, ограничивающее ожидание заявки в очереди |
| $\overline{T}_{оч}$ | Среднее время ожидания заявки в очереди |
| $\overline{T}'_{об}$ | Среднее время пребывания заявки под обслуживанием, относящееся ко всем заявкам, как обслуженным, так и получившим отказ |
| $\overline{T}_{об}$ | Среднее время обслуживания заявки, относящееся только к обслуженным заявкам |
| $\overline{T}_{сис}$ | Среднее время пребывания заявки в системе |
| $\overline{T}_{ож}$ | Среднее время, ограничивающее ожидание заявки в очереди |
| $K$ | Случайное число занятых каналов |
| $\overline{K}$ | Среднее число занятых каналов |
| $N_{пас}$ | Случайное число источников заявок, находящихся в пассивном состоянии |
| $\overline{N}_{пас}$ | Среднее число источников заявок, находящихся в пассивном состоянии |
| $N_{акт}$ | Случайное число источников заявок, находящихся в активном состоянии |
| $\overline{N}_{акт}$ | Среднее число источников заявок, находящихся в активном состоянии |

*Таблица П1.* ***Предельные характеристики эффективности функционирования одноканальной СМО с ожиданием***

| № п/п | *Параметры* | *Обозначения, значения* |
|---|---|---|
| **1** | Среднее время обслуживания одной заявки | $\overline{T}^{\forall}_{об} = \overline{T}_{об} = 1 / \mu$ |
| **2** | Нагрузка (трафик) системы | $\rho = (\lambda / \mu) < 1$ |
| **3** | Вероятности состояний | $p_k = p^k(1-p);\ k = 0, 1, 2, \ldots$ |
| **4** | Вероятность отказа | $p_{отк} = 0$ |
| **5** | Вероятность того, что заявка будет принята в систему | $p_{сис} = 1$ |
| **6** | Относительная пропускная способность СМО | $Q = 1$ |
| **7** | Абсолютная пропускная способность СМО | $A = \lambda$ |
| **8** | Интенсивность выходящего потока заявок | $\nu = \lambda$ |
| **9** | Среднее число заявок в очереди | $\overline{N}_{оч} = \rho^2 / (1-\rho)$ |
| **10** | Среднее число заявок под обслуживанием | $\overline{N}_{об} = \rho$ |
| **11** | Среднее число заявок в системе | $\overline{N}_{сис} = \overline{N}_{оч} + \overline{N}_{об} = \rho / (1-\rho)$ |
| **12** | Среднее время ожидания заявки в очереди | $\overline{T}_{оч} = \overline{N}_{оч} / \lambda = p^2 / [\lambda(1-\rho)] = p / [\mu(1-p)]$ |
| **13** | Среднее время пребывания заявки в системе (как в очереди, так и под обслуживанием) | $\overline{T}_{сис} = \overline{T}_{оч} + \overline{T}_{об} = (1/\lambda)\overline{N}_{сис} = \rho / [\lambda(1-\rho)] = 1 / [\mu(1-\rho)]$ |

*Таблица П2.* ***Предельные характеристики эффективности функционирования одноканальной СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди***

| № п/п | Предельные характеристики | Обозначения, формулы |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | Показатель нагрузки (трафик) системы | $\rho = \lambda / \mu$ |
| 2 | Вероятности состояний СМО, выраженные через показатель нагрузки ρ | $p_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}, & \text{если} \quad \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{m+2}, & \text{если} \quad \rho = 1 \end{cases}$ <br> $p_k = \rho^k p_0; \quad k = 1, \ldots, m+1$ |
| 3 | Вероятности состояний СМО, выраженные через средний интервал времени $\overline{T}$ между соседними поступающими заявками, и среднее время $\overline{T}_{об}$ обслуживания одной заявки | $p_0 = \begin{cases} \dfrac{\left(\overline{T} - \overline{T}_{об}\right)\overline{T}^{m+1}}{\overline{T}^{m+2} - \overline{T}_{об}^{m+2}}, & \text{если} \quad \overline{T} \neq \overline{T}_{об} \\ \dfrac{1}{m+2}, & \text{если} \ \overline{T} \neq \overline{T}_{об} \end{cases}$ <br> $p_k = \left(\dfrac{\overline{T}_{об}}{\overline{T}}\right)^k p_0; \ k = 1, \ldots, m+1$ |
| 4 | Вероятность отказа | $p_{отк} \begin{cases} \dfrac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}, & \text{если} \quad \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{m+2}, & \text{если} \quad \rho = 1 \end{cases}$ |
| 5 | Вероятность того, что заявка будет принята в систему (не получит отказ) | $p_{сис} = 1 - p_{отк} = \begin{cases} \dfrac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}}, & \text{если} \quad \rho \neq 1 \\ \dfrac{m+1}{m+2}, & \text{если} \quad \rho = 1 \end{cases}$ |
| 6 | Относительная пропускная способность СМО | $Q = p_{сис} = 1 - p_{отк}$ |
| 7 | Абсолютная пропускная способность СМО | $A = \lambda Q$ |

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 8 | Интенсивность выходящего потока заявок | $\text{in}\ \Pi_{\text{вых}} = \nu = A$ |
| 9 | Среднее число заявок в очереди | $\overline{N}_{\text{оч}} = \begin{cases} \dfrac{\rho^2\left[1-\rho^m(m+1-m\rho)\right]}{\left(1-\rho^{m+2}\right)(1-\rho)}, & \text{если } \rho \neq 1 \\ \dfrac{m(m+1)}{2(m+2)}, & \text{если } \rho = 1 \end{cases}$ |
| 10 | Среднее число заявок, находящихся под обслуживанием | $\overline{N}_{\text{об}} = \rho Q = \begin{cases} \dfrac{\rho\left(1-\rho^{m+1}\right)}{1-\rho^{m+2}}, & \text{если } \rho \neq 1 \\ \dfrac{m+1}{m+2}, & \text{если } \rho = 1 \end{cases}$ |
| 11 | Среднее число заявок, находящихся в системе (как в очереди, так и под обслуживанием) | $\overline{N}_{\text{сис}} = \overline{N}_{\text{оч}} + \overline{N}_{\text{об}} = \begin{cases} \dfrac{\rho\left[1-(m+2)\rho^{m+1}+(m+1)\rho^{m+2}\right]}{\left(1-\rho^{m+2}\right)(1-\rho)}, & \text{если } \rho \neq 1 \\ \dfrac{m+1}{2}, & \text{если } \rho = 1 \end{cases}$ |
| 12 | Среднее время ожидания заявки в очереди | $\overline{T}_{\text{оч}} = \dfrac{1}{\lambda}\overline{N}_{\text{оч}}$ (формула Литтла) |
| 13 | Среднее время пребывания заявки в системе (как в очереди, так и под обслуживанием) | $\overline{T}_{\text{сис}} = \dfrac{1}{\lambda}\overline{N}_{\text{сис}}$ (формула Литтла) |
| 14 | Среднее время обслуживания одной заявки, относящееся только к обслуженным заявкам | $\overline{T}_{\text{об}} = \dfrac{1}{\mu}$ |
| 15 | Среднее время обслуживания одной заявки, относящееся ко всем заявкам, как обслуженным, так и получившим отказ | $\overline{T}^{\forall}_{\text{об}} = \dfrac{1}{\lambda}\overline{N}_{\text{об}}$ (формула Литтла) |

*Таблица П3. Характеристики эффективности функционирования многоканальной СМО с ожиданием и расширенной взаимопомощью между каналами*

| | *Предельные характеристики* | *Обозначения, формулы* |
|---|---|---|
| | 1 | 2 |
| 1 | Показатель (коэффициент) нагрузки системы | $\rho = \lambda / \mu$ |
| 2 | Показатель нагрузки системы, приходящейся на один канал | $\psi = \rho / n = \lambda / n\mu < 1$ |
| 3 | Вероятности состояний | $p_{k,+} = \psi^k (1 - \psi),\ k = 0,1,2,\ldots$ |
| 4 | Вероятность отказа | $p_{\text{отк},+} = 0$ |
| 5 | Вероятность приема в систему | $p_{\text{сис},+} = 1$ |
| 6 | Вероятность того, что заявка будет обслужена | $p_{\text{об},+} = 1$ |
| 7 | Относительная пропускная способность | $Q_+ = 1$ |
| 8 | Абсолютная пропускная способность | $A_+ = \lambda$ |
| 9 | Интенсивность выходящего потока | $\nu_+ = \lambda$ |
| 10 | Среднее число заявок, ожидающих в очереди | $\overline{N}_{\text{оч},+} = \psi^{n+1} / (1 - \psi)$ |
| 11 | Среднее число заявок, находящихся в состоянии обслуживания | $\overline{N}_{\text{об},+} = \psi(1 - \psi^n) / (1 - \psi)$ |
| 12 | Среднее число заявок, находящихся в системе | $\overline{N}_{\text{сис},+} = \overline{N}_{\text{оч},+} + \overline{N}_{\text{об},+} = \psi / (1 - \psi)$ |
| 13 | Среднее число занятых каналов | $\overline{K}_+ = n\psi$ |
| 14 | Среднее время ожидания заявки в очереди | $\overline{T}_{\text{оч},+} = (1 / \lambda)\overline{N}_{\text{оч},+} = \psi^{n+1} / \lambda(1 - \psi)$ |
| 15 | Среднее время пребывания заявки в системе | $\overline{T}_{\text{сис},+} = (1 / \lambda)\overline{N}_{\text{сис},+} = \psi / \lambda(1 - \psi)$ |
| 16 | Равномерная взаимопомощь между каналами не изменяет вероятности отказа | $p_{\text{отк},+} = p_{\text{отк}} = 0$ |
| 17 | Равномерная взаимопомощь между каналами не изменяет вероятности приема в систему | $p_{\text{сис},+} = p_{\text{сис}} = 1$ |
| 18 | Равномерная взаимопомощь между каналами не изменяет вероятности того, что заявка будет обслужена | $p_{\text{об},+} = p_{\text{об}} = 1$ |

| 1 | 2 |
|---|---|
| **19** Равномерная взаимопомощь между каналами не изменяет относительную пропускную способность СМО | $Q_+ = Q = 1$ |
| **20** Равномерная взаимопомощь между каналами не изменяет абсолютную пропускную способность СМО | $A_+ = A = \lambda$ |
| **21** Равномерная взаимопомощь между каналами не изменяет среднего числа занятых каналов | $\overline{K}_+ = \overline{K} = n\psi$ |
| **22** Равномерная взаимопомощь между каналами уменьшает среднюю длину очереди | $\overline{N}_{\text{оч},+} < \overline{N}_{\text{оч}}$ |
| **23** Равномерная взаимопомощь между каналами уменьшает среднее число заявок под обслуживанием | $\overline{N}_{\text{об},+} < \overline{N}_{\text{об}}$ |
| **24** Равномерная взаимопомощь между каналами уменьшает среднее число заявок в системе | $\overline{N}_{\text{сис},+} < \overline{N}_{\text{сис}}$ |
| **25** Равномерная взаимопомощь между каналами уменьшает среднее время ожидания заявки в очереди | $\overline{T}_{\text{оч},+} < \overline{T}_{\text{оч}}$ |
| **26** Равномерная взаимопомощь между каналами уменьшает среднее время пребывания заявки в системе | $\overline{T}_{\text{сис},+} < \overline{T}_{\text{сис}}$ |

*Таблица П4. **Характеристики функционирования многоканальной СМО с ожиданием без ограничения на длину очереди и с ограничением на время ожидания в очереди***

| № п/п | Предельные характеристики | Обозначения, формулы |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | Показатель (коэффициент) нагрузки СМО (трафик) | $\rho = \lambda / \mu$ |
| 2 | Показатель (коэффициент) нагрузки, приходящейся на один канал | $\psi = \rho / n$ |
| 3 | Приведенная интенсивность потока «уходов» | $\beta = \omega / \mu$ |
| 4 | Вероятность того, что все $n$ каналов свободны (вероятность простаивания всей системы) | $p_0 = \left( \sum_{k=0}^{n} \rho^k / k! + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\rho^{k-n}}{(n+\beta)(n+2\beta)\ldots[n+(k-n)\beta]} \right)^{-1}$ |
| 5 | Вероятности состояний | $p_k = \begin{cases} \frac{\rho^k}{k!} p_0 & k = 1, \ldots, n \\ \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\rho^k}{(n+\beta)(n+2\beta)\ldots[n+(k-n)\beta]} \cdot p_0 & \\ k = n+1, n+2, \ldots & \end{cases}$ |
| 6 | Среднее число заявок в очереди | $\overline{N}_{\text{оч}} = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(k-n)\rho^{k-n}}{(n+\beta)(n+2\beta)\ldots[n+(k-n)\beta]} = \frac{\rho - \overline{K}}{\beta}$ |

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 7 | Среднее число заявок под обслуживанием (т.е. среднее число занятых каналов) | $\overline{K} = \overline{N}_{об} = \rho - \beta\,\overline{N}_{оч} = \sum_{k=1}^{n-1} k p_k + n\left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} p_k\right)$ |
| 8 | Среднее число заявок в системе | $\overline{N}_{сис} = \overline{N}_{оч} + \overline{N}_{об} = (1-\beta)\,\overline{N}_{оч} + \rho = \dfrac{\rho + (\beta - 1)\overline{K}}{\beta}$ |
| 9 | Абсолютная пропускная способность | $A = \lambda - \omega \cdot \overline{N}_{оч}$ |
| 10 | Относительная пропускная способность | $Q = A / \lambda = 1 - (\omega / \lambda)\overline{N}_{оч}$ |
| 11 | Вероятность того, что заявка будет обслужена | $p_{об} = Q = \begin{cases} p_0 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\rho^k}{k!}, \text{если } 0 < \overline{T}_{ож} < \dfrac{1}{n\mu} \\ p_0 \cdot \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\rho^k}{k!}, \text{если } \dfrac{1}{n\mu} \le \overline{T}_{ож} < \dfrac{2}{n\mu} \\ p_0 \cdot \left( \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\rho^k}{k!} + \dfrac{1}{n!} \cdot \sum_{k=n+1}^{n+i-\lambda} \dfrac{\rho^k}{(n+\beta)(n+2\beta)\ldots[n+(k-n)\beta]} \right), \\ \text{если } (i-1)/(n\mu) \le \overline{T}_{ож} < i(n\mu), i \ge 3 \end{cases}$ |
| 12 | Вероятность ухода заявки из очереди необслуженной | $p_{ух} = 1 - p_{об}$ |

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| **13** | Среднее время ожидания заявки в очереди | $\overline{T}_{\text{оч}} = \begin{cases} \overline{T}_{\text{ож}} \cdot \sum\limits_{k=n}^{\infty} p_k, \text{ если } 0 < \overline{T}_{\text{ож}} < \dfrac{1}{n\mu} \\ \dfrac{1}{n\mu} p_n + \overline{T}_{\text{ож}} \cdot \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} p_k, \text{ если } \dfrac{1}{n\mu} \le \overline{T}_{\text{ож}} < \dfrac{2}{n\mu} \\ \dfrac{1}{n\mu} p_n + \dfrac{1}{n\mu} \cdot \sum\limits_{k=n+1}^{n+1-2} (k-n+1) p_k + \overline{T}_{\text{ож}} \cdot \sum\limits_{k=n+i-1}^{\infty} p_k, \\ \text{если } \dfrac{i-1}{n\mu} \le \overline{T}_{\text{ож}} < \dfrac{i}{n\mu},\ i \ge 3 \end{cases}$ |
| **14** | Среднее время пребывания заявки в системе | $\overline{T}_{\text{сис}} = \overline{T}_{\text{оч}} + \overline{T}^{\forall}_{\text{об}}$ |
| **15** | Среднее время обслуживания одной заявки, относящееся ко всем заявкам — как обслуженным, так и ушедшим из очереди необслуженными | $\overline{T}^{\forall}_{\text{об}} = Q / \mu$ |
| **16** | Среднее время обслуживания одной заявки, относящееся только к обслуженным заявкам | $\overline{T}_{\text{об}} = 1 / \mu$ |

*Таблица П5. Характеристики функционирования замкнутой многоканальной СМО*

| № п/п | Предельные характеристики | Обозначения, формулы |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | Показатель (коэффициент) нагрузки системы, порождаемой каждым источником заявок | $\rho = \lambda / \mu$ |
| 2 | Показатель (коэффициент) нагрузки системы, порождаемой всеми $i$ источниками заявок | $i\rho = i\lambda / \mu$ |
| 3 | Вероятность того, что все $n$ каналов свободны | $p_0 = \frac{1}{i!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!(i-k)!} + \frac{n^n}{n!}\sum_{k=n+1}^{i} \frac{\rho^k}{n^k(i-k)!}\right)^{-1}$ |
| 4 | Вероятность состояний СМО | $p_k = \begin{cases} \frac{i!}{k!(i-k)!}\rho^k p_0, & k = 1,\ldots,n \\ \frac{i!}{n^{k-n}n!(i-k)!}\rho^k p_0, & k = n+1,\ldots,i \end{cases}$ |
| 5 | Среднее число заявок под обслуживание — среднее число занятых каналов | $\overline{N}_{об} = K = n - \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)p_k = n - i!\,p_0 \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k)}{k!(i-k)!}\rho^k$ |
| 6 | Среднее число заявок в системе (в очереди и под обслуживанием) — среднее число источников в пассивном состоянии | $\overline{N}_{сис} = \overline{N}_{пас} = \sum_{k=1}^{i} k\,p_k = 1 - \left(\overline{K} / \rho\right)$ |

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 7 | Среднее число заявок в очереди | $\overline{N}_{\text{оч}} = \overline{N}_{\text{сис}} - \overline{N}_{\text{об}} = i - \overline{K}(1/\rho + 1) = \sum_{k=n+1}^{i}(k-n)\,p_k$ |
| 8 | Абсолютная пропускная способность СМО | $A = \overline{K}\mu = \left(i - \overline{N}_{\text{сис}}\right)\lambda$ |
| 9 | Интенсивность выходящего потока обслуженных заявок | $\nu = A = \overline{K}\mu = \left(i - \overline{N}_{\text{сис}}\right)\lambda$ |
| 10 | Относительная пропускная способность СМО | $Q = 1$ |
| 11 | Средняя интенсивность среднего суммарного входящего потока заявок | $\overline{\Lambda} = A = \overline{K}\mu = \left(i - \overline{N}_{\text{сис}}\right)\lambda = \nu$ |
| 12 | Коэффициент готовности — вероятность того, что произвольный источник находится в активном состоянии | $p_{\text{акт}} = 1 - \frac{1}{i}\overline{N}_{\text{сис}} = \frac{\overline{K}}{i\rho} = \frac{A}{i\lambda} = \frac{\overline{\Lambda}}{i\lambda}$ |
| 13 | Вероятность того, что в момент поступления заявки СМО находилась в состоянии $s_k$ | $\tilde{p}_k = \frac{(i-k)\,p_k}{i - \overline{N}_{\text{сис}}},\ k = 0,1,\ldots,i-1$ |
| 14 | Вероятность того, что поступившая заявка тут же будет принята к обслуживанию | $p_{\text{об}} = \sum_{k=0}^{n-1}\tilde{p}_k = \frac{i!\,p_0}{i - \overline{N}_{\text{сис}}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\rho^k}{k!\left[i-(k+1)\right]!}$ |
| 15 | Вероятность того, что поступившая заявка встанет в очередь для ожидания начала обслуживания | $p_{\text{оч}} = 1 - p_{\text{об}} = \frac{i!\,p_0}{i - \overline{N}_{\text{сис}}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\rho^k}{k!\left[i-(k+1)\right]!} =$ $= \sum_{k=n}^{i-1}\tilde{p}_k = \frac{i!\,n^{n-1}\,p_0}{\left(i - \overline{N}_{\text{сис}}\right)(n-1)!}\sum_{k=0}^{i-1}\frac{\rho^k}{n^k\left[i-(k+1)\right]!}$ |

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| **16** | Среднее время ожидания заявки в очереди | $\overline{T}_{оч} = \frac{1}{n\mu} \cdot \sum_{k=n}^{i-1} (k - n + 1)\tilde{p}_k =$ $= \frac{1}{n\mu\left(i - \overline{N}_{сис}\right)} \cdot \sum_{k=n}^{i-1} (k - n + 1)(i - k) p_k = \frac{1}{\Lambda} \overline{N}_{оч}$ |
| **17** | Среднее время обслуживания заявки | $\overline{T}_{об} = 1 / \mu = \left(1 / \overline{\Lambda}\right) \overline{N}_{об}$ |
| **18** | Среднее время пребывания заявки в системе | $\overline{T}_{сис} = \overline{T}_{оч} + \overline{T}_{об} = \left(1 / \overline{\Lambda}\right) \overline{N}_{сис}$ |
| **19** | Средняя производительность группы источников, находящихся в активном состоянии | $\overline{N}_{акт} i = \left(i - \overline{N}_{пас}\right) \quad i = \left(i - \overline{K} / \rho\right) i$ |
| **20** | Средняя потеря производительности за счет группы источников, находящихся в пассивном состоянии | $\overline{N}_{пас} i = \left(i - \overline{K} / \rho\right) i$ |

*Таблица П6.* ***Характеристики эффективности функционирования многоканальной СМО с отказами взаимопомощью между каналами типа «все как один»***

| № п/п | Предельные характеристики | Обозначения, формулы |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | Показатель (коэффициент) нагрузки системы | $\rho = \lambda / \mu$ |
| 2 | Вероятность того, что все $n$ каналов свободны | $p_{0,+} = \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} = \frac{n}{\rho + n}$ |
| 3 | Вероятность того, что все $n$ каналов заняты | $p_{1,+} = \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} = \frac{\rho}{\rho + n}$ |
| 4 | Вероятность того, что поступившая заявка будет принята к обслуживанию | $p_{об,+} = p_{0,+} \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} = \frac{n}{\rho + n}$ |
| 5 | Вероятность отказа | $p_{отк,+} = p_{1,+} = \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} = \frac{\rho}{\rho + n}$ |
| 6 | Относительная пропускная способность | $Q_+ = p_{об,+} = p_{0,+} = \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} = \frac{n}{\rho + n}$ |
| 7 | Абсолютная пропускная способность | $A_+ = \lambda Q_+ = \frac{\lambda n\mu}{\lambda + n\mu} = \frac{\lambda n}{\rho + n}$ |
| 8 | Среднее число занятых каналов | $\overline{K}_+ = \frac{n\lambda}{\lambda + n\mu} = \frac{n\rho}{\rho + n}$ |
| 9 | Среднее число заявок под обслуживанием | $\overline{N}_{об,+} = \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} = \frac{\rho}{\rho + n}$ |

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 10 | Среднее число заявок в системе | $\overline{N}_{\text{сис},+} = \overline{N}_{\text{об},+} = \dfrac{\lambda}{\lambda + n\mu} = \dfrac{\rho}{\rho + n}$ |
| 11 | Среднее время обслуживания одной заявки, относящееся только к обслуженным заявкам | $\overline{T}_{\text{об},+} = 1 / (n\mu) = \rho / (\lambda n)$ |
| 12 | Среднее время обслуживания одной заявки, относящееся ко всем заявкам, как обслуженным, так и получившим отказ | $\overline{T}^{\forall}_{\text{об},+} = \dfrac{Q_+}{n\mu} = \dfrac{1}{\lambda + n\mu} = \dfrac{1}{\mu(\rho + n)}$ |
| 13 | Среднее время пребывания заявки в системе | $\overline{T}_{\text{сис},+} = \overline{T}^{\forall}_{\text{об},+} = \dfrac{Q_+}{n\mu} = \dfrac{1}{\lambda + n\mu} = \dfrac{1}{\mu(\rho + n)}$ |
| 14 | При введении взаимопомощи типа «все как один» вероятность отказа увеличивается | $p_{\text{отк},+} > p_{\text{отк}}$ |
| 15 | При введении взаимопомощи типа «все как один» относительная пропускная способность уменьшается | $Q_+ < Q$ |
| 16 | При введении взаимопомощи типа «все как один» абсолютная пропускная способность уменьшается | $A_+ < A$ |
| 17 | При введении взаимопомощи типа «все как один» среднее время пребывания заявки в системе уменьшается | $\overline{T}_{\text{сис},+} < \overline{T}_{\text{сис}}$ |

*Таблица П7.* ***Характеристики эффективности функционирования многоканальной СМО с отказами и с равномерной взаимопомощью между каналами***

| № п/п | *Предельные характеристики* | *Обозначения, формулы* |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | Показатель (коэффициент) нагрузки системы | $\rho = \lambda / \mu$ |
| 2 | Показатель нагрузки системы, приходящейся на один канал | $\psi = \rho / n = \lambda / n\mu$ |
| 3 | Вероятности состояний | $p_{0,+} = \left(\sum_{k=0}^{n+m} \psi^k\right)^{-1} = \left\{(1-\psi) / \left(1-\psi^{n+m+1}\right)\right.$ |
| 4 | Вероятность отказа | $p_{\text{отк},+} = p_{n+m,+} = \begin{cases} \dfrac{\psi^{n+m}(1-\psi)}{1-\psi^{n+m+1}}, \text{ если } \psi \neq 1; \\ \dfrac{1}{n+m+1}, \text{ если } \psi = 1 \end{cases}$ <br> $p_{k,+} = \psi^k \, p_{0,+}; \; k = 1, \ldots, n+m$ |
| 5 | Вероятность приема в систему, или, что то же, вероятность того, что заявка будет обслужена | $p_{\text{сис},+} = p_{\text{об},+} = 1 - p_{\text{отк},+} = \begin{cases} \dfrac{1-\psi^{n+m}}{1-\psi^{n+m+1}}, \text{ если } \psi \neq 1 \\ \dfrac{n+m}{n+m+1}, \text{ если } \psi = 1 \end{cases}$ |

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 6 | Относительная пропускная способность | $Q_+ = p_{\text{сис},+} = p_{\text{об},+} = 1 - p_{\text{отк},+} = \begin{cases} \dfrac{1-\psi^{n+m}}{1-\psi^{n+m+1}}, & \text{если } \psi \neq 1 \\ \dfrac{n+m}{n+m+1}, & \text{если } \psi = 1 \end{cases}$ |
| 7 | Абсолютная пропускная способность, равная интенсивности выходящего потока | $A_+ = \nu_+ = \lambda Q_+ = \begin{cases} \dfrac{\lambda\left(1-\psi^{n+m}\right)}{1-\psi^{n+m+1}}, & \text{если } \psi \neq 1 \\ \dfrac{\lambda(n+m)}{n+m+1}, & \text{если } \psi = 1 \end{cases}$ |
| 8 | Среднее число заявок, ожидающих в очереди | $\overline{N}_{\text{оч},+} = \dfrac{\psi^{n+1}\sum\limits_{k=1}^{m} k\psi^{k-1}}{\sum\limits_{k=0}^{n+m}\psi^{k}} = \begin{cases} \dfrac{\psi^{k+1}\left[1-\psi^{m}(m+1-m\psi)\right]}{\left(1-\psi^{n+m+1}\right)(1-\psi)}, & \text{если } \psi \neq 1 \\ \dfrac{m(m+1)}{2(n+m+1)}, & \text{если } \psi = 1 \end{cases}$ |

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 9 | Среднее число заявок, находящихся под обслуживанием | $\overline{N}_{об,+} = \dfrac{\psi\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\psi^{k-1} + n\,\psi^{n}\sum\limits_{k=1}^{m}\psi^{k-1}\right)}{\sum\limits_{k=0}^{n+m}\psi^{k}} = \begin{cases} \dfrac{\psi\left(1-\psi^{n}-n\,\psi^{n+m}+n\,\psi^{n+m+1}\right)}{\left(1-\psi^{n+m+1}\right)\left(1-\psi\right)}, & \text{если } \psi \neq 1 \\ \dfrac{n(n+2m+1)}{2(n+m+1)}, & \text{если } \psi = 1 \end{cases}$ |
| 10 | Среднее число занятых каналов | $\overline{K}_{+} = \dfrac{A_{+}}{\mu} = \begin{cases} \dfrac{n\psi\left(1+n\,\psi^{n+m}\right)}{1-\psi^{n+m+1}}, & \text{если } \psi \neq 1 \\ \dfrac{n(n+m)}{n+m+1}, & \text{если } \psi = 1 \end{cases}$ |
| 11 | Среднее число заявок в системе | $\overline{N}_{сис,+} = \overline{N}_{оч,+} + \overline{N}_{об,+} = \begin{cases} \dfrac{\psi\left[1-(n+m+1)\,\psi^{n+m}+(n+m)\,\psi^{n+m+1}\right]}{\left(1-\psi^{n+m+1}\right)\left(1-\psi\right)}; & \text{если } \psi \neq 1; \\ \dfrac{n+m}{2}, & \text{если } \psi = 1 \end{cases}$ |

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 12 | Среднее время пребывания заявки в системе | $\overline{T}_{\text{сис},+} = (1/\lambda)\overline{N}_{\text{сис},+} = \begin{cases} \dfrac{\psi\left[1-(n+m+1)\psi^{n+m}+(n+m)\psi^{n+m+1}\right]}{\lambda\left(1-\psi^{n+m+1}\right)(1-\psi)}, & \text{если } \psi \neq 1 \\ \dfrac{n+m}{2\lambda}, & \text{если } \psi = 1 \end{cases}$ |
| 13 | Среднее время ожидания заявки в очереди | $\overline{T}_{\text{оч},+} = (1/\lambda)\overline{N}_{\text{оч},+} = \begin{cases} \dfrac{\psi^{n+1}\left[1-\psi^{m}+(m+1-m\psi)\right]}{\lambda\left(1-\psi^{n+m+1}\right)(1-\psi)}, & \text{если } \psi \neq 1 \\ \dfrac{m(m+1)}{2\lambda(n+m+1)}, & \text{если } \psi = 1 \end{cases}$ |
| 14 | Равномерная взаимопомощь между каналами уменьшает вероятность отказа | $p_{\text{отк},+} < p_{\text{отк}}$ |
| 15 | Равномерная взаимопомощь между каналами увеличивает относительную пропускную способность СМО | $Q_+ > Q$ |
| 16 | Равномерная взаимопомощь между каналами увеличивает абсолютную пропускную способность СМО | $A_+ > A$ |
| 17 | Равномерная взаимопомощь между каналами увеличивает среднее число занятых каналов | $\overline{K}_+ > \overline{K}$ |
| 18 | Равномерная взаимопомощь между каналами уменьшает среднюю длину очереди | $\overline{N}_{\text{оч},+} < \overline{N}_{\text{оч}}$ |

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 19 | Равномерная взаимопомощь между каналами уменьшает среднее число заявок, находящихся в состоянии обслуживания | $\overline{N}_{об,+} < \overline{N}_{об}$ |
| 20 | Равномерная взаимопомощь между каналами уменьшает среднее число заявок в системе | $\overline{N}_{сис,+} < \overline{N}_{сис}$ |
| 21 | Равномерная взаимопомощь между каналами уменьшает среднее время ожидания заявки в очереди | $\overline{T}_{оч,+} < \overline{T}_{оч}$ |
| 22 | Равномерная взаимопомощь между каналами уменьшает среднее время пребывания заявки в системе | $\overline{T}_{сис,+} < \overline{T}_{сис}$ |

# Литература


1. *Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н.* Математические методы в экономике. — М.: ДИС, 1997.
2. *Экономико*-математические методы и прикладные модели: / Под ред. В.В. Федосеева. — М.: ЮНИТИ, 1999.
3. *Миркин Я.И.* Ценные бумаги и фондовый рынок. — М.: Перспектива, 1995.
4. *Брайен Дж. О., Шривастава С.* Финансовый анализ и торговля ценными бумагами. — М.: Дело ЛТД, 1995.
5. *Ливингстон Г. Дуглас.* Анализ рисков операций с облигациями на рынке ценных бумаг. — М.: Филинъ, 1998.
6. *Солянкин А.А.* Компьютеризация финансового анализа и прогнозирования в банке. — М.: Финстатинформ, 1998.
7. *Башарин Г.* Начала финансовой математики. — М.: ИНФРА-М, 1997.
8. *Абалкин Л.И.* Курс переходной экономики. — М.: Финстатинформ, 1997.
9. *Рассказов Е.А.* Управление свободными ресурсами банка. — М.: Финансы и статистика, 1996.
10. *Российская* банковская энциклопедия. — М.: Энциклопед. творческая ассоциация, 1995.
11. *Синки Дж., мл.* Управление финансами в коммерческих банках. — М.: Cattalaxy, 1994.
12. *Рэдхэд К., Хьюс С.* Управление финансовыми рисками. — М.: ИНФРА-М., 1996.
13. *Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О.* Теория массового обслуживания в экономической сфере. — М.: ЮНИТИ, 1998.
14. *Жданов С.А.* Экономические модели и методы в управлении. — М.: Дело и сервис, 1998.
15. *Авдулов П.В., Гойзман Э.И., Жандаров А.М.* Методы анализа и обоснования решений в управлении экономикой. — М.: АНХ, 1989.
16. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 1993.
17. *Голубков Е.П., Голубкова Е.Н., Секерин В.Д.* Маркетинг. Выбор наилучшего решения. — М.: Экономика, 1993.
18. *Семенов Я.А.* Операции коммерческого банка с ценными бумагами. — М.: ИПК «МП», 1993.

19. *Четыркин Е.М.* Финансовый анализ производственных инвестиций. — М.: Дело, 1998.
20. *Уздемир А.П.* Динамические целочисленные задачи оптимизации в экономике. — М.: Физматлит, 1995.
21. *Капитоненко В.В.* Финансовая математика и ее приложения. — М.: ПРИОР, 1998.
22. *Горчаков А.А., Орлова И.В., Половников В.А.* Методы экономико-математического моделирования и прогнозирования в новых условиях хозяйствования. — М.: ВЗФЭИ, 1991.
23. *Чернов В.А.* Анализ коммерческого риска. — М.: Финансы и статистика, 1998.
24. *Меньшиков И.С.* Финансовый анализ ценных бумаг. — М.: Финансы и статистика, 1998.
25. *Черчмен У., Акофф Р., Арноф Л.* Введение в исследование операций. — М.: Финансы и статистика, 1977.
26. *Бурков В.К., Ириков В.К.* Модели и методы управления организационными системами. — М.: Наука, 1994.
27. *Ларичев О.И., Мошкович Е.М.* Качественные методы принятия решений. — М.: Наука, 1996.
28. *Управленческое* консультирование. В 2 т. — М., 1992.
29. *Карминский А.М.* и др. Контроллинг в бизнесе. Методологические и практические основы построения контроллинга в организациях. — М.: Финансы и статистика, 1998.
30. *Карминский А.М., Нестеров П.В.* Информатизация бизнеса. — М.: Финансы и статистика, 1997.
31. *Манн Р., Майер Э.* Контроллинг для начинающих. — М.: Финансы и статистика, 1995.
32. *Ойхман Е.Г., Попов Э.В.* Реинжиниринг бизнеса: реинжиниринг организации и информационные технологии. — М.: Финансы и статистика, 1997.
33. *Хан Д.* Планирование и контроль: концепция контроллинга. — М.: Финансы и статистика, 1997.
34. *Синки Дж.* Управление финансами в коммерческих банках. — М.: Catallaxy, 1994.
35. *Майер Э.* Контроллинг как система мышления и управления. — М.: Финансы и статистика, 1993.
36. *Роуз П.* Банковский менеджмент. — М.: Дело, 1995.
37. *СтатЭксперт.* Программные продукты серии «Олимп». — М.: Росэкспертиза, 1996.

38. *СтатЭксперт.* Программа статистического анализа и прогнозирования СтатЭксперт: Руководство пользователя. — М.: Росэкспертиза, 1996.
39. *Фалько С.Г., Носов В.М.* Контроллинг на предприятии. — М.: Знание, 1995.
40. *Фалько С.Г.* Инновационный менеджмент. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996.
41. *Афифи А., Эйзен С.* Статистический анализ. — М.: Мир, 1982.
42. *Горчаков А.А., Скучалина Л.М.* Методические рекомендации по проведению экономико-математического анализа структурных сдвигов в экономике РФ. — М., 1993.
43. *Ким Дж.* и др. Факторный, дискриминантный и кластерный анализ. — М.: Финансы и статистика, 1989.
44. *Горчаков А.А., Орлова И.В.* Компьютерные экономико-математические модели. — М.: ЮНИТИ, 1995.
45. *Бокс Дж.; Дженкинс Г.* Анализ временных рядов, прогноз и управление. — М.: Мир, 1974.
46. *Горчаков А.А., Половников В.А.* Финансовая математика. — М.: ВЗФЭИ, 1995.
47. *Харман Г.Г.* Современный факторный анализ. — М.: Статистика, 1972.
48. *Четыркин Е.М.* Статистические методы прогнозирования. — М.: Статистика, 1977.
49. *Дрепер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ. — М.: Финансы и статистика, 1986.
50. *Статистическое* моделирование и прогнозирование / Под ред. А.Г. Гранберга. — М.: Финансы и статистика, 1990.
51. *Терехов Л.Л.* Кибернетика для экономистов. — М.: Финансы и статистика, 1983.
52. *Федосеев В.В.* Экономико-математические методы и модели в маркетинге. — М.: Финстатинформ, 1996.
53. *Экономико*-математические методы и прикладные модели / В.А. Половников и др. — М.: Финстатинформ, 1997.
54. *Смирнов К.А.* Нормирование и рациональное использование материальных ресурсов. — М.: Высшая школа, 1990.
55. *Курицкий Б.Я.* Поиск оптимальных решений средствами EXCEL 7.0. — С.П: BHV, 1997.
56. *Блех Ю., Гетце У.* Инвестиционные расчеты: Пер. с нем.: Калининград: Янтар. сказ, 1997.
57. *Hwang C.-L, Yoon K.* Multiple (Attribute) Decision Making Methods and Applications. — Berlin, Heidelberg, New-York, 1981.

58. *Zimmermann H.-J., Gutsche L.* Multi-Criteria-Analyse. — Berlin, Heidelberg u. a., 1991.
59. *Weber M.* Entscheidungen bei Mehrfachzielen — Verfahren zur Unterstutzung von Individual- und Gruppenentscheidungen. — Wiesbaden 6, 1983.
60. *Schneeweis C.* Planung, Systemanalytische und entscheidungstheoretische Grundlagen. — Berlin u. a., 1991.
61. *Zangemeister C.* Nutzwertanalyse in der Systemtechnik, 4 Aufl., Berlin, 1976.
62. *Blohm H., Lüder K.* Schwachstellen im Investitionsbereich des Industriebetriebs und Wege zu ihrer Beseitigung. 7 Auf l. — Munchen, 1991.
63. *Dreyer A.* Nutzwertanalyse als Entscheidungsmodell bei mehrfacher Zielzetzung. Eine Untersuchung zu Grundlagen und Durchfuhrung der Nutzwertanalyse. Hamburg, 1975.
64. *Saaty T.L.* The Analytic Hierarchy Process. — N.-Y., 1980.
65. *Haedrich G.* u. a. Der Analytic Hierarchy Process //in WiST, 15. Jg., 1986.
66. *Wind Y., Saaty T.L.* Marketing Applications of the Analytic Hierarchy Process. — MS, vol. 26, 1980.
67. *Gotze U.* Scenario-Technik in der strategischen Unternehmensplanung, 2 Auf l., Wiesbaden, 1993.
68. *Weber M.* Entscheidungen bei Mehrfachzielen — Verfahren zur Unterstutzung von Individual- und Gruppenentscheidungen. — Wiesbaden, 1983.
69. *Hildenbrand K.* Systemorientierte Risikoanalyse in der Investitionsplanung. — Berlin, 1988.
70. *Moog H.* Investitionsplanung bei Mehrfachzielsetzung. — Ludwigsburg, Berlin, 1993.
71. *Jacob H.* Neuere Entwicklungen der Investitionsrechnung, ZfB, 34, Jg, 1964. — S.487—507.
72. *Domsch M.* Simultane Personal- und Investitionsplanung im Produktionsbereich. — Bielefeld, 1970.
73. *Hansmann K.W.* Entscheidungsmodelle zur Standortplanung der Industrieunternehmen. — Wiesbaden, 1974.
74. *Gotze U., Wilke U.* Ansatze zum Simultanplanungvon Standorten und betrieblichen Funktionsbereichen. Arbeitsbericht 5/1992 des Instituts fur Betriebswirtschaftliche Produktion- und Investitionsforschung. — Gottingen, 1992.
75. *Jaaskelainen V.* Optimal Financing and Tax Policy of the Corporation. — Helsinki, 1966.

76. *Haberstock L.* Zur Integrirung der Ertragsbesteuerung in die simultane Produktions-, Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung. — Koln u. a., 1971.
77. *Rosenberg O.* Investitionsplanung im Rahmen einer simultanen Gesamtplanung. — Koln u. a., 1975.
78. *Meyhak H.* Simultane Gesamtplanung im mehrstufigen Mehrproduktunternehmen. Ein Modell der dynamischen linearen Planungsrechnung. — Mannheim, 1968.
79. *Арсеньев Ю.Н., Шелобаев С.И.* Модели и методы оптимизации ресурсов субъектов рынка. — М.: Высшая школа, 1998.
80. *Арсеньев Ю.Н., Шелобаев С.И.* Анализ, синтез и оптимизация социо-техно-экономических систем: надежность, безопасность, эффективность, качество. — М.: Высшая школа, 1998.
81. *Brink A., Damchorst H.* u. a. Lineare und ganzzahlige Optimierung mit Impac. — Munchen, 1991.
82. *Zwehl W.* von. Programmierung ganzzahlige // Handworterbuch der Wissenschaften. — Stuttgart u. a., 1988.
83. *Курицкий Б.Я.* Оптимизация вокруг нас. — Л.: Машиностроение, 1989. — 302 с.
84. *Dean J.* Capital Budgeting Top Management Policy on Plant, Equipment and Product Development. N. Y. — London, 1964.
85. *Busse von Golbe W., Lasman G.* Betriebswirtschaftstheorie. Bd. 3. Investitionstheorie. — Berlin-Heidelberg u. a., 1990.
86. *Albach H.* Investition und Liquidat. — Wiesbaden, 1973.
87. *Hax H.* Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung / ZfbF, 16. Jg, 1964. — S.430—436.
88. *Weingartner H.M.* Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems. — Englewood Cliffs, 1963.
89. *Jacob H.* Neuere Entwicklungen der Investitionsrechnung // Investitionshlanung und Investitionsentscheidung mit Hilfe Linearprogrammierung, 3 Aufl. — Wiesbaden, 1971.
90. *Kruschwitz L.* Investitionsrechnung. 6. Aufl. — Berlin — New-York, 1995.
91. *Bumba F.* Simultane Produktions- und Investitionsprogrammplanung mit Hilfe der linearen Planungsrechnung // Eine empirische Untersuchung, — Erlangen. — Nurnberg, 1974.
92. *Mentzel K., Scholz M.* Integrierte Verkaufs, — Produktions und Investitionsplanung. — APF 12, 1971. — S. 1—15.

93. *Jacob H.* Die Anwendung der gemischt-ganzzahligen Programmierung auf Investitionsprobleme in der erdolindustrie // Investitionshlanung und Investitionsentscheidung mit Hilfe Linearprogrammierung, 3 Aufl. — Wiesbaden, 1971.
94. *Bumba F.* Ein Modellsystem der Produktions- und Investitionsprogrammplanung mit linearer Planungsrechnung // ZOR, Bd 21, — S. B177-B196.
95. *Wagner H.* Simultane Planung von Investition, Beschaftigung und Finanzierung mit Hilfe der dinamischen Programmierung. — Zfb, 37 Jg, 1967. — S. 709—728.
96. *Dichtl E.* Ein Ansatz zur simultanen Optimierung von Produktionsprogramm und Investitionspolitik // Entscheidungshilfen im Marketing. — Stuttgart, 1976. — S.487—499.
97. *Peters L.* Simultane Produktions- und Investitionsplanung mit Hilfe der Portfolio-Selection // Diversifikation des Produktionsprogramms industrieller Unternehmungen als Mittel zur Streuung des Risikos im Investitionsprogramm. — Berlin, 1971.
98. *Seelbach H.* Planungsmodelle in der Investitionsrechnung. — Wurzburg, Wien, 1967.
99. *Laux H.* Entscheidungstheorie. — Berlin, N.-Y., 1991.
100. *Schott W.* Ein Beitrag zur Diskussion um das Verhaltnis von Riskopraferenzfunktionen und Hohenpraferenzfunktionen. — ZFb, 60. Jg. 1990. — S. 587—593.
101. *Heinhold M.* Riskoanalise // Lexicon der Betriebswirtschaft, Landsberg am Lech, 1983. — S.970—971.
102. *Schindel V.* Riskoanalise: Darstellung und Bewertung von Riskorechnungen am Beispiel von Investitionsentscheidungen. — Munchen, 1977.
103. *Diruf G.* Die quantative Riskoanalyse. Ein OR-Verfahren zur Beurteilung von Investitionsprojekten. — ZfB, 42. Jg., 1972. — S. 821—832.
104. *Hertz D.B.* Risk Analysis in Capital Investment. — HBR, Vol. 426, 1964. — S. 95—106.
105. *Hertz D.B., Thomas H.* Risk Analysis and its Applications.- Chichester-N. Y., 1983.
106. *Lüder K.* Riskoanalyse bei Investitionsentscheidungen //Angewandte Planung. Bd 3. — Wurzburg, Wien, 1979. — S. 224—233.

107. *Marettek A.* Arbeitschritte zur Durchfuhrung einer Riskoanalyse //Angewandte Planung. Bd 2. — Wurzburg, Wien, 1978. — S. 141—151.
108. *Jandt J.* Investitionseinzelentscheidungen bei unsicheren Erwartungen mittels riskoanalyse. — WiST, 15. Jg, 1986. S. 543—549.
109. *Perridon L., Steiner M.* Finanzwirtschaft der Unternehmung. 7. Aufl. — Munchen, 1993.
110. *Hildenbrand K.* Systemorientierte Riskoanalyse in der Investionsplanung. — Berlin, 1988.
111. *Hertz D.B., Thomas H.* Evaluating the Risks in Acquisition. — LRP, vol. 15, 1982. S. 38—44.
112. *Lucke W.* Controlling unter besonderer Berucksichtigung des Finanz-, Investitions- und Innovations-Controlling // Arbeitsbericht 3/91 des Instituts fur Betribswirtschaftliche Produktions- und Investitionsforschung. — Gottingen, 1991.
113. *Magee J.F.* Decision Trees for Decision Making. — HBR, Vol. 42, No 4, 1964. — S. 126—138.
114. *Aden R.* Konzeption einer computergeschtutzten flexiblen Investitionsprogrammplanung. Dis. — Frankfurt a. M., Thun, 1987.
115. *Felzmann H.* Ein Modell zur Unterstutzung der strategischer Geschaftseinheiten. — Gelsenkirchen, 1982.
116. *Felzmann H.* Quantative Unterstutzung der strategischen Unternehmensplanung. — ZfbF, 52 Jg., 1982. — S. 834—845.
117. *Zimmermann H.J.* Fuzzy Sets in Operations Research. — Eine Einfuhrungin Theorie und Anwendung // Operations Research Proceedings. — Berlin, Heidelberg, New York, 1985. — S. 594—608.
118. *Zimmermann H.J.* Optimale Entscheidungen bei unscharfen Problemsschreibungen. — ZfbF, 27 Jg., 1975. — S. 785—795.
119. *Buscher U., Roland F.* Fuzzy-Set-Modell in der simultanen Investitions- und Produktionsplanung // Arbeitsbebericht Nr. 1/92 des Instituts fur Betriebswirtschaftliche Produktion- und Investitionsforschung der Universitat Gottingen. — Gottingen, 1992.
120. *Markowitz H.M.* Portfolio Selection // Efficient Diversification of Investment. — New York, London, 1959.
121. *Hielscher U.* Das optimale Aktienportefeuilte, Grundlagen der Kapitalanlageplanung. 3 Aufl., Darmstadt, 1969.
122. *Rodewald B.* Die Portfolio Selection Theorieals Entscheidungshilfe fur die Wertpepierdepotplanung. — Göttingen, 1974.

123. *Fromm A.* Nichtlineare Optimierungsmodelle Ausgewahlte Ansatze // Kritik und Anwendung, Frankfurt a. M., Zurich, 1975.
124. *Kunzi H.P.* u. a. Nichtlineare Programmierung, 2 Aufl., Berlin, Heidelberg, New York, 1979.
125. *Hax H., Laux H.* Flexible Planung- Verfahrensregeln und Entscheidungsmodelle fur die Planung bei Ungewibheit. — ZfbF, 24 Jg, 1972. — S. 318—340.
126. *Laux H.* Flexible Investionsplanung. — Opladen, 1971.
127. *Арсеньев Ю.Н., Сулла М. Б., Минаев В.С.* Управление экономическими и финансовыми рисками. — М.: Высшая школа, 1997.
128. *Арсеньев Ю.Н., Сулла М.Б.* Управление риском при авариях. — М.: Высшая школа, 1997. — 386 с.
129. *Кремер Н.Ш.* и др. Исследование операций в экономике. — М.: ЮНИТИ, 1997.
130. *Таха Х.* Введение в исследование операций. — М.: Мир, 1985. Т. 1, Т. II.
131. *Эддоус М., Стэнсфилд Р.* Методы принятия решений. — М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997.
132. *Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж.* Инвестиции: Пер. с англ. — М.: ИНФРА-М, 1997.
133. *Бешелев С.Д., Гурвич Ф.Г.* Математико-статистические методы экспертных оценок. — М.: Статистика, 1980.
134. *Бункин В.А., Курицкий Б.Я., Сокуренко Ю.А.* Справочник по оптимизационным задачам в АСУ. — Л.: Машиностроение, 1984.
135. *Балабанов И.Т.* Основы финансового менеджмента: как управлять капиталом? — М.: Финансы и статистика, 1994.
136. *Волков Е.А.* Численные методы. — М.: Наука, 1986.
137. *Джонстон Д.Ж.* Эконометрические методы. — М.: Финансы и статистика, 1960.
138. *Арсеньев Ю.Н., Минаев В.С.* Управление рисками. — М.: Высшая школа, 1997.
139. *Арсеньев Ю.Н., Трошин С.В., Шелобаев С.И., Давыдова Т.Ю.* Проблемы обеспечения экономической безопасности, снижения риска и совершенствования функционирования организационно-производственных и социальных систем // Проблемы экономики и организации производственных и социальных систем: Материалы Всерос. науч.-практ. конф. — Новочеркасск, 1998. — С. 4—16.

140. *Арсеньев Ю.Н., Давыдова Т.Ю., Шелобаев С.И., Шибаев Л.Л.* Социально-экономические аспекты перехода субъектов к новым формам хозяйствования и коммуникаций // Проблемы экономики и организации производственных и социальных систем: Материалы Всерос. науч.-практ. конф. — Новочеркасск, 1998. — С. 16—25.
141. *Арсеньев Ю.Н., Шелобаев С.И., Давыдова Т.Ю., Шибаев Л.Л.* Диагностика и совершенствование производственных систем и деятельности субъектов хозяйствования // Проблемы экономики и организации производственных и социальных систем: Материалы Всерос. науч.-практ. конф. — Новочеркасск, 1998. — С. 25—33.
142. *Арсеньев Ю.Н., Шелобаев С.И., Трошин С.В., Шибаев Л.Л.* Управление и оптимизация финансово-экономических рисков в деятельности субъектов хозяйствования // Проблемы экономики и организации производственных и социальных систем: Материалы Всерос. науч.-практ. конф. — Новочеркасск, 1998. — С. 33—45.
143. *Шелобаев С.И., Шелобаева И.С., Арсеньев Ю.Н., Давыдова Т.Ю., Трошин С.В., Шибаев Л.Л.* Исследование и моделирование сложных систем с учетом допустимых уровней их качества, надежности и риска // Моделирование и исследование сложных систем: Докл. II Междунар. науч.-техн. конф. Ч. 1. — М., 1998. — С. 134—143.
144. *Шелобаев С.И., Нефедова С.В., Арсеньев Ю.Н., Давыдова Т.Ю., Шибаев Л.Л.* Моделирование процессов анализа, оценки и управления экономическими и финансовыми рисками // Моделирование и исследование сложных систем: Докл. II Междунар. науч.-техн. конф. — М., 1998. — С. 707—714.
145. *Шелобаев С.И., Шелобаева И.С., Арсеньев Ю.Н., Давыдова Т.Ю., Трошин С.В.* Моделирование безопасности функционирования сложных производственных систем и субъектов хозяйствования // Моделирование и исследование сложных систем: Докл. II Междунар. науч.-техн. конф. — М., 1998. — С. 715—726.
146. *Шелобаев С.И., Реш В.К., Харитонов С.А.* Проблемы регулирования финансовой инфраструктуры и оптимизации научно-технической политики // Состояние и перспективы финансово-кредитной системы региона: Межрегион. науч.-метод. конф. Тез. докл. и выступлений. — Тула, 1999. — С. 16—18.

147. *Шелобаев С.И., Реш В.К., Шибаев Л.Л., Арсеньев Ю.Н.* Комплексная стратегия развития субъектов хозяйствования и ее разработка в российских условиях // Состояние и перспективы финансово-кредитной системы региона: Межрегион. науч.-метод. конф. Тез. докл. и выступлений. — Тула, 1999. — С. 54—57.

148. *Арсеньев Ю.Н., Шелобаев С.И., Трошин С.В.* Анализ, оценка и моделирование финансово-экономических рисков в деятельности банков // Состояние и перспективы финансово-кредитной системы региона: Межрегион. науч.-метод. конф. Тез. докл. и выступлений. — Тула, 1999. — С. 129—132.

149. *Арсеньев Ю.Н., Шелобаев С.И., Сушков Н.А.* Модели и методы оптимизации ресурсов и управления рисками в подготовке учителей технологии, предпринимательства и экономики // Инновационные процессы в подготовке учителя технологии, предпринимательства, экономики: Матер. IV Международной научно-практ. конф. — Тула, 1998. — С. 12—14.

150. *Арсеньев Ю.Н., Шелобаев С.И., Шибаев Л.Л.* Проблемы рекруитмента и обучения персонала, управления рисками в деятельности банка // Инновационные процессы в подготовке учителя технологии, предпринимательства, экономики: Матер. IV Международной научно-практ. конф. — Тула, 1998. — С. 14—16.

151. *Арсеньев Ю.Н., Давыдова Т.Ю., Шелобаев С.И., Шибаев Л.Л.* Проблемы и методы обучения, подготовки и переподготовки выпускников вузов и персонала организаций в сферах управления, инновационных технологий и бизнес-образования // Технология, предпринимательство, экономика: Межвуз. сб. статей. Ч. 1. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 1998. — С. 3—17.

152. *Шелобаев С.И., Арсеньев Ю.Н., Трошин С.В., Шибаев Л.Л.* Проблемы управления трудовыми ресурсами, рекруитмента и обучения персонала банка // Технология, предпринимательство, экономика: Межвуз. сб. статей Ч. 1. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 1998. — С. 167—176.

# Оглавление

**Предисловие** 3

**Введение** 4

**Раздел I. Экономико-математические методы оптимизации и распределения ресурсов** 9

*Глава 1.* **Экономико-математические модели и методы и их применение в макро- и микроэкономике** Error! Bookmark not defined.

1.1. Разновидности экономико-математических моделей и методов 10

1.2. Математические модели и методы в исследовании производственно-экономических ситуаций 12

1.3. Соотношения между суммарными, средними и предельными величинами в экономике 24

1.4. Применение производственных функций в макро- и микроэкономике 30

*Глава 2.* **Математические модели оптимизации ресурсов и принятия решений** 44

2.1. Общий случай математической постановки задачи оптимизации 44

2.2. Методы оптимизации и распределения ресурсов на основе задачи линейного программирования 48

2.3. Методы многопараметрической оптимизации в процессах планирования, управления и принятия решений 53

2.4. Задачи линейного программирования в оперативном управлении производством и принятии решений 56

*Глава 3.* **Усложненные методы математического программирования и сетевые модели в оптимизации процессов и принятии решений** 69

3.1. Задачи целочисленного программирования в управлении производством и принятии решений 69

3.2. Задачи стохастического программирования в управлении производством и принятии решений 80

3.3. Сетевые модели в оптимизации процессов и принятии управленческих решений 91

*Глава 4.* ***Методы и модели нелинейного программирования и их приложения*** **98**
**4.1.** Задачи нелинейного программирования в процессах оптимизации ресурсов и принятия решений 98
**4.2.** Применение метода Лагранжа для решения задач оптимизации на условный экстремум 108
**4.3.** Модели потребительского спроса с учетом функции полезности и компенсационных эффектов 115
**4.4.** Задачи автоматизации проектирования объектов,оптимизации ресурсов и принятия решений 127

*Раздел II.* ***Экономико-статистические методы и эконометрические модели в анализе данных и оценке эффективности деятельности*** **139**

*Глава 5.* ***Экономико-статистические модели и эконометрические методы анализа данных*** **140**
**5.1.** Математические модели анализа данных и программные средства 140
**5.2.** Основные экономико-статистические модели 144
**5.3.** Адаптивные методы прогнозирования 154
**5.4.** Линейные модели временных рядов 160
**5.5.** Многомерный анализ 168

*Глава 6.* ***Структурный анализ, обработка нечисловой информации и критерии принятия решений*** **190**
**6.1.** Структурный анализ 190
**6.2.** Обработка нечисловой информации 197
**6.3.** Принятие решений 202

*Глава 7.* ***Системы массового обслуживания и их модели в экономике, финансах и банковском деле*** **208**
**7.1.** Структура и параметры эффективности и качества функционирования СМО 208
**7.2.** Эффективность и качество функционирования разновидностей СМО 211
**7.3.** Прочие разновидности СМО 220
**7.4.** Адаптация организационных структур управления 225

*Глава 8.* ***Управление портфелем ценных бумаг в банковском бизнесе*** **230**
**8.1.** Основные стратегии эффективной деятельности банков 230
**8.2.** Управление капиталом, активами и пассивами банка 234
**8.3.** Управление портфелем ценных бумаг 238

*Раздел III. Модели и методы оценки выгодности и качества принятия инвестиционных решений* **249**

*Глава 9. Разновидности методов принятия решений при выборе инвестиционных объектов* **250**

**9.1.** Основы теории принятия решений и модели выбора инвестиций 250

**9.2.** Статические модели принятия единичных решений в условиях определенности 253

**9.3.** Простые динамические модели принятия решений о выгодности инвестиций при одной целевой функции 262

**9.4.** Более сложные динамические методы принятия решений о выгодности инвестиций при одной целевой функции 279

*Глава 10. Модели принятия единичных решений о выгодности инвестиций при нескольких целевых функциях* **294**

**10.1.** Основы теории измерений и полезности при формировании целей и принятии решений 294

**10.2.** Разновидности методов решения проблем принятия многоцелевых решений 296

**10.3.** Метод анализа полезной стоимости альтернатив 297

**10.4.** Аналитическое определение иерархии целей 302

*Глава 11 Методы принятия инвестиционно-финансовых программных решений в условиях определенности ситуаций* **315**

**11.1.** Модель формирования оптимальной инвестиционной программы при заданных бюджете и программе производства 316

**11.2.** Статическая модель синхронного инвестиционно-финансового планирования 318

**11.3.** Одноступенчатая динамическая модель оптимизации принятия решений при синхронном инвестиционно-финансовом планировании 325

**11.4.** Многоступенчатая динамическая модель оптимизации принятия решений при синхронном инвестиционно-финансовом планировании 329

*Заключение* **334**

*Приложение. Основные расчетные формулы характеристик разновидностей систем массового обслуживания* **335**

*Литература* **355**

*Учебное пособие*

**Шелобаев Сергей Иванович**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ, ФИНАНСАХ, БИЗНЕСЕ**

**Редактор** *Г.А. Клебче*
Корректор *К.В. Федорова*
Оригинал-макет *Н.В. Спасской*
Художник *А.В. Лебедев*

Лицензия № 071252 от 04.01.96
Подписано в печать 15.11.99. Формат 60x88 1/16
Усл. печ. л. 23,0. Уч.-изд. л. 16,8
Тираж 10 000 экз. (2-й завод – 5 000). Заказ 763

ООО «ИЗДАТЕЛЬСТВО ЮНИТИ-ДАНА»
Генеральный директор *В.Н.Закаидзе*

123298, Москва, ул. Ирины Левченко, 1–9
Тел. (095) 194-00-15. Тел/факс (095) 194-00-14
E-mail: unity@tech.ru

Отпечатано во ФГУП ИПК «Ульяновский Дом печати»
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14