Аркадий Черняк, Василий Новиков,
Олег Мельников, Альберт Кузнецов

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ НА БАЗЕ MATHCAD

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2003

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2
Ч-49

Черняк А. А., Новиков В. А., Мельников О. И., Кузнецов А. В.

К-49 Математика для экономистов на базе Mathcad. — СПб.: БХВ-Петербург, 2003. - 496 с: ил.

ISBN 5-94157-282-4

Учебное пособие охватывает следующие разделы: основы компьютерного пакета Mathcad, линейную алгебру, математическое программирование, исследование операций, экономико-математические модели, математическую статистику, корреляционный и регрессионный анализ. Содержание теоретического материала соответствует государственным образовательным стандартам, а структура ориентирована на нетривиальное использование пакетов компьютерной математики. Многие задачи снабжены подробными решениями или демонстрационными примерами.

Книга может служить в качестве учебно-методического комплекса по циклу математических дисциплин в экономических и технических высших учебных заведениях.

Для студентов экономических и технических специальностей вузов

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2

Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов экономических и технических
специальностей высших учебных заведений

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Анатолий Адаменко*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Редактор	*Анатолий Хрипов*
Компьютерная верстка	*Татьяны Олоновой*
Корректор	*Вера Александрова*
Дизайн обложки	*Игоря Цырульникова*
Зав, производством	*Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 05.05.03.
Формат 70×100¹/₁₆. Печать офсетная. Усл. печ. л. 39,99.
Тираж 3000 экз. Заказ № 4223
"БХВ-Петербург", 198005. Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Гигиеническое заключение на продукцию, товар No 77.99.02.953.Д.001537.03.02
от 13.03.2002 г. выдано Департаментом ГСЭН Минздрава России.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в Академической типографии "Наука" РАН
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12.

ISBN 5-94157-282-4

Содержание

Когда дует ветер перемен, надо строить не щит от ветра,
а ветряные мельницы.

Восточная мудрость

Предисловие

Преподавание математики в настоящее время переживает четвертый этап революционных перемен, связанных с появлением мощных компьютерных пакетов: Mathcad, Mathematica, Mathlab, Derive, Theorist и т. д. (первые три этапа этой революции в свое время знаменовались соответственно появлением счетной доски, бухгалтерских счетов и микрокалькулятора). Поэтому главный побудительный мотив написания данной книги — синтезировать традиционные принципы преподавания математики на экономических факультетах вузов с новейшими достижениями компьютерной математики. Следует сказать, что эта идея не нова и даже стала уже рутинной. Однако в данной книге она реализована так, чтобы удовлетворять следующим трем постулатам.

1. Компьютерная математика — это всего лишь инструмент, позволяющий сосредоточить внимание студента на понятиях и логике методов и алгоритмов, освобождая его от необходимости освоения громоздких, незапоминающихся и потому бесполезных вычислительных процедур и трюков. И использование этого инструмента только в качестве иллюстративного средства с целью "уберечь" студента от "скучной" математики, сведя ее постижение к нажатию кнопок мыши и клавиш клавиатуры, сродни комиксам, низводящим классические произведения литературы до уровня примитивных мультяшек.
2. Несмотря на всепроникающий прогресс компьютерных технологий, постижение теоретических основ математики невозможно без таких давнишних изобретений человечества, как классная доска, мел, ручка и лист бумаги.
3. В основе преподавания должен лежать компьютерный пакет, обладающий наглядным интерфейсом и универсальными возможностями.

Первый постулат повлиял на содержание и структуру теоретического материала. Книга разбита на части: I — "Линейная алгебра и линейные экономические модели", II — "Математическое программирование", III — "Модели управления запасами и системы массового обслуживания", IV — "Математическая статистика и корреляционно-регрессионные модели"; имеется приложение — "Основной инструментарий Mathcad". Части состоят из глав, а главы разбиты на разделы: раздел теории, компьютерный раздел, блоки задач для самостоятельного решения, раздел решений и ответов.

Содержание теоретических разделов соответствует государственным образовательным стандартам, а их структура ориентирована на нетривиальное использование любых пакетов компьютерной математики. Эти разделы написаны на основании оригинальных методических разработок, что позволило традиционно сложные для усвоения понятия, методы, алгоритмы и теоремы сделать более доступными, не нанося ущерба их математической строгости.

Второй постулат предопределил подборку практического материала. Разделы "Задачи для самостоятельного решения" состоят из блоков обучающих задач трех видов: "Т" — теоретических, "П" — практических, "К" — компьютерных. Задачи типа "Т" ориентированы на углубленное постижение теории; во многих случаях они дополняют содержание глав, давая возможность студенту творчески осмыслить материал с помощью самостоятельных выводов и доказательств, сверив их затем с приводимыми в разделах "Ответы, указания, решения". Задачи типа "П" предназначены для приобретения практических навыков в освоении алгоритмов и методов, доступных для "ручного" счета и обработки. При этом каждый блок таких задач содержит ровно по 20 однотипных примеров, в обязательном порядке сопровождаемых демонстрационными задачами с подробными решениями (что позволяет использовать их в качестве практикума для студентов-заочников). Задачи типа "К", недоступные для "ручной" обработки, ориентированы исключительно на использование пакета компьютерной математики. Каждый блок таких задач содержит по 10 однотипных примеров, в обязательном порядке сопровождаемых алгоритмом решения с помощью операторов и функций Mathcad.

И наконец, третий постулат предопределил компьютерную основу данной книги - это Mathcad. Mathcad выгодно отличается от других пакетов возможностью свободно компоновать рабочий лист и относительной легкостью изучения. Так же, как с карандашом в руке решается задача на листе бумаги, в принципе, можно оформить и соответствующий Mathcad-документ. Если некоторое время не возникает необходимости работать с Mathcad, то впоследствии навыки пользования пакетом легко восстанавливаются. В других же пакетах компьютерной математики используется очень сложный синтаксис, который быстро забывается, если не работать с этим пакетом постоянно. Кроме того, Mathcad — это универсальная, а не специализированная математическая среда.

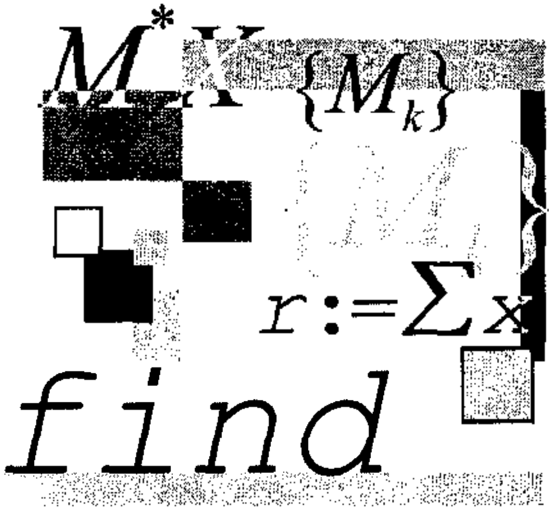
В книге элементы, функции и процедуры Mathcad с иллюстрациями и примерами описываются в компьютерных разделах соответствующих глав, а их возможности демонстрируются на примере алгоритмов решения компьютерных задач из этих глав. При этом из многовариантных возможностей Mathcad выбраны наиболее оптимальные способы использования элементов этого пакета. Благодаря компьютерным разделам изъяты громоздкие вычислительные процедуры, неизменно сопутствующие методам и алгоритмам математического программирования. В тексте в качестве разделителя дроби используется точка в соответствии со спецификацией программы Mathcad.

Теперь несколько слов о структуре учебника. Нумерация глав сквозная. Теоремы, утверждения, леммы, следствия, рисунки, формулы и задачи нумеруются двумя числами: первое из них — это номер главы, второе — их порядковый номер в самой главе. Та или иная процедура, функция, оператор Mathcad подробно описываются в компьютерном разделе именно той главы, где они впервые встречаются. Поэтому освоение пакета Matcad идет параллельно с математической теорией, В приложении, дополняющем компьютерные разделы в главах, дается обзор панелей инструментов, описание основных команд меню и способы редактирования формул.

При подготовке книги работа между авторами была распределена следующим образом: главы 8, 9, 12—14, 28, 32—33, 39—50 написаны А. А. Черняком, глава 20 — О. И. Мельниковым, главы 10, 11, 36—38 — совместно А. А. Черняком и Д. А. Черняк, главы 1-7, 15-19, 21 – 27, 29, 31, 34 написаны совместно А. А. Черняком и О. И. Мельниковым, главы 30, 35 — совместно А. А. Черняком и А. В. Кузнецовым, приложение — совместно А. А. Черняком и В. А. Новиковым, задачи типа "П" для глав 17, 19, 23, 28, 30, 35, 46, 47 составлены А. В. Кузнецовым, компьютерный набор и редактирование текста осуществлен В. А. Новиковым.

Авторы также признательны студентке Д. А. Черняк выпускного курса факультета "Business Administration" Нью-Йоркского государственного университета за помощь в написании глав 10, 11, 36—38.

Авторы: доктор физико-математических наук, профессор, лауреат премии Академии наук Беларуси А. А. Черняк, кандидат технических наук, доцент В. А. Новиков, кандидат физико-математических наук, доцент, лауреат Государственной премии Беларуси О. И. Мельников, кандидат технических наук, профессор А. В. Кузнецов.



Часть I

Линейная алгебра и линейные экономические модели

Глава 1

n-мерное векторное пространство действительных чисел

Вектором $\vec{a}$ размерности n называется упорядоченная последовательность n действительных чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Числа $a_1, \ldots, a_n$ называются координатами вектора $\vec{a}$. Два вектора $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ одинаковой размерности называются равными, если они равны покоординатно: $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$. Вектор $\vec{O} = (0, 0, \ldots, 0)$ называется нулевым. Длиной $|\vec{a}|$ вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется число $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$.

Операции над векторами:

- сложение векторов одинаковой размерности: суммой двух векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называется вектор $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots a_n + b_n)$.
- умножение вектора на скаляр: произведением вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на действительное число α называется вектор $\alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_n)$.
- скалярное произведение двух векторов одинаковой размерности: число $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$ называется скалярным произведением двух векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ и будет обозначаться $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Теорема 1.1 (основные свойства операций над векторами).

1. $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;
2. $|\vec{a}|^2 = [\vec{a} \cdot \vec{a}]$;
3. $|\alpha\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$
4. $[\vec{a} \cdot \vec{b}] = [\vec{b} \cdot \vec{a}]$;
5. $\alpha[\vec{a} \cdot \vec{b}] = [\alpha\vec{a} \cdot \vec{b}] = [\vec{a} \cdot \alpha\vec{b}]$;
6. $[(\vec{a}+\vec{b}) \cdot \vec{c}] = [\vec{a} \cdot \vec{c}] + [\vec{b} \cdot \vec{c}]$;
7. $[(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d})] = [\vec{a} \cdot \vec{c}] + [\vec{a} \cdot \vec{d}] + [\vec{b} \cdot \vec{c}] + [\vec{b} \cdot \vec{d}]$.

Доказательство теоремы дано в задаче Т1.2.

Теорема 1.2.

$$-1 \le \frac{[\vec{a}\cdot\vec{b}]}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \le 1$$

Доказательство теоремы дано в задаче Т1.6.

Именно ввиду теоремы 1.2 величину $\frac{[\vec{a}\cdot\vec{b}]}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ называют косинусом угла между векторами a и b, тем более что на плоскости это понятие тождественно тригонометрическому определению угла между двумя векторами.

Определение

Множество всех векторов размерности *п,* в котором заданы операции сложения векторов и умножения векторов на скаляры, называется n-мерным векторным пространством действительных чисел и обозначается *R".*

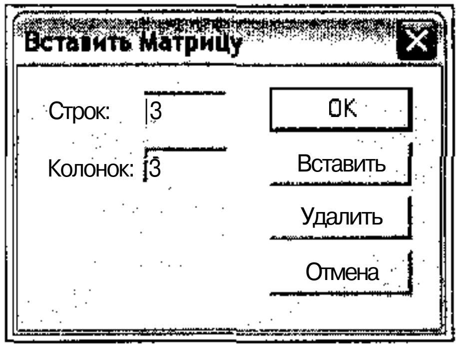
Компьютерный раздел

Координаты векторов вводятся на рабочем листе Mathcad-документа следующим образом. Пусть, к примеру, надо ввести вектор *vectl*= (3, 2, 5.6, -8). Разместите курсор (красный крестик) в нужном месте рабочего листа. Введите имя вектора vectl Клавишей <:> введите знак присваивания :=. Комбинацией клавиш <Ctr>+<M> выведите диалоговое окно **Вставить матрицу** (Insert Matrix), изображенное на рис. 1.1. В поле **Строк** (Rows) этого окна задайте размерность вектора 4 vectl. В поле **Колонок** (Columns) задайте 1. Щелкните на кнопке OK. Справа от знака присваивания (на месте метки, выделенной синим курсором ввода) появится шаблон вектора с метками для ввода его координат:

$$vectl := \begin{pmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \end{pmatrix}$$

Некоторые операции над векторами производятся с помощью подпанели инструментов **Матрица** (Matrix), для вызова которой надо щелкнуть на кнопке [:::] панели инструментов **Математика** (Math), показанной на рис. 1.2.

Как видно из рис. 1.3, подпанель **Матрица** (Matrix) содержит 12 кнопок. Щелкнув на кнопке $\boxed{\vec{x}\cdot\vec{y}}$ скалярного произведения, можно вывести шаблон $\boxed{\blacksquare\cdot\blacksquare}$ и на месте меток ввести векторы, участвующие в скалярном произведении. Кнопка $\boxed{\Sigma v}$ задает шаблон $\sum\blacksquare$ для определения суммы координат вектора, имя которого следует задать на месте метки.



Рис, 1.1. Диалоговое окно Вставить Матрицу

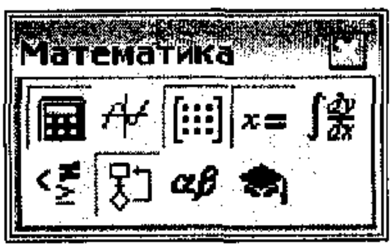


Рис. 1.2. Панель Математика

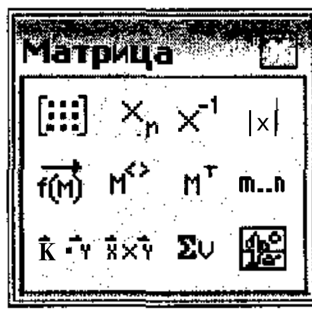


Рис. 1.3. Подпанель Матрица

Задачи для самостоятельного решения

ТЫ. Доказать, что длина любого вектора неотрицательна, причем она равна нулю, если и только если этот вектор нулевой.

TI.2. Доказать все свойства, сформулированные в теореме 1.1.

Т1.3. Доказать, что косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{Б}$ равен 1, если один из них равен другому, умноженному на некоторое положительное число.

Т1.4. Доказать, что косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен -1, если один из них равен другому, умноженному на некоторое отрицательное число.

Т1.S. Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из пространства R^n. Переставить координаты вектора $\vec{b}$ так, чтобы косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{h}$ был максимальным.

Т1.6. Доказать теорему Т1.2.

Общая формулировка задач К1.1 – К1.11

Даны векторы x и y одинаковой размерности, /-я координата вектора x — это размер в млн ден. ед. кредита, выданного банком i-й фирме, /-я координата вектора y — годовая процентная ставка этого кредита. Определить общую сумму кредита; прибыль, которую банк должен получить по истечении года за кредиты, выданные фирмам; процент прибыли от общей суммы кредитов.

К1.1. x = (1.5, 5.2, 11, 0.7, 3.2, 33.5, 8.5, 6.3);

y = (3.8, 4.5, 1.7, 6, 4.7, 12, 22.3, 17.3).

К1.2. x = (5.5, 2.1, 21, 2.5, 6.2, 23.7, 9.6, 9.1, 34, 21.6, 33.2, 5.7);

y = (2.6, 1.9, 5.1, 11.2, 6.8, 22.2, 2.7, 7.9, 13.5, 23.5, 8.3, 8.1).

К1.3. x = (5.3, 1.4, 13.2, 2.7, 4.4, 13.4, 28.3, 4.2, 23.5, 6.3, 12.5);

y = (8.8, 5.1, 3.8, 9.7, 13.7, 21.4, 12.5, 7.7, 8.1, 23.4, 4.6).

К1.4. x = (16.5, 25.5, 1.1, 2.8, 18.2, 45.1, 13.6, 5.3, 55.1, 4.6, 2.6, 14.5, 45.2, 23.1);

y = (7.8, 9.5, 7.7, 16, 4.8, 22, 32.4, 27.5, 1.1, 32.4, 6.3, 8.3, 11.1, 8.3).

К1.5. x = (11.5, 25.2, 31, 3.7, 5.2, 23.5, 8.8, 3.3, 17.2, 8.2, 11.4, 34.1);

y = (5.8, 14.5, 11.7, 16, 8.7, 32, 32.7, 27.3, 12.4, 23.1, 31.2, 44.6).

К1.6. x = (7.6, 9.1, 12, 2.3, 13.2, 24.5, 18.5, 9.3, 42.1, 23.4);

y = (6.8, 4.3, 6.7, 6.5, 14.7, 16.4, 32.5, 27.3, 11.7, 34.6).

К1.7. x = (5.5, 15.4, 21.4, 3.7, 5.2, 13.5, 5.3, 13.5, 23.4, 21.2, 6.3);

y = (6.3, 8.4, 6.7, 3.4, 9.3, 22.5, 2.3, 6.3, 21.6, 33.2, 12.8).

К1.8. x = (33.5, 51.2, 19.3, 7.7, 8.2, 43.5, 28.4, 8.6, 31.3, 42.4, 35.2, 12.5, 3.4, 4.5, 42.1, 2.4, 11.4);

y = (7.8, 6.4, 3.8, 9.4, 3.2, 22.3, 2.5, 7.3, 4.1, 23.2, 13.5, 24.2, 45.2, 5.6, 7.5, 21.2, 7.2).

К1.9. x = (7.5, 25.1, 1.9, 4.7, 5.2, 23.1, 18.5, 16.3, 23.1, 24.5, 31.2, 41.2, 9.3, 1.2);

y = (4.8, 6.5, 3.7, 7.6, 8.7, 32.2, 2.3, 7.5, 6.2, 8.2, 23.6, 42.2, 7.2, 8.1).

К1.10. x = (4.2, 15.1, 21.3, 2.7, 4.4, 3.8, 18.3, 2.3, 17.3, 34.1);

y = (4.8, 6.2, 11.7, 16.2, 8.7, 32.4, 2.3, 7.3, 9.1, 21.2).

К1.11. x = (14, 81, 76, 300, 2.6, 2.7, 2.7, 12, 15.7, 121, 98, 123.5, 80, 0.5, 0.65, 14, 25, 258, 2.5, 2.5);

y = (18, 16, 16, 12, 19, 19, 18, 18, 13, 13, 14, 12, 21, 22, 12.5, 12, 12.5, 10.5, 18, 18).

Ответы, указания, решения

Т1.2. Докажем второе, пятое и шестое свойства. Пусть $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Тогда $|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = a_1a_1 + a_2a_2 + \ldots + a_na_n = [\vec{a}\cdot\vec{a}]$;

$\alpha[\vec{a}\cdot\vec{b}] = \alpha(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) = (\alpha a_1)b_1 + (\alpha a_2)b_2 + \ldots + (\alpha a_n)b_n = [\alpha\vec{a}\cdot\vec{b}]$;

аналогично показывается, что $\alpha[\vec{a}\cdot\vec{b}] = [\vec{a}\cdot\alpha\vec{b}]$ Так как

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n)$, то

$[(\vec{a} + \vec{b})\cdot\vec{c}] = (a_1+b_1)c_1 + (a_2+b_2)c_2 + \ldots + (a_n+b_n)c_n =$

$= a_1c_1 + b_1c_1 + a_2c_2 + b_2c_2 + \ldots + a_nc_n + b_nc_n =$

$= (a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n) + (b_1c_1 + b_2c_2 + \ldots + b_nc_n) = [\vec{a}\cdot\vec{c}] + [\vec{b}\cdot\vec{c}]$

T1.3. Предположим, что $\vec{a} = \alpha\vec{b}$ и $\alpha > 0$. Тогда $[\vec{a}\cdot\vec{b}] = [\alpha\vec{b}\cdot\vec{b}] = \alpha[\vec{b}\cdot\vec{b}] = \alpha|\vec{b}|^2$,

$|\vec{a}| = |\alpha\vec{b}| = |\alpha|\cdot|\vec{b}| = \alpha|\vec{b}|$. Отсюда $\dfrac{[\vec{a}\cdot\vec{b}]}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{\alpha|\vec{b}|^2}{\alpha|\vec{b}|\cdot|\vec{b}|} = 1$

T1.5. Будем считать, что координаты вектора $\vec{a}$ упорядочены в порядке неубывания: $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$. Предположим, что найдутся такие две координаты b_i, b_k вектора $\vec{b}$, что $b_i > b_k$ при $i < k$. Тогда $a_ib_i + a_kb_k < a_ib_k + a_kb_i$. Поэтому перестановка b_i и b_k не приведет к уменьшению скалярного произведения $[\vec{a}\cdot\vec{b}]$. Это означает, что величина $[\vec{a}\cdot\vec{b}]$ примет максимальное значение, если координаты вектора $\vec{b}$ будут упорядочены по неубыванию. Но перестановка координат не изменяет длин векторов. Поэтому величина $\dfrac{[\vec{a}\cdot\vec{b}]}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ максимальна, если координаты вектора b упорядочены по неубыванию.

T1.6. Обозначим через α число $\dfrac{[\vec{a}\cdot\vec{b}]}{|\vec{b}|^2}$ и рассмотрим квадрат длины вектора $\vec{a} - \alpha\vec{b}$:

$|\vec{a} - \alpha\vec{b}|^2 = [(\vec{a} - \alpha\vec{b})\cdot(\vec{a} - \alpha\vec{b})] = [\vec{a}\cdot\vec{a}] + [(-\alpha\vec{b})\cdot\vec{a}] + [\vec{a}\cdot(-\alpha\vec{b})] +$

$+ [(-\alpha\vec{b})\cdot(-\alpha\vec{b})] = |\vec{a}|^2 - \alpha[\vec{a}\cdot\vec{b}] - \alpha[\vec{a}\cdot\vec{b}] + \alpha^2[\vec{b}\cdot\vec{b}] = |\vec{a}|^2 - 2\alpha[\vec{a}\cdot\vec{b}] + \alpha^2|\vec{b}|^2$

Вместо α подставим его значение, равное $\dfrac{[\vec{a}\cdot\vec{b}]}{|\vec{b}|^2}$:

$$|\vec{a}|^2 - 2\frac{[\vec{a}\cdot\vec{b}][\vec{a}\cdot\vec{b}]}{|\vec{b}|^2} + \frac{([\vec{a}\cdot\vec{b}])^2|\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^4} = |\vec{a}|^2 - \frac{([\vec{a}\cdot\vec{b}])^2}{|\vec{b}|^2}$$

Последнее число, являясь квадратом длины вектора $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ должно быть неотрицательным, т.е. $|\vec{a}|^2 - \dfrac{([\vec{a}\cdot\vec{b}])^2}{|\vec{b}|^2} \ge 0$, $|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \ge ([\vec{a}\cdot\vec{b}])^2$ отсюда $|[\vec{a}\cdot\vec{b}]| \le |\vec{a}||\vec{b}|$,

$-|\vec{a}||\vec{b}| \le [\vec{a}\cdot\vec{b}] \le |\vec{a}||\vec{b}|$. Теорема доказана.

K1.11. Искомая прибыль будет равна скалярному произведению векторов x и y, деленному на 100. Поэтому для решения этой задачи с помощью Mathcad необходимо выполнить следующие действия. Ввести координаты векторов x и y. Определить суммарную величину кредита: $kr := \sum x$. Определить прибыль банка $pr := \frac{[x \cdot y]}{100}$.

Процент прибыли от общей суммы кредита будет равен $\frac{pr}{kr} \cdot 100$.

Ответы: 1232.35 млн ден. ед., 163.39 млн ден. ед., 13.26%.

Глава 2

Линейно независимые системы векторов

Вначале дадим определение линейной комбинации векторов.

Определение

. Представим вектор $\vec{b}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ коэффициентами α_1, α_2, ..., α_k, если $\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k$. Если при этом не все коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ равны нулю, то такую линейную комбинацию будем называть ненулевой комбинацией; если же $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$ (и следовательно $\vec{b} = \vec{0}$), то такую линейную комбинацию будем называть нулевой.

Очевидно, что нулевой вектор можно представить в виде нулевой комбинации любой системы векторов. Однако не всегда нулевой вектор представим в виде ненулевой комбинации.

Определение

Система векторов V из R^n называется линейно независимой, если нулевой вектор из R^n не может быть представлен в виде ненулевой комбинации векторов из V. В противном случае система V называется линейно зависимой. Другими словами, в случае линейно независимой системы векторов $a_1, a_2, \ldots a_k$ из равенства $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}$ следует, что все коэффициенты α_i, $i = 1, \ldots, k$, равны нулю; в случае линейно зависимой системы из того же равенства вытекает существование такого набора коэффициентов, среди которых есть хотя бы один ненулевой.

Пример

Если $\vec{a}_1 = (2, 2, 3)$, $\vec{a}_2 = (0, -4, 5)$, $\vec{a}_3 = (3, 13, -8)$, то непосредственно проверяется равенство $3\vec{a}_1 - 5\vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 = \vec{0}$. Выполнение этого равенства означает, что система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно зависима.

Если система векторов *B* включает в себя все векторы системы *A*, то *A* называется подсистемой *B*.

Теорема 2.1. Если система векторов B содержит линейно зависимую подсистему векторов A, то B также линейно зависима.

Доказательство. Пусть $A = \{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k\}$, $B = \{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k, \vec{b}_1, ..., \vec{b}_r\}$. Так как A линейно зависимая система, то нулевой вектор представим в виде ненулевой комбинации векторов из A: $\vec{0} = \alpha_1\vec{a}_1 + ... + \alpha_k\vec{a}_k$

Но тогда $\vec{0} = \alpha_1\vec{a}_1 + ... + \alpha_k\vec{a}_k + 0\vec{b}_1 + ... + 0\vec{b}_r$, что означает линейную зависимость системы векторов B. Теорема доказана.

Следствие **2.1.** Любая подсистема векторов линейно независимой системы векторов линейно независима.

Теорема 2.2. Пусть линейно независимая система векторов A после добавления нового вектора $\vec{b}$ превратилась в линейно зависимую систему $A \cup \{\vec{b}\}$. Тогда вектор $\vec{b}$ представим в виде линейной комбинации векторов из A.

Доказательство. Пусть $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k\}$. Ввиду линейной зависимости системы векторов $A \cup \{\vec{b}\}$ нулевой вектор представим в виде ненулевой комбинации $\vec{0} = \alpha_1\vec{a}_1 + ... + \alpha_k\vec{a}_k + \beta\vec{b}$. Если $\beta = 0$, то $\vec{0} = \alpha_1\vec{a}_1 + ... + \alpha_k\vec{a}_k$, где не все α_i равны 0, что противоречит линейной независимости системы векторов A. Поэтому $\beta \neq 0$, откуда

$$\vec{b} = -\frac{\alpha_1}{\beta}\vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\beta}\vec{a}_2 - ... - \frac{\alpha_k}{\beta}\vec{a}_k.$$

Определение

Максимально возможное число векторов в линейно независимой подсистеме системы векторов V называется рангом системы V.

Очевидно, ранг линейно независимой системы векторов равен числу векторов в этой системе.

Определение

Элементарными преобразованиями системы векторов называются:

- умножение любого вектора этой системы на ненулевое число (элементарное преобразование типа 1);
- прибавление к одному из векторов системы любого другого вектора этой системы, умноженного на произвольное число (элементарное преобразование типа 2).

Теорема 2.3. Элементарные преобразования сохраняют линейную независимость или линейную зависимость системы векторов.

Доказательство. Докажем эту теорему только для элементарных преобразований типа 2. Пусть $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k\}$, а система B получается из A в результате прибавления к первому вектору второго вектора, умноженного на число k, т.е. $B = \{\vec{a}_1 + k\vec{a}_2, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k\}$. Очевидно, равенства $\vec{0} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_k\vec{a}_k$

$\vec{0} = \alpha_1(\vec{a}_1 + k\vec{a}_2) + (\alpha_2 - k\alpha_1)\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 + \alpha_k a_k$ равносильны, поскольку любое из них вытекает из другого, причем из равенства коэффициентов нулю в одном из них (например, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_l = 0$) вытекает равенство коэффициентов в другом ($\alpha_1 = \alpha_2 - k\alpha_1 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_l = 0$).

Задачи для самостоятельного решения

T2.1. Доказать, что система векторов, состоящая из единственного ненулевого вектора, линейно независима.

T2.2. Доказать, что система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

T2.3. Следующая система векторов называется лестничной:

$$\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}),\ a_{11} \neq 0$$
$$\vec{a}_2 = (0, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n}),\ a_{22} \neq 0$$
$$\vec{a}_3 = (0, 0, a_{33}, \ldots, a_{3n}),\ a_{33} \neq 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\vec{a}_n = (0, 0, 0, \ldots, 0, a_{nn}),\ a_{nn} \neq 0$$

Доказать, что лестничная система векторов линейно независима.

T2.4. Доказать, что если число векторов в линейно независимой подсистеме *A* системы векторов *B* равно рангу *B*, то любой вектор из *B* представим в виде линейной комбинации векторов из *A*.

T2.5. Доказать, что с помощью элементарных преобразований можно переставить местами любые два вектора системы векторов.

T2.6. Доказать теорему 2.3 для элементарных преобразований типа 1.

Ответы, указания, решения

T2.4. Пусть $\vec{b}$ — произвольный вектор из *B*. Если $\vec{b} \in A$, то все очевидно. Если $\vec{b} \notin A$, то система векторов $A \cup \{\vec{b}\}$ будет линейно зависимой по определению ранга. Тогда выполняются условия теоремы 2.2, из которой и следует искомое утверждение.

T2.5. Следующая цепочка систем векторов показывает последовательность элементарных преобразований, которые меняют местами векторы a_i и a_m в начальной системе векторов $\{\vec{a}_1, a_2, \ldots, \vec{a}_k\}$:

$\{a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_m, \ldots, a_k\}, \{a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_m + a_i, \ldots, a_k\}$

$\{a_1, \ldots, -a_m, \ldots, a_m + a_i, \ldots, a_k\}, \{a_1, \ldots, -a_m, \ldots, a_i, \ldots, a_k\}$

$\{a_1, \ldots, a_m, \ldots, a_i, \ldots, a_k\}$

Глава 3

Матрицы: общие понятия

Матрицей M размера mxn называется прямоугольная таблица с m строками и n столбцами, состоящая из чисел, называемых элементами матрицы M. Элемент матрицы, расположенный на пересечении i-й строки и k-го столбца обозначается через m_{ik}; будем говорить, что этот элемент находится на позиции $(i, к)$. Матрица размера nxn называется квадратной матрицей порядка n. Единичной матрицей E порядка n называется квадратная матрица порядка л, в которой элементы a_{ii} равны 1, $i = 1, \ldots, n$, а остальные элементы a_{ik} $(i \neq k,\ i = 1, \ldots, n,\ к = 1, \ldots,$ л) равны 0.

Говорят, что элементы a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$, образуют главную диагональ квадратной матрицы порядка n.

Любую строку или столбец матрицы размера $m \times n$можно рассматривать как вектор $\vec{a}$ пространства R^n или R^m соответственно. При необходимости они будут считаться таковыми без особых оговорок. Однако при этом следует различать, является ли вектор $\vec{a}$ строкой, которая будет называться вектор-строкой, или столбцом, который будет называться **вектором-столбцом**. Вектор-строка— это матрица размера $1 \times n$, а вектор-столбец — матрица размера m х 1. Там, где не будет ясно из контекста, какие векторы имеются в виду, это будет уточняться дополнительно.

Операции над матрицами:

- сложить (вычесть) две матрицы одинакового размера означает сложить (вычесть) их элементы, стоящие на одинаковых позициях; при этом получится матрица того же размера;
- умножить матрицу на скаляр означает умножить на это число все элементы матрицы;
- транспонировать матрицу M означает преобразовать ее в матрицу M^T, строки которой являются столбцами матрицы M с теми же номерами;
- умножить матрицу A размера m х / на матрицу B размера / х n означает получить матрицу $C = AB$ размера $m \times n$,элемент которой c_{ik} равен скалярному произведению i-й строки матрицы A и k-го столбца матрицы B, т. е.

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{il}b_{lk} = \sum_{j=1}^{l} a_{ij}b_{jk}$$

Замечание

Для упрощения записи знак умножения в произведении матриц опускается.

Теорема 3.1. Пусть A, B, C, D — матрицы, D — квадратная матрица. Тогда $(AB)C = A(BC)$, $(A + B)C = AC + BC$, $C(A + B) = CA + CB$, $(AB)^T = B^T A^T$, $DE = ED = D$ при условии, что размеры матриц согласуются во всех операциях сложения и умножения.

Докажем последние два утверждения теоремы. Для доказательства равенства матриц $(AB)^T$ и $B^T A^T$ достаточно сравнить их элементы на одинаковых позициях. На позиции (i, k) в матрице $B^T A^T$ находится некоторое число c, равное скалярному произведению i-й строки матрицы B^T и k-го столбца матрицы A^T. Но i-я строка матрицы B^T — это i-й столбец матрицы B, а k-й столбец матрицы A^T — это k-я строка матрицы A. Поэтому число c равно скалярному произведению k-й строки матрицы A и i-го столбца матрицы B, т. е. число c находится на позиции (k, i) матрицы AB или на позиции (i, k) матрицы $(AB)^T$. Свойство доказано.

Для доказательства равенства $DE = D$ рассмотрим число d на позиции (i,k) матрицы DE: если i-я строка в D есть $(d_{i1}, d_{i2}, ..., d_{in})$, то $d = d_{i1}0 + d_{i2}0 + ... + d_{i,k-1}0 + d_{ik}1 + d_{i,k+1}0 + ... + d_{in}0 = d_{ik}$, так как в k-ом столбце матрицы E именно k-я координата равна 1, а остальные координаты равны 0. Итак доказано, что $DE = D$. Равенство $ED = D$ доказывается аналогично.

Замечание

Если рассматривать векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как матрицы, то скалярное произведение можно записать следующим образом:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = \vec{a}\vec{b}^T = \vec{b}\vec{a}^T$$

Пусть задана система m линейных уравнений с n переменными, имеющая следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases};$$

здесь a_{ik} называются коэффициентами при переменных, c_k — свободными членами, $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$. Если использовать обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_m \end{pmatrix},$$

то систему (3.1) можно записать в матричном виде так: $AX = C$. Если же использовать обозначения:

$$\vec{b}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \ldots \\ a_{mk} \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_m \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \\ \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{matrix}$$

то систему (3.1) можно записать тремя способами в векторном и векторно-матричном виде:

$$x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + \ldots + x_n\vec{b}_n = \vec{c}\ , \ \textbf{или}\ \begin{cases}[\vec{a}_1 \cdot \vec{x}] = c, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ [\vec{a}_m \cdot \vec{x}] = c_m\end{cases} \qquad (33.2)$$

$$A\vec{x}' = \vec{c}$$

Компьютерный раздел

Индексы матриц и векторов в Mathcad могут принимать целые неотрицательные значения. Начало индексации (нумерации) строк и столбцов матриц задается системной переменной ORIGIN. Например, ORIGIN:=0 означает, что нумерация строк и столбцов начинается с нуля. По умолчанию значение переменной ORIGIN равно нулю.

Ввод элементов матрицы аналогичен вводу координат векторов. Пусть, к примеру, надо ввести матрицу $mat = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & 8.2 \end{pmatrix}$. В нужном месте рабочего листа введите имя матрицы mat и знак присваивания :=. Затем выведите диалоговое окно **Вставить матрицу** (Insert Matrix). В поле Строк (Rows) этого окна надо задать число строк 3. а в поле **Колонок** (Columns) — число столбцов 2. После щелчка кнопкой **OK** справа от знака присваивания появится шаблон матрицы с метками для ввода ее элементов:

$$mat := \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}.$$

Чтобы извлечь элемент матрицы, находящийся на позиции $(i,\ k)$, необходимо набрать имя матрицы с индексами i, $к$ (индексы — через запятую) в случае равенства ORIGIN единице или с индексами $i-1, k-1$ в случае равенства ORIGIN нулю. Рассмотрим, например, элемент 8.2 матрицы **mat,** который находится на позиции (3,2)- Предположим, что ORIGIN равно нулю. Для извлечения элемента 8.2 наберите имя матрицы *mat,* затем комбинацией клавиш <Ctrl>+<[> перейдите в режим ввода индексов: $mat_{\blacksquare}$ Введите на месте метки индексы 2, 1. Клавишей <=> введите знак равенства, справа от которого появится искомый элемент: $mat_{2,1} = 8.2$.

Некоторые операции над матрицами производятся с помощью подпанели **Матрица** (Matrix), показанной на рис. 3.1. Щелчок по кнопке M^T сразу же после ввода имени матрицы приводит к транспонированию этой матрицы. Щелчок по кнопке $M^{<>}$ сразу же после ввода имени матрицы приводит к появлению шаблона с меткой для ввода номера столбца матрицы: $\boxed{mat^{\langle\blacksquare\rangle}}$. На месте метки надо ввести номер того столбца, который требуется извлечь. Например, $mat^{\langle 1\rangle}=\begin{pmatrix}2\\4\\8.2\end{pmatrix}$ (в случае равенства ORIGIN нулю).

Стандартные функции *rows (M)* и $cols(M)$ определяют соответственно число строк и столбцов матрицы M. Например, $rows(mat)=3$ и $cols(mat)=2$.

Рис. 3.1. Панель Матрица

Задачи для самостоятельного решения

Т3.1. Следом квадратной матрицы называется сумма элементов, стоящих на главной диагонали. Доказать, что след матрицы AB равен следу матрицы BA.

Т3.2. Пусть $A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$ и $C=AB=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}$, где A,B,C — квадратные матрицы порядка n, A_{11},B_{11},C_{11} — квадратные матрицы порядка k, A_{22},B_{22},C_{22} — квадратные матрицы порядка l ($k+l=n$), A_{12},B_{12},C_{12} — матрицы размера $k\times l$, A_{21}, B_{21}, C_{21} — матрицы размера $l\times k$. Доказать, что $C_{11}=A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}$, $C_{12}=A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}$, $C_{21}=A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}$, $C_{22}=A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}$.

Т3.3. Пусть A и B — квадратные матрицы одного порядка. Всегда ли выполняется равенство $AB=BA$?

Т3.4. Матрицы A и B называются перестановочными, если $AB=BA$. Доказать, что квадратная матрица A перестановочна со всеми квадратными матрицами того же порядка, если и только если $A=kE$, где k — некоторое число.

Т3.5. Пусть $\vec{x}\in R^m$, $\vec{y}\in R^n$, A — матрица размера $m\times n$. Доказать, что $[\vec{x}A\cdot\vec{y}]=[\vec{x}\cdot\vec{y}A^{\mathrm{T}}]$.

Общая формулировка задач П3.1 — П3.21

Найти матрицы X и $X^{\text{т}}$, где $X = 3(AB) - 4C$.

П3.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$.

П3.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

П3.3. $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 5 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

П3.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

П3.5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

П3.6. $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

П3.7. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

П3.8. $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

П3.9. $A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -2 & -4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ -3 & 0\end{pmatrix}$.

П3.10. $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & -1\\ 7 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

П3.11. $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

П3.12. $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -3\\ 4 & 0\end{pmatrix}$.

П3.13. $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

П3.14. $A=\begin{pmatrix}5 & \\ -3 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

П3.15. $A=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -3 & 2\\ 8 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ -1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

П3.16. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

П3.17. $A = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 4 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, 5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

П3.18. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

П3.19. $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 5 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

П3.20. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

П3.21. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Общая формулировка задач К3.1—К3.11

Предприятие выпускает m видов продукции с использованием n видов сырья. Нормы расхода сырья даны в матрице ,4, в которой на позиции (i, $к$) находится число, равное количеству расходуемого сырья (кг) k-го вида на производство единицы продукции i-го вида. Плановый объем выпуска продукции дан в векторе-строке Q, в которой i-й элемент равен количеству единиц продукции /-го вида. Вектор-строка S задает себестоимость единицы сырья каждого вида, а вектор-строка t задает транспортные расходы на единицу сырья каждого вида (А-е элементы этих векторов соответствуют $к$-му виду сырья). Пользуясь только умножением матриц, найти: количество сырья каждого вида для выполнения планового выпуска продукции; производственные и транспортные затраты на сырье, расходуемое на производство единицы продукции каждого вида; затраты на все сырье, необходимое для выполнения плана.

К3.1.

$$A = \begin{pmatrix} 31 & 3.5 & 6 & 7.4 & 3.2 & 15 & 3.1 \\ 2.3 & 12 & 4.5 & 6.2 & 5.8 & 11 & 1.9 \\ 4 & 8 & 4.5 & 10.3 & 1.4 & 8 & 2.5 \\ 5.2 & 6.1 & 3.4 & 5.3 & 5.2 & 15 & 1.2 \end{pmatrix},$$

$Q = (230, 55, 321, 55)$,
$S = (250, 14, 33, 5, 81, 221, 400)$,
$/ = (18,5,7,3,6,4,7)$.

К3.2.

$$A = \begin{pmatrix} 4.5 & 8 & 3.4 & 6.3 & 3.2 & 2.5 \\ 5.5 & 7.2 & 2.5 & 7.1 & 15.8 & 21 \\ 7.4 & 8.5 & 6.5 & 5.1 & 6.4 & 6 \\ 3 & 8.1 & 2.5 & 5.3 & 7.2 & 5 \end{pmatrix},$$

$Q = (90, 145, 40, 31)$,
$S = (15, 232, 143, 15, 52, 21)$,
$/=(18,22,13,3,12,14)$.

К3.3.

$$A = \begin{pmatrix} 2.4 & 3.2 & 3.8 & 3.3 & 16.2 & 2.5 \\ 7.5 & 3.5 & 2.1 & 3.7 & 15.9 & 26.4 \\ 7.4 & 8.6 & 6.7 & 7.5 & 23.4 & 4.8 \\ 5.4 & 6.9 & 7.2 & 12.5 & 4.3 & 1.5 \\ 8.3 & 8.5 & 12.7 & 6.5 & 11.8 & 12.7 \end{pmatrix},$$

$Q = (100,105,240,221,43)$,
$5 =(50, 212, 123, 115, 66,21)$,
$/=(9,12,23,3,15,24)$.

К3.4.

$$A = \begin{pmatrix} 4.3 & 6.2 & 3.4 & 11 & 3.9 & 2.5 & 11 \\ 7.5 & 8.9 & 8.4 & 4.1 & 5.8 & 2.1 & 12 \\ 7.4 & 8.4 & 12 & 1.1 & 5.7 & 8.2 & 3.5 \end{pmatrix},$$

$Q = (16.9, 12.5, 14.8)$,
$S = (15, 22,3,5,8,21,40)$,
$/ = (5, 7, 3, 2, 7, 4, 1)$.

К3.5.

$$A = \begin{pmatrix} 21 & 5.3 & 3.6 & 8.3 & 3.2 & 2.5 \\ 6.5 & 5.6 & 2.6 & 8.1 & 5.4 & 2.1 \\ 4.3 & 5.8 & 3.6 & 17 & 21 & 8 \\ 4.6 & 6.1 & 12 & 15 & 7.2 & 5 \\ 13 & 7.5 & 1.2 & 3.5 & 8.8 & 1.7 \end{pmatrix},$$

$Q = (120, 225, 240, 111, 53)$,
$S = (120, 202, 103, 105, 41, 21)$,
$/ = (18,12,13,16,2,14)$.

К3.6.

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 8 & 13 & 3 & 10.2 \\ 4.5 & 6.2 & 3.2 & 5.1 & 5.8 \\ 3.7 & 7.8 & 9.6 & 1.1 & 4 \\ 7.4 & 11.1 & 2.7 & 2.5 & 8.2 \\ 6.3 & 7.5 & 1.2 & 7.5 & 1.8 \end{pmatrix},$$

$Q = (60, 25, 40, 31, 36)$,
$S = (50, 202,130, 105,81)$,
$t = (28, 22, 33, 13, 12)$.

2 Зак. 4223

К3.7.

$$A=\begin{pmatrix} 8.5 & 32 & 23 & 15 & 3.2 \\ 15 & 82 & 21 & 71 & 5.8 \\ 11.7 & 5.8 & 6.3 & 1.1 & 2.4 \\ 4.5 & 7.1 & 4.2 & 11.5 & 13.2 \end{pmatrix},$$

$Q = (260, 25, 40, 111)$,
$S = (250, 78, 63, 55, 111)$,
$t = (90, 42, 40, 40, 31)$.

К3.8.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 24 & 31 & 13 & 3.2 & 2.5 \\ 15 & 8.2 & 2.7 & 7.1 & 5.8 & 2.1 \\ 6.7 & 5.8 & 8.6 & 11 & 12.4 & 8 \\ 4.9 & 7.1 & 5.2 & 8.5 & 9.2 & 15 \\ 3.9 & 3.5 & 2 & 3.5 & 1.8 & 17 \\ 4.6 & 12.3 & 3.9 & 45 & 15.8 & 32.9 \end{pmatrix},$$

$Q = (60,\ 25,\ 40,\ 11,\ 8,\ И)$,
$S = (250,\ 220,\ 13,\ 105,\ 8,\ 21)$,
$t = (48, 2, 31, 13, 12, 14)$.

К3.9.

$$A=\begin{pmatrix} 7.5 & 16 & 23 & 15.3 & 3.2 & 2.5 & 9.1 \\ 15 & 8.2 & 2 & 7.1 & 15.8 & 21 & 0.9 \\ 7.8 & 8 & 6 & 11 & 2.4 & 8 & 0.5 \\ 4.7 & 6.1 & 2.9 & 6.5 & 7.2 & 1.5 & 0.3 \\ 3 & 8.5 & 12 & 3.5 & 1.8 & 17 & 0.4 \\ 5.1 & 24.6 & 12.3 & 23.3 & 6.7 & 4.5 & 14.7 \end{pmatrix},$$

$Q = (10, 15, 40, 11, 8, 23)$,
$S = (50, 2, 103, 5, 71, 11, 40)$,
$t = (18, 21, 31, 13, 21, 14, 11)$.

К3.10.

$$A=\begin{pmatrix} 25 & 12 & 13 & 51 & 3.2 & 35 \\ 6.5 & 12 & 21 & 8.1 & 5.8 & 2.1 \\ 17 & 18 & 16 & 1 & 24 & 18 \\ 6 & 11 & 21 & 15 & 1.2 & 5 \\ 31 & 7.5 & 1.2 & 6.5 & 5.8 & 1.7 \end{pmatrix},$$

$Q = (10, 15, 10, 31, 8)$,
$S = (50, 2, 43, 65, 86, 11)$,
$t = (18, 31, 15, 21, 12, 32)$.

К3.11.

$$A=\begin{pmatrix} 25 & 8.2 & 3 & 5.3 & 13.2 & 25 & 1.0 \\ 15 & 8.2 & 2 & 7.1 & 15.8 & 21 & 0.9 \\ 7 & 8 & 6 & 11 & 2.4 & 8 & 0.5 \\ 4 & 9.1 & 2 & 5 & 3.2 & 15 & 0.3 \\ 3 & 8.5 & 12 & 3.5 & 1.8 & 17 & 0.4 \end{pmatrix},$$

$Q = (160, 125, 140, 311, 83)$,
$S = (150, 22, 13, 15, 81, 211, 400)$,
$t = (8, 2, 3, 3, 2, 4, 1)$.

К3.12. Данные о дневной производительности 6 предприятий, выпускающих пять видов продукции, приведены в матрице

$$Л=\begin{pmatrix} 15 & 14 & 13 & 17 & 16 & К3 \\ 21 & 28 & 23 & 24 & 0 & 0 \\ 82 & 0 & 91 & 85 & 85 & 90 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 38 & 37 & 38 & 39 & 34 & 43 \end{pmatrix},$$

в которой на позиции $(i, к)$ находится дневная производительность (изделий в день) *к-то* предприятия по i-му виду продукции, Мормы расхода сырья трех видов даны в матрице

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \\ 5 & 8 & 6 \\ 12 & 14 & 11 \end{pmatrix},$$

в которой на позиции $(i, к)$ находится число, равное количеству (кг) расходуемого сырья k-го вида на производство единицы продукции $/$-го вида. Даны также вектор-строка, содержащая количество рабочих дней в году по каждому предприятию, и вектор-строка цен единицы сырья каждого вида:

$$/\cdot = (250,222,\ 175,\ 124,\ 140,\ 140),\ c = (0.5,\ 150,\ 124).$$

Требуется найти: годовую производительность каждого предприятия по каждому виду продукции; годовую потребность каждого предприятия по каждому виду сырья; годовую сумму кредитования каждого предприятия для закупки сырья, необходимого для выпуска всей продукции.

Ответы, указания, решения

Т3.1. Обозначим через a_{ij} и b_{ij} элементы матриц A и B соответственно. Элемент главной диагонали матрицы AB, находясь на позиции $(k, к)$, является скалярным произведением k-й строки матрицы A и *к-го* столбца матрицы B:

$$a_{k1}b_{1k} + a_{k2}b_{2k} + \ldots + a_{kn}b_{nk} = \sum_{r=1}^{n} a_{kr}b_{rk}$$

Поэтому след матрицы B равен $\sum_{k=1}^{n}(\sum_{r=1}^{n} a_{kr}b_{rk})$. Переставим знаки суммирования:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} a_{kr}b_{rk} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{kr}b_{rk} = \sum_{r=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} b_{rk}a_{kr})$$

Нетрудно увидеть, что выражение в скобках есть элемент матрицы BA на позиции (r, r). Поэтому последнее выражение является следом матрицы BA.

Т3.2.

$$\text{Пусть } A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(11)} & a_{12}^{(11)} \ldots a_{1k}^{(11)} & a_{11}^{(12)} \ldots a_{1l}^{(12)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}^{(11)} & a_{k2}^{(11)} \ldots a_{kk}^{(11)} & a_{k1}^{(12)} \ldots a_{kl}^{(12)} \\ a_{11}^{(21)} & a_{12}^{(21)} \ldots a_{1k}^{(21)} & a_{11}^{(21)} \ldots a_{1l}^{(22)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{l1}^{(21)} & a_{l2}^{(21)} \ldots a_{lk}^{(2)} & a_{l1}^{(22)} \ldots a_{ll} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11}^{(11)} & b_{12}^{(11)} \ldots b_{1k}^{(11)} & b_{11}^{(12)} \ldots b_{1l}^{(12)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ b_{k1}^{(11)} & b_{k2}^{(11)} \ldots b_{kk}^{(11)} & b_{k1}^{(12)} \ldots b_{kl}^{(12)} \\ b_{11}^{(21)} & b_{12}^{(21)} \ldots b_{1k}^{(21)} & b_{11}^{(22)} \ldots b_{1l}^{(22)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ b_{l1}^{(21)} & b_{l2}^{(21)} \ldots b_{lk}^{(21)} & b_{l1}^{(22)} \ldots b_{ll}^{(22)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \text{ и } C = AB.$$

Рассмотрим элемент c_{ij} матрицы C $(i \le k,\ j \le k)$. Тогда:

$$c_{ij} = (a_{i1}^{(11)} b_{1j}^{(11)} + a_{i2}^{(11)} b_{2j}^{(11)} + \ldots + a_{ik}^{(11)} b_{kj}^{(11)}) + (a_{i1}^{(12)} b_{1j}^{(21)} + \ldots + a_{il}^{(12)} b_{lj}^{(21)}).$$

Но сумма в первой скобке — это элемент произведения $A_{11}B_{11}$, находящийся на позиции (i, j), а сумма во второй скобке — это элемент произведения $A_{12}B_{21}$, находящийся на той же позиции. Следовательно, $C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$.

Аналогично доказываются и другие равенства.

Т3.3. Ответ: нет.

Т3.4. Пусть A — матрица порядка n перестановочная с любой квадратной матрицей того же порядка, $E^{(ij)}$ — матрица порядка n, элемент которой $e_{ij} = 1$, а остальные элементы равны нулю. Пусть $i \ne j$. Рассмотрим произведения:

$$AE^{(ij)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1i} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2i} \cdots & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots a_{ii} \ldots & a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{ni} \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \ldots 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \\ 0 & 0 \ldots 1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \\ 0 & 0 \ldots 0 \ldots 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \ldots a_{1i} \ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots a_{2i} \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \\ 0 & 0 \ldots a_{ii} \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \\ 0 & 0 \ldots a_{ni} \ldots 0 \end{pmatrix},$$

$$E^{(ij)}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots 0 \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots 1 \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots 0 \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{j1} & a_{j2} \dots a_{ji} & \dots & a_{jn} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nj} & \dots & a_{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots 0 \dots & 0 \\ \dots & & & \\ a_{j1} & a_{j2} \dots a_{ji} & \dots & a_{j} \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots 0 \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Из равенства $AE^{(ij)} = E^{(ij)}A$ следует, что $a_{ii} = a_{jj}$, а остальные элементы j-й строки и i-го столбца матрицы A равны 0. Рассматривая различные пары индексов i и j, можно сделать вывод, что элементы главной диагонали матрицы A равны, а ее остальные элементы нулевые, *т.е.* $A = \kappa E$.

Т3.5. Используем замечание 3.2 и **теорему** 3.1: $[\vec{x}A \cdot \vec{y}] = (\vec{x}A)\vec{y}^{\mathrm{T}} = \vec{x}(A\vec{y}^{\mathrm{T}}) = [\vec{x} \cdot (A\vec{y}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}] = [\vec{x} \cdot \vec{y}A^{\mathrm{T}}]$, что и требовалось доказать.

П3.21. Поскольку размеры матриц A и B равны 3×3 и 3×2, соответственно, размер матрицы AB равен 3×2. Пусть $AB = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{pmatrix}$. Элемент d_{11} находится на пересечении первой строки и первого столбца, поэтому он равен скалярному произведению первой строки матрицы A на первый столбец матрицы В, т. е. $d_{11} = 1\times1 + (-1)\times1 + 1\times(-1) = -1$; элемент d_{12} равен скалярному произведению первой строки матрицы A на второй столбец матрицы B, так как он стоит на пересечении первой строки и второго столбца, т. е. $d_{12} = 1\times2 + (-1)\times1 + 1\times0 = 1$. Аналогично находим:

$$d_{21} = 0\times1 + 1\times1 + (-2)\times(-1) = -1,$$

$$d_{22} = 0\times2 + 1\times1 + 2\times0 = 1,$$

$$d_{31} = (-1)\times1 + 1\times1 + (-2)\times(-1) = 2,$$

$$d_{32} = (-1)\times2 + 1\times1 + (-2)\times0 = -1.$$

Значит, $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Умножая все элементы матрицы AB на 3, найдём $3AB = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$. Очевидно, $2C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Складывая элементы матрицы $3AB$ с соответствующими элементами матрицы $2C$, найдем матрицу

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-2 & 3-2 \\ -3-4 & 3-4 \\ 6+2 & -3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -7 & -1 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Меняя строки и столбцы местами, найдем транспонированную матрицу

$$X^T = \begin{pmatrix} -5 & -7 & 8 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

К3.11. Ответы: (3060.5, 6992.6, 3188, 5121, 5567.6, 13821,485).

$$\begin{pmatrix} 7458.1 \\ 6608.7 \\ 3551.7 \\ 4445.4 \\ 4738.3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 188.8 \\ 172.2 \\ 160.3 \\ 137.9 \\ 159.5 \end{pmatrix}, \qquad 4\,422\,678.2$$

К3.12. Ввести исходные данные: матрицы А, B, векторы-строки r, с. Определить годовую производительность каждого предприятия по каждому виду продукции:

ORIGIN := 1 $\quad n := cols(A) \quad k := 1;n \quad C^{<k>} := A^{<k>} \cdot r_{1k}$

(в матрице C на позиции (i, k) будет число, равное годовой производительности k-го предприятия по i-му виду продукции).

Определить годовую потребность каждого предприятия по каждому виду сырья: D: $=B^T \cdot C$ (в матрице D элемент на позиции (i, k) будет равен годовой потребности k-го предприятия в i-м виде сырья).

Определить годовую сумму кредитования каждого предприятия для закупки сырья, необходимого для выпуска всей продукции $d := c \cdot D$ (в векторе-строке d k-й элемент равен сумме, которая необходима для закупки сырья всех видов k-м предприятием).

Глава 4

Метод Гаусса

Рассмотрим систему (3.1). Ее решениями являются такие наборы значений переменных $x_1, ..., x_n$, которые превращают каждое уравнение системы в тождество. Система (3.1) однозначно определяет "расширенную" матрицу $D = (AC)$ с $n + 1$ столбцами, в которой матрицы A и C просто расположены рядом. В то же время любой матрице с $n + 1$ столбцами можно сопоставить систему линейных уравнений с n переменными: для этого достаточно считать элемент на позиции (i, k) коэффициентом при переменной x_k в i-м уравнении, если $k \leq n$, и свободным членом i-го уравнения, если $k = n + 1$. В этих случаях матрицу и систему будем называть соответствующими. Строку расширенной матрицы будем называть противоречивой, если последний ее элемент отличен от нуля, а остальные элементы нулевые.

Утверждение 4.1. Если расширенная матрица содержит хотя бы одну противоречивую строку, то соответствующая ей система линейных уравнений не имеет решения.

Аналогично элементарным преобразованиям векторов можно рассмотреть элементарные преобразования строк матрицы:

- умножение строки на любое ненулевое число (элементарное преобразование типа 1);
- прибавление к одной из строк другой, умноженной на любое число (элементарное преобразование типа 2).

Утверждение 4.2. Элементарные преобразования строк расширенных матриц не изменяют множества решений соответствующей системы уравнений.

Если удалить из расширенной матрицы D последний столбец, а затем все нулевые строки (если таковые имеются), то получим так называемую приведенную матрицу D'.

Определение

Пусть приведенная матрица D' имеет размер $k \times n$ $(k \leq n)$. Если в D' существует k столбцов, в которых ровно по одному ненулевому элементу, причем никакие два из этих ненулевых элементов не находятся в одной строке, то переменные, соответствующие этим столбцам, называются базисными, остальные переменные — свободными. Базисные переменные составляют так называемый базис переменных.

Пример

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_5 = 9 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу этой системы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

Нетрудно увидеть, что данная система имеет два базиса переменных: $\{x_2, x_3, x_5\}$, $\{x_4, x_3, x_5\}$. Решим эту систему, например, относительно первого базиса: $x_2 = 7 - 2x_1 - x_4$, $2x_3 = 8 - 3x_1$, $x_5 = 9 - 4x_1$; здесь переменные x_1, x_4 — свободные и могут принимать произвольные значения, по которым затем определяются значения базисных переменных.

Этот пример помогает заметить следующее очевидное утверждение: если система имеет базис переменных, то она разрешима относительно этого базиса, при этом при наличии свободных переменных система будет иметь бесконечно много решений, а при их отсутствии значения базисных переменных определяются однозначно.

Метод Гаусса, описанный ниже, позволяет с помощью элементарных преобразований привести систему к виду, содержащему базис переменных, либо установить отсутствие решения.

Шагом алгоритма метода Гаусса будем считать переход от системы линейных уравнений к равносильной системе, имеющей большее число столбцов с единственным ненулевым элементом. Для удобства пользования вместо системы уравнений будем преобразовывать соответствующую ей матрицу. Ниже приведено описание шага алгоритма. Алгоритм прекращает работу при установлении неразрешимости системы или при невозможности выполнения очередного шага.

Алгоритм

- Пусть после k предыдущих шагов ($k \geq 0$) получена матрица M_k. Если матрица содержит противоречивую строку, то алгоритм прекращает работу. В этом случае исходная система неразрешима. В противном случае удаляем все нулевые строки матрицы M_k, если они есть. Обозначим полученную матрицу через N_k.
- Выберем ненулевой элемент матрицы N_k и назовем его разрешающим элементом. К этому элементу предъявляется единственное требование: чтобы на предыдущих шагах он не выбирался в качестве разрешающего. Столбец и строка, содержащие разрешающий элемент, также называются разрешающими.
- С помощью элементарных преобразований все остальные элементы разрешающего столбца превращаем в нули. (Это, например, можно сделать последовательным прибавлением к строкам матрицы N_k разрешающей строки, умноженной на подходящее число.) Таким образом, построена матрица M_{k+1}. Переходим к следующему шагу.

Пример 1

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

Перейдем к соответствующей матрице:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

В дальнейшем подчеркнутые элементы в матрицах являются разрешающими, а стрелки с числами указывают, на какое число умножается разрешающая строка и к какой строке затем прибавляется.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right) \leftarrow -1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & \underline{1} & -4 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow -2 \\ \leftarrow 3 \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & -16 & -16 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow -11 \\ \\ \leftarrow -4 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \end{array}$$

В этом примере свободных переменных не оказалось.

Пример 2

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 14 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

Перейдем к матрице:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 3 & 0 & 14 \\ 1 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right) \leftarrow -1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 14 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 14 - 3x_2 \\ -x_3 = -7 + 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 14 - 3x_2 \\ x_3 = 7 - 2x_2 \end{cases}$$

В этом примере x_2 — свободная переменная, а x_1 и x_3 — базисные переменные.

Пример 3

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

Перейдем к матрице:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & 8 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \\ \leftarrow 2 \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow -1 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Нижняя строка противоречивая, поэтому система не имеет решений.

Компьютерный раздел

При определении элементов матрицы и операций над ними часто приходится использовать так называемые ранжированные переменные, принимающие значения из заданного промежутка с равными интервалами— шага изменения. Пусть, к примеру, требуется определить ранжированную переменную $rvar$ с начальным значением а. конечным значением b и с заданным шагом изменения h. В этом случае в нужном месте рабочего листа вводится имя переменной $rvar$, знак присваивания := и затем через запятую значения a и $a+h$; после этого клавишей <;> вводится знак .. и на месте появившейся метки вводится Ь. Если конечное значение Ь при заданном шаге h не достигается точно, то последним значением переменной будет наибольшее возможное значение, не превышающее Ь. Выражение $a+h$ можно опускать. В этом случае шаг по умолчанию равен 1 (если Ь больше a) или -1 (если b меньше a).

Следует различать знаки равенства и логического равенства, которые на экране почти неразличимы (логический знак равенства отличается только полужирным шрифтом). Знак равенства, вводимый клавишей <=>, используется для получения на экране численного значения выражения, предшествующего этому знаку. Иное -

знак логического равенства. Он вводится комбинацией клавиш <Ctrl> + <=> и имеет двоякое назначение: помимо логических (булевых) выражений, он используется при вводе уравнений, связывая их левые и правые части. Так, щелчок на кнопке [=] подпанели Логические (Boolean) вызывает шаблон [▪ =▪] для ввода левой и правой частей уравнения.

Для решения систем уравнений в Mathcad используются так называемые блоки решений. Каждому такому блоку должно предшествовать задание начальных (стартовых) значений для искомых переменных. Начинается блок ключевым словом *Given*. Затем вводится собственно система уравнений. Завершается блок встроенной функцией `find`, аргументами которой являются переменные системы (допускается векторная форма записи этих переменных). Если система имеет несколько решений, то найденное функцией `find` решение определяется набором начальных значений переменных. Возможно также параметрическое решение системы уравнений с помощью функции `find` относительно параметров а, β, ..., присутствующих в записи этой системы. В этом случае должна быть определена функция решений, зависящая от параметров а, р, ... Например, `f(α, β) :=find(X)` Придавая затем различные значения переменным а, (3, ..., получим конкретные решения исходной системы.

Задачи для самостоятельного решения

Т4.1. Доказать утверждения 4.1 и 4.2.

Т4.2. Пусть система (3.1) имеет решения $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Найти систему линейных уравнений с теми же коэффициентами при переменных, как и в системе (3.1), имеющую решение $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$.

Т4.3. Пусть система (3.1) имеет решение $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Найти систему линейных уравнений с теми же коэффициентами при переменных, как и в системе (3.1), имеющую решение $(k\alpha_1, k\alpha_2, \ldots, k\alpha_n)$.

В задачах П4.1 - П4.21 решить системы линейных уравнений методом Гаусса.

П4.1. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

П4.2. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_3 = -2 \end{cases}$$

П4.3. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$

П4.4. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 6 \end{cases}$

П4.5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 = 2 \end{cases}$

П4.6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7 \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$

П4.7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$

П4.8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ [illegible] \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 = 10 \\ 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 = 14 \end{cases}$

П4.9. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$

П4.10. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = -2 \\ 7x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

П4.11. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$

П4.12. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$

П4.13. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 8 \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 7 \end{cases}$

П4.14. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$

П4.15. $\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 + 7x_3 - x_4 = 3 \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$

П4.16. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$

П4.17. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -2 \end{cases}$

П4.18. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$

П4.19. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = -1 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 7 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_4 = 10 \end{cases}$

П4.20. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$

П4.21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 11x_3 + 4x_4 = -2 \\ 2x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 4 \\ 5x_1 - 6x_2 + 18x_3 + x_4 = -7 \end{cases}$

Общая формулировка задач К4.1-К4.6

Для откорма скота на ферме в ежедневный рацион каждого животного должно включаться 5 видов питательных веществ в количествах 76, 360, 155, 294, 231 единиц соответственно. При этом используется 6 видов кормов, стоимости одной весовой единицы которых равны соответственно 15, 3, 8, 1, 20.5, 13.5 ден. ед. Дана матрица A норм содержания питательных веществ в кормах, в которой на позиции (i, k) находится число единиц k-го вида питательных веществ, содержащихся в единице веса i-го вида кормов. Определить состав ежедневного рациона для откорма скота на ферме при дополнительном условии, что общая стоимость всего рациона должна равняться 250 ден. ед.

К4Л. $A = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 2.5 & 1.3 & 4.6 \\ 4 & 13 & 4.3 & 15 & 4.7 \\ 1 & 11 & 8.4 & 5.5 & 5 \\ 2 & 19 & 8.5 & 8.2 & 7 \\ 1 & И & 5.2 & 2.8 & 17 \\ 2 & 12 & 7.5 & 8.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

К4.2. $A = \begin{pmatrix} 1.5 & 1.2 & 8.5 & 1.3 & 3 \\ 2.8 & 1.8 & 4.4 & 15 & 4 \\ 1.9 & 4 & 6 & 4.5 & 7 \\ 3.7 & 19 & 7.5 & 6 & 2 \\ 6.2 & 2 & 5 & 7 & 8 \\ 7.2 & 2 & 5 & 15 & 5.5 \end{pmatrix}$

К4.3. $A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 21 & 1 & 14 & 15 & 5 \\ 31 & 4 & 1 & 5.5 & 7 \\ 33 & 4 & 3 & 8.8 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2.8 & 7 \\ 7 & 2 & 6 & 8.5 & 6.5 \end{pmatrix}$

К4.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 11 & 6 \\ 8 & 1 & 4 & 11 & 7 \\ 9 & 1 & 18 & 5 & 7 \\ 13 & 9 & 3 & 18 & 7 \\ 12 & 12 & 7.5 & 18 & 7 \\ 12 & 2 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

К4.5. $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4.4 & 6.4 & 2.6 \\ 2.5 & 3.5 & 3.7 & 15 & 2.7 \\ 2.4 & 4 & 2.7 & 6.5 & 7.5 \\ 6.4 & 3.5 & 2.5 & 2.8 & 7 \\ 6 & 2 & 5 & 18 & 17 \\ 1 & 12 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

К4.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 2.5 & 13 & 6 \\ 2 & 10 & 4 & 11.5 & 7 \\ 1 & 14 & 8 & 5.5 & 7 \\ 3 & 9 & 3.5 & 8 & 7 \\ 2 & 12 & 5.5 & 8 & 7 \\ 2 & 12 & 6.5 & 8.5 & 6.5 \end{pmatrix}$

Общая формулировка задач K4.7— **K4.12**

Для сохранения здоровья человек должен потреблять в сутки определенное количество питательных веществ трех видов, содержащихся в 5 видах пищи. Цена единицы веса пищи каждого вида равна соответственно 10, 5, 6, 8, 10 ден. ед. Суточные нормы питательных веществ равны соответственно 10, 12, 20 единиц. Дана также матрица A норм содержания питательных веществ в единице веса пищи, в которой на позиции (i, k) находится норма содержания питательного вещества i-го вида в единице веса пищи k-го вида. Определить количество пищи каждого вида, включаемой в суточную диету при условиях, что вариант диеты должен иметь стоимость в 85 ден. ед., а количество пищи второго вида должно равняться количеству пищи четвертого вида.

K4.7. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 12 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

K4.8. $A=\begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

K4.9. $A=\begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 & 5 & 4 \\ 10 & 2 & 0 & 1 & 8 \\ 12 & 5 & 12 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

K4.10. $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 10 & 4 & 4 \\ 7 & 2 & 11 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

K4.11. $A=\begin{pmatrix} 9 & 5 & 8 & 7 & 2 \\ 10 & 4 & 0 & 1 & 7 \\ 2 & 6 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

K4.12. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4.5 & 1 \\ 0 & 3.2 & 1 & 2.1 & 2 \\ 2.2 & 1.5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

K4.13. Предприятие выпускает пять видов продукции, используя при этом сырье трех видов. Дана матрица расхода сырья:

$$\begin{pmatrix} 0.44 & 0.29 & 0.17 & 0.18 & 1.2 \\ 0.45 & 0.1 & 0.23 & 0.34 & 0.1 \\ 0.14 & 0.21 & 0.2 & 0.15 & 0.16 \end{pmatrix},$$

в которой на позиции (i, k) находится величина, равная количеству сырья i-го типа, расходуемому на производство единицы продукции k-го вида. Запасы сырья по типам составляют 1325, 340, 208 вес. ед. соответственно. Прибыль в ден. ед. за единицу готовой продукции каждого вида равна 16, 10, 14, 12, 12 соответственно. Необходимо спрогнозировать объемы выпуска продукции при следующих условиях: прибыль должна составить 15 620 ден. ед., а объемы выпуска продукции второго и первого видов должны быть одинаковы. Определить также зависимость объемов выпускаемой продукции от планируемой величины прибыли, которая должна будет находиться а диапазоне от 15 000 до 20 000 ден. ед.

Ответы, указания, решения

Т4.2. Ответ: искомая система будет иметь следующий вид:

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 2c_i,\ i = 1, 2, \ldots, m.$

Т4.3. Ответ: искомая система будет иметь следующий вид:

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = kc_i,\ i = 1, 2, \ldots, m.$

П4.21. Составим расширенную матрицу данной системы уравнений и элементарными преобразованиями приведем ее к эквивалентному виду, содержащему базис переменных:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 11 & 4 & -2 \\ 2 & -8 & 4 & 9 & 4 \\ 5 & -6 & 18 & 1 & -7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & -4 & 7 & 6 \\ 0 & -16 & -2 & -4 & -2 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -4 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 31/2 & 10 \\ 0 & -4 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Вторая матрица получена из первой путем поочередного умножения первой строки на (-3), (-2), (-5) и прибавления соответственно ко второй, третьей и четвертой строкам первой матрицы. Третья же матрица получена из предыдущей путем поочередного умножения второй строки на 1/2, -3, -4 и прибавления соответственно к первой, третьей и четвертой строкам. Четвертая матрица получена из предыдущей путем поочередного умножения третьей строки на 7/2, −1, 2 и прибавления соответственно к первой, второй и четвертой строкам. Последней матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{31}{2}x_4 = 10 \\ -4x_2 - 3x_4 = -2 \\ -x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 - \frac{31}{2}x_4 \\ -4x_2 = -2 + 3x_4 \\ -x_3 = 3 - 4x_4 \end{cases}$$

в которой имеется базис переменных $\{x_1, x_2, x_3\}$. Переменная x_4 является свободной. Поэтому исходная система имеет следующие решения:

$$x_1 = 10 - \frac{31}{2}x_4,\quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x_4,\quad x_3 = -3 + 4x_4,$$

x_4 - любое действительное число.

К4.6. Ответ: 2.85, 4.17, 3.04, 14.35, 4.23, 5.14.

К4.12. Ответ: 2.697, 0.611, 6.27, 0.611, 1.247.

К4.13. Ввести исходные данные: матрицу D расхода сырья, вектор-строки s и pr запасов сырья и доходов от реализации единицы продукции соответственно. Задать начальные значения переменных и определить функцию зависимости объемов выпуска продукции от параметра а, задающего величину прибыли от реализации готовой продукции:

ORIGIN:=1

$i:=1;5$ $\qquad$ $x_i:=0$

Given

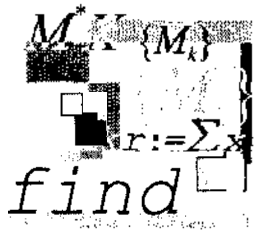
$D\cdot x=s^T$ $\qquad$ $x\cdot pr^T=\alpha$ $\qquad$ $x1=x2$ $\qquad$ $f(\alpha)=find(x)$

Определить объемы выпуска продукции каждого вида при величине прибыли в 15 620 ден. ед., а также при изменении величины прибыли в диапазоне от 15 000 до 20 000 с шагом изменения, равным 1000:

$f(15\,620)=$ $\qquad$ $\alpha=15\,000,\ 16\,000;\ 20\,000$ $\qquad$ $f(\alpha)_i=$

Замечание

Здесь и в дальнейшем запись типа $f(15620)$ =, когда справа от знака равенства отсутствует результат, отнюдь не является опечаткой. Просто после редактирования формульных областей на экране компьютера такие результаты появляются, только если включен режим **Автоматические вычисления** (Automatic Calculation) или пользователь самостоятельно инициировал обновление вычислений (Подробную информацию *см. в ел. П4).*



Глава 5

Следствия метода Гаусса

Система (3.1) называется однородной, если все ее свободные члены c_1, ..., c_n равны нулю.

Используя обозначения в формулах (3.1)-(3.2), запишем однородную систему линейных уравнений в матричном, векторно-матричном и векторном видах:

$$AX = 0,$$

$$\begin{cases} [\vec{a}_1 \cdot \vec{x}] = 0 \\ [\vec{a}_2 \cdot \vec{x}] = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ [\vec{a}_m \cdot \vec{x}] = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

$$A\vec{x}^{\mathrm{T}} = \vec{0}^{\mathrm{T}}, \qquad x_1\vec{b}_1 + \ldots + x_n\vec{b}_n = \vec{0}^{\mathrm{T}} \tag{5.2}$$

Очевидно, что любая однородная система имеет нулевое решение. Очень важен вопрос существования ненулевого решения.

Следствие 5.1. Однородная система, в которой число уравнений меньше числа переменных, имеет ненулевое решение.

Доказательство. Применим к данной системе алгоритм метода Гаусса. Так как последний столбец исходной расширенной матрицы состоит только из нулевых элементов, то в процессе элементарных преобразований он таковым и останется. Это означает невозможность появления при решении противоречивых строк. Поскольку число столбцов и, следовательно, число переменных останется неизменным, а число строк может только уменьшиться за счет вычеркивания нулевых строк, то в конечной системе число переменных будет по-прежнему больше числа уравнений. Но базисных переменных в системе столько же, сколько и уравнений. Поэтому последняя система будет обязательно содержать свободные переменные. Отсюда следует, что система имеет бесконечно много решений, в том числе и ненулевых. Следствие доказано.

Следствие 5.2. Если $m < n$, то для любой системы m векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_m$ размерности n существует ненулевой вектор $\vec{r}$, ортогональный с каждым вектором из этой системы.

Доказательство. От данной системы векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_m$ перейдем к однородной системе (5.1), в которой число уравнений m будет меньше числа переменных n. Поэтому эта система в силу следствия 5.1 имеет ненулевое решение $\vec{r}$, что и завершает доказательство.

Следствие 5.3. Пусть дана произвольная система векторов $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$. Линейная зависимость этой системы векторов равносильна существованию ненулевого решения соответствующей однородной системы (5.2).

Из этого следствия вытекает, что линейную зависимость системы векторов можно проверить с помощью метода Гаусса, решив соответствующую однородную систему линейных уравнений.

Пример

Проверить линейную зависимость системы векторов;

$$\vec{y}_1 = (3,1.4), \quad \vec{y}_2 = (5, 2, 3), \quad \vec{y}_3 = (1, 1, -6).$$

Составим соответствующую однородную систему линейных уравнений:

$$x_1\vec{y}_1' + x_2\vec{y}_2' + x_3\vec{y}_3' = 0,$$

расширенная матрица которой равна:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right).$$

Решив эту систему методом Гаусса, получим $x_1 = 3x_3$, $x_2 = -2x_3$, что в частности означает наличие ненулевого решения. Поэтому по следствию 5.3 исходная система векторов линейно зависима.

Следствие 5.4. Если в системе число векторов превосходит их размерность, то система линейно зависима.

Определение

Система векторов из R^n называется базисом пространства R^n, если эта система линейно независимая и любой вектор из R^n можно представить в виде линейной комбинации векторов этой системы.

Следствие 5.5. Линейно независимая система векторов из R^n является базисом, если и только если число векторов в ней равно n.

Доказательство. Предположим вначале, что линейно независимая система векторов состоит из n векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ в R^n. Добавим к этой системе произвольный вектор $\vec{b} \in R^n$. Новая система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ будет линейно зависимой в силу следствия 5.4. Поэтому выполняются условия теоремы 2.2, в силу которой вектор $\vec{b}$ представим в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, т. е. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ — базис.

Докажем теперь обратное утверждение. Рассмотрим произвольную систему векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m \in R^n$, где $m<n$. В силу следствия 5.2 существует ненулевой вектор $\vec{z}$, ортогональный с каждым из векторов этой системы. Если бы система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ была бы базисом, то вектор $\vec{z}$ был бы представим в виде:

$$\vec{z} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_m\vec{a}_m.$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на вектор $\vec{z}$:

$$[\vec{z}\cdot\vec{z}] = [(\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_m\vec{a}_m)\cdot\vec{z}],$$

$$|\vec{z}|^2 = \lambda_1[\vec{a}_1\cdot\vec{z}] + \ldots + \lambda_m[\vec{a}_m\cdot\vec{z}],$$

$$|\vec{z}|^2 = \lambda_1 0 + \ldots + \lambda_m 0, \text{ откуда } |\vec{z}| = 0.$$

Последнее возможно только если $\vec{z}$ — нулевой вектор (см. задачу T1.1). Полученное противоречие доказывает следствие.

Следствие 5.6. Квадратную матрицу можно привести к единичной матрице того же порядка элементарными преобразованиями строк, если и только если система строк этой матрицы линейно независима.

Доказательство. Вначале предположим, что в квадратной матрице A порядка n система строк линейно независима. Рассмотрим однородную систему уравнений $AX = 0$ и применим к ней алгоритм метода Гаусса. По аналогии с доказательством следствия 5.1 можно заключить, что в процессе алгоритма не могут появляться противоречивые строки. Более того, не могут также появляться и нулевые строки: по теореме 2.3 элементарные преобразования сохраняют линейную независимость строк матрицы A, а наличие нулевой строки противоречило бы этому (см. задачу T2.2). Итак, алгоритм метода Гаусса должен привести исходную расширенную матрицу $(A0)$ к матрице размера $n \times (n + 1)$ с нулевым последним столбцом, в которой первые n столбцов будут соответствовать базису из n переменных. Применив теперь к этой матрице элементарные преобразования типа 1, можно добиться того, что все ее ненулевые элементы станут единицами. Затем перестановкой строк, которая также осуществляется с помощью элементарных преобразований (см. задачу T2.5), последняя матрица приводится к единичной, если при этом удалить последний нулевой столбец.

В случае, когда строки квадратной матрицы A линейно зависимы, по теореме 2.3 эта зависимость будет сохраняться при элементарных преобразованиях и поэтому единичная матрица получиться не может, так как ее строки линейно независимы (см. задачу T2.3). Следствие доказано.

Следствие 5.7. Строки квадратной матрицы линейно независимы, если и только если линейно независимы ее столбцы.

Доказательство следствия дано в задаче T5.2.

Определение

Квадратная матрица называется невырожденной (вырожденной), если ее строки линейно независимы (зависимы).

Следствие 5.7 означает, что определение вырожденности матриц не изменится, если слово "строки" заменить "столбцами".

Задачи для самостоятельного решения

Т5.1. Доказать следствия 5.3 и 5.4.

Т5.2. Доказать следствие 5.7.

Т5.3. Доказать, что квадратная матрица A вырождена, если и только если такой является матрица A^{T}.

Т5.4. Доказать: добавление нового столбца к матрице не нарушает линейную независимость ее строк; аналогично добавление новой строки не нарушает линейную независимость ее столбцов.

Т5.5. Пусть дана неоднородная система линейных уравнений $AX = C$ с квадратной матрицей A. Доказать, что она имеет единственное решение, если и только если строки (столбцы) матрицы A линейно независимы.

Т5.6. Доказать, что любую линейно независимую систему векторов, не являющуюся базисом в пространстве R'', можно дополнить новыми векторами до базиса этого пространства.

Т5.7. Пусть дана система A из m линейно независимых векторов пространства R'' и $m<n$. Доказать, что если ненулевой вектор $\bar{z}$ ортогонален с каждым вектором из A, то система векторов A, $\bar{z}$ будет также линейно независимой.

В задачах П5.1—П5.21 доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис в пространстве R^3, а также представить вектор $\vec{d}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

П5.1. $\vec{a} = (3, 1, 3)$ $\vec{b} = (2,1,0)$ $\vec{c} = (1,0,1)$ $\vec{d} = (4, 2, 1)$.

П5.2. $\vec{a} = (10,3,1)$ £ = (1,4,2) $\vec{c} = (3,9,2)$ $\vec{d} = (19,30,7)$.

П5.3. $\vec{a} = (2,-1,11)$ **£ = (1,1,0)** $\vec{c} = (0,1,2)$ $\vec{d} = (2,5,3)$.

П5.4. $\vec{a} = (8,2,3)$ $\vec{b} = (4,6,10)$ $\vec{c} = (3,-2,1)$ $\vec{d} = (7,4,11)$.

П5.5. $\vec{a} = (1,-2,3)$ **£ = (4,7,2)** $\vec{c} = (6,4,2)$ **rf = (14,18,6).**

П5.6. 5 =(3,1,8) £ = (0,1,3) $\vec{c} = (1,2,-1)$ $\vec{d} = (2,0,-1)$.

П5.7. $\vec{a} = (2,4,1)$ £ = (1,3,6) $\vec{c} = (5,3,1)$ rf = (24,20,6).

П5.8. $\vec{a} = (-1,7,-4)$ £ = (-1,2,1) $\vec{c} = (0,-3,2)$ $\vec{d} = (2,1,-1)$.

П5.9. $\vec{a} = (4,7,8)$ $\vec{b} = (9,1,3)$ $\vec{c} = (2,-4,1)$ $\vec{d} = (1,-13,-13)$.

П5.10. $\vec{a} = (2,7,5)$ £ = (1,0,1) $\vec{c} = (1,-2,0)$ $\vec{d} = (0,3,1)$.

П5.11. $\vec{a}$ **= (3,7,2)** **£ = (2,3,4)** $\vec{c} = (6,2,2)$ **rf = (3,-1,2).**

П5.12. $\vec{a}$ **=(0,1,1)** **£ = (2,3,4)** $\vec{c} = (0,0,1)$ $\vec{d} = (-1,-2,-4)$.

П5.13. $\vec{a} = (-2,0,-2)$ $\vec{b} = (0,-1,1)$ $\vec{c} = (-2,0,-3)$ $\vec{d} = (-1,1,-3)$.

П5.14. $\vec{a} = (0,-1,-3)$ $\vec{b} = (0,1,0)$ $\vec{c} = (-2,1,-4)$ (/ = (-1,1,-3).

П5.15. $\vec{a} = (-2,-2,-3)$ $\vec{b} = (-2,1,1)$ $\vec{c} = (-2,-2,2)$ $\vec{d} = (-1,-1,3)$.

П5.16. $\vec{a} = (2,-2,0)$ $\vec{b} = (3,0,1)$ $\vec{c} = (4,-2,0)$ rf = (3,-1,1).

П5.17. $\vec{a} = (2,-2,4)$ $\vec{b} = (3,1,-1)$ $\vec{c} = (-4,5,2)$ $\vec{d} = (8,-1,6)$.

П5.18. $\vec{a} = (3,4,1)$ $\vec{b} = (5,8,-1)$ $\vec{c} = (6,-1,4)$ $\vec{d} = (5,-1,3)$.

П5.19. $\vec{a} = (-3,1,4)$ £ = (7,1,-5) $\vec{c} = (8,1,6)$ $\vec{d} = (-1,2,4)$.

П5.20. $\vec{a} = (-3,8,2)$ £ = (5,9,-4) $\vec{c} = (6,1,8)$ $\vec{d} = (-2,-3,-4)$.

П5.21. $\vec{a} = (2,-1,3)$ £ = (1,0,2) $\vec{c} = (3,1,1)$ $\vec{d} = (0,-2,4)$

В задачах П5.22 - П5.42 дополнить линейно независимую систему векторов до базиса:

П5.22. $\vec{a} = (2, 1,3)$.

П5.23. $\vec{a} = (-1,3,0)$.

П5.24. $\vec{a} = (2,-1,-4)$.

П5.25. $\vec{a} = (3, 4, 2)$.

П5.26. $\vec{a} = (-2, 5,3)$.

П5.27. $\vec{a} = (2, 1,3)$, $\vec{b} = (-1, 3, 1)$.

П5.28. $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (3, -1, 1)$.

П5.29. 5 = (0,3, 4), $\vec{b} = (1, 4, 2)$.

П5.30. 5 = (-1,3, 6), $\vec{b} = (2, 6, 3)$.

П5.31. $\vec{a} = (3, 4, 2)$, £ = (3,4,1).

П5.32. $\vec{a} = (1, 2, 3, 4)$, £ = (2,0,-1,3).

П5.33. $\vec{a} = (2, -1, 0, 3)$, $\vec{b} = (3, 2, -1, 1)$.

П5.34. 5 = (1, 0, 3, -1), £ = (-2,4,3,2).

П5.35. $\vec{a} = (2, 4, -1, 6)$, £ = (3, 2, -1, 4).

П5.36. 5 = (3,-1,0,2), £ = (2, 1,3,6).

П5.37. 5 = (1, 1, 0, 0), $\vec{b} = (0, 0, 1, 1)$.

П5.38. $\vec{a} = (3, 2, 1, -1)$, $\vec{b} = (4, 2, 3, 6)$.

П5.39. $\vec{a} = (3, -1, 4, 6)$, $\vec{b} = (3, 2, -1, 1)$.

П5.40. $\vec{a} = (2, 1, 3, 4)$, $\vec{b} = (2, 0, 4, 1)$.

П5.41. $\vec{a} = (3, 2, 4, 0)$, $\vec{b} = (3, 1, -3, 1)$.

П5.42. $\vec{a} = (2, 0, 1, 3)$, $\vec{b} = (-1, 1, 3, -2)$.

Ответы, указания, решения

Т5.2. Рассмотрим однородную систему $AX = 0$. По следствию 5.3 линейная зависимость столбцов матрицы A равносильна существованию ненулевого решения системы $AX = 0$. Так как система $EX = 0$ имеет только нулевое решение, то по утверждению 4.2 наличие ненулевого решения в системе $AX = 0$ равносильно невозможности с помощью элементарных преобразований превратить матрицу A в единичную матрицу E того же порядка, что в свою очередь равносильно линейной зависимости строк в A ввиду следствия 5.6.

Т5.3. Указание: воспользоваться следствием 5.7.

Т5.4. Предположим, что в матрице A с линейно независимыми столбцами добавлена одна строка. Полученную матрицу обозначим B. Очевидно, что система уравнений $EX = 0$ содержит все уравнения системы $AX = 0$. Поэтому множество решений системы $BX = 0$ является подмножеством решений системы $AX = 0$. Но система $AX = 0$ имеет только нулевое решение в силу следствия 5.3. Следовательно и вторая система имеет только нулевое решение, что опять-таки по следствию 5.3 означает линейную независимость столбцов матрицы B.

Остальная часть утверждения (касающаяся добавления нового столбца) следует из только что доказанного — достаточно только перейти к рассмотрению транспонированной матрицы.

Т5.5. Согласно следствию 5.6 строки (столбцы) матрицы A линейно независимы, если и только если система $AX = C$ элементарными преобразованиями может быть приведена к системе вида $EX = D$ с тем же множеством решений и в которой единичная матрица E того же порядка, что и A. Это завершает доказательство, если учесть, что система вида $EX = D$ имеет единственное решение $X = D$.

Т5.6. Пусть дана линейно независимая система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ е R^n и $m < n$. Тогда из следствия 5.2 вытекает существование ненулевого вектора $\vec{a}_{m+1}$, ортогонального с каждым вектором этой системы. Если новая система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m, \vec{a}_{m+1}$ линейно зависима, то по теореме 2.2 вектор $\vec{a}_{m+1}$ представим в виде линейной комбинации векторов первоначальной системы. Но это невозможно, как было показано в конце доказательства следствия 5.5. Итак, система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m, \vec{a}_{m+1}$ линейно независима. Повторяя рассуждения, через $n - m$ шагов придем к линейно независимой системе из n векторов, которая и будет искомым базисом в силу следствия 5.5.

Т5.7. Указание: воспользоваться решением задачи Т5.6.

П5.21. В силу следствия 5.5 в пространстве R^3 любая тройка линейно независимых векторов образует базис. Поэтому необходимо доказать линейную независимость векторов $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$. Кроме того, представить вектор $\vec d$ в виде линейной комбинации векторов $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ — это значит решить линейную систему уравнений $x_1\vec a + x_2\vec b + x_3\vec c = \vec d$. Решим эту систему методом Гаусса. Одновременно отметим, что в силу утверждения в задаче Т5.5 векторы $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ линейно независимы, если и только если эта система имеет единственное решение. Итак:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Откуда имеем: $x_2 = 1$, $x_1 = 1$, $x_3 = -1$, т. е. $\vec d = 1\vec a + 1\vec b - 1\vec c$.

П5.42. Вначале найдем ненулевой вектор $\vec c$, ортогональный с векторами $\vec a$ и $\vec b$. Для этого необходимо решить однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} (\vec a \cdot \vec x) = 0 \\ (\vec b \cdot \vec x) = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Решим ее методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 7/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 \\ x_2 = -\frac{7}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \end{cases}.$$

Пусть $x_3 = x_4 = 1$, тогда $x_1 = -2$, $x_2 = -3$. Вектор $\vec c = (-2, -3, 1, 1)$ — искомый. В силу утверждения задачи Т5.7 система векторов $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ линейно независима. Найдем теперь ненулевой вектор $\vec{d}$, ортогональный с векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Для этого необходимо решить однородиую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}[\vec{a}\cdot\vec{x}]=0\\ [\vec{b}\cdot\vec{x}]=0,\\ [\vec{c}\cdot\vec{x}]=0\end{cases}\qquad \begin{cases}2x_1+x_3+3x_4=0\\ -x_1+x_2+3x_3-2x_4=0.\\ -2x_1-3x_2+x_3+x_4=0\end{cases}$$

Решим ее методом Гаусса;

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2&0&1&3&0\\-1&1&3&-2&0\\-2&-3&1&1&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}2&0&1&3&0\\-1&1&3&-2&0\\-5&0&10&-5&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}2&0&1&3&0\\-1&1&3&-2&0\\1&0&-2&1&0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&5&1&0\\0&1&1&-1&0\\1&0&-2&1&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&5&1&0\\0&1&6&0&0\\1&0&-7&0&0\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}x_4=-5x_3\\ x_2=-6x_3\\ x_1=7x_3\end{cases}.$$

Пусть $x_3=1$, тогда $x_4=-5$, $x_2=-6$, $x_1=7$. Вектор $\vec{d}=(7,-6,1,-5)$ искомый. Опять-таки в силу утверждения задачи Т5.7 система векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ линейно независима. Но тогда эта система в силу следствия 5.5 является базисом пространства R^4.

Глава 6

Обратные матрицы

Пусть A и C —квадратные матрицы порядка n. Решить матричное уравнение —

$$AX = C \tag{6.1}$$

это значит найти такую квадратную матрицу б, что $AB = C$. При этом B называется решением матричного уравнения (6.1).

Непосредственно из определения операции умножения матриц вытекает следующее утверждение.

Утверждение 6.1. Матрица B является решением матричного уравнения (6.1), если и только если ее столбцы $\vec{b_1}, \vec{b_2}, ..., \vec{b_n}$ являются соответственно решениями n систем линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{c}_1$, $A\vec{x} = \vec{c}_2, .., A\vec{x} = \vec{c}_n$, где $\vec{c_1}, \vec{c}_2, ..., \vec{c}_n$ — столбцы матрицы С, $\vec{x}^{\top} = (X|, \ldots, x_n)$.

Матричному уравнению (6.1) можно поставить в соответствие расширенную матрицу $K = (AC)$ размера $n \times$ (2я), приписав справа к матрице A матрицу C. В то же время любой матрице K размера n х (2л) можно однозначно сопоставить матричное уравнение вида (6.1), положив, что первые *и* столбцов в K составляют матрицу A, последние n столбцов — матрицу С. В этих случаях матрицу K и матричное уравнение (6.1) будем называть соответствующими.

Из утверждений 6.1 и 4.2 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 6.2. Элементарные преобразования расширенных матриц не изменяют множеств решений соответствующих матричных уравнений.

Теорема 6.1. Пусть в уравнении (6.1) матрица С является единичной, т. е. С = E. Тогда уравнение (6.1) имеет решение, если и только если матрица A невырожденная.

Доказательство. Согласно следствию 5.6 существует такая последовательность σ элементарных преобразований строк матрицы Л, которая приводит матрицу A к единичной матрице того же порядка в случае невырожденности A, либо к некоторой матрице N того же порядка, содержащей хотя бы одну нулевую строку, в случае вырожденности A. Применим последовательность а к строкам расширенной матрицы (AE). После того как "левая половина" этой матрицы приведется к E, правая приведется к некоторой матрице D. В силу утверждения 6.2 пары матричных уравнений $AX = E$ и $EX = D$ (или $AX = E$ и $NX = D$) имеют одинаковые множества решений. Рассмотрим первую пару. Очевидно, решением уравнения $EX = D$ является матрица D (см. теорему 3.1) и, следовательно, D является решением уравнения $AX = E$. Рассмотрим вторую пару. Предположим, что в N i-я строка нулевая. Тогда в произведении NX i-я строка также будет нулевой, что невозможно, ибо $D = NX$, а матрица D получена из невырожденной матрицы E элементарными преобразованиями и потому в силу теоремы 2.3 не может содержать нулевых строк. Теорема доказана.

Следствие 6.1. Пусть A и E — квадратные матрицы одного порядка. Если матричное уравнение

$$AX = E \tag{6.2}$$

имеет решение, то оно единственное.

Определение

Обратной матрицей для матрицы A называется решение матричного уравнения (6.2). Обратная для A матрица обозначается A^{-1}.

Следствие 6.2. Невырожденные матрицы, и только они, имеют обратные.

Следствие 6.3. Матрица, обратная для A^{-1}, есть A, т. е. $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Следствие 6.4. Пусть A — невырожденная матрица. Тогда единственным решением матричного уравнения (6.1) является $A^{-1}C$.

Следствие 6.5. Пусть A — невырожденная матрица порядка n. Тогда для любого вектора-столбца $\vec{c}$ размерности n система уравнений $A\vec{x} = \vec{c}$ имеет единственное решение $A^{-1}\vec{c}$.

Доказательство следствий см. в задачах Т6.1 - Т6.3.

Из доказательства теоремы 6.1 вытекает следующее практическое правило проверки матрицы на невырожденность и построения обратной матрицы: с помощью элементарных преобразований строк расширенной матрицы (AE) привести "левую половину" к единичной матрице (если в ходе этого процесса образуется хотя бы одна нулевая строка в этой "левой половине", то A вырожденная); тогда на месте первоначально приписанной матрицы E окажется матрица A^{-1}.

Задачи для самостоятельного решения

Т6.1. Доказать следствие 6.1.

Т6.2. Доказать следствие 6.2.

Т6.3. Доказать следствия 6.3 - 6.5.

Т6.4. Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в данной матрице A: а) переставить i-ю и k-ю строки; б) i-ю строку умножить на отличное от нуля число λ; в) к i-й строке прибавить k-ю строку, умноженную на число λ? Ответить на этот же вопрос в случае аналогичных преобразований столбцов матрицы A.

Т6.5. Пусть A и B — невырожденные матрицы одного порядка. Тогда матрица AB также невырожденная, причем $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Т6.6. Пусть A — квадратная невырожденная матрица. Тогда
$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

В задачах П6.1 - П6.21 решить систему линейных уравнений матричным методом (с помощью обратной матрицы):

П6.1. $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1, \\ 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

П6.2. $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 3, \\ x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + 4x_3 = -9. \end{cases}$

П6.3. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 2, \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

П6.4. $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6, \\ -5x_1 - 4x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$

П6.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_3 = -3. \end{cases}$

П6.6. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -6. \end{cases}$

П6.7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ -5x_1 - 4x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

П6.8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 10x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

П6.9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$

П6.10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_2 + 2x_3 = 2, \\ -3x_1 - 12x_3 = -3. \end{cases}$

П6.11. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3, \\ 4x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 4. \end{cases}$

П6.12. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

П6.13. $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}$

П6.14. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 3, \\ 2x = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

П6.15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ -x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 7x_3 = 3. \end{cases}$

П6.16. $\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 - 15x_3 = 5, \\ x_2 + 2x_3 = 10, \\ x_1 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

П6.17. $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 = -1, \\ \\ 3x_1 + 7x_3 = -3. \end{cases}$

П6.18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

П6.19. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 2, \\ x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_3 = -6. \end{cases}$

П6.20. $\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$

П6.21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 8 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

Ответы, указания, решения

Т6.1. Указание: утверждение фактически доказано при доказательстве теоремы 6.1.

Т6.3. Доказательство следствия 6.3: если применить в обратном порядке последовательность элементарных преобразований а (см. доказательство теоремы 6.1) к строкам матрицы $(A^{-1}E)$, то получим матрицу (EA), откуда следует, что A является обратной для A^{-1} (см. практическое правило построения обратной матрицы).

Доказательство следствия 6.4: $A(A^{-1}C) = (AA^{-1})C = EC = C$ (см. теорему 3.1), откуда $A^{-1}C$ — решение матричного уравнения (6.1). Предположим теперь, что имеется еще одна матрица B такая, что $AB = C$. Умножим обе части этого равенства слева на матрицу A^{-1} (такая матрица существует в силу следствия 6.2):

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}C \text{ или } (A^{-1}A)B = A^{-1}C \text{ или } EB = B = A^{-1}C.$$

Следствие 6.5 доказывается аналогично.

Т6.4. Ответы: а) в матрице A^{-1} поменяются местами i-й и k-й столбцы; б) i-й столбец в матрице A^{-1} умножится на $1/\lambda$; в) из k-го столбца вычтется i-й столбец, умноженный на λ.

Т6.5. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$, поэтому матрица $B^{-1}A^{-1}$ — обратная для AB. Это означает также, что AB — невырожденная (в силу следствия 6.2).

Т6.6. Так как $A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{-1}A)^{\mathrm{T}} = E^{\mathrm{T}} = E$ (см. теорему 3.1), то $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$ обратная для A^{T}.

П6.21. Перепишем систему в матрично-векторном виде: $A\vec{x} = \vec{c}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Согласно следствию 6.5, если матрица A невырожденная, то решением этой системы будет вектор-столбец $A^{-1}\vec{c}$. Поэтому воспользуемся практическим правилом проверки невырожденности матрицы и построения обратной для нее матрицы (в случае утвердительного ответа), описанным в данной главе:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -7 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -5 & 8 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 9 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -7 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -27 & 4 & 1 & -5\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 9 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -7 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{27} & -\frac{1}{27} & \frac{5}{27}\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{27} & -\frac{7}{27} & \frac{8}{27}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{27} & -\frac{1}{27} & \frac{5}{27}\end{array}\right],$$

откуда

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{27} & -\frac{7}{27} & \frac{8}{27}\\ -\frac{4}{27} & -\frac{1}{27} & \frac{5}{27}\end{bmatrix}.$$

Тогда искомое решение определяется равенством

$$X=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{27} & -\frac{7}{27} & \frac{8}{27}\\ -\frac{4}{27} & -\frac{1}{27} & \frac{5}{27}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}8\\ -5\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{3}\\ \frac{59}{27}\\ \frac{17}{27}\end{bmatrix}.$$

Глава 7

Определители

Условимся в дальнейшем через A'_{ik} обозначать матрицу, полученную из матрицы A удалением i-й строки и k-го столбца. Считаем также, что на позиции (i, k) в A находится элемент a_{ik}.

Каждой квадратной матрице A по определенному правилу ставится в соответствие некоторое число, называемое определителем матрицы и обозначаемое через $|A|$. Ниже дается индуктивное определение этого понятия.

Определение

Если квадратная матрица $A = (a_{11})$ имеет порядок 1, то ее определитель равен a_{11}. Если порядок n квадратной матрицы A больше 1, то алгебраическим дополнением элемента a_{ik} в матрице A называется число $(-1)^{i+k}|A'_{ik}|$, которое будет обозначаться A_{ik} (здесь $|A'_{ik}|$ — определитель матрицы A'_{ik}). Определителем матрицы A называется сумма произведений элементов первой строки на соответствующие им алгебраические дополнения:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.$$

Пример

Вычислим определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ второго порядка:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

В приведенном выше вычислении определителя первая строка играет особую роль. Однако следующая теорема, приводимая без доказательства, показывает, что в этой роли может выступать любая строка или любой столбец.

Теорема 7.1. Определитель квадратной матрицы A, порядок которой больше 1, равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения:

$$|A| = \sum^{n} a_{ik}A_{ik}, \quad \left(|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{ik}\right)$$

Эти равенства называются разложением определителя по i-й строке (k-му столбцу).

Свойства определителей:

Свойство 7.1. Если квадратная матрица содержит нулевую строку (нулевой столбец), то ее определитель равен 0.

Свойство 7.2. При перестановке любых двух строк (столбцов) определитель меняется на противоположное число,

Доказательство. Предположим, что в A переставляются две соседние строки: i-я и $(i+1)$-я. Вновь полученную матрицу обозначим B. Очевидно, что для каждого k $A'_{ik} = B'_{i+1,k}$. Но $A_{ik} = (-1)^{i+k}|A'_{ik}|$. Поэтому $B_{i+1,k} = (-1)^{i+1+k}|B'_{i+1,k}| = -A_{ik}$. Разложим теперь определитель матрицы B по $(i+1)$-й строке:

$$|B| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} B_{i+1,k} = -\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = -|A|$$

Теперь предположим, что нужно переставить i-ю и $(i+j)$-ю строки в матрице A. Эту перестановку можно осуществить посредством $2j-1$ перестановок соседних строк:

$$(\vec{a}_i,\vec{a}_{i+1}), (\vec{a}_i,\vec{a}_{i+2}), \ldots, (\vec{a}_i,\vec{a}_{i+j}), (\vec{a}_{i+j},\vec{a}_{i+j-1}), (\vec{a}_{i+j},\vec{a}_{i+j-2}), \ldots, (\vec{a}_{i+j},\vec{a}_{i+1})$$

(в скобках указаны переставляемые строки). Поэтому для полученной после этих перестановок матрицы B верно следующее: $|B| = (-1)^{2j-1}|A| = -|A|$, что завершает доказательство.

Доказательство утверждения для столбцов проводится аналогично.

Свойство 7.3. Если квадратная матрица имеет хотя бы две одинаковые строки (два одинаковых столбца), то ее определитель равен нулю.

Доказательство. Если в матрице A переставить две одинаковые строки, то новая матрица будет совпадать с A и поэтому с учетом свойства 7.2 $|A| = -|A|$, что возможно только при $|A| = 0$.

Свойство 7.4. Сумма произведений элементов произвольной i-й строки соответственно на алгебраические дополнения к элементам произвольной другой j-й строки из тех же столбцов равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0.$$

Аналогичное утверждение верно и для столбцов.

Доказательство. Заменим в A j-ю строку i-й строкой. В полученной матрице B i-я и j-я строки уже одинаковы, т. е. $|B| = 0$ по свойству 7.3. Разложим $|B|$ по j-й строке:

$0 = |B| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}$, что и требовалось доказать.

Свойство 7.5. Пусть A_λ — матрица, полученная при умножении строки (столбца) квадратной матрицы на число λ. Тогда $|A_\lambda| = \lambda|A|$.

Доказательство см. в задаче Т7.1.

Теорема 7.2. Определитель матрицы остается неизменным при элементарных преобразованиях строк (столбцов) типа 2.

Доказательство. Предположим, что матрица B получена из матрицы A прибавлением к i-й строке j-й строки, умноженной на λ. Разложим определитель матрицы B по i-й строке. Тогда с учетом $B'_{ik} = A'_{ik}$ имеем:

$$|B| = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik} + \lambda a_{jk})B_{ik} = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik} + \lambda a_{jk})A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} + \lambda\sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{ik} = |A|,$$

так как $\sum\limits^{n} a_{jk}A_{ik} = 0$ по свойству 7.4. Теорема доказана.

Теорема 7.2 подсказывает практический способ вычисления определителя, который состоит в следующем. Если i-я строка (столбец) в матрице A состоит из одного ненулевого элемента a_{ik}, то по теореме 7.1 $|A| = a_{ik}(-1)^{i+k}|A_{ik}|$. Тем самым вычисление определителя порядка n сводится к вычислению определителя $|A_{ik}|$ порядка $n - 1$. Хотя в матрице A может не оказаться строк (столбцов) с нужным числом нулей, тем не менее с помощью элементарных преобразований типа 2 A можно преобразовать к нужному виду. При этом величина определителя останется неизменной в силу теоремы 7.2.

Следствие 7.1. Квадратная матрица A невырождена, если и только если ее определитель отличен от нуля.

Доказательство. Согласно следствию 5.6, с помощью элементарных преобразований строк матрицу A можно привести либо к единичной матрице в случае невырожденности A, либо к матрице, содержащей нулевую строку, в случае вырожденности A. В первом случае $|A| \neq 0$ в силу теоремы 7.2 и свойства 7.5, во втором случае $|A| = 0$ в силу свойства 7.1. Следствие доказано.

Определение

Матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} A_{12} \dots A_{1n} \\ A_{21} A_{22} \dots A_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{n1} A_{n2} \dots A_{nn} \end{pmatrix}$$

называется присоединенной для квадратной матрицы A.

Следствие 7.2. Если $|A| \neq 0$, то матрица $\frac{1}{|A|}(A^*)^T$ является обратной для A.

Доказательство. Элемент матрицы $A(A^*)^T$ на позиции (i, j) равен $\sum^n a_{ik} A_{jk}$. Но при $i = j$ эта сумма равна $|A|$ (теорема 7.1), а при $i \neq j$ эта сумма равна нулю (свойство 7.4). Поэтому

$$A(A^*)^T = \begin{pmatrix} |A| & 0 \ldots & 0 \\ 0 & |A| \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots & |A| \end{pmatrix},$$

Откуда $A\left(\frac{1}{|A|}(A^*)^T\right) = E$, что доказывает следствие.

Пример

Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то $A^* = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$, $(A^*)^T = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Т7.1. Доказать свойства 7.1 и 7.5.

Т7.2. Вывести следующее правило "треугольника" для вычисления определителя матрицы третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Т7.3. Доказать, что $|A| = |A^T|$.

Т7.4. Квадратная матрица называется треугольной, если все ее элементы, находящиеся выше (ниже) главной диагонали, равны нулю. Доказать, что определитель треугольной матрицы равен произведению всех ее элементов на главной диагонали. В частности, $|E| = 1$.

Т7.5. Пусть даны $n+1$ функций $f_i(x) = a_{in}x^n + a_{i,n-1}x^{n-1} + \ldots + a_{i1}x^1 + a_{i0}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Доказать, что если все они одновременно обращаются в нуль при некотором значении $x = \lambda$, то определитель матрицы F, i-я строка которой совпадает с вектором-строкой $(a_{in}, a_{i,n-1}, \ldots, a_{i1}, a_{i0})$, равен нулю.

Т7.6. Квадратная матрица A называется кососимметрической, если все ее элементы на главной диагонали равны нулю, а сумма любых двух элементов, симметричных относительно главной диагонали, также равна нулю, т. е. $a_{ik} = -a_{ki}$. Доказать, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен нулю.

Т7.7. Пусть все числа c_1, c_2, ..., c_n различны. Тогда матрицей Вандермонда называется матрица:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 & \ldots & c_1^{n-1} \\ 1 & c_2 & c_2^2 & \ldots & c_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & c_n & c_n^2 & \ldots & c_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Доказать, что определитель матрицы Вандермонда равен произведению всех разностей вида $c_k - c_i$, где $1 \le i < k \le n$.

Т7.8. Пусть A — квадратная матрица порядка n. Произведение $(-1)^p a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}$ называется членом определителя, если координаты вектора $\vec{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ составлены из номеров столбцов 1,2, ..., n (в произвольном порядке) матрицы A, а p — число всех таких пар координат вектора $\vec{i}$, в которых большее число расположено в векторе $\vec{i}$ раньше меньшего (такие пары называются инверсиями). Заметим, что член определителя матрицы A состоит из n сомножителей, взятых ровно по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы.

Доказать, что сумма всех $n!$ членов определителя матрицы A порядка n равна $|A|$.

Ответы, указания, решения

Т7.1. Указание: для доказательства свойства 7.5 разложить определитель полученной матрицы по строке, которая была умножена на X.

Т7.2. Указание: воспользоваться теоремой 7.1 и примером в начале данной главы 7.

Т7.3. Докажем индукцией относительно порядка n матриц. Утверждение непосредственно проверяется при $n = 1$. Предположим, что оно верно для всех квадратных матриц порядка $n-1$. Докажем его справедливость для произвольной матрицы A порядка n. Обозначим $B = A^{T}$ и разложим $|B|$ по первому столбцу: $|B| = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} B_{k1}$. Но $B'_{k1} = (A'_{1k})^{T}$ и, следовательно, по индуктивному предположению $|B'_{k1}| = |A'_{1k}|$. Поэтому

$$|B| = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} (-1)^{1+k} |B'_{k1}| = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} (-1)^{1+k} |A'_{1k}| = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k} = |A|$$

Т7.4. Докажем индукцией относительно порядка матриц. Утверждение непосредственно проверяется для треугольных квадратных матриц порядка 2. Предположим, что оно верно для всех квадратных треугольных матриц порядка $n-1$. Докажем его справедливость для произвольной треугольной матрицы A порядка n. Для определенности считаем, что все элементы матрицы A, которые выше главной диагонали, равны нулю. Разложим $|A|$ по первой строке: $|A| = a_{11}A_{11} = a_{11}(-1)^2|A'_{11}|$, где A'_{11} — треугольная матрица порядка $n-1$ и, следовательно, для нее выполняется индуктивное предположение, т.е. $|A'_{11}| = a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$. Отсюда $|A| = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$, что и требовалось доказать.

Т7.5. Если обозначить через $\vec{X}$ вектор-строку $(\lambda^n, \lambda^{n-1}, \dots, \lambda, 1)$, то согласно условию, $F\lambda^{\mathrm{T}} = \vec{0}$, т. е. однородная система линейных уравнений $F\vec{x} = \vec{0}$ имеет ненулевое решение λ^{T}. Поэтому по следствию 5.3 столбцы матрицы F линейно зависимы, т.е. F — вырожденная. Но тогда $|F| = 0$ по следствию 7.1. Утверждение доказано.

Т7.6. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots a_{3n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots\dots & 0 \end{pmatrix}$$

и n нечетно. Если умножить каждую строку матрицы A^{T} на -1, то опять получится матрица A. Из свойства 7.5 вытекает, что $|A| = (-1)^n|A^{\mathrm{T}}|$. Но $|A^{\mathrm{T}}| = |A|$ (см. задачу Т7.3), откуда $|A| = (-1)^n|A|$ или $|A| = -|A|$, что возможно только при $|A| = 0$.

Т7.7. Докажем индукцией относительно порядка матрицы Вандермонда. Матрица Вандермонда второго порядка имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & c_1 \\ 1 & c_2 \end{pmatrix}$ и ее определитель равен $c_2 - c_1$, т. е. утверждение выполняется. Предположим, что утверждение верно для матриц Вандермонда порядка $n-1$. Произведем следующие элементарные преобразования столбцов матрицы B: поочередно из каждого столбца, начиная с n-го, вычитаем предыдущий столбец, умноженный на c_1. В результате получим матрицу:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (c_2 - c_1) & (c_2 - c_1)c_2 \dots & (c_2 - c_1)c_2^{n-2} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 1 & (c_n - c_1) & (c_n - c_1)c_n \dots & (c_n - c_1)c_n^{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 1 & & \\ \vdots & & C'_{11} \\ 1 & & \end{pmatrix},$$

откуда

$$|B| = |C| = 1(-1)^{1+1}|C'_{11}| = (c_2 - c_1)(c_3 - c_1)\dots(c_n - c_1)\begin{vmatrix} 1 & c_2 & c_2^2 & \dots & c_2^{n-2} \\ 1 & c_3 & c_3^2 & \dots & c_3^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & c_n & c_n^2 & \dots & c_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из того, что последний сомножитель является определителем матрицы Вандермонда порядка $n-1$, следует требуемое утверждение.

Т7.8. Доказательство утверждения проведем индукцией относительно порядка матрицы A. Для матриц второго порядка его справедливость проверяется непосредственно. Предположим, что утверждение верно для матрицы порядка $n-1$ и рассмотрим квадратную матрицу A порядка n.

Из определения определителя следует, что

$$|A| = a_{11}(-1)^{1+1}|A'_{11}| + \ldots + a_{1k}(-1)^{1+k}|A'_{1k}| + \ldots + a_{1n}(-1)^{1+n}|A'_{1n}|.$$

По индуктивному предположению для любой матрицы A'_{ik} определитель $|A'_{ik}|$ состоит из $(n-1)!$ слагаемых, каждое из которых содержит в качестве сомножителей ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы A'_{ik}. Поэтому рассматриваемая сумма может быть представлена в виде $n(n-1)!$ слагаемых, составленных таким же образом. Осталось доказать, что каждое такое слагаемое фактически является членом определителя. Рассмотрим одно из таких слагаемых в выражении $a_{1k}(-1)^{1+k}|A'_{1k}|$. По индуктивному предположению оно равно;

$$a_{1k}(-1)^{1+k}(-1)^{\tilde{p}}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n} = (-1)^{\tilde{p}+k+1}a_{1k}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n},$$

где $\tilde{p}$ — число инверсий вектора $\bar{i}' = (i'_2, \ldots, i'_n)$, координаты которого составлены из номеров столбцов матрицы A'_{1k}, содержащих соответственно элементы $a_{2i_2}, a_{3i_3}, \ldots, a_{ni_n}$ матрицы A. При этом следует отметить, что из-за исключения k-го столбца из матрицы A происходит сдвиг ее номеров столбцов (на 1 уменьшаются все номера с $(k+1)$-го по n-й). Поэтому

$$i'_r = \begin{cases} i_r & \text{при } i_r < k \\ i_r - 1 & \text{при } i_r > k \end{cases}, \quad r = 2, \ldots, n. \tag{7.1}$$

Сравним числа $\tilde{p}$ и p, где p— число инверсий вектора $\bar{i}=(k, i_2, \ldots, i_n)$. Ввиду (7.1) число инверсий, образованных парами координат, не содержащих k в векторах $\bar{i}' = (i'_2, \ldots, i'_n)$ и $\bar{i} = (k, i_2, \ldots, i_n)$, одинаково. Число k, стоящее на первом месте в векторе $\bar{i}$, образует $k-1$ инверсию с меньшими числами 1, 2,..., $k-1$. Поэтому $p = \tilde{p} + k - 1$. Числа $\tilde{p} + k - 1$ и $\tilde{p} + k + 1$ имеют одинаковую четность. Следовательно, слагаемое $(-1)^{\tilde{p}+k+1}a_{1k}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n}$ равно члену определителя $(-1)^{p}a_{1k}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n}$. Отсюда следует, что сумма членов определителя матрицы A равна $|A|$.

Глава 8

Метод наименьших квадратов

Очевидно, система линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{c}$ не всегда имеет непустое множество решений. В связи с этим (и не только) возникает вопрос о существовании такого вектора $\vec{x}$, при котором левая часть $A\vec{x}$ минимально отличалась бы от правой части $\vec{c}$.

Определение

Пусть даны матрица A размера $m \times n$, вектор-столбец $\vec{c} \in R^m$ и вектор-столбец $\vec{x} \in R^n$. Тогда вектор $A\vec{x} - \vec{c}$ называется ошибкой вектора $\vec{x}$ и обозначается через $\varepsilon(\vec{x}, A, \vec{c})$. Квадрат длины вектора $A\vec{x} - \vec{c}$ будет называться модулем ошибки вектора $\vec{x}$.

Теорема 8.1. Пусть дана матрица A размерности $m \times n$ с линейно независимыми столбцами и вектор-столбец $\vec{c} \in R^m$. Тогда найдется единственный вектор-столбец $\vec{x}^*$, для которого модуль ошибки $\varepsilon(\vec{x}^*, A, \vec{c})$ минимален, причем $\vec{x}^* = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}(A^{\mathrm{T}}\vec{c})$.

Доказательство. Предположим, что матрица $A^{\mathrm{T}}A$ вырождена. Тогда в силу следствия 5.3 однородная система линейных уравнений $A^{\mathrm{T}}A\vec{x} = \vec{0}^{\mathrm{T}}$ имеет некоторое ненулевое решение $\vec{a}$, т. е. $A^{\mathrm{T}}A\vec{a} = \vec{0}^{\mathrm{T}}$. Домножив обе части этого равенства слева на $\vec{a}^{\mathrm{T}}$, получим $\vec{a}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\vec{a} = 0$. Теперь воспользуемся теоремой 3.1, замечанием 3.1 и задачей Т3.5:

$$0 = \vec{a}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\vec{a} = [\vec{a}^{\mathrm{T}} \cdot (A^{\mathrm{T}}A\vec{a})^{\mathrm{T}}] = [\vec{a}^{\mathrm{T}} \cdot \vec{a}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A] = [\vec{a}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} \cdot \vec{a}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}] = \left|(A\vec{a})^{\mathrm{T}}\right|^2,$$

т. е. $A\vec{a} = \vec{0}$ (см. задачу Т1.1). А это возможно только в случае линейной зависимости столбцов матрицы A (следствие 5.3).

Итак, доказана невырожденность матрицы $A^{\mathrm{T}}A$. Но тогда для $A^{\mathrm{T}}A$ найдется обратная матрица $(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$ (следствие 6.2). Обозначим через $\vec{x}^*$ вектор $(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}(A^{\mathrm{T}}\vec{c})$. Осталось доказать, что для любого вектора-столбца $\vec{x} \in R^n$, не равного $\vec{x}^*$, верно $\left|(A\vec{x}^* - \vec{c})^{\mathrm{T}}\right|^2 < \left|(A\vec{x} - \vec{c})^{\mathrm{T}}\right|^2$.

Обозначим $\vec{x}-\vec{x}^*$ через $\vec{y}$. Тогда, применяя теорему 3.1, получаем:
$[(A\vec{y})^T\cdot(A\vec{x}^*-\vec{c})^T] = \vec{y}^T A^T(A\vec{x}^*-\vec{c}) = \vec{y}^T((A^T A)\vec{x}^*-A^T\vec{c}) =$

$=\vec{y}^T((A^T A)(A^T A)^{-1}(A^T\vec{c})-A^T\vec{c}) = \vec{y}^T(E(A^T\vec{c})-A^T\vec{c}) = \vec{y}^T(A^T\vec{c}-A^T\vec{c}) = 0$, т.е. $(A\vec{y})^T$ и $(A\vec{x}^*-\vec{c})^T$ ортогональны. Из равенства $A\vec{y}=A\vec{x}-A\vec{x}^*$ вытекает, что $A\vec{x}-\vec{c}=A\vec{y}+(A\vec{x}^*-\vec{c})$. Используя теорему 1.1 и ортогональность векторов $(A\vec{y})^T$ и $(A\vec{x}^*-\vec{c})^T$, получаем:

$$|(A\vec{x}-\vec{c})^T|^2 = [(A\vec{y}+(A\vec{x}^*-\vec{c}))^T(A\vec{y}+(A\vec{x}^*-\vec{c}))^T] = [(A\vec{y})^T\cdot(A\vec{y})^T]+$$

$$+[(A\vec{y})^T(A\vec{x}^*-\vec{c})^T]+[(A\vec{x}^*-\vec{c})^T(A\vec{y})^T]+|(A\vec{x}^*-\vec{c})^T|^2=$$

$$=|(A\vec{y})^T|^2+|(A\vec{x}^*-\vec{c})^T|^2>|(A\vec{x}^*-\vec{c})^T|^2.$$

Поскольку $\vec{x}^*\neq\vec{x}$, то $|(A\vec{y})^T|^2$ может равняться нулю только в случае линейной зависимости столбцов матрицы A. Так как столбцы этой матрицы независимы, то $|(A\vec{y})^T|^2>0$. Отсюда следует последнее неравенство. Теорема доказана.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах П8.1 – П8.21 необходимо найти вектор $\vec{x}^*\in R^2$, имеющий минимальный модуль ошибки $\varepsilon(\vec{x}^*, A, \vec{c})$ среди других векторов пространства R^2.

П8.1. $A^T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 5 & -3 & 2\end{bmatrix}$, $c^T=[1\ \ 0\ \ 2\ \ 4]$

П8.2. $A^T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$, $c^T=[1\ \ 0\ \ 1\ \ 0]$

П8.3. $A^T=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$, $c^T=[2\ \ 1\ \ -1\ \ 2]$

П8.4. $A^T=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$, $c^T=[3\ \ 0\ \ 4\ \ 1]$

П8.5. $A^T=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 2 & -3\end{bmatrix}$, $c^T=[1\ \ -1\ \ 1\ \ -1]$

П8.6. $A^T=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3 & -2\end{bmatrix}$, $c^T=[2\ \ 1\ \ -1\ \ 3]$

П8.7. $A^{T}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}$, $c^{T}=[1\ \ 3\ \ 2]$

П8.8. $A^{T}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1 & 2\\ 4 & 0 & 1 & 4\end{bmatrix}$, $c^{T}=[1\ \ -2\ \ 3\ \ -1]$

П8.9. $A^{T}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & 3\\ -3 & 1 & 4 & 1\end{bmatrix}$, $c^{T}=[8\ \ -1\ \ 3\ \ 4]$

П8.10. $A^{T}=\begin{bmatrix}5 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 0 & -2\end{bmatrix}$, $c^{T}=[0\ \ 1\ \ -1\ \ 0]$

П8.11. $A^{T}=\begin{bmatrix}4 & -1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & -3 & 1\end{bmatrix}$, $c^{T}=[1\ \ 4\ \ 2\ \ -1]$

П8.12. $A^{T}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -2 & 2\\ 0 & -1 & -2 & 1\end{bmatrix}$, $c^{T}=[1\ \ 0\ \ 1\ \ -1]$

П8.13. $A^{T}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$, $c^{T}=[-1\ \ 1\ \ 2\ \ -2]$

П8.14. $A^{T}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$, $c^{T}=[2\ \ 1\ \ 1\ \ 2]$

П8.15. $A^{T}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -3 & 1\\ -3 & -2 & 1 & -1\end{bmatrix}$, $c^{T}=[1\ \ -2\ \ -3\ \ 1]$

П8.16. $A^{T}=\begin{bmatrix}2 & -1 & -4 & 3\\ 5 & 0 & 1 & 4\end{bmatrix}$, $c^{T}=[0\ \ 5\ \ -1\ \ 1]$

П8.17. $A^{T}=\begin{bmatrix}3 & -3 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 2\end{bmatrix}$, $c^{T}=[4\ \ -1\ \ 2\ \ 1]$

П8.18. $A^{T}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -5 & 1\\ 2 & 4 & -1 & -1\end{bmatrix}$, $c^{T}=[2\ \ 2\ \ 2\ \ -1]$

П8.19. $A^{T}=\begin{bmatrix}2 & 4 & -4 & 2\\ 1 & 6 & 6 & 1\end{bmatrix}$, $c^{T}=[4\ \ 6\ \ 0\ \ 4]$

П8.20. $A^{T}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1 & 3\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$, $c^{T}=[2\ \ 3\ \ 3\ \ 2]$

П8.21. $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$, $c=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$

Ответы, указания, решения

П8.21. Матрица A элементарными преобразованиями столбцов приводится к следующему виду:

$$A\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -4\\ 3 & -8\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

(вначале ко второму столбцу прибавляется первый, умноженный на -3; затем второй столбец умножается на 1/4; затем к первому столбцу прибавляется второй, умноженный на 2). Ясно, что в матрице $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ столбцы линейно независимы (см. задачу Т2.3). Поэтому после добавления новой строки $(-1, -2)$ они таковыми и останутся (см. задачу Т5.4). Следовательно, то же самое верно и для исходной матрицы A (теорема 2.3). Поэтому искомый вектор $\vec{x}^*$ можно найти на основании теоремы 8.1:

$$D=A^{\mathrm{T}}A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 10\\ 10 & 14\end{pmatrix},$$

$$A^{\mathrm{T}}c=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 4\end{pmatrix}.$$

Обратную для D матрицу найдем так же, как и в последнем примере *гл. 7*:

$$D^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{48} & -\frac{5}{48}\\ -\frac{5}{48} & \frac{7}{48}\end{pmatrix}.$$

Отсюда искомый вектор $\vec{x}^*$ равен:

$$D^{-1}(A^{\mathrm{T}}\vec{c})=\begin{pmatrix}\frac{7}{48} & -\frac{5}{48}\\ -\frac{5}{48} & \frac{7}{48}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{12}\\ \frac{7}{12}\end{pmatrix}.$$

Глава 9

Собственные значения неотрицательных матриц

Вначале дадим несколько важных определений.

Определение

Будем считать, что матрица или вектор положительны (неотрицательны), если все их элементы положительные (неотрицательные). Запись $A > 0$ или $\vec{x} > 0$ ($A \geq 0$ или $\vec{x} \geq 0$) означает, что матрица A или вектор $\vec{x}$ положительны (неотрицательны).

Определение

Число а называется собственным значением квадратной матрицы A, если существует такой ненулевой вектор-столбец $\vec{a}$, для которого:

$$A\vec{a} = \alpha\vec{a} \tag{9.1}$$

Ненулевой вектор $\vec{a}$ называется собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению а (нулевой вектор не считается собственным).

Определение

Пусть λ — некоторая переменная, $|A - \lambda E|$ — определитель квадратной матрицы $A - \lambda E$. Уравнение $|A - \lambda E| = 0$ называется характеристическим уравнением матрицы A.

Теорема 9.1. Число а является собственным значением квадратной матрицы A, если и только если а — корень ее характеристического уравнения.

Доказательство. Поскольку $\alpha \vec{a} = \alpha E \vec{a}$, то условие (9.1) и $(A$ - а $E)\vec{a} = \vec{0}^{T}$ эквивалентны. Число а является собственным значением матрицы A, если и только если однородная система линейных уравнений $(A - \alpha E)\vec{x} = \vec{0}^{T}$ имеет ненулевое решение. Из следствий 5.3 и 7.1 последнее равносильно равенству нулю определителя матрицы $A - \alpha E$. Теорема доказана.

Следствие 9.1. Множества собственных значений квадратных матриц A и A^{T} совпадают.

Доказательство см. в задаче Т9.1.

Следующую *теорему Перрона-Фробениуса* приведем без доказательства.

Теорема 9.2. Квадратная неотрицательная матрица A имеет неотрицательное действительное собственное значение λ_A, и модуль любого собственного значения матрицы A не превосходит λ_A (λ_A называется максимальным собственным значением матрицы A). Среди собственных векторов, соответствующих λ_A, имеется неотрицательный вектор. Если A положительна, то λ_A превосходит модули всех других собственных значений матрицы A, и среди собственных векторов, соответствующих λ_A, имеется положительный вектор.

Следствие 9.2. Если в квадратной неотрицательной матрице A сумма элементов каждого столбца равна 1, то максимальное собственное значение λ_A матрицы A равно 1.

Доказательство. В силу теоремы 9.2 матрица A имеет неотрицательное собственное значение λ_A, которому соответствует неотрицательный собственный вектор $\vec{a}$: $A\vec{a} = \lambda_A \vec{a}$ Если обозначить через $\vec{e}$ вектор-строку, размерность которой равна порядку A, а все координаты равны 1, то условие о суммах элементов столбцов матрицы A можно записать в виде равенства $\vec{e}A = \vec{e}$. Умножив обе части этого равенства справа на вектор-столбец $\vec{a}$, получим

$$\vec{e}A\vec{a} = \vec{e}\vec{a}, \quad \vec{e}(\lambda_A\vec{a}) = \vec{e}\vec{a}, \quad (1-\lambda_A)(\vec{e}\vec{a}) = 0.$$

Поскольку хотя бы одна координата вектора $\vec{a}$ положительна, то число $\vec{e}\vec{a}$ положительное. Поэтому $1-\lambda_A = 0, \lambda_A = 1$. Следствие доказано.

Определение

Неотрицательная квадратная матрица A порядка n называется продуктивной, если для любого неотрицательного вектора-столбца $\vec{y} \in R^n$ существует неотрицательный вектор-столбец $\vec{x} \in R^n$ такой, что $A\vec{x} + \vec{y} = \vec{x}$.

Теорема 9.3. Неотрицательная квадратная матрица A продуктивна, если и только если ее максимальное собственное значение λ_A меньше 1.

Доказательство. В силу теоремы 9.2 и следствия 9.1 матрицы A и A^{T} имеют неотрицательное собственное значение λ_A, причем модули других их собственных значений не превосходят λ_A, и значению λ_A соответствует такой неотрицательный вектор $\vec{a}$, что $A^{\mathrm{T}}\vec{a} = \lambda_A \vec{a}$.

Предположим вначале, что матрица A порядка n продуктивна. Тогда, в частности, для произвольного положительного вектора-столбца $\vec{y} \in R^n$ найдется такой вектор-столбец $\vec{x} \geq 0$ из R^n, что $A\vec{x} + \vec{y} = \vec{x}$. (Из этого равенства следует, что $\vec{x} > 0$.) Умножим обе части этого равенства скалярно на вектор $\vec{a}$: $[(A\vec{x}+\vec{y})^{\mathrm{T}}\cdot\vec{a}^{\mathrm{T}}]=[\vec{x}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{a}^{\mathrm{T}}]$ откуда по теореме 1,1 $[(A\vec{x})^{\mathrm{T}}\cdot\vec{a}^{\mathrm{T}}]+[\vec{y}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{a}^{\mathrm{T}}]=[\vec{x}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{a}^{\mathrm{T}}]$. Но (см. задачу Т3.5)

$$[(A\vec{x})^{\mathrm{T}}\cdot\vec{a}^{\mathrm{T}}]=[\vec{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\cdot\vec{a}^{\mathrm{T}}]=[\vec{x}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{a}^{\mathrm{T}}A]=[\vec{x}^{\mathrm{T}}\cdot(A^{\mathrm{T}}\vec{a})^{\mathrm{T}}]=\lambda_A[\vec{x}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{a}^{\mathrm{T}}].$$

Следовательно, $[\vec{y}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{a}^{\mathrm{T}}]=[\vec{x}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{a}^{\mathrm{T}}]-\lambda_A[\cdot\vec{a}^{\mathrm{T}}]$. Согласно выбору, $\vec{y}$ — положительный вектор, $\vec{a}$ — неотрицательный ненулевой вектор, поэтому $[\vec{y}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{a}^{\mathrm{T}}]>0$ По той же причине $[\vec{x}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{a}^{\mathrm{T}}]>0$. Следовательно, $1-\lambda_A>0$.

Положим теперь обратное, что $\lambda_A<1$. Покажем, что для произвольного неотрицательного вектора-столбца $\vec{y}\in R^n$ найдется вектор-столбец $\vec{z}\geq 0$ такой, что $A\vec{z}+\vec{y}=\vec{z}$. Для этого рассмотрим матрицу $B=\begin{pmatrix} & \vec{} \\ O & 1\end{pmatrix}$, где $\vec{0}\in R^n$. Тогда

$$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix}A-\lambda E & \vec{y}\\ O & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(-1)^{n+1+n+1}|A-\lambda E|=(1-\lambda)|A-\lambda E|.$$

Отсюда по теореме 9.1 множество собственных значений матрицы B состоит из 1 и множества собственных значений матрицы A. Но по условию $\lambda_A<1$, поэтому $\lambda=1$ — максимальное собственное значение матрицы B. Этому значению в силу теоремы 9.2 соответствует неотрицательный собственный вектор $\vec{b}^{\mathrm{T}}=(b_1,b_2,\dots,b_{n+1})$ и $B\vec{b}=\vec{b}$.

Обозначим через $\vec{x}^{\mathrm{T}}$ вектор $(b_1,b_2,\dots b_n)$. Тогда $B\vec{b}=\begin{pmatrix}A & \vec{y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{x}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\vec{x}+\vec{y}b_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=\vec{b}$,

откуда $A\vec{x}+\vec{y}b_{n+1}=\vec{x}$. Если $b_{n+1}=0$, то $A\vec{x}=\vec{x}$ и, следовательно, $\lambda=1$ — собственное значение матрицы A, что противоречит предположению $\lambda_A<1$. Поэтому $b_{n+1}\neq 0$, и $\frac{1}{b_{n+1}}A\vec{x}+\vec{y}=\frac{1}{b_{n+1}}\vec{x}$. Последнее означает, что вектор $\frac{1}{b_{n+1}}\vec{x}$ — искомый. Теорема доказана.

Следствие 9.3. Неотрицательная квадратная матрица A порядка n продуктивна, если и только если для матрицы $E-A$ существует обратная неотрицательная матрица.

Доказательство. Предположим вначале, что для $E-A$ существует обратная неотрицательная матрица $(E-A)^{-1}$. Для произвольного неотрицательного вектора $\vec{y}\in R^n$ обозначим $(E-A)^{-1}\vec{y}$ через $\vec{x}$. Тогда $(E-A)\vec{x}=(E-A)(E-A)^{-1}\vec{y}=\vec{y}$ или $E\vec{x}-A\vec{x}=\vec{y}$, $\vec{x}=A\vec{x}+\vec{y}$ причем из неотрицательности $(E-A)^{-1}$ следует, что $\vec{x}\geq 0$. Таким образом матрица A продуктивная по определению.

Предположим теперь, что A — продуктивная матрица, но для матрицы $E-A$ не существует обратной. По следствию 6.2 это равносильно тому, что матрица $E-A$ вырождена. А это в свою очередь равносильно наличию ненулевого решения $\vec{a}$ однородной системы $(E-A)\vec{a}=\vec{0}^{\mathrm{T}}$, т. е. $\vec{a}=A\vec{a}$. В этом случае $X=1$ — собственное значение матрицы A, однако по теореме 9.3 ее собственные значения меньше 1. Осталось предположить, что A — продуктивная матрица, но для матрицы $E-A$ существует обратная матрица, среди элементов которой встречаются отрицательные. Пусть a_{ik} — один из них, а $\vec{y}$ — вектор-столбец из R'', $к$-я координата которого равна I, а остальные координаты равны нулю. Тогда ввиду продуктивности A существует неотрицательный вектор-столбец $\vec{x}$ такой, что $A\vec{x}+\vec{y}=\vec{x}$. Отсюда $\vec{y}=(E-A)\vec{x}$, $(E-A)^{-1}\vec{y}=(E-A)^{-1}(E-A)x=\vec{x}$. Но i-я координата в $(E-A)^{-1}\vec{y}$ равна a_{ik}, что противоречит неравенству $\vec{x}\geq 0$. Следствие доказано.

Задачи для самостоятельного решения

Т9.1. Доказать следствие 9.1.

Т9.2. Доказать, что если $\vec{a}$ — собственный вектор некоторой матрицы, то и вектор $k\vec{a}$, где k — любое, не равное нулю число, также является собственным вектором, соответствующим тому же собственному значению, что и $\vec{a}$.

Т9.3. Доказать, что система векторов, состоящая из собственных векторов, соответствующих попарно различным собственным значениям некоторой матрицы A, является линейно независимой.

Т9.4. Известно следующее свойство определителя: для любых двух квадратных матриц C, B одного порядка $|CB|=|C||B|$. Пользуясь этим свойством, доказать, что собственные значения обратной матрицы A^{-1} равны обратным величинам для собственных значений матрицы A.

Т9.5. Доказать: нуль является собственным значением квадратной матрицы A, если и только если A вырождена.

Т9.6. Пусть A — положительная квадратная матрица. Тогда любой ее неотрицательный собственный вектор является положительным и соответствует максимальному собственному значению λ_A матрицы A.

Т9.7. Пусть A — положительная квадратная матрица. Тогда любые два ее положительных собственных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы, т. е. $\vec{a}=\alpha\vec{b}$ для некоторого положительного числа a.

В задачах П9.1—П9.21 для данной матрицы A найти все ее собственные значения и собственные векторы, им соответствующие.

П9.1. $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&3&0\\1&0&3\end{pmatrix}$. **П9.2.** $A=\begin{pmatrix}4&2&1\\0&4&2\\0&0&4\end{pmatrix}$. **П9.3.** $A=\begin{pmatrix}2&0&4\\0&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

П9.4. $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&2&0\\0&3&5\end{pmatrix}$. **П9.5.** $A=\begin{pmatrix}1&5&6&7\\0&3&1&1\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$. **П9.6.** $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\5&3&0&0\\6&2&2&0\\7&8&1&2\end{pmatrix}$.

П9.7. $A=\begin{pmatrix}4&5&7\\0&4&6\\0&0&1\end{pmatrix}$. **П9.8.** $A=\begin{pmatrix}1&8&7\\0&4&1\\0&0&4\end{pmatrix}$. **П9.9.** $A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

П9.10. $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$. **П9.11.** $A=\begin{pmatrix}1&1&4&2\\0&2&2&1\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{pmatrix}$. **П9.12.** $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&2&3&0\\4&2&3&4\end{pmatrix}$.

П9.13. $A=\begin{pmatrix}2&5&6&7\\0&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. **П9.14.** $A=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\5&2&0&0\\4&6&3&0\\1&0&7&3\end{pmatrix}$. **П9.15.** $A=\begin{pmatrix}1&0&6&7\\0&1&1&0\\0&0&2&5\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

П9.16. $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&2&0\\0&2&0&2\end{pmatrix}$. **П9.17.** $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$. **П9.18.** $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

П9.19. $A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$. **П9.20.** $A=\begin{pmatrix}3&3&3&1\\0&3&3&3\\0&0&3&3\\0&0&0&3\end{pmatrix}$. **П9.21.** $A=\begin{pmatrix}1&4&8&9&0\\0&3&5&6&7\\0&0&2&1&3\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}$.

Ответы, указания, решения

Т9.1. Указание: воспользоваться равенством $|A| = |A^{T}|$.

Т9.2. Утверждение непосредственно проверяется по определению.

Т9.3. Докажем индукцией относительно числа векторов в системе. Для одного вектора утверждение следует из задачи Т2.1. Предположим, что утверждение верно для систем с $k-1$ векторами. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — попарно различные собственные значения матрицы A, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ — собственные векторы, им соответствующие. Если система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ линейно зависима, то нулевой вектор представим в виде ненулевой комбинации этих векторов: $\vec{0}^T = \alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k$ Умножим обе части этого равенства слева на матрицу $A - \lambda_1 E$:

$$(A - \lambda_1 E)\vec{0}^T = \alpha_1(A\vec{a}_1 - \lambda\vec{a}_1) + \alpha_2(A\vec{a}_2 - \lambda\vec{a}_2) + \ldots + \alpha_k(A\vec{a}_k - \lambda_1\vec{a}_k)$$

или

$$\vec{0}^T = \alpha_1(\lambda_1\vec{a}_1 - \lambda_1\vec{a}_1) + \alpha_2(\lambda_2\vec{a}_2 - \lambda_1\vec{a}_2) + \ldots \alpha_k(\lambda_k\vec{a}_k - \lambda_1\vec{a}_k),$$

$$\vec{0}^T = \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{a}_2 + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)\vec{a}_3 + \ldots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)\vec{a}_k.$$

Так как по индуктивному предположению система векторов $\vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_k$ линейно независима, то из последнего равенства следует, что все коэффициенты $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)$, $\alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1), \ldots, \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)$ равны нулю. Но тогда $\alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, ибо все числа $\lambda_2 - \lambda_1$, $\lambda_3 - \lambda_1, \ldots, \lambda_k - \lambda_1$ отличны от нуля. Следовательно, $\vec{0}^T = \alpha_1\vec{a}_1$, т.е. $\alpha_1 = 0$. Получено противоречие, поскольку рассмотренная комбинация векторов ненулевая.

Т9.4. Поскольку предполагается, что обратная матрица существует, то матрица A не имеет нулевого собственного значения (см. задачу Т9.5 и следствие 6.2). Предположим, что α — собственное значение матрицы A. Это равносильно равенству $|A - \alpha E| = 0$ (теорема 9.1). Разделив каждую строку матрицы $A - \alpha E$ на α получим равенство $\left|\frac{1}{\alpha}A - E\right| = 0$. Теперь умножим обе части этого равенства на $|A^{-1}|$:

$$|A^{-1}|\left|\frac{1}{\alpha}A - E\right| = 0, \quad \left|\frac{1}{\alpha}A^{-1}A - A^{-1}E\right| = 0, \quad \left|\frac{1}{\alpha}E - A^{-1}\right| = 0 \quad \left|A^{-1} - \frac{1}{\alpha}E\right| = 0.$$

И, опять таки, по теореме 9.1 последнее равенство равносильно тому, что $\frac{1}{\alpha}$ — собственное значение матрицы A^{-1}. Утверждение доказано.

Т9.5. Указание: воспользоваться следствием 5.3.

Т9.6. Согласно теореме 9.2 и следствию 9.1, существует положительный вектор $\vec{a}$, такой что $A^T\vec{a} = \lambda_A\vec{a}$. Пусть теперь $\vec{b}$ — произвольный неотрицательный собственный вектор матрицы A, т. е. $A\vec{b} = \alpha\vec{b}$ для некоторого собственного значения α. Если i-я координата в $\vec{b}$ равна нулю, то произведение i-й строки $\vec{A}_i$ матрицы A на $\vec{b}$ было бы равно нулю, что невозможно ввиду $A_i > 0$, $\vec{b} \geq 0$ и $\vec{b} \neq \vec{0}^T$. Поэтому $\vec{b}$ — положительный собственный вектор. Применяя теорему 1.1 и утверждение задачи Т3.5, с одной стороны, имеем:

$$[\vec{a}^T \cdot (A\vec{b})^T] = [\vec{a}^T \cdot \vec{b}^T A^T] = [\vec{a}^T A \cdot \vec{b}^T] = [(A^T\vec{a})^T \cdot \vec{b}^T] = \lambda_A[\vec{a}^T \cdot \vec{b}^T].$$

С другой стороны: $[\vec{a}^{\mathrm{T}} \cdot (\vec{A}b)^{\mathrm{T}}] = [\vec{a}^{\mathrm{T}} \cdot (\alpha\vec{b})^{\mathrm{T}}] = \alpha[\vec{a}^{\mathrm{T}} \cdot \vec{b}^{\mathrm{T}}]$, откуда $(\alpha - \lambda_A)[\vec{a}^{\mathrm{T}}\vec{b}^{\mathrm{T}}] = 0$. Но $[\vec{a}^{\mathrm{T}} \cdot \vec{b}^{\mathrm{T}}] > 0$ ввиду того, что $\vec{a} > 0$, $\vec{b} > 0$. Поэтому а $= \lambda_A$, что и требовалось доказать.

Т9.7. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответствуют максимальному собственному значению λ_A матрицы A (см. задачу Т9.6), *т.е.* $A\vec{a} = \lambda_A \vec{a}$, $A\vec{b} = \lambda_A \vec{b}$. Обозначим через а положительное число, равное наименьшему из чисел $\frac{\ }{b_i}$, где a_i, b_i — i-е координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно. Тогда $\vec{a} - \alpha\vec{b} \geq 0$, причем хотя бы одна координата вектора $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ равна нулю (согласно выбору *а*). Но

$$A(\vec{a} - \alpha\vec{b}) = A\vec{a} - \alpha A\vec{b} = \lambda_A(\vec{a} - \alpha\vec{b}),$$

что означает, что $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ — собственный, не являющийся положительным, неотрицательный вектор матрицы *А,* что будет противоречить утверждению задачи Т9.6, если только $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ ненулевой. Поэтому $\vec{a} - \alpha\vec{b} = \vec{0}^{\mathrm{T}}$, что и требовалось доказать.

П9.21. Для определения собственных значений матрицы *А* составим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Так как определитель треугольной матрицы равен произведению элементов на главной диагонали, то данное уравнение равносильно уравнению $(1 - \lambda)(3 - \lambda)(2 - \lambda)^2 = 0$, откуда получаем три собственных значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$. Для определения собственных векторов, им соответствующих, необходимо решить три однородные системы линейных уравнений $(A - \lambda_i E)\vec{x} = \vec{0}^{\mathrm{T}}$, $i = 1, 2, 3$. Применим алгоритм метода Гаусса для решения первой из них:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 4 & 8 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, x_1 — любое число. Итак, все собственные векторы, соответствующие $\lambda_1 = 1$, имеют вид $(a, 0, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, где а — любое число. Аналогично устанавливается, что все собственные векторы, соответствующие $\lambda_2=3$, имеют вид $(0, a, 0, 0, 0)^т$, где а — любое число. Решим последнюю систему:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 4 & 8 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Итак, x_1, x_2, x_4, x_5 — базисные переменные, x_3 — свободная переменная:

$$\begin{cases} x_1 = 0 - 12x_3 = -12x_3 \\ x_2 = 0 - 5x_3 = -5x_3 \\ x_4 = 0 - 0x_3 = 0 \\ x_5 = 0 - 0x_3 = 0 \end{cases}.$$

Поэтому собственные векторы, соответствующие $\lambda_3 = 2$, имеют следующий вид: $(-12a, -5a, a, 0, 0)^т$, a — любое число.

Глава 10

Балансовые модели многоотраслевой экономики

Пусть имеется n различных отраслей, каждая из которых производит свой продукт. Введем следующие обозначения; $x,$ — общий объем произведенной продукции i-й отраслью (валовый выпуск продукции); x_{ik} —- объем продукции, произведенной i-й отраслью и потребленный k-й отраслью в процессе производства; y_i —объем продукции i-й отрасли, предназначенный к потреблению в непроизводственной сфере (конечный продукт, включающий накопления, личное и общественное потребление, экспорт и т.д.); z_k — прибавочная стоимость k-й отрасли (часть дохода, идущего на зарплату, амортизацию, инвестиции и т.д.); p_t —цена единицы продукции i-й отрасли. В этих обозначениях данные о межотраслевом балансе удобно представить в виде таблицы 10.1, где каждая отрасль фигурирует как проичводящая и как потребляющая.

Таблица 10.1

		1		2		....	n		Конечный продукт		Валовый продукт	
	1	p_1	x_{11}	p_1	x_{12}	....	p_1	x_{1n}	p_1	y_1	p_1	x_1
	2	P2	x_{21}	P2	x_{22}	....	P2	x_{2n}	P2	Уг	Рг	x_2
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	л	Рп	x_{n1}	p_n	x_{n2}	...	p_n	x_{nn}	Рп	Уп	Рп	x_n
Прибавочная стоимость		z_1		z_2		...	z_n					
Доход		P1	x_1	P2	X2	...	p_n	x_n				

Валовая продукция любой отрасли равна сумме конечной продукции данной отрасли и объемов ее продукции, потребляемой другими отраслями, что может быть отражено в следующих балансовых соотношениях:

$$x_i = (x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in}) + y_i\,,\ i = 1.2,\ \ldots, n. \tag{10.1}$$

Общий доход АЙ отрасли, равный до* , состоит из суммы, идущей на закупку продукции у других отраслей, *равной* $p_1x_{1k}+p_2x_{2k}+ \ldots +p_nx_{nk}$, и прибавочной стоимости z_k. Это отражено в следующих балансовых соотношениях:

$$p_kx_k=(p_1x_{1k}+p_2x_{2k}+\ldots+p_nx_{nk})+z_k,\ k=1,2,\ \ldots,n \tag{10.2}$$

Умножим обе части /-го равенства в (10.1) на p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, а затем сложим все эти равенства почленно:

$$\sum_{i=1}^{n} p_ix_i = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} p_ix_{ik}\Big)+\sum_{i=1}^{n} p_iy_i \tag{10.3}$$

Сложим почленно равенства в (10.2):

$$\sum_{k=1}^{n} p_kx_k = \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} p_ix_{ik}\Big)+\sum_{k=1}^{n} z_k \tag{10.4}$$

Приравняв правые части в (10.3) и (10.4), получим равенство:

$$\sum_{i=1}^{n} p_iy_i = \sum_{k=1}^{n} z_k\ ,$$

означающее единство материального и стоимостного состава дохода.

Известно, что примерное постоянство используемых в производстве технологий обусловливает относительное постоянство в течение ряда лет величин $a_{ik}=x_{ik}/x_{kn}$, которые называются *коэффициентами прямых затрат*. Очевидно, a_{ik} равен количеству единиц продукции /-й отрасли, потребляемой А-й отраслью для производства единицы продукции этой А-й отрасли. При этом в случае справедливости неравенства $a_{1k}+a_{2k}+\ldots+a_{nk}<1$ k-я отрасль оказывается рентабельной, так как суммарный вклад $a_{1k}+a_{2k}+\ldots+a_{nk}$ всех отраслей в выпуск единицы продукции А-й отрасли оказывается меньше этой единицы продукции.

Перепишем соотношения (10.1)-(10.2) через коэффициенты прямых затрат:

$$x_i=(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n)+y_i,\ i=1,2,\ \ldots,n,$$

$$p_k=(p_1a_{1k}+p_2a_{2k}+\ldots+p_na_{nk})+v_k,\ k=1,2,\ \ldots,n,$$

где величина $v_k=z_k/x_k$, равная прибавочной стоимости А-й отрасли на единицу произведенной этой отраслью продукции, называется *нормой прибавочной стоимости*. В векторно-матричном виде эти же балансовые соотношения выглядят так:

$$\vec{x}=A\vec{x}+\vec{y},\quad \vec{p}=A^{T}\vec{p}+\vec{v}\ , \tag{10.5}$$

где $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{pmatrix},\ \vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\ldots\\y_n\end{pmatrix},\ \vec{p}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\\ldots\\p_n\end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\ldots\\v_n\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{nn}\end{pmatrix}.$

Если матрица A продуктивна (и, следовательно, продуктивна матрица A^{T} по следствию 9.1 и теореме 9.3), то балансовые уравнения (10.5) позволяют решать следующие задачи планирования производства.

Первая задача: для предстоящего планового периода задается вектор $\vec{y}$ конечной продукции и требуется определить вектор $\vec{x}$ валового выпуска продукции. Ввиду (10.5) $\vec{y} = (E-A)\vec{x}$, откуда $\vec{x} = (E-A)^{-1}\vec{y}$, так как матрица $(E-A)^{-1}$ существует по следствию 9.3.

Вторая задача: для предстоящего планового периода задается вектор $\vec{v}$ норм прибавочной стоимости и требуется спрогнозировать цены на продукцию каждой отрасли. Ввиду (10.5) $\vec{v} = (E-A^{\mathrm{T}})\vec{p}$, т. е. $\vec{p} = (E-A^{\mathrm{T}})^{-1}\vec{v}$, так как обратная матрица существует ввиду следствия 9.3.

Определение

Если A - продуктивная матрица, то запасом ее продуктивности называется такое число $s > 1$, при котором матрица rA продуктивна при каждом r, $1 \le r < s$, а матрица sA не является продуктивной.

Теорема 10.1. Пусть дано некоторое число $r \ge 1$ и продуктивная матрица A. Тогда матрица $B = rA$ продуктивна, если и только если $r < 1/\lambda_A$, где λ_A — максимальное собственное значение матрицы A.

Доказательство теоремы дано в задаче Т10.1.

Компьютерный раздел

Встроенная функция *eigenvals(A)* определяет вектор собственных значений квадратной матрицы А. Встроенная функция `eigenvec(A,z)` определяет собственный вектор единичной длины, соответствующий собственному значению z квадратной матрицы А. Встроенная функция `identity(n)` создает единичную матрицу порядка n. Встроенные функции `max(v)` и `min(v)` определяют соответственно максимальную и минимальную координату вектора v. Встроенная функция *if(L, A, B)* зависит от трех выражений L, A и B, причем L логическое (булево) выражение. Результатом выполнения этой функции будет A или B, в зависимости от того, какое значение — истинное или ложное — примет соответственно логическое выражение L.

Рис. 10.1. Подпанель Калькулятор

Щелчок по кнопке [И] подпанели Калькулятор (Calculator), изображенной на рис. 10.1, (или клавиша <|>) вызывает шаблон $|\blacksquare|$ для вычисления модулей координат вектора, имя которого вводится на месте метки. Операция обращения матриц производится кнопкой X^{-1} подпанели **Матрица** (Matrix): если после ввода имени M матрицы щелкнуть по кнопке X^{-1}, на рабочем листе появится выражение M^{-1}.

Операция векторизации позволяет поэлементно оперировать векторами и матрицами одинакового размера. Эта операция производится с помощью клавиши $\overrightarrow{f(M)}$ подпанели **Матрица** (Matrix). Пусть, к примеру, даны векторы $\vec{a} = (2, 4, 6)$, $\vec{b} = (2, 8, 3)$, $\vec{c} = (3, 4, 5)$ и требуется определить вектор $\vec{d}$, i-я координата d_i которого будет равна $\frac{a_i}{b_i} \cdot c_i$, где a_i, b_i, c_i — соответственно i-е координаты векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Для этого в нужном месте рабочего листа введите выражение $d := \frac{a}{b} \cdot c$ и синим курсором ввода выделите выражение, стоящее справа от знака присваивания: $\boxed{d := \frac{a}{b} \cdot c}$. После щелчка по кнопке $\overrightarrow{f(M)}$ произойдет векторизация: $\boxed{d := \overrightarrow{\left(\frac{a}{b} \cdot c\right)}}$, в результате которой будет получен искомый вектор $\vec{d} = (3, 2, 10)$. Этот вектор можно получить на рабочем листе, введя идентификатор d и знак равенства, справа от которого появится искомый вектор-столбец: $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Следует также отметить, что для многих встроенных функций операцию векторизации можно не указывать, поскольку эти функции применяются к элементам векторов, являющихся их аргументами. Например, $sin(d) = \begin{pmatrix} 0.14 \\ 0.91 \\ -0.54 \end{pmatrix}$, где 0.14=sin(3), 0.91=sin(2), –0.54=sin(10). Однако это свойство не распространяется на матрицы. Например, если $d = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то функция $sin(d)$ не будет определена.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах К10.1 - К10.10 даны: матрица A коэффициентов прямых затрат по отраслям промышленности, вектор $\vec{y}$ конечной продукции, вектор $\vec{v}$ норм прибавочной стоимости, вектор $\Delta\vec{y}$ возможного процентного изменения конечной продукции, вектор $\Delta\vec{v}$ возможного процентного изменения норм прибавочной стоимости. Необходимо проверить продуктивность модели и определить ее запас продуктивности, выявить нерентабельные отрасли, определить валовый выпуск по отраслям, спрогнозировать цены на продукцию каждой отрасли и определить возможные процентные изменения валового выпуска и цен.

К10.1. $A=\begin{pmatrix} 0.15 & 0.12 & 0.48 & 0.46 & 0.16 \\ 0.1 & 0.03 & 0.7 & 0.3 & 0.07 \\ 0.1 & 0.05 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.05 & 0.2 & 0.1 & 0.05 \\ 0.7 & 0.15 & 0.3 & 0.2 & 0.03 \end{pmatrix}$, $\begin{array}{l} \vec{y}^{T}=(10,30,5,15,50) \\ \vec{v}^{T}=(4,10,4,5.12) \\ \Delta\vec{y}^{T}=(10,0,5,-30,0) \\ \Delta\vec{v}^{T}=(12,-13,12.5,14,-22). \end{array}$

К10.2. $A=\begin{pmatrix} 0.45 & 0.1 & 0.8 & 0.6 & 0.22 \\ 0.2 & 0.3 & 0.07 & 0.2 & 0.01 \\ 0.4 & 0.02 & 0.12 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.32 & 0.1 & 0.05 \\ 0.6 & 0.25 & 0.43 & 0.1 & 0.13 \end{pmatrix}$, $\begin{array}{l} \vec{y}^{T}=(12,20,11,23,30) \\ \vec{v}^{T}=(2,21,14,6,32) \\ \Delta\vec{y}^{T}=(10,0,5,-30,0) \\ \Delta\vec{v}^{T}=(32,23,3,11,12). \end{array}$

К10.3. $A=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.8 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.05 & 0.4 & 0.1 & 0.27 \\ 0.12 & 0.05 & 0.12 & 0.44 & 0.1 \\ 0.03 & 0.05 & 0.32 & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 & 0.37 & 0.2 & 0.03 \end{pmatrix}$, $\begin{array}{l} \vec{y}^{T}=(-11,44,12,-21,70) \\ \vec{v}^{T}=(-5,30,8,12,32) \\ \Delta\vec{y}^{T}=(5,-13,0,55,0) \\ \Delta\vec{v}^{T}=(31,23,-41,16,8). \end{array}$

К10.4. $A=\begin{pmatrix} 0.53 & 0.3 & 0.08 & 0.06 & 0.21 \\ 0.51 & 0.5 & 0.04 & 0.41 & 0.7 \\ 0.2 & 0.05 & 0.2 & 0.4 & 0.01 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.7 & 0.12 & 0.3 \end{pmatrix}$, $\begin{array}{l} \vec{y}^{T}=(31,-14,2,25,-7) \\ \vec{v}^{T}=(5,-13,-3,32,12) \\ \Delta\vec{y}^{T}=(-15,13,0,-25,4) \\ \Delta\vec{v}^{T}=(0,3,1,-26,-8). \end{array}$

К10.5. $A=\begin{pmatrix} 0.7 & 0.01 & 0.08 & 0.16 & 0.01 \\ 0.15 & 0.5 & 0.04 & 0.31 & 0.7 \\ 0.22 & 0.15 & 0.02 & 0.4 & 0.01 \\ 0.13 & 0.25 & 0.12 & 0.1 & 0.14 \\ 0.01 & 0.02 & 0.23 & 0.02 & 0.13 \end{pmatrix}$, $\begin{array}{l} \vec{y}^{T}=(1,4,2,1,-17) \\ \vec{v}^{T}=(5,-13,5,-2,2) \\ \Delta\vec{y}^{T}=(-15,3,10,0,12) \\ \Delta\vec{v}^{T}=(-1,-13,-21,6,28). \end{array}$

К10.6. $A=\begin{pmatrix} 0.13 & 0.11 & 0.02 & 0.16 & 0.21 \\ 0.21 & 0.15 & 0.04 & 0.12 & 0.07 \\ 0.2 & 0.05 & 0.2 & 0.44 & 0.13 \\ 0.3 & 0.25 & 0.02 & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.1 & 0.07 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$, $\vec{y}^{\text{т}}=(-21,24,-2,11,30)$, $\vec{v}^{\text{т}}=(25,-20,-8,2,-22)$, $\Delta\vec{y}^{\text{т}}=(-15,23,10,15,0)$, $\Delta\vec{v}^{\text{т}}=(0,-3,21,-16,-8)$.

К10.7. $A=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.01 & 0.2 & \mathbf{0.6} & 0.1 \\ 0.1 & 0.05 & 0.04 & 0.02 & 0.03 \\ 0.32 & 0.5 & 0.02 & 0.24 & 0.3 \\ 0.13 & 0.15 & 0.12 & 0.1 & 0.21 \\ 0.21 & 0.01 & 0.34 & 0.22 & 0.23 \end{pmatrix}$, $\vec{y}^{\text{т}}=(31,-14,22,-31,10)$, $\vec{v}^{\text{т}}=(15,20,18,-12,32)$, $A\vec{y}^{7}=(-5,-13,30,-15,10)$, $\Delta\vec{v}^{1}=(10,0,-11,6,13)$.

К10.8. $A=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.11 & \mathbf{0.8} & 0.06 & 0.21 \\ 0.01 & 0.25 & 0.4 & 0.11 & \mathbf{0.7} \\ 0.02 & \mathbf{0.5} & 0.2 & 0.04 & 0.21 \\ 0.3 & 0.05 & 0.02 & 0.01 & 0.31 \\ 0.1 & 0.21 & 0.07 & 0.02 & 0.3 \end{pmatrix}$, $\vec{y}^{\text{т}}=(-13,14,22,-24,-13)$, $\vec{v}^{\text{т}}=(-15,0,8,22,-32)$, $\Delta\vec{y}^{\text{т}}=(5,-3,0,10,-20)$, $\Delta\vec{v}^{\text{т}}=(-11,23,-10,6,8)$.

К10.9. $A=\begin{pmatrix} 0.01 & 0.01 & 0.12 & 0.06 & 0.01 \\ 0.1 & 0.05 & 0.42 & 0.02 & 0.71 \\ 0.32 & 0.25 & 0.22 & 0.4 & 0.13 \\ 0.12 & 0.05 & 0.21 & 0.1 & 0.05 \\ 0.1 & 0.1 & \mathbf{0.7} & 0.2 & \mathbf{0.09} \end{pmatrix}$, $\vec{y}^{\text{т}}=(1,-34,12,-21,10)$, $\vec{v}^{\text{т}}=(15,20,8,-13,12)$, $\Delta\vec{y}^{\text{т}}=(35,33,40,25,0)$, $\Delta\vec{v}^{\text{т}}=(10,0,0,6,12)$.

К10.10. $A=\begin{pmatrix} 0.03 & 0.21 & 0.22 & 0.6 & 0.01 \\ 0.2 & 0.5 & 0.44 & 0.02 & 0.7 \\ 0.02 & 0.15 & 0.12 & 0.14 & 0.03 \\ 0.23 & 0.15 & 0.2 & 0.21 & 0.21 \\ 0.21 & 0.31 & 0.7 & 0.12 & 0.23 \end{pmatrix}$, $\vec{y}^{\text{т}}=(23,-14,12,1,-23)$, $\vec{v}^{\text{т}}=(-25,10,14,-12,32)$, $\Delta\vec{y}^{\text{т}}=(0,13,-10,25,-10)$, $\Delta\vec{v}^{\text{т}}=(20,21,-16,6,25)$.

Ответы, указания, решения

Т10.1. По теореме 9.1 множество собственных значений матрицы B совпадает со множеством корней ее характеристического уравнения

$$|B-\lambda E|=0. \tag{10.6}$$

Разделив каждую строку матрицы B - XE на r, получим уравнение

$$\backslash A\text{-}xE\backslash = 0, \tag{10.7}$$

где $x = \lambda / r$. По теореме 9.1 множество собственных значений матрицы A совпадает с множеством корней уравнения (10.7). Но максимальный корень этого уравнения $x = \lambda_A$, а корни уравнения (10.6) в r раз больше соответствующих корней уравнения (10.7) (так как $\lambda = rx$). Отсюда $\lambda_B = r\lambda_A$, где λ_B — максимальное собственное значение матрицы B. Согласно теореме 9.3, B продуктивна, если и только если $\lambda_B<1$, т.е. $r < \frac{1}{A}$. Теорема доказана.

Общий алгоритм решения задач K10.1 — K10.10 с помощью Mathcad

Ввести матрицу A коэффициентов прямых затрат, вектор y конечной продукции, вектор v норм прибавочной стоимости, а также векторы возможного процентного изменения конечной продукции ΔY и норм прибавочной стоимости ΔV. На основе теоремы 9.3 установить продуктивность матрицы A:

$ORIGIN:=1$

$u:=eigenvals(A)$ $\qquad \omega:=\overrightarrow{|u|}$ $\qquad pr:=if(max(\omega) < 1, "yes", "no")$.

В случае утвердительного ответа на основе теоремы 10.1 определить ее запас продуктивности s: $s:=1 / max(\omega)$. Найдя суммы элементов всех столбцов матрицы A, определить рентабельные и нерентабельные отрасли:

$t:=cols(A)$ $\qquad m:=1;t$ $\qquad r_m:=\sum A^{<m>}$ $\qquad re_m:=if(r_m \geq 1, "no", "yes")$

Определить вектор валового выпуска продукции X и спрогнозировать цены на продукцию каждой отрасли (вектор P):

$D:=(identity(t)-A)^{-1}$ $\qquad X:=D\cdot Y$ $\qquad C:=(identity(t)-A^T)^{-1}$ $\qquad P:=C\cdot V$.

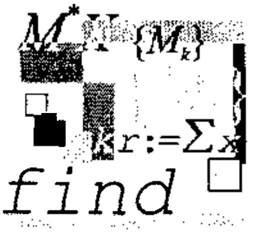
Найти возможные процентные изменения валового выпуска и цен:

$\Delta X:=D\cdot \Delta Y$ $\qquad \Delta P:=C\cdot \Delta V$.

K10.1. Ответы: валовый выпуск равен (165, 149, 85, 75, 236); прогнозируемые цены равны (67, 35, 114,86,42).

K10.2. Ответы: матрица не продуктивна.

K10.3. Ответы: запас продуктивности равен 1.0065.



Глава 11

Модели международной торговли

Основу линейной модели международной торговли составляет структурная матрица торговли A, порядок n которой равен числу стран-участниц, а на позиции (i, k) находится элемент a_{ik}, равный части торгового бюджета k-й страны, идущего на импорт товаров из i-й страны. Предполагается также, что каждая страна расходует весь свой торговый бюджет на закупку товаров внутри страны и на импорт из других стран, причем $A > 0$. Очевидно, сумма элементов каждого столбца матрицы A равна 1, а выручка i-й страны от торговли составит $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$, где x_k — торговый бюджет k-й страны.

Определение

Сбалансированность торговли (или бездефицитность торгового бюджета) означает выполнимость n неравенств:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{11.1}$$

Лемма 11.1. Система неравенств (11.1) равносильна системе равенств:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Доказательство. Предположим, что хотя бы одно из неравенств в (11.1) строгое. Тогда, сложив их всех почленно, получим:

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\Big) > \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{11.2}$$

Но $\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\Big) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(a_{ik}x_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\Big) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot 1 = \sum_{k=1}^{n} x_k$ что противоречит (11.2). Лемма доказана.

Теорема 11.1. Всегда существует положительный вектор $\vec{x}^{\mathsf{T}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ торговых бюджетов n стран-участниц, обеспечивающий сбалансированность торговли. При этом любой другой такой вектор может быть получен из $\vec{x}$ умножением на некоторое положительное число.

Доказательство. Сбалансированность торговли означает существование такого положительного вектора $\vec{x}^{\mathsf{T}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при котором $A\vec{x} = \vec{x}$ (лемма 11.1). Но по следствию 9.2 и теореме 9.2 матрица A имеет максимальное собственное значение λ_A, равное 1, и ему соответствует некоторый положительный собственный вектор $\vec{x}$, причем любой другой положительный собственный вектор матрицы A имеет вид $\alpha\vec{x}$, где α— произвольное положительное число (см. задачу Т9.7). Теорема доказана.

Теорема 11.1 означает возможность задать такие соотношения торговых бюджетов стран-участниц, при которых будет обеспечена сбалансированность торговли.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах К11.1 — К11.10 дана структурная матрица торговли A. Необходимо проверить, расходует ли каждая страна весь свой торговый бюджет на закупку товаров внутри страны и на импорт из других стран-участниц, и в случае утвердительного ответа определить соотношения между торговыми бюджетами стран-участниц, обеспечивающие сбалансированность торговой модели.

К11.1. $A = \begin{pmatrix} 0.09 & 0.059 & 0.182 & 0.222 & 0.086 & 0.056 \\ 0.407 & 0.174 & 0.075 & 0.333 & 0.207 & 0.236 \\ 0.169 & 0.3 & 0.273 & 0.167 & 0.154 & 0.111 \\ 0.303 & 0.05 & 0.227 & 0.16 & 0.343 & 0.375 \\ 0.03 & 0.05 & 0.14 & 0.007 & 0.2 & 0.111 \\ 0.001 & 0.367 & 0.103 & 0.111 & 0.01 & 0.111 \end{pmatrix}.$

К11.2. $A = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.3 & 0.0125 & 0.125 & 0.1 & 0.1 \\ 0.125 & 0.1 & 0.0425 & 0.025 & 0.2 & 0.1 \\ 0.125 & 0.1 & 0.8 & 0.03 & 0.025 & 0.01 \\ 0.125 & 0.1 & 0.025 & 0.7 & 0.025 & 0.08 \\ 0.25 & 0.2 & 0.05 & 0.07 & 0.6 & 0.01 \\ 0.125 & 0.2 & 0.07 & 0.05 & 0.05 & 0.7 \end{pmatrix}.$

К11.3. $A = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.25 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.25 & 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.25 & 0.1 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}.$

К11.4. $A = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.4 & 0.125 & 0.25 & 0.15 \\ 0.25 & 0.15 & 0.425 & 0.025 & 0.25 \\ 0.125 & 0.15 & 0.4 & 0.035 & 0.1 \\ 0.125 & 0.1 & 0.025 & 0.45 & 0.25 \\ 0.15 & 0.2 & 0.025 & 0.24 & 0.25 \end{pmatrix}.$

K11.5. $A = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.3 & 0.01 & 0.125 & 0.2 \\ 0.15 & 0.2 & 0.04 & 0.225 & 0.3 \\ 0.15 & 0.1 & 0.65 & 0.35 & 0.025 \\ 0.15 & 0.2 & 0.25 & 0.2 & 0.225 \\ 0.4 & 0.2 & 0.05 & 0.1 & 0.25 \end{pmatrix}$

K11.6. $A = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.3 & 0.05 & 0.325 \\ 0.35 & 0.3 & 0.35 & 0.025 \\ 0.125 & 0.3 & 0.5 & 0.35 \\ 0.275 & 0.2 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$

K11.7. $A = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.4 & 0.05 & 0.15 \\ 0.125 & 0.1 & 0.45 & 0.05 \\ 0.175 & 0.1 & 0.25 & 0.65 \\ 0.25 & 0.4 & 0.25 & 0.15 \end{pmatrix}$

K11.8. $A = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.2 & 0.025 & 0.325 & 0.3 \\ 0.425 & 0.2 & 0.025 & 0.025 & 0.2 \\ 0.125 & 0.2 & 0.9 & 0.35 & 0.05 \\ 0.125 & 0.2 & 0.025 & 0.15 & 0.25 \\ 0.075 & 0.2 & 0.025 & 0.15 & 0.2 \end{pmatrix}$

K11.9. $A = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.2 & 0.25 & 0.125 & 0.3 & 0.15 \\ 0.15 & 0.2 & 0.45 & 0.475 & 0.2 & 0.15 \\ 0.15 & 0.1 & 0.1 & 0.05 & 0.025 & 0.25 \\ 0.15 & 0.1 & 0.025 & 0.15 & 0.025 & 0.25 \\ 0.25 & 0.2 & 0.075 & 0.05 & 0.35 & 0.1 \\ 0.15 & 0.2 & 0.1 & 0.15 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$

КИЛО. $A = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.1 & 0{,}015 & 0.325 & 0.15 \\ 0.1 & 0.1 & 0.035 & 0.025 & 0.25 \\ 0.15 & 0.1 & 0.85 & 0.35 & 0.05 \\ 0{,}15 & 0.1 & 0.05 & 0.25 & 0.25 \\ 0.15 & 0.6 & 0.05 & 0.05 & 0.3 \end{pmatrix}$

Ответы, указания, решения

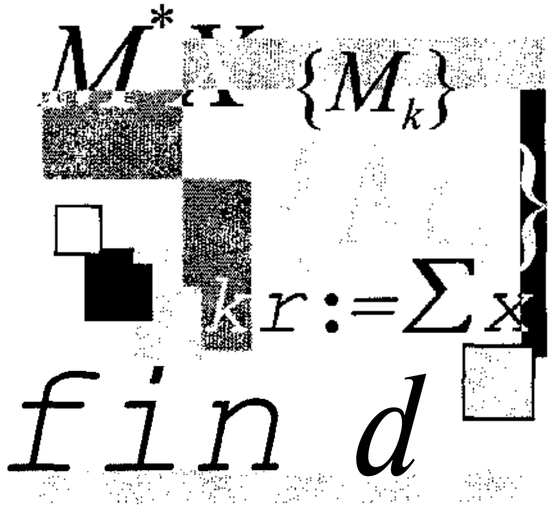
Общий алгоритм решения задач К11.1—К11.10 с помощью Mathcad

Ввести структурную матрицу А Проверить равенство единицы расходной части торгового бюджета каждой страны: ORIGIN: = 1 $t := rows(T)$ $i := 1; t$ $E_i := \sum T^{<i>}$ $E^T =$

В случае утвердительного ответа, вычислить собственный вектор матрицы A, соответствующий максимальному собственному значению, равному 1 (см. теорему 11.1), и после этого нормализовать его к более удобному виду:

$c := eigenvec(A, 1)$ $minbud := min(c)$ $c := c/minbud$

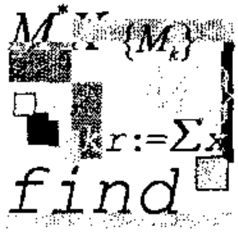
К11.1. Ответы: торговые бюджеты должны находиться в соотношении 1.606 : 2.923 ; 2.704 : 2.729 : 1 : 1.874.



Часть II

Математическое программирование

Глава 12



Прямые и плоскости в n-мерном точечном пространстве

n-мерной точкой называется упорядоченный набор $M = (m_1, m_2, ..., m_n)$ *и* действительных чисел $m_,, ..., m_n,$ обозначаемых координатами точки M. Множество всех *n*-мерных точек называется «-мерным точечным пространством Af'', если любым двум точкам $A = (a_1, \bullet\bullet\bullet, a_n)$ и $B = (b_1, ..., b_n)$ из Af'' ставится в соответствие вектор $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, ..., b_n - a_n)$ из R^n (с началом в точке A и с концом в точке B). Символически эту связь будем изображать так: $B = A + \overrightarrow{AB}$. Расстоянием между A и B называется длина вектора $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + ... + (a_n - b_n)^2}$;

Прямой в пространстве Af, проходящей через точку $A = (a_1, ..., a_n)$ параллельно ненулевому вектору $\vec{p} = (p_1, ..., p_n)$, называется множество всех точек $X = (x_1, ..., x_n)$ вида $X = A + t\vec{p}$, где t — любое число. Вектор $\vec{p}$ называется направляющим вектором прямой.

Покоординатно это можно записать так: $x_1 = a_1 + tp\backslash, ..., x_n = a_n + tp_n$ или $\frac{x_1 - a_1}{P\backslash} = \frac{x_2 - a_2}{p_2} = ... = \frac{x_n - a_n}{p_n}$. Последняя запись чисто символическая, ибо некоторые из координат вектора $\vec{p}$ могут равняться нулю. Например, $\frac{x_1 - a_1}{0} = \frac{x_2 - a}{3}$ означает, что $3(x_1 - a_1) = 0(x_2 - a_2)$.

k-мерной плоскостью в пространстве Af'', проходящей через точку $A = (a_1, ..., a_n)$ параллельно *к* линейно независимым векторам $\vec{p}_1, \vec{p}_2, ..., \vec{p}_k$ из R^n, называется множество всех точек X вида $X = A + t_1\vec{p}_1 + t_2\vec{p}_2 + ... + t_k\vec{p}_k$, где $t_1, t_2, \bullet\bullet\bullet, t_k$ — произвольные числа. Очевидно, что прямая — это одномерная плоскость. $(n-1)$-мерные плоскости называются гиперплоскостями в Af.

Теорема 12.1. Множество точек $X = (x_1, ..., x_n)$ пространства Af является гиперплоскостью, если и только если координаты каждой точки этого множества удовлетворяют некоторому линейному уравнению вида:

$$\text{fli*i} + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b = 0, \tag{12.1}$$

где $a_1, a_2, ..., a_n, b$ — константы и не все $a_1, a_2, ..., a_n$ равны нулю.

Доказательство. Рассмотрим произвольную гиперплоскость

$$X = M + t_1\vec{p}_1 + t_2\vec{p}_2 + \ldots + t_{n-1}\vec{p}_{n-1},$$

где $M = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_{n-1}$ — система линейно независимых векторов из R^n. Тогда, обозначив $\vec{p}_n = \overrightarrow{MX}$, получим $\vec{p}_n = t_1\vec{p}_1 + t_2\vec{p}_2 + \ldots + t_{n-1}\vec{p}_{n-1}$. Это равенство означает, в частности, линейную зависимость системы векторов $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$. Обозначим через B квадратную матрицу, i-я строка которой совпадает с $\vec{p}_i$. Так как B вырожденная матрица, то по следствию 7.1 $|B| = 0$. Разложим этот определитель по последней строке $(x_1 - m_1, x_2 - m_2, \ldots, x_n - m_n)$:

$$(x_1 - m_1)B_{n1} + (x_2 - m_2)B_{n2} + \ldots + (x_n - m_n)B_{nn} = 0, \tag{12.2}$$

где $B_{n1}, \ldots, B_{nn}$ — алгебраические дополнения соответственно элементов $x_1 - m_1, \ldots, x_n - m_n$. Если $B_{n1} = B_{n2} = \ldots = B_{nn} = 0$, то из (12.2) следует, что $|B| = 0$ независимо от того, какая в матрице B n-я строка. Но, если в B эту строку заменить вектором $\vec{z}$, при котором система векторов $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_{n-1}, \vec{z}$ линейно независима (такой вектор существует— см. следствие 5.2 и задачу Т5.7), то определитель новой матрицы будет уже отличен от нуля в силу следствия 7.1. Поэтому не все $B_{n1}, B_{n2}, \ldots, B_{nn}$ равны нулю. Итак, обозначив

$$a_i = B_{ni},\ i = 1, \ldots, n,\quad b = -(m_1B_{n1} + \ldots + m_nB_{nn}),$$

из (12.2) получим равенство (12.1).

Теперь докажем, что множество всех точек, координаты которых удовлетворяют (12.1), является гиперплоскостью. Обозначим $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. В силу следствия 5.2 и утверждения задачи Т5.7 вектор $\vec{a}$ можно последовательно дополнить векторами $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_{n-1}$ до базиса в R^n такого, что $\vec{p}_1$ будет ортогонален с $\vec{a}$, $\vec{p}_i$ будет ортогонален с $\vec{a}, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_{i-1}$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Возьмем произвольную точку $M = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, координаты которой удовлетворяют (12.1). Такая точка всегда существует: если, к примеру, $a_1 \neq 0$, то в качестве M можно было бы взять точку $(-b/a_1, 0, \ldots, 0)$. Гиперплоскость $X = M + t_1\vec{p}_1 + t_2\vec{p}_2 + \ldots + t_{n-1}\vec{p}_{n-1}$ — искомая. Действительно, домножим обе части равенства $\overrightarrow{MX} = t_1\vec{p}_1 + t_2\vec{p}_2 + \ldots + t_{n-1}\vec{p}_{n-1}$ скалярно на вектор $\vec{a}$: $[\vec{a} \cdot \overrightarrow{MX}] = t_1[\vec{a} \cdot \vec{p}_1] + \ldots + t_{n-1}[\vec{a} \cdot \vec{p}_{n-1}]$. Так как $[\vec{a} \cdot \vec{p}_i] = 0$, то $[\vec{a} \cdot \overrightarrow{MX}] = 0$. Отсюда $a_1(x_1 - m_1) + \ldots + a_n(x_n - m_n) = 0$, $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - (a_1m_1 + \ldots + a_nm_n) = 0$, $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b = 0$. Теорема доказана.

Задачи для самостоятельного решения

Т12.1. Доказать: для любых трех точек A, B, C, принадлежащих Af^n, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, если и только если $A = B$.

Т12.2. Доказать, что для любой k-мерной плоскости в пространстве Af^n верно $k \leq n$.

T12.3. Доказать, что «-мерная плоскость пространства Af совпадает с Af.

T12.4. Даны две прямые $A+\vec{p}t$, $B+\vec{s}t$ в пространстве Af. Доказать, что эти две прямые проходят через одну точку и не совпадают, если и только если £ и $\vec{s}$ линейно независимы и $\overrightarrow{AB}$ представим в виде линейной комбинации векторов $\vec{p}$, $\vec{s}$.

T12.5. Найти точку пересечения двух прямых $A+\vec{p}t$ и $B+\vec{s}t$, если A=(2, I, 1,3, -3), $\vec{p}$=(2, 3, 1, 1,-1), B=(1, 1,2, 1,2), $\vec{s}$=(1,2, 1,0, 1).

T12.6. Найти точку пересечения двух прямых $A+\vec{p}t$ и $B+\vec{s}t$, если A=(3, 1,2, 1, 3), $\vec{p}$=(1, 0, 1, 1, 2), B=(2, 2, –1, –1, –2), $\vec{s}$=(2, 1,0, 1, 1).

Ответы, указания, решения

T12.1. Указание: воспользоваться определением вектора, связанного с точками из Af.

T12.2. Указание: воспользоваться следствием 5.4.

T12.3. Воспользоваться следствием 5.5.

T12.4. Вначале отметим следующий факт: две прямые, имеющие общую точку $M=(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, совпадают, если и только если их направляющие векторы $\vec{p}=(p_1,\ldots, p_n)$ и $\vec{s}=(s_1, \ldots, s_n)$ линейно зависимы, т.е. $\vec{p}=\vec{\alpha}s$Действительно, если $\dfrac{x_1-m_1}{\text{ад-,}}=\ldots=\dfrac{x_n-m_n}{\alpha s_n}$ — уравнение первой прямой, то после сокращения на а получим уравнение второй прямой.

Теперь предположим, что данные в условии прямые имеют общую точку M. Тогда $M=A+t_1\vec{p}$, $M=B+t_2\vec{s}$ для некоторых чисел t_1, t_2, откуда $\overrightarrow{AM}=t_1\vec{p}$, $\overrightarrow{BM}=t_2\vec{s}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=t_1\vec{p}+(-t_2\vec{s})$ (см. задачу T12.1), т.е. вектор $\overrightarrow{AB}$ представим в виде линейной комбинации векторов $\vec{p}$ и $\vec{s}$.

Обратно, пусть $\overrightarrow{AB}=t_1\vec{p}-t_2\vec{s}$. Обозначим через Л' точку $A+t_1\vec{p}$ а через L — точку $B+t_2\vec{s}$ Тогда $\overrightarrow{AN}=t_1\vec{p}$, $\overrightarrow{LB}=-t_2\vec{s}$, $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{LB}=t_1\vec{p}-t_2\vec{s}=\overrightarrow{AB}$. Согласно утверждению задачи T12.1, $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AB}$. Откуда $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{LB}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NB}$, $\overrightarrow{LB}=\overrightarrow{NB}$, $\overrightarrow{LB}+\overrightarrow{BN}=\vec{0}$, $\overrightarrow{LN}=\vec{0}$, $L=N$, что и требовалось доказать.

T12.5. Воспользуемся решением задачи T12.4, согласно которому для нахождения точки пересечения двух данных прямых необходимо решить систему линейных уравнений $\overrightarrow{AB} = t_1\vec{p} - t_2\vec{s}$ относительно переменных t_1, t_2, где $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, 1, -2, 5)$. Решим ее методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Поэтому $t_1 = -2, t_2 = -3$. Искомая точка M будет равна $A - 2\vec{p}$ или $B - 3\vec{s}$ (см. решение задачи Т12.4), т. е. $M = (-2, -5, -1, 1, -1)$.

Т12.6. Ответ: $(0, 1, -1, -2, -3)$.

Глава 13

Плоскости и прямые в двумерном и трехмерном точечных пространствах

Так как гиперплоскость в Af^3 — это обычная плоскость в пространстве, а гиперплоскость в Af^2 — это обычная прямая на плоскости, то из теоремы 12.1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 13.1. Множество точек (x, y, z) в пространстве является плоскостью, если и только если их координаты удовлетворяют уравнению $ax + by + cz + d = 0$, в котором не все константы a, b, c равны нулю. Множество точек (x, y) на плоскости является прямой, если и только если их координаты удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$, в котором не все константы а, b равны нулю.

Определение

Любой вектор из R^3, перпендикулярный плоскости, называется нормальным вектором этой плоскости. Любой вектор из ft^2 перпендикулярный прямой на плоскости, называется нормальным вектором этой прямой.

Следствие 13.2. Вектор $\vec{n} = (a, b, c)$ является нормальным вектором плоскости, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$. Вектор $\vec{n} = (a, b)$ является нормальным вектором прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$.

Доказательство следствия дано в задаче Т13.1.

Следствие 13.3. Уравнение плоскости, проходящей через точки $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$, не лежащие на одной прямой, может быть записано в виде:

$$\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство. Обозначим

$$\vec{p}_1 = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3), \quad \vec{p}_2 = \overrightarrow{AC} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3).$$

Так как точки A, B, C, не лежат на одной прямой, то прямые, проходящие через точку A и имеющие направляющие векторы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, не совпадают и, следовательно, векторы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ линейно независимы (см. задачу Т12.4). Поэтому искомая плоскость должна проходить через точку A параллельно двум линейно независимым векторам $\vec{p}_1$ и Д.. По определению множество всех ее точек имеет вид $A + t_1$ Д $+ t_2\vec{p}_2$, где t_1, t_2 — произвольные числа. При доказательстве теоремы 12.1 было показано, что уравнение такой плоскости может быть определено в виде \D\"- 0, где D — матрица, строки которой совпадают с векторами Д , $\vec{p}_2$ и $(x - a_1, y - a_2, z - a_3)$. Следствие доказано.

Задачи для самостоятельного решения

Т13.1. Доказать следствие 13.2.

Т13.2. Доказать, что если плоскость пересекает оси координат Оx, Оy. Оz в точках (a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c) и $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, то се уравнение можно записать в виде

a $\quad b \quad$ c

Т13.3. Доказать, что уравнение прямой в пространстве, проходящей через две данные точки (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), можно записать в виде:

$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{z - a_3}{b_3 - \mathbf{tf}_3}.$$

Т13.4. Пусть две плоскости заданы уравнениями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Доказать, что они перпендикулярны, если и только если $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = \mathbf{0}$.

Т13.5. Пусть две плоскости заданы уравнениями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Доказать, что они параллельны, если и только если существует такое число a, что $a_1 = \alpha a_2$, $b_1 = \alpha b_2, c_1 = \alpha c_2$.

Т13.6. Пусть две прямые на плоскости заданы уравнениями $a_1x + b_1y$ -г $c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Доказать, что косинус угла между ними равен:

$$\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Т13.7. Сформулировать и доказать утверждения для прямых на плоскости, аналогичные утверждениям задач Т13.2, Т13.3, Т13.4, Т13.5.

В задачах П13.1 – П13.21 даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Найти: длину ребра AB; угол между ребрами AB и AD; уравнение прямой AB; уравнение плоскости ABC; уравнение высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

П13.1. A = (1, -К,2), B = (2, -1, 3), C =(1, 3, -1), D = (2, 0, -2).

П13.2. $A = (0, -2, 5)$, $B = (6, 6, 0)$, $C = (3, -3, 6)$, $D = (2, -1, 3)$.

П13.3. $A = (4, 5, -3)$, $B = (6, 3, 0)$, $C = (8, 5, -9)$, $D = (-3, -2, -10)$.

П13.4. $A = (5, -6, 2)$, $B = (2, -1, 3)$, $C = (1, 9, -1)$, $D = (2, -1, -2)$.

П13.5. $A = (-5, 6, 2)$, $B = (8, -1, 3)$, $C = (2, 1, -1)$, $D = (3, -1, -4)$.

П13.6. $A = (-1, 1, 2)$, $B = (8, -1, 1)$, $C = (2, 1, -1)$, $D = (-3, -1, -4)$.

П13.7. $A = (-1, 1, 1)$, $B = (1, -1, 1)$, $C = (2, 2, 2)$, $D = (-3, -1, 2)$.

П13.8. $A = (-1, 2, 1)$, $B = (3, -3, 3)$, $C = (2, 1, 2)$, $D = (-3, 1, 2)$.

П13.9. $A = (-1, 2, 1)$, $B = (4, -3, 3)$, $C = (5, 1, 2)$, $D = (0, 1, 2)$.

П13.10. $A = (-4, 3, 1)$, $B = (4, -5, 3)$, $C = (5, 1, 6)$, $D = (0, 1, 3)$.

П13.11. $A = (-4, 4, 1)$, $B = (4, -6, 0)$, $C = (9, 1, 0)$, $D = (-5, 2, 3)$.

П13.12. $A = (7, 7, 3)$, $B = (6, 5, 8)$, $C = (3, 5, 8)$, $D = (8, 4, 1)$.

П13.13. $A = (-7, 7, -3)$, $B = (6, 5, -8)$, $C = (3, -5, 8)$, $D = (-8, 4, 1)$.

П13.14. $A = (10, 6, 6)$, $B = (-2, 8, 2)$, $C = (6, 8, 9)$, $D = (7, 10, 3)$.

П13.15. $A = (2, 1, 4)$, $B = (-1, 5, -2)$, $C = (-7, -3, 2)$, $D = (-6, 3, 6)$.

П13.16. $A = (8, 6, 4)$, $B = (5, 7, 7)$, $C = (5, 3, 1)$, $D = (2, 3, 7)$.

П13.17. $A = (-7, 1, -3)$, $B = (6, 15, -8)$, $C = (4, 5, 2)$, $D = (2, 4, 1)$.

П13.18. $A = (0, -1, -1)$, $B = (-2, 3, 5)$, $C = (1, -5, -9)$, $D = (-1, -6, 3)$.

П13.19. $A = (-4, 2, 6)$, $B = (2, 2, 1)$, $C = (-1, 0, 1)$, $D = (-4, 6, -3)$.

П13.20. $A = (-1, 5, 1)$, $B = (0, 4, 8)$, $C = (2, -1, 7)$, $D = (4, 0, 1)$.

П13.21. $A = (1, -3, 2)$, $B = (2, -1, -1)$, $C = (3, -4, 3)$, $D = (3, 4, 5)$.

Ответы, указания, решения

Т13.1. Пусть $P = (x_1, y_1, z_1)$ и $Q = (x_2, y_2, z_2)$ — две различные точки плоскости. Из этого следует, что

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0,$$

$$ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0.$$

Вычтем первое равенство из второго:

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0.$$

Последнее равенство можно записать в виде $[\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ}] = 0$, а это означает ортогональность векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{PQ}$. Поскольку точки P и Q взяты произвольно, то вектор $\vec{n}$ перпендикулярен плоскости.

Аналогично доказывается и второе утверждение следствия,

Т13.2. Воспользуемся следствием 13.3: искомое уравнение можно записать в виде $\begin{vmatrix} -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \\ x-a & y & z \end{vmatrix} = 0$. Разложив определитель по последней строке, получим:

$$(x-a)\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -a & 0 \\ -a & c \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad (x-a)bc + yac + zab = 0.$$

Разделим это равенство на abc: $\frac{x}{a} - 1 + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$, что и требовалось доказать.

Т13.3. Указание: направляющим вектором искомой прямой будет вектор $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

Т13.4. Две плоскости перпендикулярны, если и только если перпендикулярны их нормальные векторы $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ и $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, а это в свою очередь равносильно равенству нулю их скалярного произведения.

Т13.5. Две плоскости параллельны, если и только если параллельны их нормальные векторы $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ и $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, а это в свою очередь равносильно линейной зависимости векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$.

Т13.6. Угол между прямыми равен углу между их нормальными векторами $\vec{n}_1 = (a_1, b_1)$ и $\vec{n}_2 = (a_2, b_2)$. Косинус угла между векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ равен

$$\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

П13.21. Длина ребра AB равна длине вектора $\overrightarrow{AB} = (2-1, -1+3, -1-2) = (1, 2, -3)$: $|AB| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$.

Прямые AB и AD имеют направляющие векторы $\overrightarrow{AB} = (1, 2, -3)$ и $\overrightarrow{AD} = (2, 7, 3)$ соответственно. Поэтому косинус угла между AB и AD равен косинусу угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, т. е. $\frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|} = \frac{2+14-9}{\sqrt{14}\sqrt{4+49+9}} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{62}}$ и, следовательно, угол равен $\arccos(7/\sqrt{14 \cdot 62})$.

Так как прямая AB проходит через точку A параллельно вектору $\overrightarrow{AB} = (1, 2, -3)$, то ее уравнение можно записать в виде

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-3}.$$

Точки A, B, C не лежат на одной прямой, так как векторы $\overrightarrow{AB} = (1, 2, -3)$ и $\overrightarrow{AC} = (2, -1, 1)$, параллельные прямым AB и AC, линейно независимы (их координаты не пропорциональны). Поэтому уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C, согласно следствию 13.3, будет иметь следующий вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ x-1 & y+3 & z-2 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложив этот определитель по последней строке, получим:

$$(x-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (y+3)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad x + 7y + 5z + 10 = 0.$$

Это и есть уравнение искомой плоскости.

Высота, опущенная из вершины D на грань ABC, должна быть перпендикулярной плоскости ABC, т. е. параллельна нормальному вектору этой плоскости. Так как нормальный вектор этой плоскости есть $\vec n = (1, 7, 5)$ (следствие 13.2), то уравнение прямой, проходящей через точку D параллельно вектору $\vec n$, будет $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-4}{7} = \dfrac{z-5}{5}$.

Глава 14

Многогранники и полиэдры

Условимся, что запись $A + B(A - B)$ для двух точек A, B из Af означает точку, координаты которой равны сумме (разности) соответствующих координат точек A и B; запись λA означает точку, координаты которой получены умножением соответствующих координат точки A на число λ. Очевидно, что между координатами точек и соединяющего их вектора существует соотношение $B - A = \overrightarrow{AB}$ (см. гл. 12).

Определение

Выпуклой комбинацией системы точек $B_1, \ldots, B_k \in Af^n$ называется точка $\lambda_1 B_1 + \ldots + \lambda_k B_k$, где $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 1$. Неотрицательной комбинацией системы V векторов из R^n называется вектор, являющийся линейной комбинацией векторов системы V с неотрицательными коэффициентами.

Существует несколько эквивалентных определений многогранника и многогранной области. Вот одно из них.

Определение

Многогранной областью, порожденной конечной системой точек P из Af^n и конечной системой векторов V из R^n, называется множество всех точек из Af^n, которые представимы в виде $B + \vec{p}$, где B — произвольная выпуклая комбинация точек из P, $\vec{p}$ — произвольная неотрицательная комбинация векторов из V. Многогранником, порожденным конечной системой точек P из Af^n, называется множество всех выпуклых комбинаций точек из P. Если при этом система P состоит только из двух различных точек, то порожденный ею многогранник называется отрезком, соединяющим эти точки.

На рис. 14.1 показана многогранная область в Af^2, порожденная точками A, B и векторами $\vec{p}_1, \vec{p}_2$.

Утверждение 14.1. Ограниченные многогранные области, и только они, являются многогранниками.

Доказательство утверждения дано в задаче Т14.5.

Напомним, что множество точек из Af^n ограничено, если расстояние между любой из них и нулевой точкой $(0, 0, \ldots, 0) \in Af^n$ не превосходит некоторого фиксированного числа.

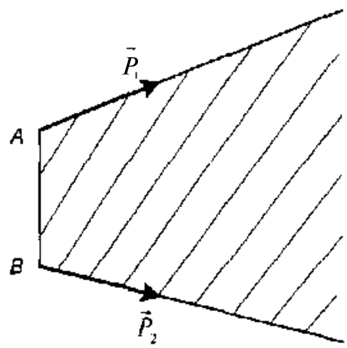


Рис. 14.1. Многогранная область

Определение

Множество точек, содержащее вместе с любыми своими двумя точками отрезок, их соединяющий, называется выпуклым.

На рис. 14.2 показано невыпуклое множество точек в Af^{n}.

Утверждение 14.2. Многогранная область является выпуклым множеством.

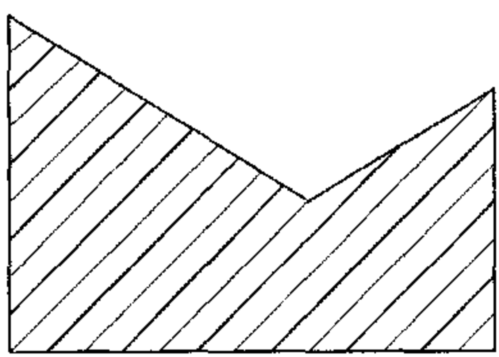


Рис. 14.2. Невыпуклое множество точек

Доказательство. Пусть G— многогранная область, порожденная точками $B_1, \ldots,$ fi; и векторами $\vec p_1, \vec p_2, \ldots \vec p_m$. Докажем, что любая точка D отрезка, соединяющего $Л$ и С, где A, $C \in G$, принадлежит G. Согласно определениям

$$D = \lambda A + (1-\lambda)C, \qquad \lambda \in [0, 1], \quad A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(1)} B_i + \sum_{j=1}^{m} t_j^{(1)} \vec p_j ,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(1)} = 1, \quad \lambda_i^{(1)} \ge 0, \quad t_j^{(1)} \ge 0, \ i = 1, \ldots, k, \ j = 1, \ldots, m$$

k

$$\sum^{k} \lambda_i^{(2)} = 1,\ \lambda_i^{(2)} \geq 0,\ t_j^{(2)} \geq i = 1 \dots A,\ j = 1 \dots \text{да-}$$

Тогда:

$$D = \lambda \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(1)} B_i + \lambda \sum_{j=1}^{m} t_j^{(1)} \vec{p}_j + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(2)} B_i + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{m} t_j^{(2)} \vec{p}_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (\lambda \lambda_i^{(1)} + (1-\lambda)\lambda_i^{(2)}) B_i + \sum_{j=1}^{m} (\lambda t_j^{(1)} + (1-\lambda) t_j^{(2)}) \vec{p}_j .$$

Но

$$\lambda t_j^{(1)} + (1-\lambda) t_j^{(2)} \geq 0,\ j = 1, \dots, m, \quad \lambda \lambda_i^{(1)} + (1-\lambda)\lambda_i^{(2)} \geq 0,\ i = 1, \dots, k,$$

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda \lambda_i^{(1)} + (1-\lambda)\lambda_i^{(2)}) = \lambda \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(1)} + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(2)} = \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1 = 1,$$

что доказывает принадлежность точки D многогранной области G.

Определение

Точка A из выпуклого множества G называется крайней точкой в G, если множество $G \setminus \{A\}$, полученное из G удалением A, остается выпуклым.

Крайние точки многогранной области принято называть вершинами.

Теорема 14.1. Множество всех вершин любого многогранника не пусто и конечно, а также является порождающей системой точек для этого многогранника, т. е. многогранник состоит из всех выпуклых комбинаций своих вершин.

Гиперплоскость (12.1) порождает два множества точек в Af^n, называемых полупространствами и состоящих соответственно из всех точек, удовлетворяющих неравенствам $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b \leq 0$ и $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b \geq 0$.

Определение

Полиэдром в пространстве Af^n называется множество точек, являющееся пересечением конечного числа полупространств и гиперплоскостей.

Следующая теорема является фундаментальным утверждением теории полиэдров.

Теорема 14.2. Многогранная область — это полиэдр, и каждый полиэдр является многогранной областью. Многогранник— это ограниченный полиэдр, и каждый ограниченный полиэдр является многогранником.

Задачи для самостоятельного решения

Т14.1. Доказать, что отрезок, соединяющий точки Л и 5, совпадает с множеством точек вида $A + t\overrightarrow{AB}$, где /—любое число из [0; 1] (точки отрезка, отличные от A и B, называются внутренними).

Т14.2. Доказать, что точка является крайней точкой некоторого выпуклого множества *G,* если и только если она не является внутренней точкой никакого отрезка, принадлежащего G.

Т14.3. Найти все крайние точки в следующих множествах точек пространства Af^2: круга, многоугольника, прямой.

Т14.4. Доказать, что любой полиэдр является пересечением конечного числа полупространств.

Т14.5. Доказать утверждение 14.1.

Т14.6. Пусть на плоскости $A/^2$ дана прямоугольная система координат. Определить вид многогранных областей, порожденных следующими системами точек P из Af^2 и векторов V из R^2:

а) $P = \{(0,0)\}$, $V = \{(0, 1), (1, 0)\}$;

б) $P = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $V = \{(1, 1)\}$;

в) $P = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$, $V = \{(1, 0)\}$;

г) $P = \{(0, 0)\}$, $V = \{(0, 1), (0, -1)\}$;

д) P ={(0, О», V = {(0, 1), (1, 0), (-1, -*Y)}*.

Ответы, указания, решения

Т14.1. Пусть С— произвольная точка отрезка, соединяющего точки A *и* B. Тогда, с одной стороны, $C = (1 - \lambda)A + \lambda B$для некоторого $\lambda \in [0;\ 1]$ или $C = A + \lambda(B - A) = A + X\overrightarrow{AB}$. С другой стороны, $A + t\overrightarrow{AB} = A + t(B - A) = A(1 - t) + tB$, где $t \in [0; 1]$.

Т14.2. Указание: воспользоваться определением крайней точки.

Т14.3. Ответы; граница круга (окружность); вершины многогранника; нет крайних точек.

Т14.4. Указание: утверждение следует из того, что любая гиперплоскость есть пересечение двух полупространств, которые эта гиперплоскость порождает.

Т14.5. Прежде всего докажем, что для любых двух векторов $\vec{a}, \vec{b} \in R^n$ верно $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (это неравенство с очевидностью распространяется на любую конечную сумму векторов). Итак, $(|\vec{a}+\vec{b}|)^2 \le |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2$, откуда

$$[\vec{a}\cdot\vec{a}]+2[\vec{a}\cdot\vec{b}]+[\vec{b}\cdot\vec{b}] \le |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{b}|^2,\ [\vec{a}\cdot\vec{b}] \le |\vec{a}||\vec{b}|,$$

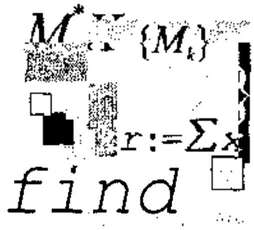
а последнее неравенство следует из теоремы 1.2. Поскольку все переходы эквивалентны, то нужное неравенство доказано.

Обозначим через $O = (0, ..., 0)$ нулевую точку в Af^n. Заметим, что $A = A - O = \overrightarrow{OA}$. Поэтому любую точку A можно отождествить с вектором $\overrightarrow{OA}$.

Рассмотрим произвольный многогранник G с множеством вершин $\{B_1, ..., B_k\}$. Выберем вершину B_m такую, что длина вектора $\overrightarrow{OB_m}$ наибольшая. Рассмотрим произвольную точку C из G. Тогда $C=\lambda_1 B_1 + ... + \lambda_k B_k$, $\lambda_i \ge 0$, $\sum \lambda_i = 1$ или

$\overrightarrow{OC} = \lambda_1 \overrightarrow{OB_1} + ... \lambda_k \overrightarrow{OB_k}$, откуда $|\overrightarrow{OC}| \le \lambda_1 |\overrightarrow{OB_1}| + ... + \lambda_k |\overrightarrow{OB_k}| \le \lambda_1 |\overrightarrow{OB_m}| + \lambda_2 |\overrightarrow{OB_m}| + ... + \lambda_k |\overrightarrow{OB_m}| = (\lambda_1 + ... + \lambda_k)|\overrightarrow{OB_m}| = |\overrightarrow{OB_m}|$, т. е. расстояние между точками O и C ограничено величиной $|\overrightarrow{OB_m}|$. Итак, доказано, что любой многогранник является ограниченной многогранной областью. Покажем теперь, что любая ограниченная многогранная область G (порожденная системами точек P и векторов V) является многогранником. Выберем произвольную точку A из P и произвольный ненулевой вектор $\vec{p}$ из V. Тогда для любого $t \ge 0$ верно $A + t\vec{p} \in G$. Если i-я координата вектора $\vec{p}$ отлична от нуля, то всегда можно выбрать такое $t_1 \ge 0$, что модуль i-й координаты вектора $\overrightarrow{OA} + t_1 \vec{p}$ будет больше любого заданного числа r, т.е. $|\overrightarrow{OA} + t\vec{p}| > r$. Последнее означает неограниченность множества G. Получено противоречие. Таким образом, система V может состоять только из нулевого вектора или быть пустой. Но в этом случае из определения следует, что G - многогранник.

Т14.6. Ответы: а) первый квадрант; б) часть первого квадранта, ограниченная прямыми $y = -x + 1$, $y = x + 1$, $y = x - 1$; в) часть первого квадранта, ограниченная прямыми $y = 0$, $x = 0$, $y = 1$; г) прямая $x = 0$; д) Af^2.



Глава 15

Общая задача условной оптимизации

Пусть задана функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, называемая целевой, которая определена на множестве точек $X \subset Af''$, называемых планами функции/ Задача условной оптимизации заключается в поиске такого плана $M^* \in X$, для которого значение $f(M^*)$ является наименьшим или наибольшим (в зависимости от того, какая задача, на минимум или на максимум, решается) среди всех значений функции/на множестве X. План M^* называется оптимальным планом, а значение $f(M^*)$ — оптимальным значением функции.

Вид целевой функции и способы задания ее множества планов определяют подходы к решению соответствующей задачи условной оптимизации, что и будет продемонстрировано в дальнейшем. В данной главе рассмотрим непрерывные целевые функции. определенные на ограниченных замкнутых множествах планов.

Сначала напомним несколько определений, связанных с топологией пространства Af''.

ε-окрестностью (или просто окрестностью) точки $M \in Af''$ называется множество точек из Af'', расстояние которых до M меньше е. Занумерованный бесконечный набор точек $\{M_k\} = M_1, M_2, ..., M_k, ...$ пространства Af'' называется последовательностью. Среди точек последовательности $\{M_k\}$ не обязательно все различные. Считается, что последовательность $\{M_k\}$ сходится к точке $M \in Af^n$, если, задав любую сколь угодно малую окрестность точки M, можно указать такую точку этой последовательности, что все следующие за ней члены последовательности окажутся в заданной окрестности. При этом точка M называется пределом последовательности $\{M_k\}$, что обозначается $\{M_k\} \to M_0$.

Определение

Пусть $X \subset Af^n$.Точка $M \in Af^n$ называется предельной точкой множества X, если любая ее окрестность содержит бесконечное число точек из X. Множество X называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Утверждение 15.1. Любое бесконечное ограниченное множество точек имеет хотя бы одну предельную точку.

Пусть дано множество чисел Y. Если каждое число из Y меньше или равно (больше или равно) некоторого числа t, то t называется верхней (нижней) гранью множества Y.

Утверждение 15.2. Если множество чисел ограничено, то оно имеет наименьшую верхнюю грань и наибольшую нижнюю грань.

Отметим, что последовательность точек $\{M_k\}$ не обязательно является множеством, поскольку может содержать повторяющиеся члены. Поэтому понятия предела и предельной точки не совпадают, даже если в качестве множества X взять различные точки последовательности $\{M_k\}$. Например, предел последовательности 1, 1, ..., 1, ... равен 1, однако как множество она состоит из одного элемента — числа 1, и поэтому не может иметь предельных точек. Однако связь между этими понятиями обнаруживается в утверждении 15.3.

Определение

Точка $M \in Af^n$ называется граничной точкой множества $X \subset Af^n$, если каждая ее окрестность содержит бесконечное число точек из X и бесконечное число точек, не принадлежащих X. Точка M называется внутренней точкой множества X, если она входит в X вместе со всеми точками некоторой своей окрестности. Точка $M \in X$ называется изолированной в множестве X, если некоторая ее ε-окрестность не содержит точек из X, отличных от M.

Утверждение 15.3. Пусть даны множество $X \subseteq Af^n$ и точка M из Af^n. В множестве X существует сходящаяся к M последовательность точек, если и только если M является либо предельной точкой множества X, либо изолированной в X.

Доказательство утверждения см. в задаче Т15.8.

Определение

Пусть заданы множество $X \subseteq Af^n$ функция f, определенная в каждой точке этого множества, и точка M_0 из X, являющаяся либо предельной точкой множества X, либо изолированной в X. Функция f называется непрерывной в точке M_0 вдоль X, если для любой последовательности $\{M_k\}$ точек из X, сходящейся к M_0, соответствующая последовательность $\{f(M_k)\}$ значений функции f сходится к $f(M_0)$. Функция f называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке множества X вдоль X.

В свете утверждения 15.3 понятно, почему в этом определении точка M_0 должна быть либо предельной, либо изолированной. Кроме того, в определении имеется фраза "вдоль X", которая означает, что непрерывность функции f в точке M_0 гарантируется только "со стороны множества X". Очевидно, если M_0 — внутренняя точка множества X, т. е. X "окружает" M_0, то фраза "вдоль X" в этом случае становится избыточной.

Утверждение 15.4. Всякая функция непрерывна вдоль X в любой изолированной точке в X.

Доказательство утверждения дано в задаче Т15.9.

Теорема 15.1. Пусть $f(x_1, ..., x_n)$ определена и непрерывна всюду в Af^n и $f(M_0) \neq 0$. Тогда существует окрестность M_0, в каждой точке которой функция f имеет тот же знак, что и число $f(M_0)$.

Доказательство. Пусть, например, $f(M_0) < 0$. Предположим противное: ε_n-окрестность точки M_0 содержит по меньшей мере одну такую точку M_n, что $f(M_n) \geq 0$. Положим, что $\{\varepsilon_n\} \to 0$. Тогда $\{M_n\} \to M_0$. Отсюда в силу определения непрерывности следует $\{f(M_n)\} \to f(M_0)$, т. е. последовательность неотрицательных чисел сходится к отрицательному числу, что невозможно.

Следствие 15.1. Пусть функция $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ определена и непрерывна всюду в Af^n. Тогда множество всех точек из Af^n, удовлетворяющих неравенству $g(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$ или уравнению $g(x_1, x_2, ..x_n) = 0$, замкнуто.

Следствие 15,2. Множество всех точек из Af^n, удовлетворяющих системе уравнений и нестрогих неравенств, левые и правые части которых представляют собой непрерывные в Af^n функции, замкнуто.

Следствие 15.3. Полиэдр является замкнутым множеством.

Доказательство следствий см. в задачах T15.5—T15.7.

Теорема 15.2. Любая функция $f(x_1, ..., x_n)$, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве своих планов X, имеет оптимальные планы.

Доказательство. Определим последовательность $\{M_k\}$ точек из X следующим образом. Если функция f неограничена на X, то можно указать такую последовательность $\{M_k\}$ точек из X что $|f(M_k)| > k$, т. е. $\{f(M_k)\} \to \infty$. Если же f ограничена на X, то в силу утверждения 15.2 множество Y всех значений функции f на X имеет наименьшую верхнюю грань a и наибольшую нижнюю грань b. Выберем произвольную последовательность $\{\varepsilon_k\}$ положительных чисел, сходящуюся к нулю. Тогда каждая ε_k-окрестность числа a (числа b) содержит по меньшей мере одно число $y_k = f(M_k)$ из Y. Ввиду $\{\varepsilon_k\} \to 0$, $\{f(M_k)\} \to a$ ($\{f(M_k)\} \to b$).

Поскольку множество X ограничено, то ограничена и построенная выше последовательность $\{M_k\}$. Следовательно, по утверждению 15.1 множество точек этой последовательности имеет предельную точку M_0, принадлежащую X (так как X — замкнуто). Но тогда, согласно утверждению 15.3, существует сходящаяся к M_0 подпоследовательность $\{M_{k_i}\}$ последовательности $\{M_k\}$. Отсюда в силу непрерывности функции f $\{f(M_{k_i})\} \to f(M_0)$.

Выше было доказано, что либо $\{f(M_k)\} \to \infty$ (если f неограничена), либо $\{f(M_k)\} \to a$ ($\{f(M_k)\} \to b$). Это же верно и для подпоследовательности, т.е. либо $\{f(M_{k_i})\} \to \infty$, либо $\{f(M_{k_i})\} \to a$ ($\{f(M_{k_i})\} \to b$). Поэтому остается только одна возможность: $a = f(M_0)$ ($b = f(M_0)$). А это означает, что M_0 — оптимальная точка для задачи, решаемой на максимум (на минимум). Теорема доказана.

Задачи для самостоятельного решения

T15.1. Доказать, что граничные и внутренние точки в X являются предельными точками множества X. Верно ли обратное утверждение?

T15.2. Доказать, что любая предельная точка множества X является либо граничной, либо внутренней точкой множества X, либо изолированной в множестве $Af^n \setminus X$.

Т15.3. Для любой предельной точки M_0 множества X имеется последовательность точек в X, отличных от M_0, сходящаяся к M_0.

Т15.4. Доказать утверждение 15.4.

Т15.5. Доказать следствие 15.1.

Т15.6. Доказать следствие 15.2.

Т15.7. Доказать следствие 15.3.

Т15.8. Доказать утверждение Т15.3.

Ответы, указания, решения

Т15.1. Обратное утверждение не всегда верно. Контрпример: пусть X — круг в пространстве $Af^{\sim 7}$ с выколотым центром M_0. Тогда M_0 — предельная точка, не являющаяся граничной и внутренней. Обратное утверждение верно, если X замкнуто.

Т15.3. Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. Тогда в каждой ε_n-окрестности точки M_0 найдется хотя бы одна точка M_n из X, отличная от M_0, откуда $\{M_n\} \to M_0$, так как {Б,,} $\to 0$.

Т15.4. Указания. Воспользоваться следующим: пусть M — изолированная в X точка, а $\{M_k\}$ — произвольная последовательность точек в X, сходящаяся к M; тогда найдется точка M_r такая, что все следующие за ней точки последовательности $\{M_k\}$ будут совпадать с M.

Т15.5. Указание: воспользоваться теоремой 15.1.

Т15.6. Указание: воспользоваться утверждением, что пересечение любого числа замкнутых множеств является также замкнутым.

Т15.7. Указание: воспользоваться тем, что линейные функции непрерывны.

Т15.8. Если точка M является изолированной в X, то очевидна и последовательность точек из X, сходящаяся к M: это последовательность $M, M, ..., M, \ldots$. Пусть теперь M — предельная точка множества X, Выберем произвольную числовую последовательность $\{\varepsilon_k\}$ различных положительных чисел, сходящуюся к нулю. По определению предельной точки, в каждой ε_k-окрестности точки M существует бесконечно много точек из X. Выберем среди них точку M_k, отличную от M. Так как $\{\varepsilon_k\} \to 0$, то и $\{M_k\} \to M$, что доказывает существование сходящейся к M последовательности точек из X.

Пусть теперь некоторая последовательность $\{M_k\}$ точек из X сходится к А/. Предположим также, что M не является предельной точкой множества X. Это означает существование некоторой 6-окрестности точки M, в которой может оказаться только конечное или пустое множество точек из X. Если в этой окрестности нет точек из X, помимо точки M (возможно, принадлежащей X), то положим б = ε. В противном случае выберем среди них отличную от M точку N, ближайшую к M, и положим δ равным расстоянию между M и N. Очевидно, 5-окрестность точки M не содержит точек из X, кроме, быть может, точки M. Но $\{M_k\} \to M$, поэтому найдется такая точка M_r, что все следующие за ней точки $M_{r+1}, M_{r+2}, \ldots$ окажутся в 5-окрестности точки M. Это возможно, только если точки $M_{r+1}, M_{r+2}, \ldots$ совпадают с M, т. е. $M \in X$ и, следовательно, M является изолированной в X.

Глава 16

Строение множества планов задачи линейного программирования

Рассмотрим следующую задачу условной оптимизации:

целевая функция

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = DX^{\mathrm{т}} \to \max, \tag{16.1}$$

а множество планов задается системой

$$\begin{cases} AX^{\mathrm{т}} = C \\ X \geq 0 \end{cases} \tag{16.2}$$

где $D=(d_1,\ldots, d_n)$, $X=(x_1,\ldots, x_n)$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_m \end{pmatrix}$.

Иногда вместо записи $AX^{\mathrm{т}} = C$ будем использовать одну из векторных форм (3.2):

$$x_1\vec{b}_1 + \ldots + x_n\vec{b}_n = \vec{c} \tag{16.3}$$

где $\vec{c}^{\,\mathrm{т}} = (c_1, \ldots, c_m)$, $\vec{b}_k^{\,\mathrm{т}} = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk})$, А $= 1, \ldots, n$.

В этой задаче и целевая функция f и множество планов задаются линейными функциями (соответственно соотношениями (16.1) и (16.2)) и поэтому данная задача называется задачей линейного программирования (сокращенно ЛП). Множество планов задачи ЛП является полиэдром.

Существуют различные формы записи задачи ЛП, которые являются эквивалентными в том смысле, что с помощью несложных равносильных преобразований нетрудно перейти от одной формы записи к другой. С практической точки зрения различия между этими формами теряют принципиальное значение благодаря эффективным компьютерным методам решения задач ЛП. Однако для теоретических исследований удобно использовать каноническую форму, приведенную выше.

Лемма 16.1. Пусть в условии (16.2) матрица С имеет хотя бы один ненулевой элемент. Тогда точка а является вершиной полиэдра планов, определяемых условиями (16.2), если и только если столбцы матрицы A, соответствующие ее положительным координатам, линейно независимы.

Доказательство. Не теряя общности, будем считать, что положительными являются первые r координат точки $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r, 0, ..., 0)$ (Это предположение будем использовать и дальше, специально его не оговаривая). Из условия, наложенного на С, вытекает, что $r > 0$. Для точки а равенство (16.3) запишется в виде $\alpha_1 \vec{b}_1 + ... + \alpha_r \vec{b}_r = \vec{c}$.

Пусть первые r столбцов матрицы A линейно независимы, но точка а не является вершиной полиэдра. Тогда (см. задачу Т14.2) существуют такие различные планы $P = (\beta_1, ..., \beta_n)$ и $y = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$, что $\alpha = \lambda\beta + (1-\lambda)\gamma$ для некоторого числа $\lambda \in (0, 1)$. Отсюда имеем систему равенств:

$$0 = \lambda\beta_{r+2} + (1-\lambda)\gamma_{r+2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$0 = \lambda\beta_n + (1-\lambda)\gamma_n$$

Поскольку $X > 0$, $1 - X > O$, $\beta_i \geq 0, y_i \geq 0$, $i = r + 1, ..., n$, то из этих равенств следует, что $\beta_i = \gamma_i = 0$, $i = r + 1, ..., n$. Поэтому

$\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r, 0, ..., 0)$, $\quad$ $У = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_r, 0, ..., 0)$, $\quad$ $\beta_1 \vec{b}_1 + ... + \beta_r \vec{b}_r = \vec{c}$, $\gamma_1 \vec{b}_1 + ... + \gamma_r \vec{b}_r = \vec{c}$. Вычтем почленно последние два равенства: $(\beta_1 - \gamma_1)\vec{b}_1 + ... + (\beta_r - \gamma_r)\vec{b}_r = \vec{0}$. Отсюда ввиду линейной независимости системы векторов $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r$ следует, что $\beta_1 - y_1 = 0, ..., \beta_r - \gamma_r = 0$ (следствие 5.3). Поэтому точки а, Р, у совпадают. Получено противоречие.

Пусть теперь векторы-столбцы $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r$ линейно зависимы, но точка а является вершиной полиэдра планов, В этом случае из следствия 5.3 вытекает, что система уравнений $y_1\vec{b}_1 + ... + y_r\vec{b}_r = 0$ имеет ненулевое решение ($\beta_1, ..., \beta_r$). Обозначим через $P = (\beta_1, ..., \beta_r, 0, ..., 0)$ точку из $A f''$. Покажем, что точки $\alpha \pm \mu\beta$ являются решением системы $AX^T = C$ при любом числе ц. Действительно, согласно теореме 3.1, $A(a \pm \mu\beta)^T = A\alpha^T \pm \mu A\beta^T = C \pm ц0 = C$.

Так как $\alpha_i > 0$, $i = 1, ..., r$, то μ можно подобрать настолько близким к нулю (но неравным нулю), что все координаты точек окажутся неотрицательными. В этом случае $\alpha + \mu\beta$ и $\alpha - \mu\beta$ —различные планы задачи (16.1)–(16.2). Но $0.5(a + \mu p) + 0.5(\alpha - \mu P) = a$, т.е. точка а не может быть вершиной полиэдра планов (см. задачу 14.2). Получено противоречие. Лемма доказана.

В случае, когда $C = 0$, к вершинам полиэдра, описанным предыдущей леммой, добавляется точка $a = (0, 0, ..., 0)$ (см. задачу Т16.9).

В *гл. 4* было показано, что с помощью элементарных преобразований совместную систему линейных уравнений $AX^{\mathrm{T}} = C$ можно привести к виду, содержащему базис переменных и некоторый набор свободных переменных. При этом нулевые значения свободных переменных будут однозначно определять значения базисных переменных. Поэтому имеет место следующее определение.

Определение

Базисным решением системы $AX^{\mathrm{T}} = C$ называется такое ее решение $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in Af^n$, для которого множество всех переменных, соответствующих ненулевым координатам в а, целиком содержится в некотором базисе переменных. (Этот базис можно получить из системы $AX^{\mathrm{T}} = C$ элементарными преобразованиями.) Базисное решение системы $AX^{\mathrm{T}} = C$, в котором все ненулевые координаты положительны, называется опорным планом задачи (16.1)-(16.2). План, в котором все координаты нулевые, также будем называть опорным.

Теорема 16.1. План задачи (16.1) - (16.2) является опорным, если и только если он является вершиной полиэдра планов.

Доказательство. Проведем доказательство при условии, что матрица С имеет хотя бы одну ненулевую координату. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0)$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, r$ — опорный план задачи (16.1)- (16.2), который не является вершиной полиэдра планов. В этом случае (см. задачу Т14.2) существуют такие различные планы (3 и у, что $\alpha = \lambda\beta + (1 - \lambda)\gamma$ для некоторого числа $\lambda \in (0,1)$. Как и при доказательстве леммы 16.1 можно показать, что $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r, 0, \ldots, 0)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r, 0, \ldots, 0)$. Это означает, что в планах β и у все переменные, соответствующие положительным координатам, целиком содержатся в том же базисе переменных, что и переменные $x_1, \ldots, x_r$, соответствующие положительным координатам опорного плана а. Но значения базисных переменных однозначно определяются нулевыми значениями свободных переменных. Отсюда следует, что $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1, \ldots, \alpha_r = \beta_r = \gamma_r$, т.е. $\alpha = \beta = \gamma$. Получено противоречие.

Пусть теперь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0)$ — вершина полиэдра планов, причем $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, r$. Докажем, что а — базисное решение системы $AX^{\mathrm{T}} = C$ и, следовательно, опорный план задачи (16.1)-(16.2). Из леммы **16.1** следует, что первые r столбцов матрицы A линейно независимы. Из следствия 5.3 вытекает, что система $x_1\vec{b}_1 + \ldots + x_r\vec{b}_r = \vec{0}$ имеет единственное (нулевое) решение. Поэтому, как бы не применялся алгоритм метода Гаусса к этой системе, всегда будет получаться единственный базис переменных $x_1, \ldots, x_r$. Это означает, что в случае применения к системе $x_1\vec{b}_1 + \ldots + x_r\vec{b}_r + x_{r+1}\vec{b}_{r+1} + \ldots + x_n\vec{b}_n = \vec{c}$ такого алгоритма метода Гаусса, при котором на первых r шагах в качестве разрешающих будут выбираться только столбцы с номерами $1, \ldots, r$, мы обязательно придем к базису этой системы, содержащему $x_1, \ldots, x_r$ (в этом базисе могут быть и другие переменные). Поэтому в плане а все ненулевые координаты соответствуют переменным, входящим в некоторый базис системы, т. е. а — опорный план.

Доказательство теоремы при условии, что матрица C нулевая, провести самостоятельно. Теорема доказана.

Из теоремы 16.1 следует, что опорный план и вершина полиэдра планов одно и тоже.

Следствие 16.1. Если система (16.2) имеет решение, то задача (16.1) - (16.2) имеет хотя бы один опорный план.

Это следствие фактически доказывается в задаче Т16.11, в которой приводится один из способов нахождения начального опорного плана задачи (16.1) – (16.2) *(см. гл. 17)*.

Лемма **16.2.** Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ —линейная функция. Тогда для любых двух точек $M, N \in A f^n$ и любых двух чисел A, u $f(\lambda M + \mu N) = \lambda f(M) + \mu f(N)$.

Доказательство леммы дано в задаче Т16.1.

Теорема **16.2.** Если задача (16.1) – (16.2) имеет оптимальный план, то существует вершина полиэдра, которая является оптимальным планом.

Доказательство. Проведем доказательство при условии, что матрица C имеет хотя бы один ненулевой элемент. Предположим, что задача не имеет оптимальных планов, являющихся вершинами полиэдра, определяемого условиями (16.2). Среди оптимальных планов выберем такой план а = (а,, α_2, ..., а,., O, ... 0), который содержит наименьшее число r положительных координат. Из леммы 16.1 следует, что векторы-столбцы $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_r$ линейно зависимы. Для такого случая при доказательстве леммы 16.1 было показано существование точек вида $a \pm \mu\beta$, где $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r, 0, \ldots, 0)$, являющихся планами задачи (16.1) – (16.2) для любых чисел $и \neq 0$, при которых координаты в $a \pm \mu\beta$ неотрицательны. В частности, точка

$a - \mu\beta$ — план, если ц равно числу $\mu_1 = \min\limits_{\beta_i > 0} \frac{}{\hat{\beta}_i}$ или числу $\mu_2 = \max\limits_{\beta_i < 0} \frac{}{\hat{\mathbf{p}}}$, (по крайнеи мере одно из чисел μ_1, μ_2 существует). При этом $\alpha - \mu_i\beta$ будет содержать по крайней мере на одну положительную координату меньше, чем а, $i = 1, 2$. Поэтому план а~ $\mu_i\beta$ не может быть оптимальным, т. е.

$$/ a) > f(\alpha - \mu_i\beta) = f(\alpha) - \mu_i f(\beta) \tag{16.4}$$

(последнее равенство следует из леммы 16.2).

Вернемся теперь к планам $\alpha \pm \mu\beta$. В силу леммы 16.2 $f(\alpha) \geq f(\alpha \pm \mu\beta) = f(\alpha) \pm \mu f(\beta)$,

откуда $\begin{cases} \mu\, f(p) \leq 0 \\ -\mu\, f(\beta) \leq 0 \end{cases}$, $0 \leq \mu f(\beta) \leq 0$, что возможно только при $f(\beta) = 0$. Но тогда из (16.4) следует, что $f(\alpha) > f(\alpha)$, что невозможно. Получено противоречие. Доказательство теоремы при условии, что матрица C нулевая, дано в задаче Т16.10. Теорема доказана.

Следствие **16.2.** Если множество планов задачи (16.1) – (16.2) многогранник, то существует вершина, которая является оптимальным планом этой задачи.

Доказательство. В силу утверждения 14.1 и следствия 15.3 многогранник планов является замкнутым ограниченным множеством, и поэтому из теоремы 15.2 следует, что задача (16.1) - (16.2) имеет оптимальный план. В силу теоремы 16.2 в этом случае существует оптимальный план, который является вершиной многогранника планов.

Следствие **16.3.** Если некоторые вершины полиэдра планов задачи **(16.1)** — (16.2) являются оптимальными планами, то любая их выпуклая комбинация также является оптимальным планом.

Доказательство следствия см. в задаче Т16.2.

Компьютерный раздел

Встроенная функция *rank(A)* определяет наибольшее число линейно независимых столбцов матрицы *A*, т. е. ранг матрицы *A*. Встроенная функция *augment(A1, A2, ..., AN)*, аргументы *A1, A2, ..., AN* которой — матрицы с одинаковым числом строк, формирует матрицу (A1 A2 ... AN) с тем же числом строк (матрицы *A1, A2, ..., AN* размещаются последовательно слева направо).

Например, если $A1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $A2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$, $A3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, то

$$augment(A1, A2, A3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 8 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 9 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Встроенная функция *maximize (f, v)* (*minimize(f, v)*) определяет вектор *v*, обеспечивающий функции *f(v)* максимальное (минимальное) значение. Перед использованием этих функций необходимо задать начальные (стартовые) значения координатам вектора *v*. Если даны дополнительные ограничения, то эти функции должны завершать так называемый блок решения, начинающийся ключевым словом Given. Пример использования функции maximize приведен ниже:

$$x := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad f(z) := \sin(z_0)^2 + \cos(z_1)^2 + (z_2 - 1)^2 - 4$$

$$\text{Given} \qquad x \le \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad x1 := Maximize(f, x) \qquad x1 := \begin{pmatrix} 1.575 \\ 8.405 \times 10^{-5} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Программирование в Mathcad осуществляется с помощью подпанели **Программирование** (Programming) (рис. 16.1), для вызова которой следует щелкнуть по кнопке  панели **Математика** (Math). Эта подпанель содержит 10 кнопок. Щелчок по кнопке Add Line выводит шаблон новой строки, щелчок по любой другой из них выводит шаблон соответствующего оператора в том месте, где находится курсор ввода. Из операторов составляются программные модули, представляющие собой подпрограммы-функции. При этом окончательным значением такой подпрограммы-функции будет число (вектор или матрица), вычисленное последним в этом программном модуле.

Рис. 16.1. Подпанель **Программирование**

Кнопка Add Line вызывает шаблон для ввода на месте меток нужных операторов. Вертикальная черта означает, что операторы, примыкающие к ней, будут образовывать один блок. Если в блоке ниже или выше некоторой строки необходимо добавить новую строку в виде метки, то следует выделить курсором ввода всю данную строку и щелкнуть по кнопке Add Line. При этом новая метка появится ниже или выше выделенной строки, в зависимости от того, справа или слева синий курсор окаймлял данную строку.

Кнопка ← или комбинация клавиш <Ctrl> + <{> вызывают шаблон ▪ ← ▪ оператора присваивания ←. Если, например, на месте левой метки этого шаблона ввести идентификатор vari, а на месте правой метки — число 3, то это приведет к присваиванию переменной *vari* значения 3: vari←3.

Кнопка for вызывает шаблон for ▪ ∈ ▪ оператора цикла *for*. На месте левой верхней метки вводится имя ранжированной переменной, а на месте правой верхней метки – диапазон (и шаг) ее изменения; на месте нижней метки вводится блок операторов цикла (добавление меток в этом блоке осуществляется кнопкой Add Line). Алгоритм работы оператора цикла: ранжированной переменной присваивается первое значение и выполняются все операторы блока, затем ранжированной переменной присваивается второе значение и опять выполняются все операторы блока и так далее, пока не будет присвоено последнее значение из диапазона изменения ранжированной переменной, после чего операторы блока выполнятся в последний раз. Например, результатом программного модуля

$$v := \left| \begin{array}{l} for\ i \in 0..3 \\ \quad \left| \begin{array}{l} a_i \leftarrow i+1 \\ b_i \leftarrow (a_i)^2 \end{array} \right. \\ b \end{array} \right.$$

будет вектор-столбец $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Кнопка $\boxed{\text{if}}$ вызывает шаблон $\boxed{\blacksquare\ if\ \blacksquare}$ для ввода условного оператора *if*. На месте правой метки вводится логическое (булево) выражение, а на месте левой метки - блок операторов, которые должны выполняться в случае истинности этого логического выражения и не выполняться в случае его ложности. Например, в результате выполнения программного модуля;

$$c := \left| \begin{array}{l} a \leftarrow 2 \\ s \leftarrow 0 \\ if\ s = 0 \\ \quad \left| \begin{array}{l} b \leftarrow 5 \\ a \leftarrow b \end{array} \right. \end{array} \right.$$

переменная с примет значение 5 (не следует забывать, что в выражении s=0 необходимо использовать булевый знак равенства с подпанели Логические (Boolean)).

Кнопка $\boxed{\text{otherwise}}$ вызывает шаблон • otherwise оператора создания дополнительной ветви в условном операторе *if*. Результатом их совместного использования является шаблон $\boxed{\left| \begin{array}{l} \blacksquare\ if\ \blacksquare \\ \blacksquare\ \text{otherwise} \end{array} \right.}$. Смысл меток, окружающих *if*, аналогичен уже описанному выше для условного оператора. Метка слева от otherwise служит для ввода блока операторов, которые будут выполняться в случае ложности логического выражения, стоящего справа от if; если это выражение истинно, то выполняется блок операторов, расположенный слева от `if`, а блок операторов слева от `otherwise` пропускается. Например, в результате выполнения программного модуля

```
c:=
 | a ← 0
 | b ← 1 if  a>0
 | c ← 2 otherwise
```

переменная `c` примет значение 2. Сам шаблон $\left|\begin{array}{l}\blacksquare \text{ if } \blacksquare \\ \blacksquare \text{ otherwise}\end{array}\right.$ формируется следующим образом: вначале создается шаблон $\left|\begin{array}{l}\blacksquare \text{ if } \blacksquare \\ \blacksquare\end{array}\right.$, выделяется синим курсором нижняя метка и затем щелчком по кнопке $\boxed{\text{otherwise}}$ формируется нужный шаблон.

Задачи для самостоятельного решения

Т16.1. Доказать лемму 16.2.

Т16.2. Доказать следствие 16.3.

Т16.3. Пусть некоторые точки полиэдра планов задачи (16.1) – (16.2) являются оптимальными планами. Доказать, что любая их выпуклая комбинация также является оптимальным планом.

Т16.4. Может ли задача ЛП иметь конечное, отличное от единицы, число планов?

Т16.5. Сравнить множества решений неравенства $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \le c$ и системы $\begin{cases} a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = c \\ x_{n+1} \ge 0 \end{cases}$.

Т16.6. Сравнить множества решений неравенства $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \ge c$ и системы $\begin{cases} a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - x_{n+1} = c \\ x_{n+1} \ge 0 \end{cases}$.

Т16.7. Доказать, что общую задачу ЛП

$$d_1x_1 + \ldots + d_px_p + d_{p+1}x_{p+1} + \ldots + d_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ip}x_p + a_{i,p+1}x_{p+1} + \ldots + a_{in}x_n \le c_i, \quad i = 1, \ldots, k, \\ a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ip}x_p + a_{i,p+1}x_{p+1} + \ldots + a_{in}x_n = c_i, \quad i = k+1, \ldots, m, \\ x_j \text{ — произвольные переменные}, j = 1, \ldots, p, \\ x_j \ge 0, j = p+1, \ldots, n, \end{cases}$$

можно свести к канонической.

Т16.8. Свести задачу ЛП

$$DX^T \to \min$$

$$\begin{cases} AX^T = C \\ X \geq 0 \end{cases}$$

к канонической.

Т16.9. Доказать, что точка а = (0, 0, ..., 0) является вершиной полиэдра, определенного условиями $AX^T = O, X \geq 0$.

Т16.10. Доказать теорему 16.2 при условии, что матрица С нулевая.

Т16.11. Рассмотрим следующую задачу ЛП:

$$g(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = -y_1 - y_2 - \ldots - y_m \to \max \tag{16.5}$$

на множестве планов

$$\begin{cases} AX^T + EY^T = C \\ X \geq 0, \; Y \geq 0 \end{cases} \tag{16.6}$$

где A, X, C такие же матрицы, как и в (16.2), $Y = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, E — единичная матрица порядка m. Доказать: 1) если оптимальное значение целевой функции g задачи (16.5)-(16.6) меньше нуля, то множество планов (16.2) пусто; 2) если оптимальное значение целевой функции g задачи (16.5)-(16.6) равно нулю и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ — оптимальный опорный план, то точка $\alpha = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ является опорным планом задачи (16.1)–(16.2).

П16.1. Найти вершины полиэдра планов, определенных системой:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 - x_5 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \\ x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, 5 \end{cases} \tag{16.7}$$

Общая формулировка задач K16.1—K16.11

Опираясь на утверждение задачи Т16.11, найти неотрицательное базисное решение системы уравнений $AX = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2.8 & 1 & 1 & 3 & 2.89 & 3.678 & 4 & 2 \\ 1.8 & -2 & 1.9 & 2 & -1 & -1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 4.6 & 2 & 5.55 & 1 \end{pmatrix}.$$

К16.1. $C^T = (15, 6.9, 29)$ **К16.2.** $C^T = (15, 23, 29)$ **К16.3.** $C^T = (5, 9, 13)$

К16.4. $C^T = (6, 7.5, 34)$ **К16.5.** $C^T = (1, 8.3, 4.5)$ **К16.6.** $C^T = (7, 2.7, 11)$

К16.7. $C^T = (6, 21, 5)$ **К16.8.** $C^T = (8, 4.4, 12)$ **К16.9.** $C^T = (13, 3.4, 2.9)$

К16.10. $C^T = (3.2, 2.9, 31)$ **К16.11.** $C^T = (14, 11.2, 8.2)$

Ответы, указания, решения

Т16.1. Функция/может быть записана в матричной форме DX^{T}, где $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $D = (d_1, ..., d_n)$. Тогда $f(\lambda M + ц\, N) = D(\lambda M + ц\, N)^{\mathrm{T}} = = \lambda DM^{\mathrm{T}} + \mu\, DN^{\mathrm{T}} = \lambda f(M) + \mu f(N)$ (см. теорему 3.1).

Т16.2. Указание: воспользоваться задачей Т16.1.

Т16.3. Указание: воспользоваться задачей Т16.1.

Т16.4. Указание: воспользоваться тем, что выпуклая комбинация планов также является планом.

Т16.5. Ответ: если $(\alpha_1, a?, ..., \alpha_n)$ — решение неравенства, то для любого неотрицательного числа α_{n+1} точка $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1})$ — решение системы. Обратно, если $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1})$ — решение системы, то точка $(\alpha_1, \alpha_2, ..., a_n)$ — решение неравенства.

Т16.7. Указание: каноническая запись будет такой:

$$d_1(y_1 - z_1) + \ldots + d_p(y_p - z_p) + d_{p+1}x_{p+1} + \ldots + d_n x_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{i1}(y_1 - z_1) + \ldots + a_{ip}(y_p - z_p) + a_{i,p+1}x_{p+1} + \ldots + a_{in}x_n + t_i = c_i, & i = 1, \ldots, k \\ a_{i1}(y_1 - z_1) + \ldots + a_{ip}(y_p - z_p) + a_{i,p+1}x_{p+1} + \ldots + a_{in}x_n = c_i, & i = k+1, \ldots, m \\ y_j \ge 0,\ z_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, p, \quad t_i \ge 0,\ j = 1, \ldots, k \\ x_j \ge 0,\ j = p+1, \ldots, n \end{cases}$$

Т16.8. Указание: целевая функция канонической задачи следующая:

$$-DX^{\mathrm{T}} \to \max$$

Т16.9. Предположим, что точка а не является вершиной полиэдра. Тогда из задачи Т14.2 следует, что существуют две такие различные точки β и γ, принадлежащие полиэдру, и числа $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, для которых выполняется равенство $\lambda_1\beta + \lambda_2\gamma = \alpha = (0, ..., 0)$. Но, так как среди координат точек β и у нет отрицательных, последнее равенство невозможно.

Т16.10. Указание. Среди планов существует план а со всеми нулевыми координатами. В этом случае по определению план а опорный и является вершиной полиэдра планов в силу задачи Т16.9. Если же план а содержит ненулевую координату, то доказательство производится так, как и ранее (см. доказательство теоремы 16.2).

Т16.11.

1) Пусть $(\alpha_1, ..., a_n)$ — некоторый план задачи (16.1)–(16.2). Тогда точка $a = (\alpha_1, ..., \alpha_n, 0, ..., 0)$ из Af^{n+m} — план задачи (16.5) - (16.6). Однако $g(\alpha) = 0$, а это противоречит тому, что оптимальное значение функции g отрицательно.

2) Поскольку $g(\beta) = 0$, то $\gamma_1 = \ldots = \gamma_m = 0$ и $a = (\beta_1, ..., \beta_n)$ — план задачи (16.1)—(16.2). Так как координаты плана β, соответствующие столбцам матрицы E, равны 0, то положительные координаты планов α и β соответствуют одним и тем же столбцам матрицы A. Поскольку план β опорный, то в силу леммы 16.1 и теоремы 16.1 эти столбцы линейно независимы. Поэтому из тех же утверждений вытекает то, что α — опорный план задачи (16.1)—(16.2).

Следует отметить, что один из опорных планов задачи (16.5) – (16.6) очевиден при условии, что $C \ge 0$: это точка $(0, \ldots, 0, c_1, \ldots, c_m)$.

П16.1. Поскольку столбцы $a_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ и $a_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ линейно независимы, то по лемме 16.1 они могут определять вершину полиэдра. В этом случае координаты вершины должны иметь вид $(\alpha_1, \alpha_2, 0, 0, 0)$ и система (16.7) превращается в систему $\begin{cases}2\alpha_1 + \alpha_2 = 4\\ \alpha_1 + \alpha_2 = 3\end{cases}$.

Решив последнюю, получаем $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$. Поэтому точка (1, 2, 0, 0, 0) является вершиной полиэдра.

Повторив эти рассуждения для пар векторов $a_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ и $a_3 = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ и $a_4 = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix}\\2\end{pmatrix}$ и $a_4 = \begin{pmatrix}\\2\end{pmatrix}$ получим еще три вершины полиэдра: точки (1,0,1,0,0), (0,2,0,0.5,0), (0,0, 1,0.5,0).

Пары векторов $a_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ и $a_4 = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ и $a_3 = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ и $a_3 = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ и $a_5 = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ линейно зависимы и поэтому по лемме 16.1 не могут определять вершину.

Рассмотрим линейно независимые векторы $a_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ и $a_5 = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$. Если эти векторы определяют вершину полиэдра, то ее координаты имеют вид $(\alpha_1, 0, 0, 0, \alpha_5)$. Решив систему $\begin{cases}2\alpha_1 - \alpha_5 = 4\\ \alpha_1 - \alpha_5 = 3\end{cases}$, получим $\alpha_1 = 1$, $\alpha_5 = -2$. Так как среди координат точки (1, 0, 0, 0, -2) есть отрицательные, то эта точка не является планом. По той же причине планом не является точка (0, 0, 0, 0.5, -2).

Общий алгоритм решения задач **K16.1 - K16.11** с помощью **Mathcad**

Ввести матрицы *A, c*. Определить размеры матриц, задать начальные значения переменных и целевую функцию для решения вспомогательной задачи ЛП в соотйетствии с утверждениями задачи Т16.11:

```
ORIGIN:=1     n:=cols(A)     m:=rows(A)     i:=1;n     X_i:=0     j:=1;m
Y_j:=0     f(X, Y):=ΣY
```

Сформировать блок для решения этой вспомогательной задачи ЛП:

Given $A \cdot X + identity(m) \cdot Y = C$ $X \geq 0$ $Y \geq 0$ $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} := minimize(f, X, Y)$

$f(X, Y) =$

Если оптимальное значение целевой функции f больше нуля, то система $AX = c$ не имеет неотрицательных базисных решений. В противном случае проверяется линейная независимость столбцов матрицы А, соответствующих положительным координатам найденного вектора x (вектор Y должен быть нулевым - см. решение задачи Т16.11):

```
S:=

kol ← 0
for  i ∈ 1;n
     if  x_i > 0
          if  kol = 0
                kol ← 1
                M ← A<i>
          M ← augment(M, A<i>)   otherwise
s ← "X is oporni" if rank(M) = cols(M)
s ← "X is not oporni" otherwise
```

С помощью этого программного блока строится матрица M, состоящая из столбцов матрицы A, соответствующих положительным координатам вектора x, и затем проверяется линейная независимость столбцов матрицы M с помощью функции *rank*; функция *rank* определяет наибольшее число линейно независимых столбцов матрицы (ранг матрицы).

К16.1. Ответы: $X^T = (0, 0, 4.143\ 25, 0.916\ 53, 2.805\ 24, 0, 0, 0)$.

К16.2. Ответы: система не имеет неотрицательных базисных решений.

Глава 17

Симплекс-метод

Если множество планов задачи (16.1) - (16.2) является многогранником, то благодаря теоремам предыдущего параграфа задачу можно решить так: найти все вершины многогранника (как, например, в задаче П16.1) и выбрать из них ту, в которой целевая функция принимает оптимальное значение. Однако такой тотальный перебор нерационален, поскольку требует значительного объема вычислений. Кроме того, если множество планов задачи — полиэдр, то целевая функция может оказаться неограниченной.

Существует процедура направленного перебора вершин полиэдра; если известна какая-либо вершина, то выбирается соседняя с ней вершина, в которой значение целевой функции не хуже, чем в предыдущей, и процесс продолжается до тех пор, пока не будет найдена оптимальная вершина или не будет установлена неограниченность целевой функции.

Таким образом, реализация симплекс-метода состоит из следующих этапов:

1. Определение начальной вершины.
2. Проверка признака оптимальности вершины или признака неограниченности функции.
3. Правило перехода к соседней вершине.

Для дальнейшего потребуется процедура *жордановской перестановки пары переменных.* Опишем ее. Пусть даны m линейных уравнений

$$y_i = b_{i0} - \sum_{k=1}^{n} b_{ik} z_k, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{17.1}$$

где $z_1, \ldots, z_n$ — независимые (свободные) переменные, $y_1, \ldots, y_m$ — зависимые переменные. Эти уравнения можно записать в виде так называемой si-таблицы (17.2).

	1	$-z_1 \ldots -z_s \ldots -z_n$
$y_1 =$	b_{10}	$b_{11} \ldots b_{1s} \ldots b_{1n}$
...	...	...
$y_r =$	b_{r0}	$b_{r1} \ldots b_{rs} \ldots b_{rn}$
...	...	...
$y_m =$	b_{m0}	$b_{m1} \ldots b_{ms} \ldots b_{mn}$

(17.2)

От этой табличной записи можно легко перейти к обычной— для этого надо скалярно умножить верхнюю строку (которая называется строкой свободных переменных) на каждую из строк таблицы, приравняв результаты к соответствующим переменным $y_1,..., y_m$.

Предположив, что необходимо поменять ролями y_r и z_s: y_r превратить в зависимую переменную, а z_s — в независимую (при условии, что $b_{rs} \neq 0$). Естественно, что это приведет к изменению вида системы (17.1) и si-таблицы (17.2). Такое преобразование si-таблицы назовем жордановой перестановкой переменных y_r и z_s, или жордановой перестановкой с разрешающим элементом b_{rs}. Строка и столбец в таблице, содержащие b_{rs}, также называются разрешающими.

Утверждение 17.1. Результатом жордановой перестановки с разрешающим элементом b_{rs} является si-таблица (17.3).

	1	$-z_1$ .... $-y_r$ .... $-z_n$
$y_1=$	b'_{10}	b'_{11} .... $\dfrac{-b_{1s}}{b_{rs}}$ .... b'_{1n}
...	...	....
$z_s=$	$\dfrac{b_{r0}}{b_{rs}}$	$\dfrac{b_{r1}}{b_{rs}}$ .... $\dfrac{1}{b_{rs}}$ .... $\dfrac{b_{rn}}{b_{rs}}$
...	...	....
$y_m=$	b'_{m0}	b'_{m1} .... $-\dfrac{b_{ms}}{b_{rs}}$ .... b'_{mn}

(17.3)

Таблица (17.3) получается из (17,2) следующим образом: переменные y_r и z_s меняются местами; разрешающий элемент заменяется обратной величиной; остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент; прочие элементы b'_{ik} $(i \neq r,\ k \neq s)$ рассчитываются по формулам $b'_{ik} = b_{ik} - \dfrac{b_{rk}b_{is}}{b_{rs}}$. Последнее соотношение называется правилом "прямоугольника" из-за определенного расположения чисел, участвующих в пересчете:

$$\begin{array}{ccc} \ldots b_{ik} & \ldots\ldots & b_{is} \ldots \\ \vdots & & \vdots \\ \ldots b_{rk} & \ldots\ldots & b_{rs} \ldots \end{array}$$

Доказательство. Выразим переменную z_s из r-го уравнения (17.1): $z_s = \frac{b_{r0}}{b_{rs}} - \frac{y_r}{b_{rs}} - \sum \frac{b_{rk}}{b_{rs}} z_k$, что соответствует r-й строке si-таблицы (17.3). Исключим переменную z_s из i-го уравнения в (17.1) $(i \neq r)$:

$$y_i = b_{i0} - \sum_{k \neq s} b_{ik} z_k - b_{is}\left(\frac{b_{r0}}{b_{rs}} - \frac{y_r}{b_{rs}} - \sum_{k \neq s} \frac{b_{rk}}{b_{rs}} z_k\right).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим:

$$y_i = \left(b_{i0} - \frac{b_{r0} b_{is}}{b_{rs}}\right) - \sum_{k \neq s} \left(b_{ik} - \frac{b_{ik} b_{is}}{b_{rs}}\right) z_k - \left(-\frac{b_{is}}{b_{rs}}\right) y_r,$$

что соответствует i-й строке в si-таблице (17.3). Утверждение доказано.

Вернемся к симплекс-методу и рассмотрим его второй и третий этапы (О реализации первого этапа — нахождения начального опорного плана — будет сказано ниже.) Предположим, что уже найден некоторый опорный план **a** = (α_1, ..., α_t, 0, ..., 0) задачи (16.1) - (16.2), причем известны также линейные зависимости, выражающие базисные переменные $x_1, \ldots, x_t$ и целевую функцию f через свободные переменные $x_{t+1}, \ldots, x_n$ (для упрощения обозначений считаем, что в опорном плане ***a*** именно первые t координат соответствуют базисным переменным):

$$\begin{cases} x_i = \alpha_i - (b_{i,t+1} x_{t+1} + \ldots + b_{in} x_n) \\ f = f_0 - (f_{t+1} x_{t+1} + \ldots + f_n x_n) \end{cases} \tag{17.4}$$

Запишем уравнения (17.4) в форме si-таблицы (17.5).

	1	$-x_{t+1}$ .... $-x_n$
$x_1 =$	α_1	$b_{1,t+1}$ .... b_{1n}
...	...	....
$x_t =$	α_t	$b_{t,t+1}$ .... b_{tn}
$f =$	f_0	f_{t+1} .... f_n

(17.5)

Эту таблицу будем называть si-таблицей, соответствующей опорному плану *a*. В таблице первый столбец называется столбцом базисных переменных, второй — столбцом свободных членов, последняя строка называется f-строкой.

Теорема 17.1. Пусть задана si-таблица, соответствующая опорному плану a. Если в f-строке si-таблицы все элементы, не считая свободного члена f_0, неотрицательны, то план a оптимален.

Доказательство. Поскольку $f_{t+1} \geq 0, \ldots, f_n \geq 0$, $x_{t+1} \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$, то $f = f_0 - (f_{t+1} x_{t+1} + \ldots + f_n x_n) \leq f_0$ для любых неотрицательных значений свободных переменных. Но $f(a) = f_0$, что и означает оптимальность плана a.

Теорема 17.2. Пусть задана si-таблица, соответствующая опорному плану $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t, 0, \ldots, 0)$. Если существует такой элемент f_s, что $f_s < 0$ и все $b_{is} \leq 0$,

$i = 1, ..., t$, то целевая функция задачи (16.1)—(16.2) неограниченно возрастает на множестве планов.

Доказательство. Положив все свободные переменные, кроме x_s, равными нулю, получим $x_i = \alpha_i - b_{is}x_s$, $i = 1, ..., t$, $f = f_0 - f_s x_s$. Рассмотрим точку $\alpha' = (\alpha'_1, ..., \alpha'_t, 0, ..., \alpha'_s, ..., 0)$, где α'_s — любое положительное число, $\alpha'_i = \alpha_i - b_{is}\alpha'_s$, $i = 1, ..., t$. Так как при любом $\alpha'_s > 0$ значения $\alpha'_i > 0$, то точка α' является планом задачи. Значение целевой функции для этого плана $f(\alpha') = f_0 - f_s\alpha'_s$ неограниченно растет с ростом α'_s. Теорема доказана.

Теорема 17.3. Пусть задана si-таблица, соответствующая опорному плану $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_t, 0, ..., 0)$. Если существует такой отрицательный элемент f_s, для которого найдется элемент $b_{is} > 0$ ($1 \le i \le t$), то существует такой новый опорный план α', что $f(\alpha') \ge f(\alpha)$. (К этому плану можно перейти с помощью жордановой перестановки.)

Доказательство. Среди положительных элементов столбца, содержащего f_s, выберем элемент b_{rs} с минимально возможными значениями $\frac{\alpha_r}{b_{rs}}$. (Если выбор неоднозначен, то выбираем любой из таких элементов.) Произведем жорданову перестановку с разрешающим элементом b_{rs}. Покажем, что в столбце свободных членов новой si-таблицы все элементы $\alpha'_1, ..., \alpha'_t$ останутся неотрицательными, причем новый свободный член f'_0 в f-строке будет не меньше f_0. Согласно утверждению 17.1,

$\alpha'_r = \frac{\alpha_r}{b_{rs}} \ge 0$, ибо $b_{rs} > 0$, $\alpha_r \ge 0$. Пусть $i \ne r$. Если $b_{is} > 0$, то

$\alpha'_i = \alpha_i - \frac{\alpha_r b_{is}}{b_{rs}} = b_{is}\left(\frac{\alpha_i}{b_{is}} - \frac{\alpha_r}{b_{rs}}\right)$. Вследствие выбора элемента b_{rs} выполняется неравенство $\frac{\alpha_i}{b_{is}} - \frac{\alpha_r}{b_{rs}} \ge 0$ и поэтому $\alpha'_i \ge 0$. Если $b_{is} < 0$, то $-\frac{\alpha_r b_{is}}{b_{rs}} \ge 0$, так как

$\alpha_r \ge 0$, $b_{rs} > 0$, и поэтому $\alpha'_i \ge 0$.

Мы доказали, что столбец свободных членов новой si-таблицы задает опорный план α'. Значение целевой функции для этого плана $f(\alpha') = f'_0 = f_0 - \frac{\alpha_r f_s}{b_{rs}} \ge f_0$, так как

$\alpha_r \ge 0$, $f_s < 0$, $b_{rs} > 0$. Теорема доказана.

Из теоремы 17.3 следует, что с помощью жордановых перестановок в соответствующих si-таблицах можно построить такую последовательность опорных планов задачи (16.1)—(16.2) α, α', α'', ..., что $f(\alpha) \le f(\alpha') \le f(\alpha'') \le ...$. Эта последовательность может быть конечной или бесконечной. В первом случае с помощью теорем 17.1 и 17.2 или будет установлена оптимальность плана, или будет доказана неограниченность целевой функции. Второй случай может произойти из-за неоднозначности выбора разрешающего элемента для жордановой перестановки. В такой ситуации некоторый опорный план будет повторяться, поскольку число опорных планов конечно. Однако существуют правила выбора разрешающего элемента, позволяющие избежать зацикливания. Мы не будем здесь останавливаться на этом, так как зацикливание в практических задачах встречается чрезвычайно редко и известны лишь искусственные примеры такого явления.

Следствие 17.!. Если целевая функция f в задаче ЛП ограничена сверху (снизу) на множестве планов, то эта задача имеет оптимальный опорный план, максимизирующий (минимизирующий) функцию/

Доказательство следствия дано в задаче Т17.2.

Л теперь вернемся к первому этапу симплекс-метода. Построение начального опорного плана задачи (16.1) – (16.2) можно осуществить, применив симплекс-метод к вспомогательной задаче (16.5) - (16.6). Действительно, не теряя общности можно считать, что в (16.6) $C \geq 0$ (в противном случае соответствующие уравнения умножаются на -1). Поэтому очевиден начальный опорный план (0, 0, ..., О, с,, ..., c_m) вспомогательной задачи, так как очевиден базис переменных $y_1 \dots y_m$. Целевая функция g ограничена снизу на множестве планов (16.6). Поэтому в силу следствия 17.1 задача (16.5)- (16.6) имеет оптимальный опорный план, который можно найти симплекс-методом. Но согласно задаче Т16.11 при непустом множестве планов (16.2) оптимальный опорный план $\beta = (\beta_1, \dots \beta_n$, у,, ... $\gamma_m)$ задачи (16.5) - (16.6) определяет опорный план а = $(\beta_1, \dots \beta_n)$ задачи (16.1) - (16.2).

Суммируя предыдущие результаты можно предложить следующий алгоритм симплекс-метода решения задачи (16.1) - (16.2).

Алгоритм

1. Решить вспомогательную задачу (16.5) - (16.6) и найти ее оптимальный опорный план $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n$, у, ... $\gamma_m)$. Если $g(\beta) < 0$, то задача (16.1) – (16.2) планов не имеет. Если $g(\beta)$ = О, то план $\alpha = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ является опорным планом задачи (16.1) - (16.2). Составить si-таблицу, соответствующую этому плану.
2. Рассмотреть элементы f-строки si-таблицы. Если все элементы f-строки, не считая свободного члена ГО. неотрицательны, то опорный план а оптимален.
3. Если в f-строке есть отрицательный элемент fs, то рассмотреть элементы столбца, содержащего элемент fs. Если все элементы этого столбца неположительны, то целевая функция (16.1) не ограничена на множестве планов.
4. Если в рассматриваемом столбце есть положительные элементы, то произвести жорданову перестановку. В качестве разрешающего выбрать элемент brs, для которого выполняется соотношение $\frac{и,}{} = \min \frac{\alpha_i}{}$.
5. Описанный процесс повторять до тех пор, пока не будет найден оптимальный опорный план или не будет установлена неограниченность целевой функции.

Пример

Рассмотрим задачу ЛП с целевой функцией

$$f = 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 6x_4 \to \max,$$

заданную на множестве планов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 16 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 8. \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Вспомогательная задача для нахождения начального опорного плана исходной задачи выглядит так:

$$g = -y_1 - y_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + y_1 = 16 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + y_2 = 8. \\ x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Начальный опорный план этой задачи равен (0, 0, 0, 0, 16, 8). Составим начальную si-таблицу (17.6)

		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
$y_1=$	16	1	1	1	3
$y_2=$	8	-1	$\underline{1}$	3	-1
$g=$	-24	0	-2	-4	-2

(17.6)

так как $y_1 = 16 - (x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4)$, $y_2 = 8 - (-x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4)$, $g = -y_1 - y_2 = -24 - (0x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4)$. Поскольку $f_2 < 0$, $f_3 < 0$, $f_4 < 0$, то в качестве разрешающего столбца можно выбрать любой из столбцов, содержащий эти элементы. Пусть разрешающим будет столбец, содержащий f_2. В этом столбце разрешающим является отмеченный элемент, так как $\frac{8}{1} < \frac{16}{1}$.

Проведем жорданову перестановку переменных y_2 и x_2 и получим новую si-таблицу (17.7).

		$-x_1$	$-y_2$	$-x_3$	$-x_4$
$y_1=$	8	$\underline{2}$	-1	-2	4
$x_2=$	8	-1	1	3	-1
$g=$	-8	-2	2	2	-4

(17.7)

Выберем в качестве разрешающего столбец, содержащий ft, так как $f_1 < 0$. В этом столбце единственный положительный элемент, который и будет разрешающим.

Проведем жорданову перестановку переменных y_1 и x_1, как это показано в таблице (17.8).

		$-y_1$	$-y_2$	$-x_3$	$-x_4$
$x_1 =$	4	0.5	-0.5	-1	2
$x_2 =$	12	0.5	0.5	2	1
$g =$	0	1	1	0	0

(17.8)

Согласно теореме 17.1, опорный план (4, 12, 0, 0, 0, 0) является оптимальным для вспомогательной задачи и, следовательно, план (4, 12, 0, 0) можно взять в качестве начального опорного плана исходной задачи. Составим начальную si-таблицу (17.9) исходной задачи, учитывая, что из таблицы (17.8) следует $x_1 = 4 - (-x_3 + 2x_4)$, $x_2 = 12 - (2x_3 + x_4)$, $f = 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 2(4 + x_3 - 2x_4) - (12 - 2x_3 - x_4) - 2x_3 + 6x_4 = = -4 - (-2x_3 - 3x_4)$.

		$-x_3$	$-x_4$
$x_1 =$	4	-1	2
$x_2 =$	12	2	1
$f =$	-4	-2	-3

(17.9)

Произведем жорданову перестановку пары переменных x_1 и x_4 с разрешающим элементом 2 и получим новую si-таблицу (17.10).

		$-x_3$	$-x_1$
$x_4 =$	2	-0.5	0.5
$x_2 =$	10	2.5	-0.5
$f =$	2	-3.5	1.5

(17.10)

Произведем жорданову перестановку пары переменных x_2 и x_3 с разрешающим элементом 2.5. Новая si-таблица имеет вид (17.11).

		$-x_2$	$-x_1$
$x_4 =$	4	0.2	0.4
$x_3 =$	4	0.4	-0.2
$f =$	16	1.4	0.8

(17.11)

Согласно теореме 17.1, опорный план (0, 0, 4, 4) оптимален и оптимальное значение целевой функции равно 16.

Компьютерный раздел

Встроенная функция *stack* $(A1, A2, \ldots, AN)$, аргументы $A1, A2, \ldots, AN$ которой — матрицы с одинаковым числом столбцов, формирует матрицу $\begin{pmatrix} A1 \\ A2 \\ \vdots \\ AN \end{pmatrix}$ с тем же числом столбцов (матрицы $A1, A2, \ldots, AN$ размещаются последовательно сверху вниз).

Например, если $A1 = (1 \;\; 2)$, $A2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, то $stack(A1, A2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Поиск минимума и максимума в функциях minimize и maximize в Mathcad реализован несколькими алгоритмами. Какой из алгоритмов выбрать — зависит от вида целевой функции. На практике рекомендуется проверить поиск решения по каждому методу и сравнить решения. Альтернативные методы поиска решения надо использовать и в том случае, если какой-то метод не даст решения. Для выбора методов решения необходимо щелкнуть левой кнопкой мыши на функции minimize или maximize и вызвать контекстное меню, щелкнув затем правой кнопкой мыши, как это показано на рис. 17.1.

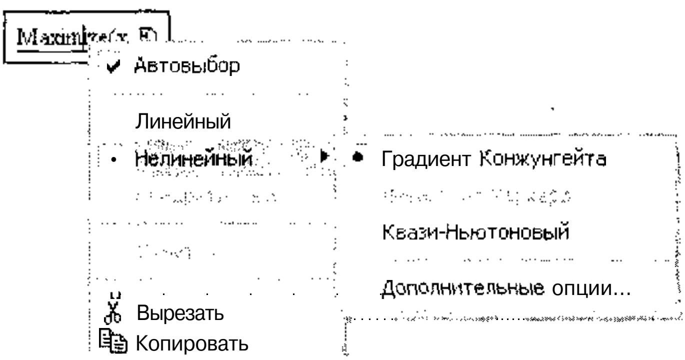


Рис. 17.1. Контекстное меню для выбора метода оптимизации

И далее установить флажок рядом с соответствующим методом поиска решения.

Задачи для самостоятельного решения

Т17.1. Доказать: если в f-строке si-таблицы, содержащей оптимальный опорный план, есть хотя бы один нулевой элемент, не считая свободного члена, то соответствующая задача ЛП имеет бесконечное множество оптимальных планов.

Т17.2. Доказать следствие 17.1.

Общая формулировка задач П17.1—П17.20 в буквенных обозначениях

На предприятии имеется возможность выпускать n видов продукции $П_1, П_2, ..., П_n$. При ее изготовлении используются ресурсы P_1, P_2, P_3, размеры допустимых затрат которых ограничены соответственно величинами b_1, b_2, b_3. Имеется матрица A норм расхода ресурсов, в которой элемент на позиции (i, k) равен количеству ресурса P_i, расходуемого на единицу продукции $П_k$. Цена единицы продукции $П_k$ равна c_k ден. ед., $k = 1, 2, ..., n$.

Требуется: составить математическую модель задачи, позволяющую найти сбалансированный по ресурсам план выпуска продукции, обеспечивающий предприятию максимальный доход; симплексным методом найти оптимальный план выпуска продукции по видам.

П17.1. Дано: $n = 4$, $c_1 = 11$, $c_2 = 6$, $c_3 = 9$, $c_4 = 6$, $b_1 = 20$, $b_2 = 37$, $b_3 = 30$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

П17.2. Дано: $n = 3$, $c_1 = 8$, $c_2 = 7$, $c_3 = 6$, $b_1 = 150$, $b_2 = 180$, $b_3 = 120$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

П17.3. Дано: $n = 4$, $c_1 = 4$, $c_2 = 3$, $c_3 = 6$, $c_4 = 7$, $b_1 = 280$, $b_2 = 80$, $b_3 = 250$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

П17.4. Дано: $n = 3$, $c_1 = 300$, $c_2 = 250$, $c_3 = 450$, $b_1 = 1200$, $b_2 = 150$, $b_3 = 3000$,

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 25 \\ 2 & 3 & 2.5 \\ 35 & 60 & 60 \end{pmatrix}.$$

П17.5. Дано: $n = 3$, $c_1 = 35$, $c_2 = 60$, $c_3 = 63$,

$b_1 = 600$, $b_2 = 30$, $b_3 = 144$,

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 23 \\ 1 & ! & 1 \\ 5 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

П17.6. Дано: $n = 3$, $c_1 = 18$, $c_2 = 12$, $c_3 = 8$,

$b_1 = 24$, $b_2 = 10$, $b_3 = 6$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & , [\\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

П17.7. Дано: $n = 3$, $c_1 = 3$, $c_2 = 4$, $c_3 = 1$,

$b_1 = 500$, $b_2 = 550$, $b_3 = 200$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

П17.8. Дано: $n = 4$, $c_1 = 40$, $c_2 = 50$, $c_3 = 100$,

$c_4 = 80$ $b_1 = 100$, $b_2 = 260$, $b_3 = 370$,

$$A = \begin{pmatrix} 2.5 & 2.5 & 2 & 1.5 \\ 4 & 10 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

П17.9. Дано: $n = 3$, $c_1 = 9$, $c_2 = 10$, $c_3 = 16$,

$b_1 = 360$, $b_2 = 192$, $b_3 = 180$,

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 15 & 12 \\ 6 & 4 & 8 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

П17.10. Дано: $n = 3$, $c_1 = 10$, $c_2 = 14$, $c_3 = 12$,

$b_1 = 180$, $b_2 = 210$, $b_3 = 244$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & - & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

П17.11. Дано: я = 4, с, = 3, $c_2 = 7$, $c_3 = 4$,

$c_4 = 2$, $b_1 = 2$, $b_2 = 2$, $b_3 = 2$,

$$Л = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

П17.12. Дано: $n = 5$, с, = 5, $c_2 = 2$, $c_3 = 8$,

$c_4 = 3$, $c_5 = 6$, $b_1 = 3$, $b_2 = 2$, $b_3 = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

П17.13. Дано: я = 3, $c_1 = 120$, $c_2 = 100$, $c_3 = 150$,

А, = 400, $b_2 = 250$, $b_3 = 200$,

$$A = \begin{pmatrix} 1/6 & 3/7 & \backslash/A\backslash \\ 1/4 & 1/7 & 1/4 \\ 1/6 & 1/7 & 3/8 \end{pmatrix}.$$

П17.14. Дано: я = 3, с, = 80, $c_2 = 100$, $c_3 = 300$,

$b_1 = 6000$, $b_2 = 5000$, *fa* = 9000,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \backslash') \\ 1/2 & 1 & 5 \\ 1/2 & 1/2 & 20 \end{pmatrix}.$$

П17.15. Дано: $n = 3$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$,

$b_1 = 12$, $b_2 = 25$, $b_3 = 18$,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

П17.16. Дано: $n = 4$, $c_1 = 2$, с, = 40, $c_3 = 10$,

$c_4 = 15$, fti= 1000, $b_2 = 500$, $b_3 = 1200$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

П17.17. Дано: л = 5, $c_1 = 3$, $c_2 = 4$, $c_3 = 1$, $c_4 = 3$, $c_5 = 2$, $b_1 = 3$, $b_2 = 5$, $b_3 = 4$,

$$Л = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

П17.18. Дано: л = 4, с, = 2, $c_2 = 4$, $c_3 = 1$, $c_4 = 1$, $b_1 = 4$, $b_2 = 3$, $b_3 = 3$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

П17.19. Дано: $n = 4$, $c_1 = 0.4$, $c_2 = 0.2$, $c_3 = 0.5$, $c_4 = 0.8$, $b_1 = 24$, $b_2 = 12$, $b_3 = 35$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

П17.20. Дано: $n = 3$, с, = 14, $c_2 = 6$, $c_3 = 22$, $b_1 = 12$, $b_2 = 27$, $b_3 = 6$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ ^ & ^ & 9 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

П17.21. Предприятие имеет возможность производить продукцию четырех видов $П_1, П_2, П_3$ и $П_4$. При ее изготовлении используются ресурсы P_1, P_2, P_3, размеры допустимых затрат которых ограничены величинами 34, 16 и 22 ед. Имеется матрица норм расхода ресурсов

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Плановая себестоимость единицы продукции //,, $П_2$, $П_3$, $П_4$ соответственно равна 18, 14, 15, 10 ден. ед., а оптовая цена — 25, 17, 19, 12 ден. ед. Требуется: составить математическую модель задачи, позволяющую найти план выпуска продукции, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль; симплексным методом найти оптимальный план выпуска продукции и максимальную величину прибыли.

Общая формулировка задач **К17.1**—К17.10

Предприятие может выпускать 4 вида продукции, используя 3 вида сырья. Дана матрица норм расхода сырья N, в которой на позиции (/, к) находится норма расхода сырья /-го вида на единицу продукции k-го вида. Дан вектор B запасов сырья по видам, а так же вектор оптовых цен P, в котором k-я координата равна оптовой цене единицы продукции k-го вида. Требуется определить оптимальный план выпускаемой продукции, максимизирующий выручку предприятия.

К17.1. Дано: $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0.5 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $B = (2400, 1200, 3000)$, $P = (75, 30, 60, 120)$

К 17.2. Дано: $N = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2{,}4 & 7.3 \\ 4 & 5 & 13 & 10 \\ 3{,}6 & 0.7 & 0 & 1{,}1 \end{pmatrix}$, fi $= (1000, 2100, 2000)$, $P = (91, 40, 55, 30)$

К17.3. Дано: $N = \begin{pmatrix} 1 & 4.5 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & 15 \\ 6 & 17 & 10 & 6 \end{pmatrix}$, $B = (400, 200, 1000)$, $P = (111, 50, 77, 70)$

К17.4. Дано: $N = \begin{pmatrix} 16 & 12 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 12 & 18 \\ 5.6 & 4.8 & 11 & 1 \end{pmatrix}$, $B = (3200, 3100, 3000)$, $P = (21, 60, 71.80)$

К17.5. Дано: $N = \begin{pmatrix} 8 & 4.6 & 4 & 31 \\ 8 & 5.9 & 3 & 16 \\ 3 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B = (100, 200, 200)$, $P = (9, 4, 5, 3)$

К17.6. Дано: $N = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 & 7 \\ 4.8 & 15 & 3 & 1 \\ 6 & 13 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = (1400, 1100, 2400)$, $P = (165, 140, 155, 130)$

К17.7. Дано: $N = \begin{pmatrix} 6 & 14 & 24 & 33 \\ 0 & 5 & 23 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 11 \end{pmatrix}$, $B = (900, 1300, 2400)$, $P = (131, 120, 5, 50)$

К17.8. Дано: $N = \begin{pmatrix} 16 & 23 & 24 & 3 \\ 14 & 25 & 3 & 15 \\ 36 & 17 & 10 & 0 \end{pmatrix}$, $B = (800.900, 1000)$, $P = (213, 145, 75, 88)$

К17.9. Дано: $N=\begin{pmatrix} 9 & 13 & 2 & 0 \\ 24 & 15 & 3 & 0 \\ 16 & 17 & 10 & 21 \end{pmatrix}$, $B=(1700, 3100, 3000)$, $P=(222, 50, 145, 120)$

К17.10. Дано: $N=\begin{pmatrix} 16 & 23 & 24 & 23 \\ 24 & 25 & 13 & 20 \\ 26 & 0 & 10 & 11 \end{pmatrix}$, $B=(1600, 1400, 3200)$, $P=(95, 60, 85, 80)$

К17.11. Торговая отрасль может реализовать 4 группы товаров, используя для этого пять видов ресурсов. Даны векторы $S=(26.6, 26, 16.5, 10)$, $T=(146, 140, 67, 79)$. $Q=(170, 230, 280, 120)$, $Z=(31, 42, 30, 25)$, $C=(200, 150, 170, 80)$, $P=(120.6, 50.9, 30, 98)$, в каждом из которых k-я координата соответствует единице товарооборота k-й товарной группы и равна соответственно: в векторе S — нормативу складских площадей, в векторе T — плановому нормативу затрат времени работников, в векторе Q — плановому нормативу издержек обращения, в векторе Z — нормативу товарных запасов, в векторе C — средней цене реализации, в векторе P — торговой прибыли. Даны также: 112 000 — общий объем ресурса по использованию площадей, 957 000 — общий объем ресурса рабочего времени работников, 122 000 — общие допустимые издержки обращения, 187 000 — общий объем товарных запасов, 759 000 — общий плановый показатель ресурса товарооборота. Дан также вектор $M=(1240, 990, 1508, 1270)$ минимально допустимых значений плана товарооборота по каждой товарной группе. Требуется: определить оптимальный план хозяйственной деятельности торговой отрасли, обеспечивающий максимум торговой прибыли при заданных ограничениях на складские площади, трудовые ресурсы, издержки обращения, товарные запасы, величину товарооборота.

К17.12. Производственная программа предполагает выпуск пяти видов изделий. При этом используется четыре вида оборудования и 2 вида лимитирующих материалов. Даны векторы $CO=(10, 12, 8, 16, 11)$, $CE=(3, 4, 4, 2, 1)$, $CT=(1. 2, 3, 2, 1)$ в каждом из которых $к$-я координата соответствует единице выпускаемой продукции k-го вида и равна соответственно: в векторе CO — оптовой цене, в векторе CE — себестоимости, в векторе CT — часовой ставке заработной платы. Дана матрица

$$N=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

в которой на позиции $(i, к)$ находится число, равное количеству единиц оборудования /-го вида, необходимого для изготовления единицы изделий k-го вида. Дана матрица норм расхода лимитирующих материалов

$$M=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

в которой на позиции (i, k) находится число, равное количеству расходуемого материала i-го вида на единицу изделий k-го вида. Ограничения на общее количество единиц оборудования каждого вида равны соответственно 90 000, 800 000, 600 000, 500 000. а ограничения на общие объемы лимитирующих материалов равны соответственно 950 000, 850 000. Общий фонд заработной платы не должен превышать 600 000, а общая стоимость выпускаемых изделий должна быть не менее 2 500 000. Общие объемы выпускаемых изделий 1, 3, 4, 5-го видов должны быть не менее 10 000, 15 000, 20 000, 30 000 соответственно, а общий объем выпускаемых изделий 2-го вида не должен превышать 1200. Требуется найти оптимальный план выпуска изделий всех видов, максимизирующий прибыль и учитывающий все перечисленные выше ограничения.

Ответы, указания, решения

Т17.1. Пусть в (17.5) все элементы f-строки, не считая свободного члена, неотрицательны, причем $f_s = 0$. По теореме 17.1 опорный план $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0)$ оптимален. Если в столбце, содержащем f_s, все элементы неположительны, то $f = f_0 - f_s x_s = f_0$, $x_i = \alpha_i - b_{is} x_s$, $i = 1, \ldots, r$. Таким образом, при увеличении x_s не нарушается неотрицательность значений базисных переменных и, следовательно, порождаются новые планы, в которых значение целевой функции f оптимально. Если же в столбце, содержащем f_s, имеются положительные элементы, то выберем среди них b_{rs} с минимально возможным значением $\frac{\alpha_r}{b_{rs}}$. Произведем жорданову перестановку с разрешающим элементом b_{rs}. Получим новый опорный план, причем значение f_0 не изменится (см. доказательство теоремы 17.3). Таким образом, имеется по крайней мере два оптимальных опорных плана. Но тогда по следствию 16.3 оптимальных планов бесконечно много.

Т17.2. Пусть функция f в (16.1) ограничена сверху на множестве планов (16.2). Тогда ситуация, описанная в теореме 17.2, не может возникнуть. Это означает, что симплекс-методом, примененным к задаче (16.1)–(16.2) (с учетом действий, позволяющих избежать зацикливания) непременно будет построен оптимальный опорный план.

П17.21. Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 — соответственно количество единиц продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$, планируемой к выпуску, а через f — величину прибыли от реализации этой продукции. Тогда, учитывая значение прибыли от единицы продукции $П_1$, равное 25 – 18 = 7 ден. ед., от единицы продукции $П_2$ — 3 ден. ед., от единицы продукции $П_3$ — 4 ден. ед., от единицы продукции $П_4$ — 2 ден. ед., запишем суммарную величину прибыли — целевую функцию — в следующем виде:

$$f = 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4.$$

Переменные x_1, x_2, x_3, x_4 должны удовлетворять ограничениям, накладываемым на расход имеющихся в распоряжении предприятия ресурсов. Так, затраты ресурса P_1

на выполнение плана (x_1, x_2, x_3, x_4) составят $2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4$ ед., где $2x_1$ — затраты ресурса P_1 на выпуск x_1 ед. продукции $П_1$; $4x_2$ — затраты ресурса P_1 на выпуск x_2 ед. продукции $П_2$ и т. д. Понятно, что указанная сумма не может превышать имеющийся запас P_1 в 34 ед., т. е.

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \le 34.$$

Аналогично получаем ограничения по расходу ресурсов P_2 и P_3:

$$4x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \le 16,$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 22.$$

По смыслу задачи переменные x_1, x_2, x_3, x_4 не могут выражаться отрицательными числами, т. е. $x_j \ge 0$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Таким образом, имеем следующую задачу ЛП:

$$f = 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \le 34 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \le 16 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 22 \\ x_k \ge 0, \quad к = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

Прежде, чем решить эту задачу симплекс-методом, ее приводят к канонической форме (см. задачу Т16.7). Основным признаком канонической формы является запись ограничений задачи в виде равенств. В нашем же случае ограничения имеют вид неравенств. Чтобы преобразовать их в эквивалентные уравнения, введем в левые части неравенств дополнительные (балансовые) неотрицательные переменные x_5, x_6, x_7, обозначающие разности между правыми и левыми частями этих неравенств. В результате задачу можно записать в виде:

$$f = 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 34 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_6 = 16 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_7 = 22 \\ x_j \ge 0, \; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \end{cases}$$

Заметим здесь же, что дополнительные переменные x_5, x_6, x_7 имеют вполне определенный экономический смысл — это возможные остатки ресурсов P_1, P_2, P_3 соответственно. Их еще называют резервами. Очевиден базис переменных $\{x_5, x_6, x_7\}$, при этом переменные x_1, x_2, x_3, x_4 будут свободными. Поэтому начальный опорный план задачи равен (0,0,0,0.34, 16,22). Составим начальную si-таблицу (17.12).

		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
$x_5=$	34	2	4	1	5
$x_6=$	16	<u>4</u>	1	4	1
$x_7=$	22	2	3	1	2
$f=$	0	–7	–3	–4	-2

(17.12)

Содержащийся в si-таблице (17.12) план не является оптимальным, так как в /строке имеются отрицательные элементы. Чтобы получить опорный план, более близкий к оптимальному, выполним жорданову перестановку переменных x_6 и x_1 с разрешающим элементом 4 (разрешающая строка выбрана исходя из минимальности отношений $\frac{34}{2}, \frac{16}{4}, \frac{22}{2}$) . Получим новую si-таблицу (17.13).

		$-x_6$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
$x_5=$	26	-0.5	3.5	-1	4.5
$x_1=$	4	0.25	0.25	1	0.25
$x_7=$	14	-0.5	<u>2.5</u>	–1	1.5
$f=$	28	1.75	-1.25	3	-0.25

(17.13)

Рассуждая аналогично предыдущему, устанавливаем, что для улучшения этого плана необходимо выполнить жорданову перестановку переменных x_7 и x_2 с разрешающим элементом 2.5. В результате получится si-таблица (17.14), в f-строке которой все элементы неотрицательны.

		$-x_6$	$-x_7$	$-x_3$	$-x_4$
$x_5=$	6.4				
$x_1=$	2.6				
$x_2=$	5.6				
$f=$	35	1.5	1.2	2.5	0.5

(17.14)

Следовательно опорный план (2.6, 5.6, 0, 0, 6.4, 0, 0) является оптимальным, а оптимальное значение целевой функции равно 35. Итак, по оптимальному плану следует изготовить 2.6 ед. продукции $П_1$ и 5.6 ед. продукции $П_2$; продукцию $П_3$ и $П_4$ производить не следует.

К17.1. Ответы: оптимальный план (0,0,400,550), оптимальное значение целевой функции 90 000.

К17.11. Ответы: оптимальный план равен (1240, 990, 1508, 1326.75), при этом максимальная прибыль составит 375 196.5.

К17.12. Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad. Ввести матрицы *CO, CE, CT, N, M*, а также вектор *CG*, содержащий ограничения на объемы оборудования, материалы и фонд заработной платы (ограничение на общую стоимость выпускаемых изделий задать со знаком минус). Задать начальные значения, целевую функцию, а также сформировать вспомогательную матрицу *A* для матричной записи неравенств соответствующей задачи ЛП:

ORIGIN:=1 $\quad i:=1;5 \quad X_i:=0 \quad f(X):=(CO-CT)^T\cdot X \quad A:=stack(M, CT-CO)$

Сформировать блок для решения задачи ЛП:

Given $\quad A\cdot X\le CG^T \quad X\ge(10000,\ 0,\ 15000,\ 20000,\ 30000)^T$

$X_2\le 1200 \quad Y:=maximize(f, X)$.

Ответы: оптимальный план (29 000, 0, 15 000, 164 000, 35 000), оптимальное значение целевой функции 2 909 000.

Глава 18

Понятие двойственности в линейном программировании

Каждой задаче ЛП можно поставить в соответствие другую задачу ЛП, называемую двойственной к исходной, таким образом, чтобы решив одну из них, получить и решение другой. Рассмотрим теорию двойственности на примере задач в симметричной форме записи.

Следующая задача ЛП называется симметричной:

целевая функция

$$f(x_1, ..., x_n) = d_1 x_1 + .., + d_n x_n \to \max,$$

а множество планов задается системой: (18.1)

$$\begin{cases} a_{i1} x_1 + ... + a_{in} x_n \le c_i, i = 1 ... m \\ x_k \ge 0, \quad k = 1, ..., n. \end{cases}$$

Двойственной к симметричной задаче называется следующая задача ЛП:

целевая функция

$$g(y_1, ..., y_m) = c_1 y_1 + ... + c_m y_m \to \min,$$

а множество планов задается системой: (18.2)

$$\begin{cases} a_{1k} y_1 + a_{2k} y_2 + ... + a_{mk} y_m \ge d_k, \quad k = 1, ..., n \\ y_i \ge 0, \quad i = 1, ..., m \end{cases}$$

В матричном виде эти две задачи выглядят так:

$$F = DX^T \to \max \qquad g = C^T Y^T \to \min$$

$$\begin{cases} AX^T \le C \\ X \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A^T Y^T \ge D' \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

где $D = (d_1, ..., d_n)$, $X = (x_1, ..., x_n) Y = (y_1, ..., y_m), C^T = (c_1, ..., c_m)$.

Симметричные задачи ЛП легко преобразовать в эквивалентные канонические задачи путем введения новых балансовых переменных (см. задачи Т16.5 - Т16.7):

$$f(x_1, ..., x_n) = d_1 x_1 + ... + d_n x_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{i1} x_1 + ... + a_{in} x_n + x_{n+i} = c_i, \quad i = 1, ..., m \\ x_k \ge 0, \quad k = 1, ... n + m \end{cases} \qquad (18.3)$$

$$g(y_1, \ldots, y_m) = c_1 y_1 + \ldots + c_m y_m \to \min$$

$$\begin{cases} \quad + a_{2k} y_2 + \ldots + a_{mk} y_m - y_{m+k} = d_k, \quad k = 1, \ldots, n \\ y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m+n. \end{cases} \tag{18.4}$$

В этих задачах очевидны базисы переменных: $\{x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}\}$ и $\{y_{m+1}, \ldots, y_{m+n}\}$ соответственно. Поэтому задачи (18.3) и (18.4) можно записать в виде так называемой совмещенной si-таблицы (18.5).

	1	$-x_1$	...	$-x_k$	...	$-x_n$	
$x_{n+1}=$	c_1	a_{11}	...	a_{1k}	...	a_{1n}	y_1
......	...	...	...	...	...	...	...
$x_{n+i}=$	c_i	a_{i1}	...	a_{ik}	...	a_{in}	y_i
......	...	...	...	...	...	...	...
$x_{n+m}=$	c_m	a_{m1}	...	a_{mk}	...	a_{mn}	y_m
$f=$	0	$-d_1$	...	$-d_k$	...	$-d_n$	1
	$g=$	$y_{m+1}=$	...	$y_{m+k}=$	...	$y_{m+n}=$	

(18.5)

Как переходить от этой табличной записи к виду (18.3), было описано в гл. 17. Для перехода к записи (18.4) надо скалярно умножить последний столбец, который называется столбцом свободных переменных задачи (18.4), на каждый из столбцов таблицы, приравняв результаты соответственно к $g, y_{m+1}, \ldots, y_{m+n}$. При этом столбец свободных членов $c_1, \ldots, c_m, 0$ и f-строка задачи (18.3) называются соответственно g-столбцом и строкой свободных членов задачи (18.4).

Определение

Переменные двойственных задач, находящиеся в одной строке или в одном столбце таблицы (18.5), называются согласованными, т. е. x_{n+i} и y_i, x_k и y_{m+k} — пары согласованных переменных, $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$.

Любая таблица, которая получается из (18.5) жордановыми перестановками переменных двойственных задач, будет также называться совмещенной si-таблицей.

Условимся, что при переходе от одной совмещенной si-таблицы к другой, меняя местами переменные одной из двойственных задач, будем также менять местами и согласованные с ними переменные другой задачи.

Утверждение **18.1.** Пусть произвольный столбец некоторой совмещенной si-таблицы содержит пару согласованных переменных x_s и y_r, а произвольная строка – пару согласованных переменных x_t и y_p. Тогда новая совмещенная si-таблица, полученная из данной жордановой перестановкой одной из пар (x_s, x_t), (y_r, y_p), будет идентична совмещенной si-таблице, полученной жордановой перестановкой другой пары.

Это утверждение непосредственно проверяется по аналогии с доказательством утверждения 17.1.

Теперь дадим экономическую интерпретацию задач (18.1) и (18.2).

Пусть предприятие-продавец располагает запасами m видов ресурсов $c_1, \ldots, c_m$, которые используются для производства n видов продукции. Известна также выручка d_k от продажи единицы готовой продукции k-го вида, а также норма a_{ik} расхода i-го вида ресурса на производство единицы продукции k-го вида. Требуется найти такие объемы изготавливаемой продукции $x_1, \ldots, x_n$, при которых суммарная выручка $d_1x_1 + \ldots + d_nx_n$ была бы максимальной, а расход ресурса i-го вида, равный $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n$, не превосходил бы его запаса c_i. Таким образом имеем задачу (18.1). Предположим, что предприятие-продавец по некоторым обстоятельствам решило продать все ресурсы, не производя готовой продукции. Необходимо установить прикидочные цены (их часто называют теневыми ценами) $y_1, \ldots, y_m$ на единицу ресурса каждого вида, при которых должны выполняться следующие требования: общая стоимость всех ресурсов $c_1y_1 + \ldots + c_my_m$ минимальна — к этому стремится покупатель; выручка $a_{1k}y_1 + a_{2k}y_2 + \ldots + a_{mk}y_m$ за ресурсы, идущие на производство единицы продукции k-го вида, должна не уступать выручке d_k за единицу этой продукции (если бы она была бы произведена) — к этому стремится предприятие-продавец. Таким образом, имеем задачу (18.2).

Задачи для самостоятельного решения

Т18.1. Доказать, что задача (18.1) является двойственной к задаче (18.2).

Т18.2. Построить двойственную задачу к канонической задаче ЛП:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = d_1x_1 + \ldots + d_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = c_i, & i = 1, \ldots, m \\ x_k \geq 0, & k = 1, \ldots, n \end{cases}$$

П18.1. Построить двойственную задачу к следующей задаче ЛП и составить совмещенную si-таблицу:

$$f = 4x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_i \geq 0, \ i = 1, 2 \end{cases} \tag{18.6}$$

П18.2. Построить двойственную задачу к следующей задаче ЛП, заданной в канонической форме:

$$f = 5x_2 + 10x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + 7x_4 = 19 \\ 3x_2 - 2x_4 + x_5 = 15 \\ x_1 + 12x_2 + x_4 = 16 \\ x_k \ge 0, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

П18.3. Построить двойственную задачу к следующей задаче ЛП;

$$f = 12x_1 + x_2 - 12x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 \le 1 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 \ge 5 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Ответы, указания, решения

Т18.1. Запишем задачу (18.2) следующим образом:

$$g(y_1, \ldots, y_m) = -c_1 y_1 - \ldots - c_m y_m \to \max$$

$$\begin{cases} -a_{1k} y_1 - \ldots - a_{mk} y_m - d_k, \quad k = 1, \ldots, n \\ y_i \ge 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Двойственной к ней по определению является следующая задача;

$$f(x_1, \ldots, x_n) = -d_1 x_1 - \ldots - d_n x_n \to \min$$

$$\begin{cases} -a_{i1} x_1 - \ldots - a_{in} x_n \ge -c_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ x_k \ge 0, \; k = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Последнюю задачу можно записать в виде (18.1).

Т18.2. Запишем каноническую задачу следующим образом:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = d_1 x_1 + \ldots + d_n x_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n \le c_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n \ge c_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ x_k \ge 0, \quad k = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Затем представим ее в симметричной форме:

$$f(x_1, \dots, x_n) = d_1 x_1 + \dots + d_n x_n \to \max$$
$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots a_{in}x_n \le c_i, & i = 1, \dots, m \\ -a_{i1}x_1 - \dots - a_{in}x_n \le -c_i, & i = 1, \dots, m \\ x_k \ge 0, \ k = 1 \dots n \end{cases}$$

Двойственной к последней задаче по определению является следующая задача:

$$g(y_1', y_1'', \dots, y_m', y_m'') = c_1 y_1' - c_1 y_1'' + \dots + c_m y_m' - c_m y_m'' \to \min$$
$$\begin{cases} a_{1k}y_1' - a_{1k}y_1'' + \dots + a_{mk}y_m' - a_{mk}y_m'' \ge d_k, & k = 1, \dots, n \\ y_i' \ge 0, \quad y_i'' \ge 0, \quad i = 1, \dots, m \end{cases}$$

Обозначим $y_i = y_i' - y_i''$, $i = 1, \dots, m$. Тогда двойственная задача примет вид:

$$g(y_1, \dots, y_m) = c_1 y_1 + \dots + c_m y_m \to \min$$
$$\begin{cases} a_{1k}y_1 + \dots + a_{mk}y_m \ge d_k, & k = 1, \dots, n \\ y_i \text{ - произвольные числа } i = 1, \dots, m \end{cases}$$

П18.1. Ответы:

	1	$-x_1$	$-x_2$	
$x_3=$	6	1	1	y_1
$x_4=$	4	1	0	y_2
$x_5=$	12	2	1	y_3
$f=$	0	-4	-2	1
	$g=$	$y_4=$	$y_5=$	

П18.2. Для решения можно воспользоваться задачей Т18.2. Однако, в данной задаче очевиден базис $\{x_1, x_3, x_5\}$. Поэтому задачу легко привести к симметричной задаче:

$$f = 5x_2 + 10x_4 \to \max$$

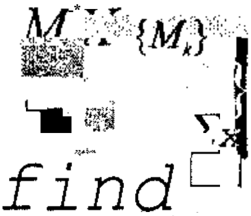
$$\begin{cases} 3x_2 - 2x_4 \le 15 \\ 12x_2 + x_4 \le 16 \\ x_2 \ge 0, \ x_4 \ge 0 \end{cases}$$

Отсюда записывается двойственная к ней задача:

$$g = 19y_1 + 15y_2 + 16y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + 12y_3 \ge 5 \\ 7y_1 - 2y_2 + y_3 \ge 10 \\ y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0 \end{cases}$$

П18.3. Указание: поменять знак неравенства на противоположный во втором ограничении.



Глава 19

Основные теоремы двойственности и их экономический смысл

Теорема 19.1. Если одна из двойственных задач (18.1), (18.2) имеет оптимальный план, то другая также имеет оптимальный план и оптимальные значения целевых функций f и g равны. Если целевая функция одной из двойственных задач неограничена на множестве своих планов, то другая задача не имеет планов вообще.

Доказательство. Приведя задачи (18.1), (18,2) к каноническому виду, составим для них совмещенную si-таблицу (18.5). Предположим, что множество планов первой задачи не пусто. Применим к ней симплекс-метод, алгоритм которого описан в гл. 17. По завершению алгоритма будет построена некоторая совмещенная si-таблица (19.1); для упрощения индексации и без ограничения общности будем считать, что при этом получены базисы переменных $\{x_1, ..., x_m\}$ и $\{y_1, ..., y_n\}$.

	1	$-x_{m+1}$ ... $-x_{m+n}$	
$x_1=$	α_1	$b_{1,m+1}$ ... $b_{1,m+n}$	y_{n+1}
....	....	....	.....
$x_m=$	α_m	$b_{m,m+1}$ ... $b_{m,m+n}$	y_{n+m}
$f=$	γ	β_1 ... ... β_n	1
	$g=$	$y_1=$ ... ... $y_n=$	

(19.1)

Возможны два случая:

1. В f-строке таблицы (19.1) все элементы неотрицательны.
2. В f-строке найдется отрицательный элемент β_s, а столбец, его содержащий, содержит только неположительные элементы.

Предположим, что имеет место первая возможность; $\beta_k \geq 0$, $k = 1, ..., n$. В этом случае $(\alpha_1 ... \alpha_m, 0, ... 0)$ — оптимальный план задачи (18.1) (теорема 17.1). Но из таблицы (19.1) следует равенство $g = \gamma + \alpha_1\gamma_{n+1} + ... + \alpha_m\gamma_{n+m}$, откуда $g \geq \gamma$ при любых неотрицательных значениях свободных переменных $y_{n+1}, ..., y_{m+n}$. Поэтому минимальное значение функции g равно y и оно достигается при нулевых значениях свободных переменных. Это означает оптимальность плана $(\beta_1, ..., \beta_n, 0, ..., 0)$.

Предположим, что имеет место вторая возможность. В этом случае функция f неограничена множеством своих планов (теорема 17.2), а из таблицы (19.1) следует равенство $y_s = \beta_s + y_{n+1}b_{1s} + ... + y_{n+m}b_{ms}$, которое невозможно ни при каких неотрицательных значениях свободных переменных, так как $y_s \geq 0$, а правая часть $\beta_s + y_{n+1}b_{1s} + ... + y_{m+n}b_{ms}$ отрицательна.

Задачи (18.1) и (18.2) можно поменять ролями, если все ограничения и целевые функции умножить на -1. Это замечание завершает доказательство теоремы.

Экономическое содержание теоремы 19.1: при оптимальном плане объемов выпускаемой продукции выручка от реализации произведенной продукции совпадает с теневой ценой сырья, затраченного на производство этой продукции.

Пример

Рассмотрим совмещенную si-таблицу, содержащуюся в ответе задачи П18.1. Очевидно, (0, 0, 6, 4, 12) — начальный опорный план задачи (18.6). Применим симплекс-метод. Произведем жорданову перестановку переменных x_4 и x_1 и, следовательно, переменных y_4 и y_2 с разрешающим элементом 1. Получим совмещенную si-таблицу (19.2).

	1	$-x_4$	$-x_2$	
$x_3=$	2	-1	1	y_1
$x_1=$	4	1	0	y_4
$x_5=$	4	-2	1	y_3
$f=$	16	4	-2	1
	$g=$	$y_2=$	$y_5=$	

(19.2)

Произведем жорданову перестановку переменных x_3 и x_2 и, следовательно, переменных y_5 и y_1 с разрешающим элементом 1. Получим совмещенную si-таблицу (19.3).

	1	$-x_4$	$-x_3$	
$x_2=$	2	-1	1	y_5
$x_1=$	4	1	0	y_4
$x_5=$	2	-1	-1	y_3
$f=$	20	2	2	1
	$g=$	$y_2=$	$y_1=$	

(19.3)

В si-таблице (19.3) в f-строке все элементы неотрицательны. Поэтому $a^* = (4, 2, 0, 0, 2)$ — опорный план задачи (18.6), а $\beta^* = (2, 2, 0, 0, 0)$ — опорный план двойственной ей задачи:

$$g = 6y_1 + 4y_2 + 12y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ y_1 + y_3 \geq 2 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

При этом $f(\alpha^*) = g(\beta^*) = 20$.

Следствие 19.1. Если множества планов двойственных задач не пусты, то эти задачи всегда имеют оптимальные планы.

Следствие 19.2. Пусть α и β — произвольные планы двойственных задач (18.1) и (18.2) соответственно. Тогда $f(\alpha) \leq g(\beta)$, причем равенство возможно только если а и β — оптимальные планы.

Доказательство следствий см. в задачах Т19.1 - Т19.2.

Теорема 19.2. Пусть $\alpha = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, $\beta = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ — *оптимальные* планы соответственно задач (18.1) и (18.2). Тогда верно

$$(c_i - \sum_k a_{ik} x_k^*) y_i^* = 0, \quad i = 1, \ldots, m \tag{19.4}$$

$$(\;_k \; \sum_i \;_{ik} y_i) \;_k \quad , \quad , \quad , \tag{19.5}$$

Доказательство теоремы дано в задаче Т19.3.

Следствие **19.3.** Пусть $\alpha = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, $P = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ произвольные планы соответственно задач (18.1) и (18.2), причем выполняются соотношения (19.4) и (19.5). Тогда α и β — оптимальные планы этих задач.

Доказательство следствия дано в задаче Т19.4.

Экономическое содержание теоремы 19.2 в следующем. Если при некотором оптимальном плане $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ = « объемов производства расход $\sum^n a_{ik} x_k^*$ i-го ресурса меньше его запаса су, то в оптимальном плане теневых цен $(y_1^*, \ldots, y_m^*) = \beta$ иена y_i^* единицы этого ресурса равна нулю. Если же в оптимальном плане теневых цен теневая цена y_i^* единицы /-го ресурса строго больше нуля, то в оптимальном плане а объемов производства расход соответствующего ресурса будет равен его запасу c_i. Итак, двойственные оценки могут служить мерой дефицитности ресурса: дефицитный ресурс (полностью используемый по оптимальному плану) имеет положительную теневую цену, а ресурс избыточный — нулевую цену. Далее, если в оптимальном плане [3 цена ресурсов $\sum_{i=1} a_{ik} y_i^*$, расходуемых на производство единицы продукции k-го вида, превосходит реальную цену d_k единицы этой продукции, то при оптимальном плане a продукцию k-го вида производить невыгодно ($x_k^* = 0$). Если же в оптимальном плане а предусмотрен выпуск продукции k-го вида, т. е. $x_k^* > 0$, то при оптимальных теневых ценах цена ресурсов, расходуемых на производство единицы продукции k-го вида, будет равна реальной цене d_k единицы этой продукции.

Рассмотрим предыдущий пример этого параграфа. Так как $x_1^* + x_2^* = 4 + 2 = 6$, $x_1^* = 4$, $2x_1^* + x_2^* = 10 < 12$, то ресурсы первого и второго видов дефицитные- а третьего вида — нет. В то же время $y_1^* > 0$, $y_2^* > 0$, $y_3^* = 0$, что согласуется с экономическим содержанием теоремы 19.2. При этом $y_1^* = y_2^*$, что означает одинаковую степень дефицитности ресурсов первого и второго видов. Далее, в оптимальном плане объемы производства первого и второго видов продукции ненулевые; в то же время первое и второе ограничения двойственной задачи выполняются как равенства: $y_1^* + y_2^* + y_3^* = 4$, $y_1^* + y_3^* = 2$. Это означает, что теневые цены ресурсов, расходуемых на продукцию первого и второго видов, равны реальным ценам на эту продукцию, что опять-таки согласуется с тем, что $x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$.

Задачи для самостоятельного решения

Т19.1. Доказать следствие 19.1.

Т19.2. Доказать следствие 19.2.

Т19.3. Доказать теорему 19.2.

Т19.4. Доказать следствие 19.3.

Задачи П19.1 - П19.21, К19.1—К19.12 являются продолжением соответствующих задач П17.1 – П17.21, К17.1—К17.12 из главы 17.

П19.1 – П19.21. Построить двойственную задачу и, используя решение исходной задачи из главы 17, найти оптимальный план двойственной задачи. Объяснить экономическое содержание всех величин, присутствующих в оптимальных планах исходной и двойственной задач.

К19.1 – К19.12. Построить двойственную задачу и. используя Mathcad, найти ее оптимальный план. Объяснить экономическое содержание величин, присутствующих в оптимальных планах исходной и двойственной задач.

Ответы, указания, решения

Т19.1. Указание: утверждение непосредственно следует из теоремы 19.1.

Т19.2. В силу теоремы 19.1 обе задачи (18.1) и (18.2) имеют некоторые оптимальные планы a* и β^* соответственно, причем Да*) $= g(\beta^*)$. Но/(а) $\le f(\alpha^*)$, $g(\beta) \ge g(\beta^*)$, откуда $f(\alpha) \le g(\beta)$, причем равенство возможно, только если Да) =/(а*) и $g(\beta) = g(\beta^*)$.

Т19.3. Если каждое i-е ограничение в (18.1) умножить на y_i^*, а затем почленно сложить, то получим:

$$\sum_i \sum_k a_{ik} x_k^* y_i^* \le \sum_i c_i y_i^* = g(\beta). \tag{19.6}$$

Аналогично получается неравенство:

$$\sum_i \sum_k a_{ik} x_k^* y_i^* \ge \sum_k d_k x_k^* = f(\alpha). \tag{19.7}$$

Предположим теперь, что (19.4) неверно для некоторого i. Тогда $y_i^* > 0$, $\sum_k a_{ik} x_k^* < c_i$, $y_i^* \sum_k a_{ik} x_k^* < c_i y_i^*$. Откуда следует, что неравенство (19.6) должно быть строгим. Но в силу следствия 19.2 $g(\beta) = f(\alpha)$, откуда

$$\sum_i \sum_k a_{ik} x_k^* y_i^* < g(\beta) = f(\alpha) \le \sum_i \sum_k a_{ik} x_k^* y_i^* .$$

Получено противоречие. Аналогично приходим к противоречию, если предположить, что неверно (19.5). Теорема доказана.

Т19.4. Из (19.4) и (19.5) следует, что

$$\sum_k \sum_i a_{ik} x_k^* y_i^* = \sum_i y_i^* c_i = \sum_k x_k^* d_k ,$$

откуда /(а) $= g(\beta)$ и, следовательно, α и β — оптимальные планы в силу следствия 19.2.

П19.21. При решении задачи П17.21 был найден оптимальный план выпуска продукции, равный $\alpha = (2.6, 5.6, 0, 0, 6.4, 0, 0)$. По оптимальную плану следует изготовить $x_1^* = 2.6$ ед. продукции Я,, $x_2^* = 5.6$ ед. продукции $П_2$, а продукцию $П_3$ и $П_4$ производить не следует, так как $x_3^* = x_4^* = 0$; при этом останутся неиспользованными $x_5^* = 6.4$ ед. ресурса P_1, а ресурсы P_2 и P_3 будут израсходованы полностью, так как $x_6^* = x_7^* = 0$.

Двойственная задача к исходной будет выглядеть так:

$$g = 34y_1 + 16y_2 + 22y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 \ge 7 \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 3 \\ y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 4 \\ 5y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 2 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Из доказательства теоремы 19.1 следует, что оптимальный план двойственной задачи и оптимальное значение ее целевой функции будут находиться в f-строке последней si-таблицы (17.14), построенной в результате решения симплекс-методом задачи П17.21. Учитывая согласованность переменных x_6 и y_2, x_7 и y_3, x_3 и y_6, x_4 и y_7, из этой si-таблицы получаем оптимальный план двойственной задачи, равный $\beta = (0,\ 1.5, 0.5, 0, 0, 2.5, 0.5)$. Величины $y_1^* = 0$, $y_2^* = 1.5$, $y_3^* = 0.5$ являются теневыми ценами ресурсов P_1, P_2, P_3 соответственно и в данном случае могут служить мерой их дефицитности: ресурс P_1 недефицитен, а ресурсы P_2 и P_3 — дефицитны, причем ввиду $y_2^* > y_3^*$ ресурс P_2 более дефицитен. Далее, так как $y_4^* = y_5^* = 0$, $y_6^* = 2.5$, $y_7^* = 0.5$, то теневые цены сырья, расходуемого на единицу продукции $П_1$ и $П_2$ равны реальным ценам на единицу этих видов продукции, а теневые цены сырья, расходуемого на единицу продукции $П_3$ и $П_4$, превышают реальные цены на единицу этих видов продукции, т. е. производство такой продукции нерентабельно.

К19.1. Ответ: оптимальный план двойственной задачи равен (30, 15, 0).

К19.11. Ответы: оптимальный план двойственной задачи равен (0,0,0,0, 1.225, 124.4, 132.85, 178.25,0).

К19.12. Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad (сохраняются обозначения задачи К17.12). Вначале преобразовать исходную задачу к виду (18.1):

```
A:=stack(A, -identity(5))          A1,7:=1

CG1:=(-10000   1200   -15000   -20000   -30000)

OG2:=augment(OG, OG1)
```

Задать начальные значения и целевую функцию двойственной задачи:

```
m:=rows(A)     i:=1;m     Yi:=0     g(Y):=OG2T· Y
```

Сформировать блок решения двойственной задачи:

```
Given     AT· Y≥(CO - CE)T     Y≥G     Y:=minimize(g, Y)
```

В результате будет получен оптимальный план

$\beta = (0,\ 2.8,\ 0.8,\ 0.6,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 7.4,\ 0,\ 0)$

Согласно оптимальному плану α= (29 000, 0, 15 000, 164 000, 35 000) исходной задачи, следует произвести 29000 ед. продукции первого вида, 15 000 ед. — третьего вида, 164 000 ед. — четвертого вида, 35 000 ед. — пятого вида; продукцию второго вида производить не следует. Первые восемь координат оптимального плана β двойственной задачи служат мерой дефицитности соответствующих ресурсов: дефицитным является оборудование второго, третьего и четвертого видов; фонд заработной платы не будет исчерпан полностью; общая стоимость выпускаемой продукции превзойдет заданную нижнюю границу 2 500 000. Отличие от нуля одиннадцатой координаты в β указывает на то, что только объем третьего вида продукции (в оптимальном плане) будет равен предельно допустимой величине 15 000.

Глава 20

Некоторые понятия и теоремы теории графов

Зададим непустое конечное множество V и множество E упорядоченных или неупорядоченных пар элементов из V. Графом G называется пара $G = (V, E)$.

Элементы множества V называются вершинами графа, а неупорядоченные или упорядоченные пары вершин — соответственно ребрами или дугами. Если множество E состоит только из ребер, то граф называется неориентированным, если только из дуг — то ориентированным, или орграфом, если в E есть и ребра и дуги, то граф называется смешанным. Граф, состоящий из одной вершины, называется тривиальным.

Если пара вершин a и b является ребром или дугой, то она будет обозначаться ab или (a, b) соответственно. В первом случае вершины a и b называются концами ребра ab, во втором случае вершина a называется началом, а вершина b — концом дуги (a, b). В первом случае также будем говорить, что ребро выхолит из вершины a (или b), а во втором случае — дуга выходит из вершины a и входит в вершину b. В любом из этих случаев вершины a и b (вершина a и ребро или дуга) называются смежными друг с другом.

Граф удобно изображать в виде рисунка, на котором точки соответствуют вершинам графа, а линии, соединяющие соответствующие точки — ребрам графа, и линии со стрелками, идущими от начала дуги к концу — дугам графа.

Пример

Рассмотрим граф $G = (V, E)$, изображенный на рис. 20.1.

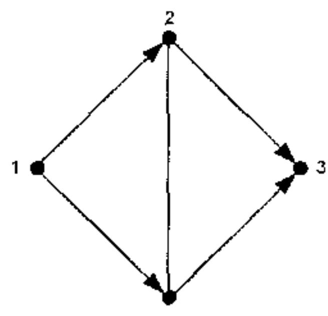


Рис. 20.1. Граф $G = (V, E)$

Здесь $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{(1, 2), (1, 3), (2,3), (2, 4), (3, 4)\}$.

Последовательность различных дуг $(v_1, v_2), (v_2, v_3)$, ..., (v_{n-1}, v_n) орграфа называется путем, соединяющим вершины v_1 и v_n, если начало каждой последующей дуги является концом предыдущей. Если при этом $v_1 = v_n$, то этот путь называется контуром.

В неориентированном графе последовательность различных ребер вида v_1v_2, $v_2v_3, \ldots$, $v_{n-2}v_{n-1}$, $v_{n-1}v_n$ называется цепью, соединяющей вершины v_1 и v_n или (v_1, v_n)-цепью. Если при этом $v_1 = v_n$, то цепь называется циклом. Цепь в орграфе — это последовательность дуг, которая превращается в цепь неориентированного графа, если устранить направленность (ориентацию) дуг орграфа. Аналогично определяется цикл в орграфе.

Путь, контур, цепь и цикл называются простыми, если каждая вершина дуги (ребра) смежна не более чем с двумя входящими в них дугами (ребрами).

Орграф без контуров называется бесконтурным.

Лемма 20.1 В бесконтурном орграфе существует вершина, в которую не входит ни одна дуга.

Доказательство. Предположим противное: в любую вершину орграфа входит дуга. Рассмотрим произвольную вершину v_1. Поскольку в эту вершину входит некоторая дуга, то перейдем по этой дуге в вершину v_2. Так как в вершину v_2 входит дуга, то по ней можно перейти в вершину v_3 и т. д. Но орграф имеет конечное число вершин. Следовательно, переходя из вершины в вершину, в какой-то момент мы попадем в одну из тех вершин, в которых были ранее, т. е. получим контур в орграфе, существование которого запрещено условиями леммы. Лемма доказана.

Теорема 20.1. Вершины бесконтурного орграфа можно занумеровать так, что конец каждой дуги будет иметь номер больший, чем ее начало.

Доказательство. Согласно лемме 20.1, в орграфе есть вершина, в которую не входит ни одна дуга. Присвоим этой вершине номер 1. Удалим из орграфа эту вершину вместе с выходящими из нее дугами. В получившемся орграфе также отсутствуют контуры, поэтому в нем существует вершина, в которую не входят дуги. Присвоим этой вершине номер 2. Такой процесс будем выполнять до тех пор, пока не занумеруем все вершины орграфа. Теорема доказана.

Произведенная нумерация вершин орграфа называется топологической сортировкой. Доказательство теоремы дает алгоритм топологической сортировки.

Определение

Граф H называется подграфом графа G, если его вершины и ребра принадлежат G. Граф (неориентированный или ориентированный) называется связным, если любая пара его вершин соединена цепью. Наибольший по включению связный подграф графа называется компонентой связности графа или просто компонентой. Связный граф состоит из одной компоненты, а граф, не являющийся связным, из нескольких. Граф G, изображенный на рис. 20.2, имеет три компоненты: графы G_1, G_2, G_3.

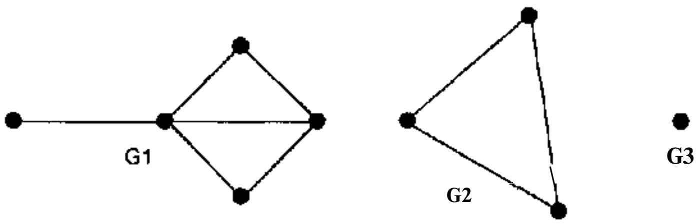


Рис. 20.2. Компоненты связности графа G

Связный граф без циклов называется деревом. Граф без циклов называется лесом.

Вершина в графе называется висячей, если она смежна только с одним ребром или с одной дугой.

Лемма 20.2. Любое нетривиальное дерево содержит по крайней мере две висячие вершины.

Доказательство леммы см. в задаче Т20.1.

Теорема 20.2. Для графа G, имеющего n вершин и m ребер, следующие утверждения эквивалентны:

1. G — дерево.
2. G — связный граф и $m = n - 1$.
3. G — не содержит циклов и $m = n$ - \.
4. любые две вершины графа G соединены единственной простой цепью.
5. G не содержит циклов и при соединении ребром (дугой) двух его несмежных вершин в полученном графе будет ровно один цикл.

Доказательство. Докажем теорему для неориентированных деревьев. (Доказательство теоремы для орграфов получается из приводимого ниже доказательства изменением соответствующей терминологии.)

$1 \Rightarrow 2$) Докажем, что из первого утверждения следует второе с помощью математической индукции. Для тривиального дерева доказываемое соотношение очевидно. Пусть оно выполняется для дерева, содержащего p вершин. Тогда это дерево содержит $p - 1$ ребро (по индуктивному предположению). Рассмотрим дерево. содержащее $p + 1$ вершины. Из леммы 20.2 следует, что нетривиальное дерево содержит висячую вершину. Удалим эту вершину вместе с ребром, которое выходит из него. Легко доказать, что подучившийся граф является деревом (см. задачу Т20.2). По индуктивному предположению это дерево имеет p вершин \\p-\ ребро. Поэтому исходное дерево содержит $p + 1$ вершину и/? ребер.

$2 \Rightarrow 3$) Предположим, что граф G содержит цикл C. Для любой вершины, не принадлежащей циклу, построим кратчайшую по числу ребер цепь, соединяющую эту вершину с циклом. Существование такой цени следует из связности графа. (Если кратчайших цепей несколько, то возьмем одну из них.) Поставим в соответствие каждой вершине, не попавшей в цикл, ребро кратчайшей цепи, выходящей из этой вершины и идущей по направлению к циклу. Каждой вершине графа будет поставлено в соответствие одно ребро, и все эти ребра будут разными (рис. 20.3).

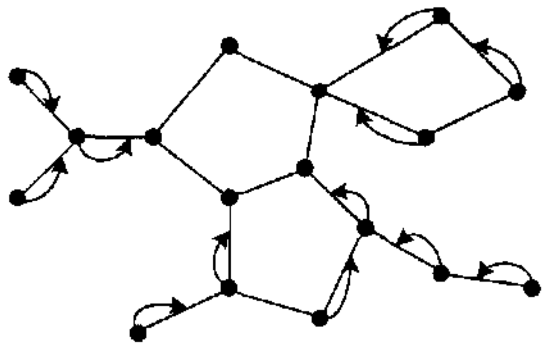


Рис. 20.3. Граф G

Стрелки из вершин указывают на ребра, которые ставятся им в соответствие. Учитывая равенство в цикле числа ребер и числа вершин, получим, что в графе G число ребер не меньше числа вершин. Это противоречит заданному равенству $m = n - 1$.

3 $\Rightarrow$ 4) Докажем сначала, что в графе G любые две вершины соединены хотя бы одной цепью, т. е. G — связный граф. Предположим противное: граф G не является связным и состоит из компонент G_1, G_2, ... G_k. Каждая компонента графа G — связный граф без циклов, т. е. дерево. Из доказанного ранее вытекают равенства

$$m_i = n_i - 1,\ i = 1, 2, ..., k, \tag{20.1}$$

где n_i — число вершин графа G_i, а m_i — число его ребер. Просуммировав равенства (20.1) для всех i, получим $\sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} n_i - k$. Но $\sum_{i=1}^{k} m_i = m$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Поэтому $m = n - k$, что противоречит заданному соотношению $m = n - 1$, поскольку $k > 1$.

Если в графе две вершины соединены цепью, то из-за отсутствия в графе циклов, это простая цепь. Если же в графе некоторые две вершины соединены двумя разными простыми цепями, то объединение ребер этих цепей содержит цикл (см. задачу Т20.4), что опять-таки противоречит условию.

4 $\Rightarrow$ 5) Рассмотрим две несмежные вершины u и v графа. По условию эти вершины соединяет единственная простая цепь. Эта цепь вместе с добавленным ребром uv образует цикл. Если же после добавления ребра uv в графе окажется два цикла, то из этого следует существование в графе двух цепей, соединяющих u и v.

5 $\Rightarrow$ 1) Предположим, что граф не является связным. В этом случае, соединив ребром две вершины графа из разных компонент, мы не получим цикла в графе. Теорема доказана.

Определение

Граф называется взвешенным, если его ребрам или дугам приписаны числа, называемые весами. Длиной пути, цепи, контура или цикла называется сумма весов входящих в него дуг или ребер.

Граф называется двудольным, если множество его вершин можно так разбить на два непересекающихся подмножества, называемых долями, что любые две смежные вершины находятся в разных долях.

Теорема 20.3. Граф является двудольным, если и только если все его циклы состоят из четного числа ребер.

Доказательство. Докажем теорему для неориентированных графов.

Необходимость. Пусть G —двудольный граф, состоящий из долей A и B. C -• один из его циклов, содержащий p ребер. Выберем в доле A какую-либо вершину и пройдем ребра этоIX) цикла в той последовательности, в какой они в нем расположены, начиная с этой вершины. Сделав p шагов, вернемся в выбранную вершину. Так как каждый нечетный шаг переводит нас в долю 5, а каждый четный возвращает в долю A, то p — четное число.

Достаточность. Не ограничивая общности, можно рассматривать только связные графы, так как в двудольном графе каждая компонента является двудольным графом. Будем считать граф G взвешенным графом, вес каждого ребра которого равен 1. Расстоянием между двумя вершинами назовем длину кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины.

Пусть нетривиальный связный граф G не имеет циклов, состоящих из нечетного числа ребер. Построим разбиение его вершин на классы A и B. Выберем произвольную вершину u и отнесем ее к классу A. Если расстояние от вершины u до вершины v четное, то отнесем вершину v к классу A, если нечетное, то к классу B. Осталось доказать, что любое ребро графа соединяет вершины из разных классов.

Пусть, напротив, существуют две смежные вершины v и w, входящие в один класс. Тогда ни одна из них не является вершиной u, так как смежные с u вершины находятся от нее на расстоянии 1 и поэтому отнесены к классу B. Пусть, далее, V — кратчайшая (u, v)-цепь, W — кратчайшая (u,w)-цепь, u_1 — последняя общая вершина этих цепей, считая от вершины u. Обозначим через X_u и X_v соответственно (u, u_1)-цепь и (u_1, v)-цепь, части цепи V, а через Y_u и Y_w соответственно (u, u_1)-цепь и (u_1, w)-цепь, части цепи W (рис. 20.4).

Из того, что цепи X_u и Y_u являются кратчайшими (u, u_1)-цепями, следует, что их длины совпадают. Поэтому длины цепей X_v и Y_w имеют одинаковую четность. Но тогда объединение цепей X_v, Y_w и ребра vw является циклом, содержащим нечетное число ребер. Получено противоречие с условиями теоремы. Теорема доказана.

Следствие **20.1.** Лес является двудольным графом.

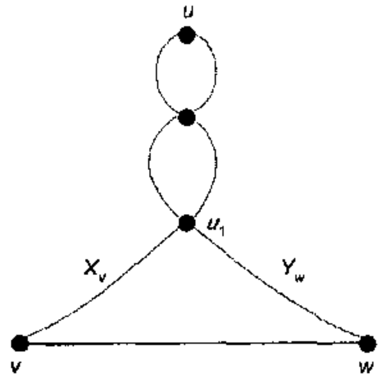


Рис. 20.4. (u,v)-цепь и (u,w)-цепь

Задачи для самостоятельного решения

Т20.1. Доказать лемму 20.2.

Т20.2. Доказать, что граф, полученный из дерева после удаления висячей вершины вместе с выходящим из нее ребром, является деревом.

Т20.3, Доказать, что любая (u, v)-цепь содержит простую (и, v)-цепь.

Т20.4, Доказать, что если в графе две вершины соединены двумя разными простыми цепями, то объединение этих цепей содержит простой цикл.

Т20.5. Пусть каждое ребро графа имеет вес 1. Обозначим через r(v) расстояние от вершины v до самой дальней от нее вершины. Центром графа называется множество тех его вершин v для которых r(v) является минимальным в этом графе. Доказать, что центр дерева состоит из одной вершины или из двух смежных вершин.

Ответы, указания, решения

Т20.1. Указание: лемма доказывается так же, как и лемма 20.1.

Т20.2. Так как исходный граф не содержал циклов, то после удаления ребра и вершины циклы появиться не могут, Полученный граф является также связным, поскольку удаленное ребро может принадлежать только цепи, соединяющей произвольную вершину с удаленной вершиной. Следовательно, полученный граф —дерево.

Т20.3. Указание: произвольная цепь превращается в простую после устранения "лишних" кусков.

Т20.4. Пусть $p = (и,, ..., u_k)$ и $Q = (v_1, ..., v_s)$ — две несовпадающие цепи, $u_1 = v_1 = u$, $u_k = v_s = v$. Обозначим через u_αи v_α, первые, считая от u, из несовпадающих вершин этих цепей, а через u_β и v_γ — первые из совпадающих вершин, следующих после u_α и v_α. Тогда а > 1, и объединение части цепи P от $u_{\alpha+1}$ до u_β и части цепи Q от $v_{\alpha+1}$ до v_γ является простым циклом.

Т20.5. Очевидно, что для любой вершины самой дальней от нее является какая-то висячая вершина. Поэтому после удаления всех висячих вершин дерева G_1 вместе с выходящими из них ребрами для каждой вершины v получившегося дерева G_2 новое значение r(v) будет ровно на 1 меньше старого. Это означает, что центры деревьев G_1 и G_2 совпадают. Подобным образом перейдем от дерева G_2 к дереву G_3 с тем же центром и т. д. Если процесс закончится в тривиальном дереве, то исходное дерево имеет центр, состоящий из одной вершины. Если процесс закончится в дереве, содержащем две вершины, то исходное дерево имеет центр, состоящий из двух смежных вершин.

Глава 21

Транспортные задачи по критериям стоимости и времени: общая постановка

Пусть имеется m пунктов $A_1, \ldots, A_m$ производства однородной продукции, причем объем производства в пункте A_i равен a_i ед., $i = 1, \ldots, m$. Произведенная продукция потребляется в пунктах $B_1, \ldots, B_n$ и потребность в ней в пункте B_k составляет b_k ед., $к = 1, \ldots, n$. Известны стоимости (тарифы) c_{ik} и времена t_{ik} перевозок из A_i в B_k, причем предполагается, что транспортные расходы линейно зависят от объемов перевозок, а времена t_{ik} вообще от них не зависят, Требуется составить план перевозок из пунктов производства в пункты потребления, чтобы удовлетворить все потребности, не допустить затоваривания и минимизировать либо стоимость перевозок, либо их время.

Построим математические модели этих задач. Обозначим через x_{ik} ед. объем перевозок из A_i в B_k. Так как затоваривание исключается, то $x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = a_i$, $i = 1, \ldots, m$ (это — ограничения по запасам). Так как весь спрос должен быть удовлетворен полностью, то $x_{1k} + x_{2k} + \ldots + x_{mk} = b_k$, $к = 1, \ldots, n$ (это — ограничения по спросу). В матричном виде эти ограничения будут выглядеть так:

$$MX = D, \quad X \geq 0, \tag{21.1}$$

где $X^{\mathrm{T}} = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mn})$, $D' = (a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$,

$$M = \left(\begin{array}{cccc} 1\ 1 \ldots 1 & 0\ 0 \ldots 0 & \ldots & 0 \ldots 0 \\ 0\ 0 \ldots 0 & 1\ 1 \ldots 1 & \ldots & 0\ 0 \ldots 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0\ 0 \ldots 0 & 0\ 0 \ldots 0 & \ldots & 1\ 1 \ldots 1 \\ 1\ 0 \ldots 0 & 1\ 0 \ldots 0 & \ldots & 1\ 0 \ldots 0 \\ 0\ 1 \ldots 0 & 0\ 1 \ldots 0 & \ldots & 0\ 1 \ldots 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \underbrace{0\ 0 \ldots 1}_{n} & \underbrace{0\ 0 \ldots 1}_{n} & \ldots & \underbrace{0\ 0 \ldots 1}_{n} \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \end{array}$$

Условимся столбцы матрицы Л/ нумеровать парой индексов в том же порядке, что и переменные в векторе X^{T}; будем при этом говорить, что столбец M_{ik} соответствует переменной x_{ik}. Очевидно, столбец $M_{ik} \in R^{m+n}$ имеет следующий вид:

$$
\begin{array}{cl}
\left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right) &
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{(/-я строка)} \\ \\ \\ \\ (m+к)\text{-я строка} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

здесь номера координат, равных единице, равны соответственно i и $m+к$. Целевая функция / по критерию стоимости будет равна $\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} c_{ik}x_{ik}$ • Так как все перевозки заканчиваются в момент, когда кончается самая длительная из всех перевозок, то целевая функция / по критерию времени должна равняться максимальному из всех времен, которые были потрачены на перевозки, т. е. $f = \max t_{ik}$,где максимум берется только из тех t_{ik}, для которых соответствующие объемы перевозок x_{ik} отличны от нуля.

В итоге имеем две транспортные задачи:

$$
f(X^{\mathrm{T}}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} c_{ik}x_{ik} \to \min
$$

$$
\begin{cases} MX = D \\ X \geq 0 \end{cases} \tag{21.2}
$$

— по критерию стоимости, и

$$
f(X^{\mathrm{T}}) = \max_{x_{ik} > 0} t_{ik} \to \min
$$

$$
\begin{cases} MX = D \\ X \geq 0 \end{cases} \tag{21.3}
$$

— по критерию времени.

Очевидно, задача (21.2) является частным случаем задачи ЛП, и к ней применим симплекс-метод. Однако специфическая структура ее многогранника планов позволяет упростить общий метод решения и ускорить получение оптимальных планов. Задача (21.3) не является задачей ЛП и будет решена средствами Mathcad в *гл. 24.*

Теорема **21.1.** Множество планов (21.1) не пусто, если и только если общая сумма произведенной продукции (или общая сумма запасов) будет равна общей сумме потребления (или общей сумме спроса на эту продукцию):

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{k=1}^{n} b_k \tag{21.4}$$

Доказательство теоремы дано в задаче T21.1.

В дальнейшем, если не оговорено особо, предполагается выполнимость соотношения (21.4).

Задачи для самостоятельного решения

T21.1. Доказать теорему 21.1.

T21.2. Если соотношение (21.4) нарушается, то соответствующая транспортная задача называется открытой (в противном случае она называется закрытой). Как преобразовать открытую транспортную задачу в закрытую?

T21.3. Доказать, что в матрице M строки линейно зависимы.

T21.4. Доказать, что в матрице M любые $m + n - 1$ строк линейно независимы.

Ответы, указания, решения

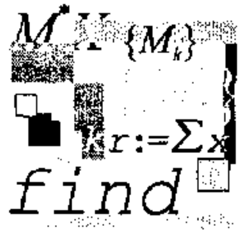
T21.1. Для доказательства необходимости достаточно сложить почленно все ограничения по запасам и сложить почленно все ограничения по спросу, затем сравнить левые части полученных равенств. Для доказательства достаточности обозначим через B суммы в (21.4). Тогда набор значений переменных $x_{ik} = \frac{a_i b_k}{B}$, $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$, будет планом задачи (21.2). (Это проверяется непосредственной подстановкой значений x_{ik} в (21.1).)

T21.2. Предположим, что $\sum^{m} a_i - \sum^{n} b_k = B > 0$. Тогда в математическую модель следует добавить $(n + 1)$-й фиктивный пункт потребления B_{n+1}, положив в нем потребность продукции равной B, а все стоимости $c_{j,n+1}$, $j = 1, \ldots, m$, на доставку — нулевыми. Таким образом, открытая модель преобразуется в закрытую без изменения целевой функции. Аналогично поступают и в случае положительности разности $\sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{i=1}^{m} a_i$.

T21.3. Указание: проверить, что нулевая вектор-строка из пространства R^{mn} есть ненулевая линейная комбинация строк матрицы M с коэффициентами $1, 1, \ldots, 1, -1, -1, \ldots, -1$ (здесь первые m коэффициентов равны 1, а последние n коэффициентов равны -1).

T21.4. Указание: вычеркнуть для определенности последнюю строку матрицы M и образовать новую матрицу N, состоящую из столбцов полученной матрицы, соответствующих переменным $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn}$, $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1,n-1}$; убедиться, что строки в N образуют лестничную систему векторов, и дальше воспользоваться следствием 5.7 и задачами T2.3, T5.4.

Глава 22



Опорные планы транспортных задач

Пусть $\alpha = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, ..., \alpha_{mn}) \in R^{mn}$ — некоторый план задачи (21.2) или (21.3). Графом $T(\alpha)$, индуцированным планом α, назовем двудольный неориентированный граф с долями $A = \{A_1, \ldots, A_m\}$ и $B = \{B_1, \ldots, B_n\}$, в котором пара $\{A_i, B_k\}$ — ребро A_iB_k, если и только если $\alpha_{ik} > 0$.

Теорема 22.1. План α является опорным, если и только если индуцированный граф $T(\alpha)$ является лесом.

Доказательство. Воспользуемся леммой 16.1, согласно которой план α является опорным, если и только если его положительные координаты соответствуют линейно независимой системе столбцов матрицы M.

Предположив вначале, что $T(\alpha)$ не является лесом, т. е. содержит некоторый простой цикл $A_{i_1}B_{k_1}$, $B_{k_1}A_{i_2}$, $A_{i_2}B_{k_2}$, ..., $A_{i_r}B_{k_r}$, $B_{k_r}A_{i_1}$. Из строения столбцов матрицы M, соответствующих ребрам этого цикла, следует, что $M_{i_1k_1} - M_{i_2k_1} + M_{i_2k_2} - \ldots + M_{i_rk_r} - M_{i_1k_r}$ равно нулевому вектору-столбцу из R^{m+n}, что и означает линейную зависимость этих столбцов. Но тогда и вся система столбцов, соответствующих положительным координатам плана α, будет линейно зависимой (теорема 2.1).

Предположим теперь, что $T(\alpha)$ является лесом, но система столбцов, соответствующая ребрам графа $T(\alpha)$, линейно зависима. Тогда нулевой вектор-столбец $\bar{0} \in R^{m+n}$ представим в виде ненулевой комбинации этих столбцов:

$$\vec{0} = \lambda_{i_1k_1} M_{i_1k_1} + \ldots + \lambda_{i_sk_s} M_{i_sk_s}. \tag{22.1}$$

Так как $T(\alpha)$ — лес, то из леммы 20.2 следует, что найдется некоторое висячее ребро $A_{i_1}B_{k_1}$ с висячей вершиной, скажем A_{i_1}. Но тогда из всех столбцов $M_{i_1k_1}, \ldots, M_{i_sk_s}$ только в столбце $M_{i_1k_1}$ i_1-я координата будет равна единице. Поэтому равенство (22.1) возможно, только если $\lambda_{i_1k_1} = 0$. Удалим из $T(\alpha)$ вершину A_{i_1} вместе с выходящим из нее ребром. Во вновь полученном графе, являющемся лесом (см. задачу Т20.2) опять найдется висячее ребро, скажем $A_{i_2}B_{k_2}$. По аналогии с предыдущим затем показывается, что $\lambda_{i_2k_2} = 0$. Продолжая этот процесс, приходим к заключению, что все коэффициенты в (22.1) нулевые. Получено противоречие.

Следствие 22.1. Любой опорный план задачи (21.2) или (21.3) содержит не более $m+n-1$ ненулевых координат.

Доказательство см. в задаче Т22.2.

Теорема 22.1 порождает несколько алгоритмов построения опорного плана транспортной задачи. Приведем один из них.

Алгоритм построения начального опорного плана

- Шаг 0. Считаем все перевозки α_{ik} равными 0, т. е. точку $\alpha \in Af^{mn}$ — нулевой точкой. Строим двудольный граф $И = T(\alpha)$, в котором отсутствуют ребра и доля A состоит из вершин $A_1,..., A_m$, а доля В— из вершин B_1, ... B_n. Вершинам A_i и B_k графа H припишем числа a_i и b_k, обозначаемые $d(A_i)$ и $d(B_k)$ соответственно, $i = 1, ..., m$, $k = 1, ..., n$. Эти числа назовем степенями вершин.
- Шаг r ($r \geq 1$). Среди всех пар вершин графа H с ненулевыми степенями выберем пару $\{A_i, B_k\}$, которой соответствует минимальный тариф c_{ik}, если решается задача (21.2) или минимальное время t_{ik}, если решается задача (21.3). Добавим к H ребро A_iB_k, положив α_{ik} равным $m = \min\{d(A_i), d(B_k)\}$. Изменим степени вершин A_i и B_k, положив их соответственно равными $d(A_i) - m$ и $d(B_k) - m$. Перейдем к следующему шагу.

Алгоритм завершает работу, когда хотя бы в одной из долей графа H степени всех вершин станут равными нулю.

Следствие 22.2. Точка а е Af^{mn}, которую строит алгоритм, является опорным планом задач (21.2), (21.3).

Доказательство. Первоначально суммы степеней вершин долей A и B равны между собой ввиду (21.4). Затем на каждом шаге алгоритма эти суммы уменьшаются на одинаковую величину. По завершению алгоритма сумма степеней вершин хотя бы одной из долей A, B должна быть нулевой. Следовательно, таковой будет и сумма степеней вершин другой доли. Это означает выполнимость ограничений по запасам и спросу для построенной алгоритмом точки а. Таким образом, а — план.

Предположим, что индуцированный планом а граф $T(\alpha)$,— а он как раз совпадает с графом Я, построенным алгоритмом, — содержит некоторый простой цикл A_1B_1, B_1A_2, $A_2B_2,\dots,A_rB_r$, B_rA_1. Так как в цикле все ребра равноправны, то без ограничения общности будем считать, что ребро A_1B_1 появилось в графе $T(\alpha)$ раньше других ребер этого цикла на некотором шаге алгоритма. Тогда после этого шага степень по крайней мере одной из вершин A_1,$B\backslash$ станет равной нулю. А это означает, что на последующих шагах ни одно из добавляемых ребер уже не может быть смежным этой вершине, т. е. появление по крайней мере одного из ребер $B\backslash A_2$,

B_rA_1 невозможно. Противоречие. Итак, $T(\alpha)$ является лесом и, следовательно, по теореме 22.1 а — опорный план.

Алгоритм построения опорного плана, приведенный выше, называется методом минимального элемента.

Пример

Пусть имеется 3 пункта производства и 4 пункта потребления, причем $a_1=100$, $a_2=150$, $a_3 = 50$, $b_1 = 75$, $b_2 = 80$, $b_3 = 60$, $b_4 = 85$. Дана матрица $C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}$,

в которой на позиции (i, k) находится величина стоимости перевозки единицы продукции из A в B_k. На рис. 22.1 показана последовательность шагов алгоритма, строящего опорный план a (0, 5, 60, 35, 75, 75, 0 ,0 ,0, 0, 0, 50) для данной транспортной задачи;

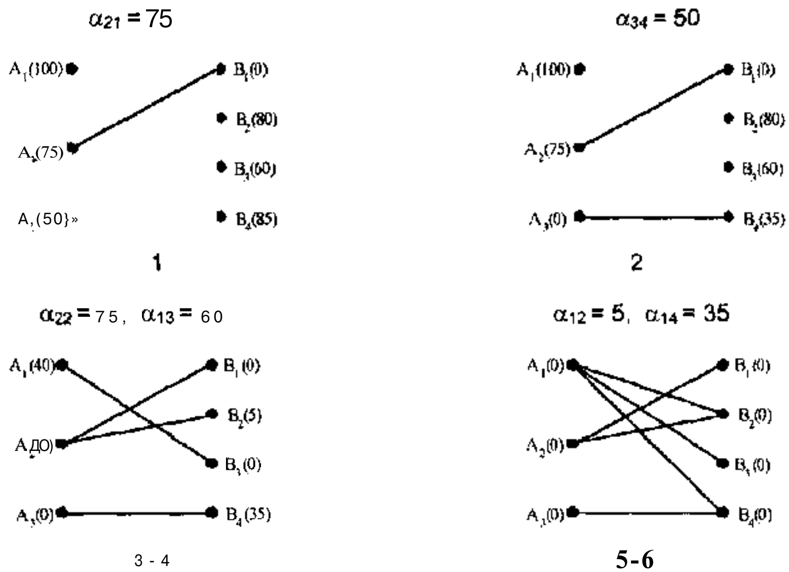


Рис. 22.1. Пример алгоритма построения опорного плана

Задачи для самостоятельного решения

Т22.1. Рассмотрим алгоритм 2 построения плана транспортной задачи, называемый методом северо-западного угла, который отличается от алгоритма 1 тем, что на r-м шаге среди всех пар вершин графа $И$ с ненулевыми степенями выбирается пара с наименьшими значениями i и k. Доказать, что алгоритм 2 строит опорный план задач (21.2)и(21.3).

Т22.2. Доказать следствие 22.2.

П22.1. Построить методом северо-западного угла опорный план для примера, рассмотренного в данном параграфе.

П22.2. Пусть имеются 3 пункта производства и 4 пункта потребления, причем $a_1 = 3$, $a_2 = 6, a_3 = 5$, $b_1 = 5$, $b_2 = 4$, $b_3 = 2, b_4 = 3$. Матрица $C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ задает стоимости перевозок единицы продукции из A_j в B_k. Построить методом северо-западного угла опорный план a и граф $T(\alpha)$.

Ответы, указания, решения

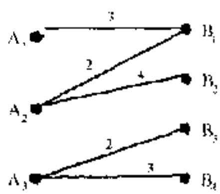
Т22.1. Указание: доказательство совпадает с доказательством следствия 22.2.

Т22.2. Указание: воспользоваться теоремой 22.1 и теоремой 20.2.

П22.1. Ответ: a =(75, 25, 0, 0, 0, 55, 60, 35, 0, 0, 0, 50).

П22.2. Ответ: a =(3, 0, 0, 0, 2, 4, 0, 0, 0, 0, 2, 3)

$T(\alpha)=$



Глава 23

Оптимальные планы транспортных задач по критерию стоимости

Зафиксируем некоторый набор констант $p_1, \ldots, p_m$, $q_1, \ldots, q_n$ и обозначим: $\bar{c}_{ik} = p_i + q_k$, $\bar{f}(X') = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\bar{c}_{ik}x_{ik}$.

Лемма 23.1. Функция $\bar{f}$ постоянна на множестве планов задачи (21.2).

Доказательство леммы дано в задаче Т23.1.

Теорема 23.1. Если для любых i, κ верно $\bar{c}_{ik} \le c_{ik}$, причем равенство достигается всякий раз, когда A_iB_k —ребро в индуцированном графе Да), то план а задачи (21.2) оптимален.

Доказательство. Пусть для плана а выполняются условия теоремы. Рассмотрим произвольный план р. Поскольку все координаты в β неотрицательны и $c_{ik} \geq \bar{c}_{ik}$, $i = 1, \ldots, m$, $\kappa = 1, \ldots, n$, то $f(\beta) \geq \bar{f}(\beta)$. Кроме того, $\bar{f}(\beta) = \bar{f}(\alpha)$ в силу леммы 23.1. Отсюда имеем:

$$\text{AP)} \geq \bar{f}(\beta) = \bar{f}(\text{a}) = \sum^{m}\sum^{n}\bar{c}_{ik}\alpha_{ik} = \sum\bar{c}_{ik}\alpha_{ik},$$

где последняя сумма берется только по положительным координатам плана а. Но $\alpha_{ik} > 0$, если и только если A_iB_k является ребром в $T(\alpha)$. Поэтому

$$\sum_{\alpha_{ik}>0}\bar{c}_{ik}\alpha_{ik} = \sum_{\alpha_{ik}>0}c_{ik}\alpha_{ik} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}c_{ik}\alpha_{ik} = f(\alpha)$$

Итак, доказано, что $f(\beta) \geq f(\alpha)$ для любого плана β, откуда и следует оптимальность плана а. Теорема доказана.

Опорный план а транспортной задачи (21.2) называется невырожденным, если индуцированный граф Да) является деревом. В противном случае план а называется вырожденным. В этом случае граф Да) является лесом, состоящим не менее чем из двух деревьев. Превратим граф Да) в дерево $\tilde{T}(\alpha)$ добавлением дополнительных ребер. (Заметим, что дерево $\tilde{T}(\alpha)$ по лесу Да) определяется неоднозначно.) Транспортная задача (21.2) называется невырожденной, если каждый опорный план ее невырожденный.

Теорема 23.2. Пусть а — опорный план транспортной задачи (21.2) и для каждого ребра A_iB_k дерева $\tilde{T}(\alpha)$ верно равенство $\bar{c}_{ik} = c_{ik}$. Предположим, что для некоторой пары индексов t $u]$ выполняется неравенство $\bar{c}_{ij} > c_{ij}$. Тогда существует такой опорный план β задачи (21.2), что $f(\beta) \le f(\alpha)$, причем если α — невырожденный план, то $f(\beta) < f(\alpha)$.

Доказательство. Пусть, к примеру, $\bar{c}_{11} > c_{11}$. Согласно условию, A_1B_1 не является ребром в дереве $\tilde{T}(\alpha)$. Обозначим через $И$ граф, полученный из $\tilde{T}(\alpha)$ добавлением ребра A_1B_1. Из теорем 20.2 и 20.3 следует, что граф $И$ содержит единственный цикл, и число ребер в этом цикле четное. Без потери общности будем считать для упрощения индексации, что цикл имеет следующий вид:

$$A_1B_1,\ B_1A_2,\ A_2B_2,\ B_2A_3\ .\ \mathrm{B},\ \ {}_1A_r,\ A_rB_r,\ B_rA_1 \tag{23.1}$$

Ребрам цикла, стоящим на четных позициях, соответствуют координаты $\alpha_{21}, \alpha_{32}, \ldots, \alpha_{r,r-1}, \alpha_{1r}$. Обозначим через X наименьшую из этих координат и осуществим перераспределение перевозок по циклу (23.1), сформировав новую точку $\mathrm{P} = (\beta_{11}, \beta_{12}, \ldots, \beta_{mn}) \in Af^{mn}$:

$$\beta_{21} = \alpha_{21} - \lambda,\ \beta_{32} = \alpha_{32} - \lambda,\ \ldots,\ \beta_{r,r\ 1} = \alpha_{r,r\ 1} - \lambda,\ \beta_{1r} = \alpha_{1r} - \lambda, \text{рц}\ = \alpha_{11} + X,$$

$$\beta_{22} = \alpha_{22} + X,\ \ldots,\ \beta_{rr} = \alpha_{rr} + \lambda,$$

а остальные координаты точки β равны соответствующим координатам точки а. Ограничения по запасам и спросу для точки β выполняются благодаря чередованию прибавлений и вычитаний X вдоль цикла (23.1). Поэтому β — план задачи (21.2). Граф $T(\beta)$ получается из графа //удалением тех ребер на четных местах цикла, которые соответствуют координатам точки а, равным λ, и тех ребер, которые соответствуют координатам точки а, равным нулю. Но граф $И$ содержит единственный цикл. Поэтому $T(\beta)$ — граф без циклов и, следовательно, согласно теореме 22.1, β — опорный план. Сравним теперь значения $f(\alpha)$ и $f(\beta)$, не забывая при этом, что каждой положительной координате плана а соответствует некоторое ребро цикла (23.1):

$$f(\beta) - f(\alpha) = \lambda(c_{11} + c_{22} + \ \ldots, + \ c_{rr}) - \lambda\,(c_{21} c_{32} + \cdots + \ c_{r,r\ 1} + \ c_{1r}) \ =$$

$$= \lambda(c_{11} + \bar{c}_{22} + \ldots + \bar{c}_{rr}) - (\bar{c}_{21}\ \ + \bar{c}_{32} + \ldots \bar{c}_{r,r-1} + \bar{c}_{1r}) =$$

$$= \lambda(c_{11} + (p_2 + q_2) + \ \ldots + (p_r + q_r)) - \lambda((p_2 + q_1) + (p_3 + q_2) + \ldots + (p_r + q_{r-1}) + (p_1 + q_r)) =$$

$$= \lambda(c_{11} + (p_2 + q_2) + \ldots + \ \ (p_r + q_r)) - \lambda(q_1 + (p_2 + q_2) + \ \ldots + (p_r + q_r) + P\backslash) =$$

$$= \lambda(c_{11} - (p_1\, q_1)) = \ \lambda(c_{11} - \ \bar{c}_{11}) \le 0, \text{ т. е. } f(\beta) \le f(\alpha).$$

Если а— невырожденный план, то все его координаты, соответствующие ребрам дерева $\tilde{T}(\alpha)$, которое совпадает с деревом $T(\alpha)$, положительны. Следовательно, $X > 0$, и $f(\beta) < f(\alpha)$. Теорема доказана.

Теоремы 23.1 и 23.2 являются теоретической основой следующего алгоритма построения оптимального опорного плана задачи (21.2).

Алгоритм

- Шаг 0. Строим начальный опорный план так, как это описано в *гл. 22.* Если индуцированный граф Да) не связен, то дополняем его ребрами до дерева $\tilde{T}(\alpha)$.
- Шаг r ($r \geq 1$).
  - Пусть к этому шагу уже построены опорный план а и граф $\tilde{T}(\alpha)$. Для каждого ребра A_iB_k дерева $\tilde{T}(\alpha)$ составим уравнение $p_i + q_k = c_{ik}$. Решим полученную систему из $m + n$-\ линейных уравнений, содержащих $m + n$ переменных, придав одной из переменных произвольное значение и определив значения остальных.
  - Если неравенство $p_i + q_j \leq c_{ij}$ выполняется для любой пары $\{A_i, B_j\}$, не являющейся ребром дерева $\tilde{T}(\alpha)$ то α — оптимальный план. Пусть найдется такая пара $\{A_i, B_j\}$, не являющаяся ребром, что $p_i + q_j = \bar{c}_{ij} > c_{ij}$. Добавляем к $\tilde{\Gamma}$(а) ребро A_iB_j, в получившемся графе H выделяем образовавшийся цикл и так производим перераспределение перевозок по циклу, как это делается при доказательстве теоремы 23.2. В результате получаем новый опорный план р, для которого $f(\beta) \leq f(\alpha)$. Граф $\tilde{T}(\beta)$ получаем удалением из цикла графа H одного из ребер, которым в плане β соответствует нулевая перевозка.
- Переходим к очередному шагу.

Предложенный выше алгоритм называется методом потенциалов, а величины p_i и q_j — потенциалами.

Из теоремы 23.2 следует, что метод потенциалов решает невырожденную транспортную задачу (22.1) за конечное число шагов (см. задачу Т23.2). Если же среди опорных планов задачи существуют вырожденные планы, то теоретически возможно зацикливание алгоритма. Существуют специальные методы борьбы с зацикливанием, однако при решении прикладных задач оно практически не происходит.

Пример

Рассмотрим пример из предыдущей главы, где был построен начальный опорный план а, индуцированный граф $T(\alpha)$ которого показан на рис. 23.1.

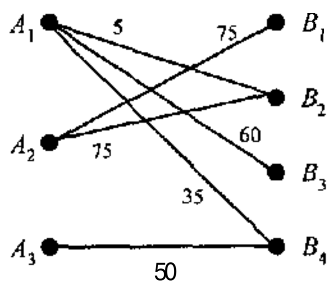


Рис. 23.1. Индуцированный граф $T(\alpha)$

В матрице C подчеркнем тарифы, соответствующие ребрам дерева $T(\alpha)$:

$$C=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc}6 & \underline{7} & \underline{3} & \underline{5}\\ \underline{1} & \underline{2} & 5 & 6\\ 3 & 10 & 20 & \underline{1}\end{array}\right)\begin{array}{c}p_1\\ p_2\\ p_3\end{array}\\ \begin{array}{cccc}q_1 & q_2 & q_3 & q_4\end{array}\end{array}$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases}p_1+q_2=7, & p_1+q_3=3, & p_1+q_4=5\\ p_2+q_1=1, & p_2+q_2=2, & p_3+q_4=1\end{cases}$$

Положив $p_1 = 0$, найдем значения остальных переменных; $q_2 = 7$, $q_3 = 3$, $q_4 = 5$, $p_2 = -5$, $p_3 = -4$, $q_1 = 6$. Составим матрицу $\overline{C}$, в которой на позиции (i, k) находится $\bar{c}_{ik}$:

$$\overline{C}=\begin{pmatrix}6 & 7 & 3 & 5\\ 1 & 2 & -2 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Сравнив C и $\overline{C}$, убеждаемся, что $\overline{C} \le C$. Отсюда следует оптимальность плана α.

Компьютерный раздел

Подпанель **Исчисление** (Calculus) (см. рис. 23.2) вызывается щелчком на кнопке $\int\frac{d}{dx}$ панели **Математика** (Math) и содержит 12 кнопок. Кнопка $\sum_{n=1}^{m}$ вызывает шаблон суммирования $\sum_{i=1}^{\blacksquare}\blacksquare$ последовательностей. На месте левой нижней метки вводится имя переменной (или индекса), по которой будет производиться суммирование; на месте правой нижней и верхней меток вводятся соответственно начальное и конечное значения этой переменной (или индекса). На месте метки справа от знака Z вводится аналитическое выражение общего члена последовательности, зависящего от переменной (или индекса), по которой будет производиться суммирование. Например, $\sum_{i=1}^{3} a_i$ будет означать сумму $a_1 + a_2 + a_3$, а $\sum_{i=1}^{3}(i+1)^2$ — сумму $2^2 + 3^2 + 4^2$.

Рис. 23.2. Подпанель **Исчисление**

Задачи для самостоятельного решения

Т23.1. Доказать лемму 23.1.

Т23.2. Доказать, что алгоритм, описанный в этом параграфе, строит оптимальный опорный план невырожденной транспортной задачи за конечное число шагов.

Т23.3. Доказать разрешимость системы уравнений, о которой говорится в п. 2 алгоритма.

Общая формулировка задач П23.1 –П23.10 в буквенных обозначениях

На участках Y_1, Y_2 и Y_3 площадью в S_1, S_2, S_3 га соответственно могут выращиваться сельхозкультуры K_1, K_2, K_3, K_4. Плановое задание предусматривает сбор этих культур в количествах b_1, b_2, b_3, b_4 тонн соответственно. Дана матрица

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix},$$

элемент c_{ij} которой равен прибыли в ден. ед. от реализации культуры K_j, выращенной на одном гектаре участка Y_i. Урожайность культур от участка не зависит и составляет P_1, P_2, P_3, P_4 ц/га соответственно для культур K_1, K_2, K_3, K_4. Требуется: составить математическую модель задачи, пользуясь которой можно найти план посева сельхозкультур, максимизирующий прибыль; найти такое распределение культур K_1, K_2, K_3, K_4 по участкам Y_1, Y_2, Y_3, при котором прибыль достигает максимального значения.

П23.1. Дано: $S_1=500$, $S_2=700$, $S_3=440$,
$b_1=800$, $b_2=1200$, $b_3=360$, $b_4=1600$,

$$C=\begin{pmatrix} 30 & 25 & 40 & 15 \\ 20 & 10 & 35 & 25 \\ 50 & 20 & 15 & 45 \end{pmatrix}$$

$P_1=25$, $P_2=15$, $P_3=30$, $P_4=40$.

П23.2. Дано: $S_1=380$, $S_2=520$, $S_3=750$,
$b_1=1400$, $b_2=1050$, $b_3=2880$, $b_4=800$,

$$C=\begin{pmatrix} 25 & 40 & 20 & 35 \\ 50 & 25 & 10 & 35 \\ 15 & 30 & 10 & 40 \end{pmatrix}$$

$P_1=40$, $P_2=25$, $P_3=60$, $P_4=20$.

П23.3. Дано: $S_1=250$, $S_2=800$, $S_3=520$,

$b_1=2000$, $b_2=1850$, $b_3=720$, $b_4=1250$,

$$C=\begin{pmatrix}45 & 15 & 30 & 25\\ 10 & 20 & 40 & 15\\ 25 & 35 & 50 & 20\end{pmatrix}$$

$P_1=40$, $P_2=50$, $P_3=36$, $P_4=25$.

П23.4. Дано: $S_1=520$, $S_2=700$, $S_3=430$,

$b_1=1295$, $b_2=960$, $b_3=1550$, $b_4=840$,

$$C=\begin{pmatrix}35 & 20 & 15 & 30\\ 45 & 15 & 25 & 50\\ 10 & 30 & 20 & 35\end{pmatrix}$$

$P_1=35$, $P_2=40$, $P_3=25$, $P_4=20$.

П23.5. Дано: $S_1=350$, $S_2=280$, $S_3=440$,

$b_1=1350$, $b_2=1050$, $b_3=360$, $b_4=1250$,

$$C=\begin{pmatrix}20 & 40 & 35 & 15\\ 25 & 10 & 30 & 20\\ 45 & 35 & 15 & 25\end{pmatrix}$$

$P_1=45$, $P_2=50$, $P_3=60$, $P_4=25$.

П23.6. Дано: $S_1=250$, $S_2=170$, $S_3=190$,

$b_1=500$, $b_2=1300$, $b_3=420$, $b_4=1850$,

$$C=\begin{pmatrix}50 & 15 & 40 & 15\\ 30 & 45 & 20 & 50\\ 25 & 50 & 10 & 15\end{pmatrix}$$

$P_1=50$, $P_2=65$, $P_3=70$, $P_4=74$.

П23.7. Дано: $S_1=760$, $S_2=820$, $S_3=640$,

$b_1=850$, $b_2=1150$, $b_3=960$, $b_4=1350$,

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 35 & 20 & 25 \\ 40 & 10 & 45 & 15 \\ 30 & 55 & 25 & 20 \end{pmatrix}$$

$P_1 = 17$, $P_2 = 23$, $P_3 = 30$, $P_4 = 15$.

П23.8. Дано: $S_1 = 270$, $S_2 = 520$, $S_3 = 220$,
$b_1 = 1300$, $b_2 = 1650$, $b_3 = 780$, $b_4 = 660$,

$$C = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 15 & 40 \\ 30 & 25 & 12 & 45 \\ 20 & 25 & 50 & 35 \end{pmatrix}$$

$P_1 = 65$, $P_2 = 33$, $P_3 = 39$, $P_4 = 60$.

П23.9. Дано: $S_1 = 620$, $S_2 = 460$, $S_3 = 370$,
$b_1 = 1800$, $b_2 = 940$, $b_3 = 1200$, $b_4 = 880$,

$$C = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 30 & 25 \\ 15 & 40 & 10 & 30 \\ 25 & 35 & 20 & 50 \end{pmatrix}$$

$P_1 = 40$, $P_2 = 47$, $P_3 = 30$, $P_4 = 22$.

П23.10. Дано: $S_1 = 440$, $S_2 = 380$, $S_3 = 320$,
$b_1 = 700$, $b_2 = 1600$, $b_3 = 1850$, $b_4 = 120$,

$$C = \begin{pmatrix} 25 & 40 & 45 & 15 \\ 35 & 20 & 15 & 30 \\ 20 & 10 & 50 & 25 \end{pmatrix}$$

$P_1 = 35$, $P_2 = 40$, $P_3 = 37$, $P_4 = 30$.

Общая формулировка задач П23.11 — П23.22 в буквенных обозначениях

Три роты солдат численностью в a_1, a_2, a_3 человек принимают участие в учебном разминировании минных полей $П_1, П_2, П_3, П_4$, для чего необходимо выделить соответственно b_1, b_2, b_3, b_4 человек. Производительность труда солдат зависит от вида минного поля, а также роты, из которой они выделяются для разминирования. Дана матрица С, в которой на позиции (i, k) указано число мин с минного поля $П_k$, которое может разминировать один солдат из i-й роты за смену. Требуется: распределить солдат по минным полям так, чтобы за смену было разминировано максимально возможное количество мин.

П23.11. Дано: $a_1 = 40$, $a_2 = 30$, $a_3 = 25$, $b_1 = 15$, $b_2 = 35$, $b_3 = 21$, $b_4 = 24$,

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 5 \\ 6 & 8 & 5 & 7 \\ 9 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

П23.12. Дано: $a_1 = 35$, $a_2 = 40$, $a_3 = 55$, $b_1 = 60$, $b_2 = 25$, $b_3 = 30$, $b_4 = 15$,

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 9 \\ 4 & 6 & 7 & 5 \\ 8 & 4 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

П23.13. Дано: $a_1 = 25$, $a_2 = 30$, $a_3 = 35$, $b_1 = 22$, $b_2 = 15$, $b_3 = 23$, $b_4 = 30$,

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 & 6 \\ 7 & 9 & 8 & 6 \\ 9 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

П23.14. Дано: $a_1 = 20$, $a_2 = 45$, $a_3 = 25$, $b_1 = 30$, $b_2 = 14$, $b_3 = 26$, $b_4 = 20$,

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 & 5 \\ 9 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

П23.15. Дано: $a_1 = 45$, $a_2 = 15$, $a_3 = 30$, $b_1 = 20$, $b_2 = 22$, $b_3 = 18$, $b_4 = 30$,

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 4 & 9 \\ 7 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

П23.16. Дано: $a_1 = 30$, $a_2 = 25$, $a_3 = 45$, $b_1 = 32$, $b_2 = 24$, $b_3 = 28$, $b_4 = 16$,

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 & 4 \\ 6 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

П23.17. Дано: $a_1 = 25$, $a_2 = 35$, $a_3 = 50$, $b_1 = 30$, $b_2 = 18$, $b_3 = 40$, $b_4 = 22$,

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 & 8 \\ 5 & 9 & 8 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

П23.18. Дано: $a_1 = 30$, $a_2 = 40$, $a_3 = 20$. $b_1 = 14$, $b_2 = 26$, $b_3 = 16$, $b_4 = 34$,

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 & 7 \\ 9 & 8 & 5 & 9 \\ 7 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

П23.19. Дано: $a_1=35$, $a_2=25$, $a_3=40$, $b_1=28$, $b_2=15$, $b_3=37$, $b_4=20$,

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 6 & 5 \\ 7 & 5 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

П23.20. Дано: $a_1 = 20$, $a_2 = 35$, $a_3 = 55$, $b_1 = 36$, $b_2 = 32$, $b_3 = 24$, $b_4 = 18$,

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 9 & 8 \\ 6 & 4 & 8 & 6 \\ 9 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

П23.21. Дано: $S_1 = 300$, $S_2 = 400$, $S_3 = 500$, $b_1 = 600$, $b_2 = 1500$, $b_3 = 225$, $b_4 = 1250$,

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 50 & 24 & 10 \\ 25 & 40 & 10 & 20 \\ 30 & 15 & 20 & 15 \end{pmatrix},$$

$P_1 = 20$, $P_2 = 30$, $P_3 = 15$, $P_4 = 50$.

П23.22. Найти оптимальный план для задачи П22.2, использовав полученный ранее опорный план а и граф Да).

Общая формулировка задач К23.1 –К23.10

Отделы кредитования коммерческого банка K_1, K_2, K_3, K_4 выделяют кредиты фирмам Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4. Дана матрица P, в которой на позиции (i, k) указана процентная ставка, под которую /-й отдел может выделить деньги k-й фирме. Даны также векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$: i-я координата вектора $\vec{a}$ равна сумме кредита, который может выделить отдел K_i, k-я координата вектора $\vec{b}$ равна потребности в кредитах фирмы Φ_k. Найти оптимальное распределение банковских кредитов между фирмами, максимизирующее общую прибыль банка при дополнительном условии, что спрос фирм Φ_1 и Φ_3 должен быть удовлетворен полностью.

К23.1.

Дано: $P = \begin{pmatrix} 17 & 15 & 19 & 16 \\ 20 & \mathbf{19} & 18 & 21 \\ 18 & 17 & 16 & 19 \\ 19 & 14 & 17 & \backslash\text{Ъ} \end{pmatrix}$, $\vec{a} = (150, 188, 102, 143)$, $\vec{b} = (103, 207, 255, 100)$

К23.2.

Дано: $P=\begin{pmatrix}7&5&9&6\\2&9&8&2\\8&7&6&9\\9&4&7&5\end{pmatrix}$, $\vec{a}=(50,88,12,43)$ $\vec{b}=(13,27,55,100)$

К23.3.

Дано: $P=\begin{pmatrix}23&25&29&26\\21&29&28&22\\28&27&26&29\\29&24&27&25\end{pmatrix}$, $\vec{a}=(250,108,112,133)$ $\vec{b}=(123,167,105,200)$

К23.4.

Дано: $P=\begin{pmatrix}13&35&9&36\\11&39&8&32\\18&17&6&39\\19&14&7&35\end{pmatrix}$, $\vec{a}=(150,56,52,93)$ $\vec{b}=(155,134,165,220)$

К23.5.

Дано: $P=\begin{pmatrix}7&15&19&6\\2&13&23&8\\8&13&16&9\\9&13&15&8\end{pmatrix}$, $\vec{a}=(50,58,92,33)$ $\vec{b}=(103,107,85,130)$

К23.6.

Дано: $P=\begin{pmatrix}34&42&31&21\\11&12&23&18\\31&15&22&16\\14&14&27&14\end{pmatrix}$, $\vec{a}=(350,348,234,145)$ $\vec{b}=(156,100,142,245)$

К23.7.

Дано: $P=\begin{pmatrix}100&9&37&72\\72&49&42&63\\32&34&29&57\\63&28&25&46\end{pmatrix}$, $\vec{a}=(450,333,154,233)$ $\vec{b}=(213,177,132,253)$

К23.8.

$$\text{Дано: } P=\begin{pmatrix}83&42&9&56\\53&28&8&32\\34&42&6&39\\39&9&7&15\end{pmatrix},\quad \vec{a}=(130,142,154,152),\ \vec{b}=(127,153,245,178)$$

К23.9.

$$\text{Дано: } P=\begin{pmatrix}8&13&9&6\\2&16&8&5\\7&8&14&9\\11&4&18&3\end{pmatrix},\quad \vec{a}=(170,124,96,75),\ \vec{b}=(184,99,156,75)$$

К23.10.

$$\text{Дано: } P=\begin{pmatrix}65&35&45&53\\45&54&53&43\\32&23&27&32\\23&37&72&28\end{pmatrix},\quad \vec{a}=(450,228,178,256),\ \vec{b}=(84,147,147,265)$$

К23.11. Имеется три пункта производства и 5 пунктов потребления. Объемы производства в пунктах A_1, A_2, A_3 равны соответственно 167, 93, 150 ед., а потребность в производимой продукции в пунктах B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 равна соответственно 92, 68, 80, 75, 95 ед. Дана матрица

$$C=\begin{pmatrix}5.4&3.3&2&4.1&8.2\\7.7&6.7&5.9&3&1\\8&9.7&4.5&5&2.5\end{pmatrix},$$

на позиции (i, k) которой находится число, равное стоимости перевозки одной единицы продукции из A_i в B_k. Требуется найти оптимальный план перевозок, минимизирующий суммарную их стоимость при следующих дополнительных условиях: из A_1 в B_1 должно быть перевезено не менее 50 ед. груза продукции, из A_3 в B_5 — не менее 60 ед. продукции, а из A_2 в B_4 — не более 40 ед. продукции.

К23.12. На четырех ткацких станках с объемом рабочего времени 200, 300, 250 и 400 станко-часов за один час можно изготовить соответственно 260, 200, 340 и 500 м ткани всех трех видов. Составить оптимальную программу загрузки станков, если прибыль в ден. ед. от реализации 1 м ткани i-го вида при ее изготовлении на k-м станке приведена на позиции (i, k) матрицы

$$C=\begin{pmatrix}2.5&2.2&0&2.8\\1.6&1.0&1.9&1.2\\0.8&1.0&0.6&0.9\end{pmatrix},$$

а суммарная потребность в ткани каждого вида равна 200, 100, 150 тыс. м, причем ткань первого вида не может производиться на третьем станке.

Ответы, указания, решения

Т23.1. Пусть $\alpha = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{mn})$ — произвольный план задачи (21.2). Тогда

$$\bar f(\alpha)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(p_i+q_k)\alpha_{ik}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}p_i\alpha_{ik}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}q_k\alpha_{ik}=$$

$$\sum_{i=1}^{m}p_i\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}+\sum_{k=1}^{n}q_k\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ik}=\sum_{i=1}^{m}p_i a_i+\sum_{k=1}^{n}q_k b_k,$$

т. е. величина $\bar f(\alpha)$ не зависит от выбранного плана α. Лемма доказана.

Т23.2. Полиэдр планов транспортной задачи (21.2) ограничен. Поэтому этот полиэдр является многогранником планов с конечным числом вершин (теоремы 14.1. 14.2). Следовательно, конечно и множество опорных планов задачи (21.2) (теорема **16.1).** Но алгоритм строит последовательность различных опорных планов, так как в них значения целевой функции убывает. Поэтому алгоритм завершит свою работу за конечное число шагов.

Т23.3. Если записать эту систему уравнений в матричном виде $Ny^{\mathrm{T}} = C$, где $y = (p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_n)$, то строки матрицы N есть не что иное, как столбцы матрицы M из главы 21, соответствующие ребрам дерева $T(\alpha)$. Эти столбцы — строки матрицы N — линейно независимы (см. доказательство достаточности теоремы 22.1). Поэтому элементарные преобразования строк матрицы N не могут привести к появлению нулевой строки (теорема 2.3. задача Т2.2). Следовательно, при решении системы $Ny^{\mathrm{T}} = C$ методом Гаусса противоречивые уравнения появиться не могут, откуда и следует ее разрешимость.

П23.21. Обозначим через x_{ij} площадь в га, которую предполагается занять на участке $У_i$ культурой K_j, а через f — суммарную прибыль. Установим, какую площадь должна занимать каждая культура на имеющейся общей посевной площади, составляющей 300 + 500 + 400 = 1200 га. С учетом планового задания и урожайности находим, что под культуру K_1 придется отвести 6000/20 = 300 га, под K_2 — 15 000/30 = 500 га, под K_3 — 2250 / 15 = 150 га, под K_4 — 1250 / 50 = 250 га. Так что всего потребуется 300 + 500+ 150 + 250 = 1200 га.

Построим математическую модель данной задачи. Сначала запишем целевую функцию

$$-f=-20x_{11}-50x_{12}-24x_{13}-10x_{14}-25x_{21}-40x_{22}-10x_{23}-$$
$$-20x_{24}-30x_{31}-15x_{32}-20x_{33}-15x_{34}\to\min$$

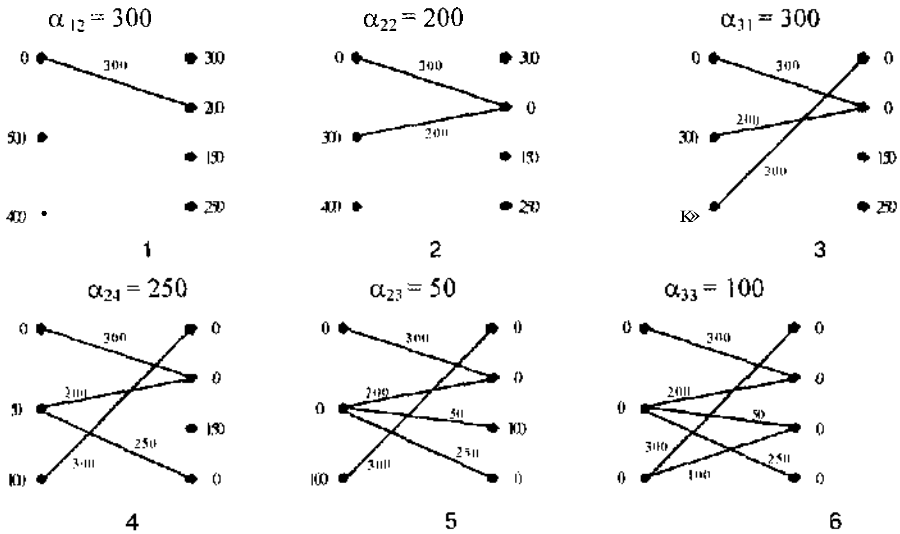
Здесь функция f взята со знаком минус, чтобы задачу на максимум свести к задаче минимизации. Условия полного использования имеющихся посевных площадей на всех участках выглядят так:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=300\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=500\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=400\end{cases}$$

Условия полной занятости всех площадей соответствующими культурами выглядят так:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=300 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=500 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=150 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=250 \end{cases}$$

Необходимо учесть и условия неотрицательности переменных $x_{ij} \geq 0$, $i=1,2,3$, $j = 1, 2, 3, 4$. Таким образом, получена закрытая транспортная задача (см. задачу Т21.2). Применим для ее решения алгоритм данной главы. Построим начальный опорный план, как это было описано в главе 22:



Итак, построен начальный опорный план α = (0, 300, 0, 0, 0, 200, 50, 250, 300, 0, 100, 0).

Планы транспортных задач удобно записывать в виде матрицы. Так, в данном случае

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 50 & 250 \\ 300 & 0 & 100 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дерево $T(\alpha)$, индуцированное планом а, изображено на рис. 23.3.

Исследуем план α на оптимальность. Для этого в матрице - C подчеркнем тарифы, соответствующие положительным координатам плана а:

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -20 & \underline{-50} & -24 & -10 \\ -25 & \underline{-40} & \underline{-10} & \underline{-20} \\ \underline{-30} & -15 & \underline{-20} & -15 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} q_1 & \quad q_2 & \quad q_3 & \quad q_4 \end{matrix} \end{array}$$

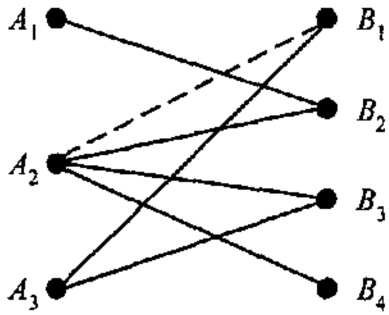


Рис. 23.3. Дерево $T(\alpha)$, индуцированное планом α

Составим систему уравнений (свободные члены этой системы соответствуют подчеркнутым элементам матрицы $-C$):

$$\begin{cases} p_1 + q_2 = -50, & p_2 + q_3 = -10, & p_3 + q_1 = -30, \\ p_2 + q_2 = -40, & p_2 + q_4 = -20, & p_3 + q_3 = -20, \end{cases}$$

Решим эту систему. Для этого надо произвольную переменную объявить свободной, положив ее равной нулю; тогда значения остальных переменных однозначно определяются из данной системы. Пусть, к примеру, $p_2=0$. Тогда $q_2=-40$, $q_3=-10$, $q_4=-20$, $p_1=-10$, $p_3=-10$, $q_1=-20$. Составим вспомогательную матрицу $\bar{C}$, в которой на позиции (i, k) находится элемент $\bar{c}_{ik} = p_i + q_k$:

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} -30 & -50 & -20 & -30 \\ -20 & -40 & -10 & -20 \\ -30 & -50 & -20 & -30 \end{pmatrix}.$$

Так как в этой матрице имеются элементы, которые превосходят соответствующие элементы матрицы $-C$ — это $\bar{c}_{21}$ и $\bar{c}_{23}$, то план а может быть улучшен. Выберем, к примеру, элемент $\bar{c}_{21}$. В этом случае надо добавить к дереву $T(\alpha)$ новое ребро A_2B_1 (на рис. 23.3 это ребро изображено пунктиром). В результате образуется цикл

$$A_2B_1,\ B_1A_3,\ A_3B_3,\ B_3A_2 \tag{23.2}$$

Вдоль этого цикла необходимо произвести максимально возможное перераспределение перевозки X. Величина этой перевозки определяется следующим образом. Сначала выписываются ребра цикла (23.2), стоящие на четных местах: B_1A_3, B_3A_2. Им соответствуют координаты α_{31}, α_{23} плана а. Тогда X равно минимальной из этих координат: $\lambda = \min\{\alpha_{31}, \alpha_{23}\} = 50$. Сама перевозка заключается в том, что от координат α_{31}, α_{23} вычитается величина X, а к координатам α_{21}, α_{33} добавляется λ (α_{21}, α_{33} соответствуют ребрам цикла (23.2), стоящим на нечетных местах). В результате будет получен новый опорный план

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 300 & 0 & 0 \\ 50 & 200 & 0 & 250 \\ 250 & 0 & 150 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом индуцированное им дерево $T(\beta)$ изображено на рис. 23.4.

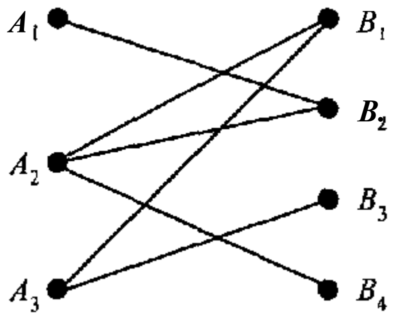


Рис. 23.4. Дерево T(p), индуцированное планом β

Далее все повторяется аналогично, только уже для плана р. В матрице - С подчеркнем тарифы, соответствующие положительным координатам плана р:

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}\begin{pmatrix} -20 & \underline{-50} & -24 & -10 \\ \underline{-25} & \underline{-40} & -10 & \underline{-20} \\ \underline{-30} & -15 & \underline{-20} & -15 \end{pmatrix}$$
$$\quad q_1 \quad\; q_2 \quad\; q_3 \quad\; q_4$$

Составим по этой матрице систему уравнений:

$$\begin{cases} p_1 + q_2 = -50, & p_3 + q_1 = -30, \\ p_2 + q_2 = -40, & p_3 + q_3 = -20, \\ p_2 + q_1 = -25, & p_2 + q_4 = -20. \end{cases}$$

Решим ее, положив $p_2 = 0$: $q_1 = -25$, $q_2 = -40$, $q_4 = -20$, $p_1 = -10$, $p_3 = -5$, $q_3 = -15$. Составим вспомогательную матрицу $\overline{C}$, состоящую из элементов $p_i + q_k$:

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} -35 & -50 & -25 & -30 \\ -25 & -40 & -15 & -20 \\ -30 & -45 & -20 & -25 \end{pmatrix}$$

Каждый элемент этой матрицы не превосходит соответствующего элемента матрицы $-C$. Следовательно, план β оптимален. Этому плану соответствует максимальная прибыль 39750 ден. ед. По оптимальному плану весь участок K, надо отвести под культуру K_2, на участке Y_2 под культуры K_1, K_2, K_4 надо отвести соответственно 50, 200, 250 га, и наконец, на участке Y_3 под культуры K_1 и K_3 надо отвести соответственно 250 и [50 га.

П23.22. Поскольку граф $T(\alpha)$ не является деревом, то план а вырожденный. Превратим Да) в связный граф $\tilde{T}(\alpha)$добавлением ребра A_2B_3(рис. 23.5).

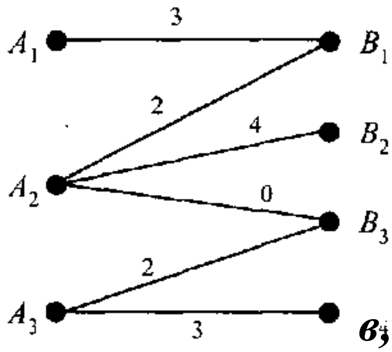


Рис. 23.5. Связный граф $\tilde{T}(\alpha)$

В матрице C подчеркнем тарифы, соответствующие ребрам дерева $\tilde{T}(\alpha)$

$$C=\begin{pmatrix} \underline{A} & 4 & 6 & 8 \\ \underline{2} & \underline{1} & \underline{3} & 9 \\ 1 & 5 & \underline{3} & \underline{1} \end{pmatrix}.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} p_1+q_1=4 \\ p_2+q_1=2 \\ p_2+q_2=1 \\ p_2+q_3=3 \\ p_3+q_3=3 \\ p_3+q_4=1. \end{cases}$$

Положив $p_2=0$, получим $p_1=2$, $p_3=0$, c/, $=2$, $q_2=1$, $q_3=3$, $q_4=1$. Вычислим матрицу

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Элемент $\bar{c}_{31} > c_{31}$, следовательно, построенный план неоптимален.

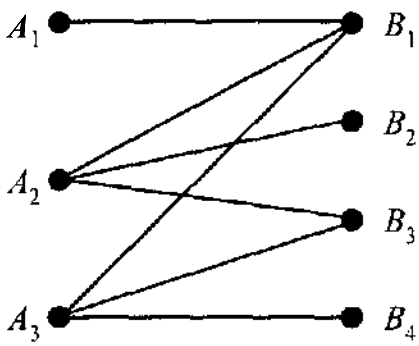


Рис. 26.6. Граф *H*

Добавив к графу $\tilde{T}(\alpha)$ ребро A_3B_1, получим граф H, изображенный на рис. 23.6, с циклом A_3B_1, B_1A_2, A_2B_3, B_3A_3. Первым в цикле считается добавленное ребро A_3B_1, а на четных позициях находятся ребра B_1A_2 и B_3A_3. Координаты плана α, соответствующие этим ребрам: 2, 2. Следовательно, $X = 2$.

Перераспределив перевозки по циклу, получим план β = (3, 0, 0, 0, 0, 4, 2, 0, 2, О, О, 3). Граф $\tilde{T}(\beta)$ получим, удалив из H любое ребро цикла, которому в плане соответствует нулевая координата, например ребро A_2B_1 (см. рис. 23.7).

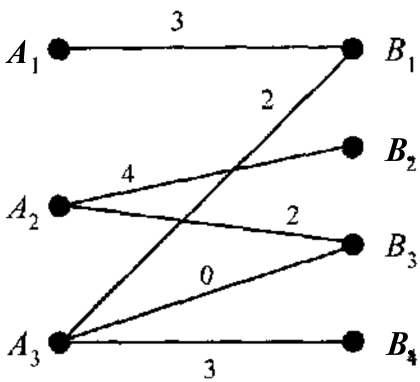


Рис. 23.7. Граф $\tilde{T}(\beta)$

В матрице C подчеркнем тарифы, соответствующие ребрам дерева $\tilde{T}(\beta)$:

$$C = \begin{pmatrix} \underline{4} & 4 & 6 & 8 \\ 2 & \underline{1} & \underline{3} & 9 \\ \underline{1} & 5 & \underline{3} & \underline{1} \end{pmatrix}.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} p_1 + q_1 = 4 \\ p_2 + q_2 = 1 \\ p_2 + q_3 = 3 \\ p_3 + q_1 = 1 \\ p_3 + q_3 = 3 \\ p_3 + q_4 = 1. \end{cases}$$

Пусть $p_3 = 0$, тогда $p_1 = 3$, $p_2 = 0$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1$, $q_3 = 3$, $q_4 = 1$. Вычислим матрицу $\bar{C} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Сравнив матрицы C и $\bar{C}$ убеждаемся, что для этих матриц выполняется соотношение $\bar{c}_{ij} \le c_{ij}$. Следовательно, план β оптимален.

К23.1. Ответы: оптимальный план в матричном виде равен

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 88 & 0 & 100 \\ 65 & 37 & 0 & 0 \\ 38 & 0 & 105 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом общая прибыль будет равна 10 928 ден. ед.

К23.11. Ответы: оптимальный план в матричном виде равен

$$\begin{pmatrix} 74 & 68 & 25 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & 0 & 40 & 35 \\ 0 & 0 & 55 & 35 & 60 \end{pmatrix},$$

а минимальная стоимость перевозок равна 15 469.

К23.12. Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad. Ввести исходные данные: матрицу с; вектор л, содержащий величины потребностей в тканях трех видов; вектор B, содержащий объемы рабочего времени станков; вектор D, содержащий производительности станков. Задать начальные значения переменных, целевую функцию, а так же сформировать два вспомогательных вектора IC и IR, все координаты которых равны единицам:

ORIGIN := 1 $m := rows(C)$ $n := cols(C)$ $i := 1;m$ $k := 1;n$

$X_{i,k} := 0$ $IC_i := 1$ $IR_k := 1$ $f(X) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} C_{i,k} \cdot X_{i,k}$.

Сформировать блок для решения транспортной задачи:

Given

$X \geq 0$ $X_{1,3} = 0$ $X \cdot IR \leq Л \cdot 1000$ $X^{T} \cdot IC = \overrightarrow{B \cdot D}$

$Y := maximize(f, X)$ $f(Y) =$

Определить оптимальный план распределения временного фонда рабочего времени по станкам: $Y^{<k>} := Y^{<k>} / D_k$ $Y =$

В результате будет получено следующее оптимальное распределение фонда рабочего времени: на четвертом станке все 400 часов необходимо изготавливать ткань первого вида, на третьем станке все 250 часов необходимо изготавливать ткань второго вида, на втором станке все 300 часов необходимо изготавливать ткань первого вида, а на первом станке 57.69 часов надо отвести на изготовление ткани второго вида и 142.31 часов — третьего вида. При этом максимальная прибыль будет равна 835 000 ден. ед.

Глава 24

Оптимальные планы транспортных задач по критерию времени

Обозначим через T матрицу размера $m \times n$, в которой на позиции (i, κ) находится величина t_{ik}. В дальнейшем считается, что матрица T положительная и выполняется соотношение (21.4).

Определение

Минимально возможное число r, при котором система

$$\begin{cases} MX = D \\ X \geq 0 \\ \sum\limits_{t_{ik} > r} x_{ik} = 0 \end{cases} \tag{24.1}$$

имеет решения, называется пороговым числом задачи (21.3). Запись $\sum\limits_{t_{ik} > r}$ означает суммирование по всем таким t_{ik}, которые превосходят r. Если таких t_{ik} не существует, то последнее уравнение в системе (24.1) опускается.

Если r — пороговое число задачи (21.3), то уравнение

$$\sum_{t_{ik} > r} x_{ik} = 0 \tag{24.2}$$

называется пороговым уравнением задачи (21.3). Заметим, что если t_1 и t_2 - разные элементы матрицы T и не существует такого значения $t_{ik} = a$, что $/, < a < t_2$, то уравнения $\sum\limits_{t_{ik} > t_1} x_{ik} = 0$ и $\sum\limits_{t_{ik} > a} x_{ik} = 0$ имеют одинаковые решения. Поэтому можно считать, что число уравнений вида (24.2) конечно и равно количеству различных элементов в матрице T, увеличенному на !. Если же в системе (24.1) r равно наибольшему элементу матрицы Г, то, согласно теореме 21.1, эта система имеет решение. Из всего сказанного следует, что пороговое число задачи (21.3) всегда существует.

Теорема 24.1. План **a** задачи (21.3) является оптимальным, если и только если a является решением порогового уравнения этой задачи.

Доказательство. Обозначим через r пороговое число задачи (21.3). Пусть $\alpha = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{mn})$ — оптимальный план этой задачи и Да) $= t_{rs}$. Из определения целевой функции/следует, что $\alpha_{ik} = 0$ всякий раз, когда $t_{ik} > t_{rs}$. Отсюда

$$\sum \alpha_{ik} = 0 \tag{24.3}$$

Но пороговое число r задачи (21.3) является минимальным числом, при котором существуют планы, удовлетворяющие (24.2). Поэтому $t_{rs} \geq r$.

Из определения порогового числа r также следует существование плана (3 $= (\beta_{11}, \beta_{12}, \ldots, \beta_{mn})$ задачи (21.3), удовлетворяющего (24.2), т. е.

$$\sum_{t_{ik} > r} \beta_{ik} = 0$$

Отсюда имеем;

$$t_{rs} = f(\alpha) \leq f(\beta) = \max_{\beta_{ik} > 0} t_{ik} \leq r,$$

т.е. $t_{rs} \leq r$. В результате доказано, что $t_{rs} = r$ и, следовательно, ввиду (24.3) план a удовлетворяет пороговому уравнению (24.2).

Предположим теперь обратное: некоторый план a удовлетворяет уравнению (24.2) и Да) $= t_{rs} = \max\limits_{\alpha_{ik} > 0} t_{ik}$. Поскольку $\alpha_{rs} > 0$, то $t_{rs} \leq r$ Если a не оптимален, то найдется такой план (3 задачи (21.3), что $f(\beta) = t_{lj} < t_{rs}$. Но тогда $\sum \beta_{ik} = 0$. Отсюда, по определению r, $r \leq t_{lj}$ Итак, $r \leq t_{lj} < t_{rs} \leq r$, что невозможно. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 24.1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 24.1. Задача (21.3) имеет оптимальные планы, а оптимальное значение ее целевой функции равно пороговому числу.

Алгоритм решения задачи

- Шаг 0. Переупорядочить координаты вектора X по невозрастанию соответствующих им величин t_{ik}. Вновь полученный вектор переменных обозначить через $y = (y_1, y_2, \ldots, y_s)$, где $s = m \cdot n$.

  Решить систему

  $$\begin{cases} MY = D \\ X \geq 0 \end{cases}$$

  Если система имеет решение, то перейти к следующему шагу.

❑ Шаг r ($r \geq 1$). Решить систему

$$\begin{cases} MX = D \\ X \geq 0 \\ \sum^{i} y_i = 0 \end{cases}$$

Если система имеет решение, то перейти к следующему шагу. В противном случае оптимальным планом задачи (21,3) будет решение системы, найденное на предыдущем шаге алгоритма.

Пример

Пусть

$T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $a_1 = 12$, $a_2 = 8$, $a_3 = 8$, $b_1 = 6$, $b_2 = 11$, $b_3 = 11$. Тогда $y^T = (y_1, y_2 \ldots y_9) = = (x_{33}, x_{31}, x_{32}, x_{22}, x_{11}, x_{13}, x_{21}, x_{12}, x_{23})$. На начальном шаге алгоритма решается система:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 12 \\ \text{[illegible]} \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 8 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 6 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 11 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 11 \\ x_{ik} \geq 0, \quad i = 1,2,3, \quad k = 1,2,3 \end{cases} \tag{24.4}$$

Ее решением является точка $\alpha_0 = (6, 6, 0, 0, 5, 3, 0, 0, 8)$, причем $f(\alpha_0) = 9$. На следующем шаге к системе (24.4) добавляется уравнение $y_1 = 0$, т.е. $x_{33} = 0$, и решением полученной системы будет точка $\alpha_1 = (6, 3, 3, 0, 0, 8, 0, 8, 0)$, $f(\alpha_1) = 6$. Далее уравнение $x_{33} = 0$ заменяется на уравнение $y_1 + y_2 = x_{33} + x_{31} = 0$. Решением новой системы будет та же точка α_1. На следующем шаге последнее уравнение заменяется на уравнение $y_1 + y_2 + y_3 = x_{33} + x_{31} + x_{32} = 0$. Полученная система не имеет решений, так как не может выполняться третье уравнение системы (24.4) $x_{33} + x_{31} + x_{32} = 8$. Следовательно, план α_1 –оптимальный для данной задачи.

Компьютерный раздел

Кнопка [while] подпанели **Программирование** (Programming) вызывает шаблон [while ▪ / ▪] оператора цикла с условием. На месте метки справа от *while* вводится логическое выражение цикла, а на месте нижней метки — блок операторов цикла (добавление меток в этом блоке осуществляется кнопкой $\boxed{\text{Add Line}}$ подпанели **Программирование** (Programming). Алгоритм работы оператора цикла с условием следующий. Вычисляется логическое выражение цикла и в случае его истинности выполняется блок операторов цикла. Это повторяется до того момента, как логическое выражение цикла примет ложное значение: в этом случае цикл завершает свою работу, блок операторов цикла пропускается и осуществляется переход к строке программного модуля, следующей за данным оператором цикла. Например, в результате выполнения программного модуля

```
c:=
    | s ← 0
    | л ← 3
    | while  л ≥ 1
    |     | s ← s + 1
    |     | л ← л - 1
    | s
```

переменная с примет значение 3.

Задачи для самостоятельного решения

Общая формулировка задач К24.1 - 24.10

Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$: i-я координата вектора $\vec{a}$ равна запасам груза /-го поставщика, k-я координата вектора $\vec{b}$ равна спросу в весовых единицах k-го потребителя груза. Дана также матрица 7', в которой на позиции (/, *к)* указано время доставки груза от /-го поставщика к k-му потребителю. Составить реализуемый за минимальное время план перевозок, при котором полностью удовлетворяется спрос потребителей.

К24.1.

Дано: $T := \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}=(10,15,25)$, $\vec{b}=(5,10,20,15)$.

К24.2.

Дано: $T= \begin{pmatrix} 5 & 107 & 1 \\ 2 & 8 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}= (15,5,30)$, $\vec{b}=(15,5,10,20)$.

К24.3.

Дано: $T=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & И & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 & II & 2 \end{pmatrix}$, $5=(35,15,10)$, $\vec{b}=(10,3,17,20,10)$.

К24.4.

Дано: $T=\begin{pmatrix} 15 & I & 13 & 11 \\ 12 & 4 & 5 & 4 \\ 13 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}=(30,5,25)$, $\vec{b}=(12,8,20,20)$.

К24.5.

Дано: $T=\begin{pmatrix} 15 & 6 & 7 & 1 \\ 12 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $5=05,30)$, $\vec{b}=(5,15,15,10)$.

К24.6.

Дано: $T=\begin{pmatrix} 9 & 6 & 11 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 16 \\ 3 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$, $\vec{a}=(25,15,10)$, $£=(25,15,5,5)$.

К24.7.

Дано: $T=\begin{pmatrix} 11 & 7 & 4 & 11 \\ 12 & 11 & 3 & 7 \\ 13 & 12 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}=(18,12,20)$, $\vec{b}=(5,25,5,15)$.

К24.8.

Дано: $T=\begin{pmatrix} 8 & 15 & 12 & II \\ 12 & 11 & 6 & 6 \\ 31 & 15 & 4 & 12 \end{pmatrix}$, $5=(16,20,34)$, $£=(35,15,15,5)$.

К24.9.

Дано: $T=\begin{pmatrix} 6 & 10 & 17 & 4 \\ 9 & 18 & 8 & 7 \end{pmatrix}$, $\vec{a}=(5,35)$, $\vec{b}=(5,5,15,15)$.

К24.10.

Дано: $T=\begin{pmatrix} 9 & 16 & 9 & 11 & 11 \\ 11 & 6 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 11 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $\vec{a}=(35,5,20)$, $\vec{b}=(25,15,10,2,8)$.

К24.11. В шести хранилищах имеется соответственно 93, 154, 256, 247, 215, 125 т картофеля. Требуется так спланировать перевозки картофеля к восьми овощным магазинам, спрос которых равен соответственно 135, 105, 48, 152, 120, 105, 305, 120 т, чтобы максимальное время доставки было минимальным. Времена доставки не зависят от объемов перевозок и содержатся в матрице

$$T=\begin{pmatrix} 7 & 16 & 9 & 7.5 & 7.8 & 15.4 & 8.6 & 12.7 \\ 5.8 & 5 & 8 & 5.8 & 7 & 7 & 9 & 4 \\ 7 & 9 & 10 & 17.7 & 1 & 1.9 & 12 & 5.2 \\ 2.7 & 3 & 9 & 9 & 3.9 & 4 & 4.8 & 13.5 \\ 17 & 15.6 & 2 & 1.8 & 4.4 & 4.8 & 6 & 7.9 \end{pmatrix},$$

в которой на позиции (i, k) находится величина, равная времени перевозки необходимого количества картофеля из i-го хранилища в k-й магазин. Спрос магазинов должен быть удовлетворен полностью.

Ответы, указания, решения

Общий алгоритм решения задачи **K24.11** с помощью Mathcad

Ввести исходные данные: матрицу г, а также векторы a и Ь, координаты которых равны соответствующим величинам запасов и потребностей. Задать начальные значения переменных, целевую функцию, а также сформировать два вспомогательных вектора ic и ir, состоящих из единиц:

ORIGIN:=1

n: $=cols(T)$ $\qquad$ $m:=rows(T)$ $\qquad$ $i:=1;m$ $\qquad$ $k:=1;$ л

$x_{ik}:=0 \qquad ic_i:=1 \qquad ir_i:=1 \qquad f(x) := \max\left(\overrightarrow{(x \ne 0)\cdot T}\right).$

С помощью программных операторов Mathcad переупорядочить переменные x_{ik} по невозрастанию соответствующих им элементов t_{ik} матрицы г, сформировав при этом вектор-функцию $g(x)$; j-я координата вектора $g(x)$ будет равна переменной x_{ik}, соответствующей j-му по величине элементу матрицы m.

```
g(x) := | r ← 0
        | t ← T
        | while max(t) > 0
        |   | naib ← max(t)
        |   | for i ∈ 1..m
        |   |   for k ∈ 1..n
        |   |     if naib = t_{i,k}
        |   |        | t_{i,k} ← 0
        |   |        | r ← r + 1
        |   |        | g_r ← x_{i,k}
        | g
```

Сформировать блок для решения систем вида (24.1):

Given $x \geq 0$ $x \cdot ir = a$ $x^T \cdot ic = b$ $\sum_{j=1}^{t} g(x)_j = 0$

$y := find(x)$ $y =$ $f(y) =$

Присваивая последовательно значения 1, 2, 3, параметру r, определить минимальное число p, при котором не будет найдено решение встроенной функцией *find*. Тогда решение y, полученное при $r = p - 1$, и будет искомым оптимальным планом соответствующей транспортной задачи.

К24.1. Ответы: оптимальный план перевозок равен

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 \\ 5 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 5 \end{pmatrix},$$

а время его реализации равно 4.

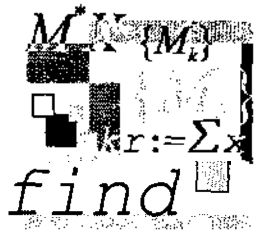
К24.11. Ответы: оптимальный план перевозок равен

$$\begin{pmatrix} 93 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 152 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & 105 & 0 & 120 \\ 42 & 105 & 0 & 0 & 87 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 48 & 0 & 0 & 0 & 167 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 125 & 0 \end{pmatrix},$$

а время его реализации равно 7.

Глава 25

Потоки в орграфах



Существует большое количество задач, связанных с оптимальной перевозкой товаров из одного пункта в другой. Сеть дорог между пунктами задается орграфом, а числа, приписанные его элементам (веса), определяют условия перевозок. (Граф, элементам которого приписаны числа, называется сетью.) Эти числа могут задавать пропускные способности дорог, стоимости и времена перевозки товара по ним и т.д. Задача заключается в рациональном распределении потоков товаров по дорогам. Оказалось, что теория решения потоковых задач может эффективно применяться при исследовании других практических оптимизационных моделей, на первый взгляд, совсем не похожих на задачу о перевозках.

Ниже будет рассмотрена задача о максимальном потоке, заключающаяся в том, чтобы пропустить через граф наибольшее количество единиц потока.

Перейдем к формальным определениям. Пусть $G = (V, E)$ — взвешенный орграф (сеть) с двумя выделенными вершинами: s, называемой источником, и t, называемой стоком. Вес дуги e будем обозначать через $c(e) \geq 0$. Для любой вершины v через $D^+(v)$ и $D^-(v)$ будем обозначать соответственно множества дуг орграфа с концом v и с началом v.

Определение

Функция f, определенная на множестве дуг орграфа G, называется потоковой для G, если выполняются следующие условия:

(C1) для каждой дуги e верно соотношение $0 \leq f(e) \leq c(e)$;

(C2) для каждой вершины v, отличной от s и t, верно соотношение

$$0 = \sum_{e \in D^+(v)} f(e) - \sum_{e \in D^-(v)} f(e) \qquad (25.1)$$

Число $f(e)$ называется потоком по дуге e, а величина

$$F = \sum_{e \in D^+(t)} f(e) - \sum_{e \in D^-(t)} f(e) \qquad (25.2)$$

называется суммарным потоком потоковой функции f орграфа G.

Потоковая функция f называется оптимальной для орграфа G, если ее суммарный поток является максимальным среди суммарных потоков всех потоковых функций.

Пусть V разбито на два непересекающихся подмножества S и T таких, что $s\in S$ и $t\in T$. Обозначим через (S, 7) ((Г, S)) множество всех дуг, начало и конец которых принадлежит соответственно множествам S и T (T и S). Множество дуг (S, T)$\cup$(T,S) называется разрезом, индуцированным множеством S.

По определению (25.2), суммарный поток измеряется в стоке (. Однако, следующая теорема показывает, что эта величина может быть измерена в любом разрезе,

Теорема 25.1. Для каждого подмножества вершин S, содержащего источник s и не содержащего сток t, верно равенство

$$F = \underset{e\in(S,T)}{\mathbf{S}}\ /\mathbf{M} - \sum_{e\in(T,S)} f(e) \qquad (25.3)$$

Доказательство. Сложим почленно равенства (25.1) для всех вершин v из $T\backslash\{t\}$ и равенство (25.2). В результате получится равенство, называемое итоговым, левая часть которого будет равна F. Чтобы определить, что получится справа, рассмотрим произвольную дугу y = (a, b) из E. Если a и h принадлежат S, то величина $f(u)$ вообще не появится справа в итоговом равенстве. Если обе вершины a и b принадлежат T, то $f(u)$ появится дважды в правой части итогового равенства: один раз в сумме $\sum f(e)$

со знаком плюс, другой раз в сумме $\sum f(e)$ со знаком минус, т. е. взаимоуничто-

жится. Если $a\in S$, $b\in T$, то $f(u)$ появится только один раз, причем со знаком плюс в сумме $\sum_{e\in D^+(b)} f(e)$, а если $a\in T$, $b\in S$ то $f(u)$ появится только один раз, причем со

знаком минус в сумме $\sum f(e)$Все рассмотренные случаи согласуются с равенст-

вом (25.3). Теорема доказана.

Следствие 25.1. $-F = \sum f(e) - \sum_{e\in D^-(s)} f(e)$

Обозначим через $c(S)$ величину $\sum c(e)$, которую будем называть мощностью разре-

за, индуцированного множеством S.

Следствие 25.2. Для любой потоковой функции/и любого подмножества вершин S, содержащего s и не содержащего t, верно z

$$F \le c(S) \qquad (25.4)$$

Следствие 25.3. Если существуют такие f и S, для которых неравенство (25.4) превращается в равенство, то/является оптимальной потоковой функцией, а S индуцирует разрез с минимально возможной мощностью $c(S)$.

Доказательство следствия дано в задачах Т25.1 - Т25.3.

Конструктивное доказательство существования таких f и S, для которых (25.4) превращается в равенство, будет дано в *гл.26.*

Задачи для самостоятельного решения

Т25.1. Доказать следствие 25.1.

Т25.2. Доказать следствие 25.2.

Т25.3. Доказать следствие 25.3.

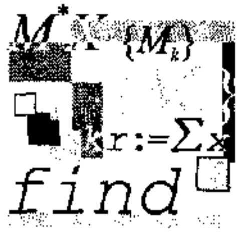
Ответы, указания, решения

Т25.1. Пусть S состоит из единственной вершины s. Тогда $(S, 7) = D(s)$, $(Г, S) = D^{'}(s)$. Остальное следует из равенства (25.3).

Т25.2. Поскольку $\sum_{e\in(T,S)} f(e) \geq 0$, то по теореме 25.1

$$F \leq \sum_{e\in(S,T)} f(e) - 0 = c(S).$$

Т25.3. Указание: воспользоваться следствием 25.2.



Глава 26

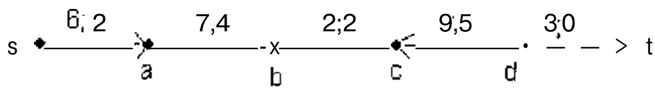
Алгоритм определения максимальных потоков

Величину $c(e)$ будем называть пропускной способностью дуги e. Зафиксируем некоторую потоковую функцию./для орграфа G. Дугой типа / назовем дугу, в которой поток меньше ее пропускной способности, а дугой типа D —дугу, в которой поток отличен от нуля. Очевидно, если e — дуга типа / и D одновременно, то $0 < f(e) < c(e)$. (Отметим, что если $c(e) > 0$, то дуга e является дугой хотя бы одного типа.) Резервом увеличения потока дуги e назовем величину $i(e) = c(e) - f(e)$,а резервом уменьшения потока— величину $d\{e) = f(e)$. Дуги типа / и типа D соответственно имеют ненулевые резервы увеличения и уменьшения потоков.

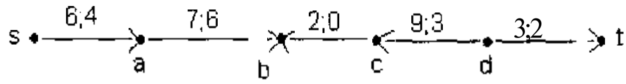
Увеличивающей цепью назовем простую цепь в G, соединяющую s и t, в которой каждая дуга, имеющая направление от s к t,называемая прямой дугой, имеет тип /, а каждая дуга, имеющая направление от t к s, называемая обратной дугой, имеет тип D. Вдоль увеличивающей цепи можно "переслать" дополнительный поток из s в t, т. е. увеличить суммарный поток на величину Д, равную минимальному из резервов увеличения и уменьшения потоков соответственно прямых и обратных дуг этой цепи. Достигается это заданием новой потоковой функции f' : если дуга e не принадлежит данной увеличивающей цепи, то $f'(e) = f(e)$; если дуга e — прямая дуга увеличивающей цепи, то $f'(e) = f(e) + \Delta$, а если обратная, то $f'(e) = f(e) - \Delta$Очевидно, что определенная таким образом функция /' является потоковой функцией, удовлетворяющей условиям (C1) и (C2) определения, данного в *гл. 25.* Кроме того, согласно определению (25.2), $F' - F = A$.

Пример

Рассмотрим некоторую простую цепь



в которой первые числа указывают пропускные способности дуг, а вторые — потоки в дугах. Так как прямые дуги этой цепи (s, a), (a, *b), (d, t)* имеют тип /, а обратные дуги (c, *b), (d*, c) имеют тип *D*, то данная цепь увеличивающая. Резервы увеличения потоков прямых дуг равны 4, 3, 3, а резервы уменьшения потоков обратных дуг равны 2, 5 соответственно. Поэтому вдоль этой цепи можно дополнительно переслать 2 единицы потока от s к *t*



Алгоритм 26.1 поиска увеличивающей цепи при заданной потоковой функции

- Определить тип каждой дуги орграфа. Пометить вершину *s*.
- Помечать дуги и вершины в соответствии с приводимым ниже правилом до тех пор, пока либо не будет помечена вершина /, либо пометка новых вершин станет невозможной.

Правило пометки:

- если вершина *x* помечена, дуга *(x,y)* не помечена и имеет тип /, вершина *y* не помечена, то помечаются дуга *(x, y)* и ее конец *y*;
- если вершина *x* помечена, дуга (у, *x)* не помечена и имеет тип *D*, вершина *y* не помечена, то помечаются дуга (у, *x)* и ее начало *y*;
- других случаев пометки вершин и дуг не существует.

Теорема 26.1. Если в ходе алгоритма 26.1 вершина *t* помечена, то в орграфе *G* существует увеличивающая цепь. Если же вершина *t* не может быть помечена, то в орграфе отсутствует увеличивающая цепь. Алгоритм завершает свою работу за конечное число шагов.

Доказательство. В силу правила, по которому выполняется процедура пометки, дуга может быть помечена только в том случае, если одна из смежных с ней вершин помечена, а другая — нет. Следовательно, в ходе выполнения алгоритма не может быть помечена дуга, начало и конец которой уже были ранее помечены, и потому помеченные дуги не могут образовывать циклы. Поскольку работа алгоритма начинается с помеченной вершины *s,* то в последующем помеченные вершины и дуги должны образовывать связный граф без циклов, т. е. дерево. Если этому дереву принадлежит вершина *x,* то из теоремы 20.2 следует, что вершины *s* и *x* соединены в дереве единственной простой цепью. В частности, если помечена вершина /, то найдется единственная простая цепь из помеченных дуг, соединяющая *$* и Л Эта цепь будет увеличивающей, поскольку правило пометки гарантирует, что прямые дуги этой цепи имеют тип /, а обратные — тип *D.*

Докажем второе утверждение теоремы. Предположим, что имеется увеличивающая цепь. Тогда правило пометки позволяет "добраться" до любой дуги этой цепи и, в частности, до некоторой дуги, смежной с вершиной *t.* Поэтому в этом случае вершина *t* будет обязательно помечена,

И наконец, алгоритм должен завершиться за конечное число шагов, поскольку в нем по одному разу могут помечаться вершины и дуги, число которых конечно. Теорема доказана.

Пример 1

В орграфе на рис. 26.1 указаны типы дуг. Найти увеличивающую цепь.

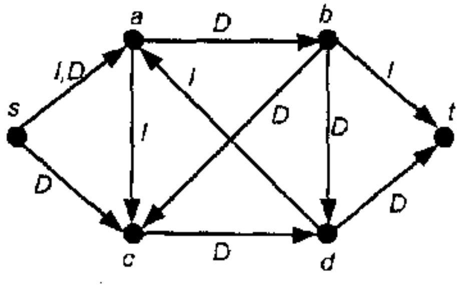


Рис. 26.1. Орграф из Примера 1

Прежде всего помечается вершина s. Из дуг, выходящих из вершины s, помечается только дуга (s, a) и ее конец a, поскольку эта дуга типа /. Далее просматриваются дуги, смежные с вершиной a: вершина c и дуга (a, c) могут быть помечены, поскольку эта дуга имеет тип /; вершина 6 и дуга (a, to) не могут быть помечены, поскольку (a, to) не имеет тип /; вершина *d* и дуга (*d*, a) не могут быть помечены, поскольку *(d, a)* не имеет тип D. Далее рассматриваются дуги, смежные с вершиной c. Вершина *Ь* и дуга (to, c) могут быть помечены, поскольку дуга (to, c) типа D; вершина *d* и дуга (c, *d*) не помечаются, поскольку эта дуга не типа /. И наконец, помечаются дуга (to, *t)* и вершина *t,* поскольку дуга (to, *t*) имеет тип /. Итак, найдена увеличивающая цепь (s, a), (a, c), (Ь, c), (to, *t*).

Алгоритм 26.2 поиска максимального потока в орграфе

- Шаг 0. Для каждой дуги *e* орграфа положить $f(e) = 0$.
- Шаг r $(r \geq 1)$.С помощью алгоритма 26.1 найти увеличивающую цепь. Если такой цепи не существует, то потоковая функция /оптимальна. Если цепь существует, то найти резервы увеличения и уменьшения потока соответственно прямых и обратных дуг, составляющих эту цепь. Определить величину *А* дополнительного потока из *s* в *t*, равную минимальному из найденных резервов. Увеличить поток в прямых дугах цепи на Д и уменьшить поток в обратных дугах цепи на Д. Удалить все пометки. Перейти к следующему шагу.

Теорема **26.2.** Если алгоритм 26.2 завершает свою работу через конечное число шагов, то построенная им на последнем шаге потоковая функция будет оптимальной.

Доказательство. Алгоритм 26.2 завершает работу, когда алгоритм 26.1 устанавливает отсутствие увеличивающих цепей. Это означает, что после выполнения последнего шага алгоритма 26,1 будет помечено множество вершин *S,* не содержащее стока *t.* Если обозначить через *T* множество всех непомеченных вершин, то по теореме 25.1 должно выполняться равенство (25.3). Ввиду правила пометки любая дуга из (*S*, *T*) не может быть типа *I*, и потому ее резерв увеличения потока нулевой, а любая дуга из (T, S) не может быть типа О и потому ее резерв уменьшения потока нулевой. Следовательно:

$$\sum_{e\in(S,T)} f(e) = c(S), \quad \sum_{e\in(T,S)} f(e) = 0,$$

где/— потоковая функция, построенная к данному шагу. Отсюда с учетом (25.3) $F = c(S)$ и из следствия 25.3 вытекает оптимальность потоковой функции.

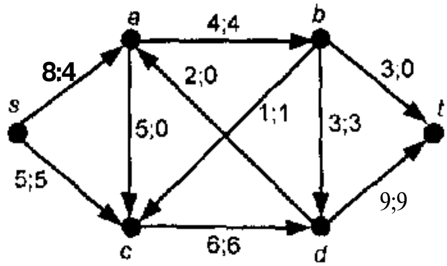


Рис. 26.2. Орграф из Примера 2 с суммарным потоком 9

Пример

В орграфе на рис. 26.2 задан поток. (Первое число рядом с дугой обозначает ее пропускную способность, второе — поток по дуге.)

Проверить, является ли суммарный поток максимапьным и в случае отрицательного ответа найти максимальный поток и разрез (S, *T*) ∪(Г, S), для которого F = *c{S).*

После того, как определим тип каждой дуги, отметим, что увеличивающая цепь для заданного орграфа найдена в предыдущем примере. Это цепь (s, a), (a, c), (*b*, c), (*b*, *t*). Следовательно, исходный поток не являeтся максимальным.

Резервы увеличения потока на прямых дугах (s, a), (a, c) и (*b*, *t*) цепи равны соответственно 8-4, 5-0, 3-0. Резерв уменьшения потока на обратной дуге (*b*, *c*) цепи равен 1. Величина Д дополнительного потока равна *min*(4, 5, 3, 1)= 1.

Увеличив поток по прямым дугам на 1 и уменьшив его на обратной дуге на 1, получим новый поток (рис. 26.3)

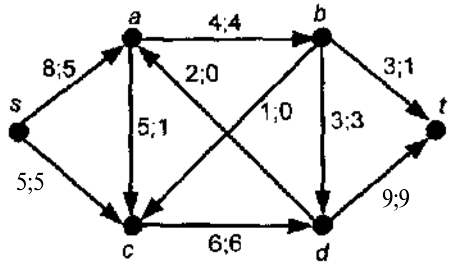


Рис. 26.3. Орграф из Примера 2 с суммарным потоком 10

Определим тип каждой дуги (рис. 26.4).

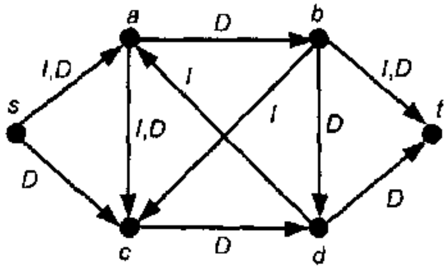


Рис. 26.4. Орграф из Примера 2 с новыми типами дуг

Попробуем найти увеличивающую цепь. Из вершины s можно пометить только дугу (s, a) и вершину a, так как дуга (s, a) типа /. Из вершины a можно пометить только дугу (a, c) и вершину c, поскольку дуга (a, *b*), выходящая из a, типа D, а дуга (*d*, a), входящая в a, типа /. По той же причине из вершины c невозможно сделать никаких пометок. Вершина *t* осталась непомеченной. Это означает, что поток, заданный на рис. 26.3, является максимальным.

К множеству S отнесем помеченные вершины *{$, a, c]*, к множеству *T* — остальные вершины *{b, d, t}*. В разрез входят дуги *(S, T)* = {(a, *b)*, (c, *d*)} и (Г, S) = {(*b*, c), (*d*, a)}. *F=c(S)* = 10.

Определение

Потоковая функция называется целочисленной, если все ее значения — целые неотрицательные числа.

Теорема 26.3. Если пропускные способности всех дуг орграфа целочисленны, то алгоритм 26.2 завершает свою работу через конечное число шагов, при этом построенная оптимальная потоковая функция будет целочисленной.

Доказательство. На нулевом шаге потоки всех дуг равны нулю. Рассмотрим *r*-й шаг и предположим, что к этому шагу уже построена целочисленная потоковая функция/ Тогда резервы увеличения и уменьшения потоков всех дуг также целочисленны ввиду целочисленности их пропускных способностей и потоков в них. Это означает, что вновь построенная функция /' сохранит целочисленность своих значений, поскольку потоки в дугах могут изменяться только на положительную целую величину Д, равную резерву некоторой дуги увеличивающей цепи.

Итак показано, что суммарный поток после каждого шага возрастает на целую положительную величину. Этот процесс не может продолжаться бесконечно, так как по следствию 25.2 суммарный поток любой потоковой функции не превосходит мощности некоторого разреза орграфа. Теорема доказана.

В случае нецелочисленных пропускных способностей дуг в литературе известны примеры зацикливания алгоритма 26.2. Однако зацикливания можно избежать, если в алгоритме 26.1 специальным образом упорядочить просмотр дуг в процессе расстановки пометок. (В практических задачах случаи зацикливания не отмечены.)

Это замечание, обоснование которого выходит за рамки данной книги, а также доказательство теоремы 26.2, приводят к следующему результату.

Следствие **26.1.** В любом орграфе существует максимальный суммарный поток и он равен минимальной из мощностей разрезов этого орграфа.

Задачи для самостоятельного решения

Т26.1. Доказать, что если пропускные способности всех дуг орграфа G являются рациональными числами, то алгоритм 26.2 поиска максимального потока в G завершит свою работу через конечное число шагов.

Т26.2. Пусть некоторая комплексная работа связана с производством совокупности m более мелких работ я,, ..., a_m, которые могут выполняться независимо одна от другой. В распоряжении планирующего органа находится n исполнителей b_1, ..., b_n, каждый из которых может выполнять только некоторые определенные работы. При этом каждый исполнитель одновременно может выполнять только какую-либо одну работу и каждая работа одновременно может выполняться только одним исполнителем. Проблема состоит в распределении работ между исполнителями таким образом, чтобы одновременно выполнялось возможно большее их число. Свести эту проблему к задаче нахождения максимального суммарного потока в орграфе.

Т26.3. Имеется m работ $A = \{a_1, \ldots, a,,,\}$ и n исполнителей. Если С— произвольный набор работ из множества A, то через $B(C)$ будем обозначать множество всех исполнителей, каждый из которых способен выполнить хотя бы одну работу из набора С. Доказать, что все m работ можно распределить между исполнителями для одновременного их выполнения, если и только если для любого набора С из $\{a_1, \ldots$, a„,} верно \C\≤ |B(C)| (здесь \R\ обозначает количество элементов множества R).

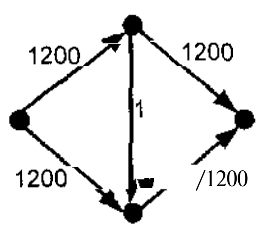


Рис. 26.5. Орграф из задачи Т26.4

Т26.4. Определить число шагов алгоритма 26,2, за которое в худшем случае можно найти максимальный суммарный поток орграфа, изображенного на рис. 26.5 (около дуг указаны их пропускные способности).

Общая формулировка задач П26.1 — П26.21

Туристическое бюро должно в определенный день X организовать перелет максимального числа туристов из города s в город t. Прямых рейсов из s в t нет. Однако можно воспользоваться промежуточными городами a, b, c, d. На рис. 26.6 схема возможных перелетов изображена в виде орграфа, в котором каждая дуга e_i указывает прямой рейс из города в город, а приписанный ей вес $c(e_i)$ — число свободных мест на день X (рейсы, на которые свободных мест нет, не указаны). Необходимо выбрать такую стратегию бронирования билетов, при которой в день X можно будет организовать перелет наибольшего числа туристов.

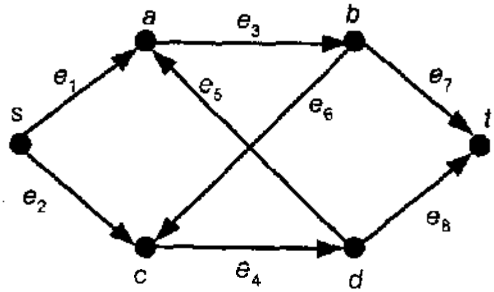


Рис. 26.6. Схема перелетов в виде орграфа

П26.1.	Дано:	$c(e_1) = 15$,	$c(e_2) = 4$,	$c(e_3) = 12$,	$c(e_4) = 10$,
		$c(e_5) = 5$,	$c(e_6) = 3$,	$c(e_7) = 7$,	$c(e_8) = 10$.
П26.2.	Дано:	$c(e_1) = 30$,	$c(e_2) = 8$,	$c(e_3) = 12$,	$c(e_4) = 20$,
		$c(e_5) = 10$,	$c(e_6) = 8$,	$c(e_7) = 14$,	$c(e_8) = 20$.
П26.3.	Дано:	$c(e_1) = 20$,	$c(e_2) = 6$,	$c(e_3) = 8$,	$c(e_4) = 15$,
		$c(e_5) = 7$,	$c(e_6) = 4$,	$c(e_7) = 11$,	$c(e_8) = 15$.
П26.4.	Дано:	$c(e_1) = 21$,	$c(e_2) = 7$,	$c(e_3) = 9$,	$c(e_4) = 16$,
		$c(e_5) = 9$,	$c(e_6) = 6$,	$c(e_7) = 13$,	$c(e_8) = 17$.
П26.5.	Дано:	$c(e_1) = 22$,	$c(e_2) = 8$,	$c(e_3) = 10$,	$c(e_4) = 17$,
		$C(e_5) = 10$,	$c(e_6) = 7$,	$c(e_7) = 14$,	$c(e_8) = 18$.
П26.6.	Дано:	$c(e_1) = 18$,	$c(e_2) = 10$,	$c(e_3) = 8$,	$c(e_4) = 15$,
		$c(e_5) = 13$,	$c(e_6) = 2$,	$c(e_7) = 16$,	$c(e_8) = 15$.
П26.7.	Дано:	$c(e_1) = 12$,	$c(e_2) = 3$,	$c(e_3) = 12$,	$c(e_4) = 13$,
		$c(e_5) = 14$,	$c(e_6) = 8$,	$c(e_7) = 7$,	$c(e_8) = 19$.

П26.8.	Дано:	$c(e_1)=51$,	$c(e_2)=10$,	$c(e_3)=15$,	$c(e_4)=4$,
		$c(e_5)=13$,	$c(e_6)=10$,	$c(e_7)=6$,	$c(e_8)=21$.
П26.9.	Дано:	ф,) = 50,	$c(e_2)=9$,	$c(e_3)=16$,	$c(e_4)=5$,
		$c(e_5)=14$,	$c(e_6)=9$,	$c(e_7)=7$,	$c(e_8)=22$.
П26.10.	Дано:	$c(e_1)=8$,	$c(e_2)=14$,	$c(e_3)=11$,	$c(e_4)=6$,
		$c(e_5)=15$,	$c(e_6)=13$,	$c(e_7)=4$,	$c(e_8)=2$.
П26.11.	Дано:	$c(e_1)=22$,	$c(e_2)=12$,	$c(e_3)=4$,	$c(e_4)=11$,
		Фз)= 22,	$c(e_6)=5$,	$c(e_7)=9$,	$c(e_8)=14$.
П26.12.	Дано:	$c(e_1)=7$,	$c(e_2)=21$,	$c(e_3)=6$,	$c(e_4)=13$,
		$c(e_5)=16$,	$c(e_6)=23$,	$c(e_7)=32$,	$c(e_8)=8$.
П26.13.	Дано:	$c(e_1)=9$,	$c(e_2)=31$,	$c(e_3)=16$,	$c(e_4)=6$,
		$c(e_5)=11$,	$c(e_6)=14$,	$c(e_7)=7$,	$c(e_8)=11$.
П26.14.	Дано:	ф,) = 3,	$c(e_2)=21$,	$c(e_3)=12$,	$c(e_4)=20$,
		$c(e_5)=33$,	$c(e_6)=11$,	$c(e_7)=7$,	$c(e_8)=15$.
П26.15.	Дано:	$c(e_1)=2$,	$c(e_2)=41$,	$c(e_3)=22$,	$c(e_4)=11$,
		$c(e_5)=7$,	$c(e_6)=4$,	$c(e_7)=20$,	$c(e_8)=15$.
П26.16.	Дано:	$c(e_1)=13$,	$c(e_2)=7$,	фз) = 14,	$c(e_4)=11$,
		$c(e_5)=31$,	$c(e_6)=15$,	$c(e_7)=8$,	$c(e_8)=$ **з.**
П26.17.	Дано:	$c(e_1)=1$,	$c(e_2)=6$,	Фз) = 17,	$c(e_4)=18$,
		Фз) = 5,	$c(e_6)=22$,	$c(e_7)=31$,	$c(e_8)=12$.
П26.18.	Дано:	$c(e_1)=10$,	$c(e_2)=41$,	**Фз) = 23,**	$c(e_4)=7$,
		$c(e_5)=8$,	$c(e_6)=9$,	$c(e_7)=11$,	$c(e_8)=14$.
П26.19.	Дано:	$c(e_1)=1$,	$c(e_2)=5$,	$c(e_3)=13$,	$c(e_4)=17$,
		$c(e_5)=24$,	$c(e_6)=19$,	$c(e_7)=7$,	$c(e_8)=17$.
П26.20.	Дано:	$c(e_1)=15$,	$c(e_2)=3$,	$c(e_3)=2$,	$c(e_4)=1$,
		$c(e_5)=13$,	$c(e_6)=8$,	$c(e_7)=22$,	$c(e_8)=15$.

П26.21. Найти максимальный суммарный поток в орграфе, изображенном на рис. 26.7, где s — источник, t — сток и около дуг указаны их пропускные способности.

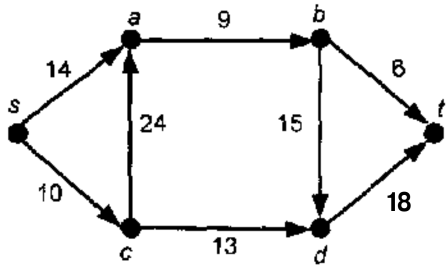


Рис. 26.7. Орграф из задачи П26.21

Ответы, указания, решения

Т26.1. Для набора весов дуг орграфа G, заданных рациональными числами, можно подобрать такое целое число d, при умножении на которое все эти числа превратятся в целые. Объявив их новыми весами дуг орграфа G, с помощью алгоритма 26.2 можно построить оптимальную потоковую функцию/ Тогда потоковая функция f/d будет оптимальной для орграфа с прежними весами дуг.

Т26.2. Вначале определим двудольный орграф $H=(A\cup B,\ E)$ с долями $A=\{a_1, \ldots, a_m\}$ и $B=\{b_1, \ldots, b_n\}$ следующим образом: пара вершин (a_i, b_k) является дугой, если и только если исполнитель b_k способен выполнить работу a_i. Пропускные способности дуг в Я положим равными $100(m+n)$. Добавим две вершины s и t, а также дуги $(5, a_i)$, $i=1, \ldots, m$, (b_k, t), $k=1, \ldots, n$, с пропускными способностями, равными 1. Полученный орграф с источником s и стоком t обозначим G.

Множество дуг в орграфе называется паросочетанием, если никакие две дуги из этого множества не смежны с одной вершиной. Если паросочетание содержит наибольшее число дуг среди всех паросочетаний орграфа, то оно называется наибольшим.

Пусть r — наибольшее число различных работ, которые могут быть одновременно выполнены таким же числом исполнителей. Из условия задачи ясно, что r равно числу дуг в наибольшем паросочетании двудольного орграфа $И$. Докажем, что r равно максимальному суммарному потоку F в орграфе G.

Пусть M – наибольшее паросочетание, состоящее из r дуг. На множестве дуг орграфа G определим функцию g следующим образом: для каждой дуги (a_i, b_k) из M $g((a_i, b_k)) = g((s, a_i)) = g((b_k, t)) = 1$, все остальные значения функции g нулевые. Из определения паросочетания следует, что определенная таким образом функция g является потоковой, а ее суммарный поток равен r. Отсюда $F \geq r$. Осталось доказать, что $F \leq r$.

Согласно теореме 26.3, для орграфа G существует оптимальная целочисленная потоковая функция / Поскольку в любую вершину a_i входит ровно одна дуга

(s, a_i) и пропускная способность этой дуги равна 1, то может существовать не более одной дуги, выходящей из вершины a_i, поток по которой будет равен 1, поток же по остальным дугам, выходящим из a_i, будет равен 0. Аналогично, может существовать не более одной дуги, входящей в любую вершину b_k, поток по которой равен 1, поток же по остальным дугам, входящим в b_k, будет равен 0. Это означает, что потоки по всем дугам из E равны 0 или 1, причем никакие две такие дуги с единичными потоками не могут быть смежными с одной вершиной. Таким образом, если M' — множество всех дуг из E с ненулевыми потоками, то M' — паросочетание, Пусть M' содержит r' дуг. Тогда $\sum_{e\in E} f(e) = \sum_{e\in M'} f(e) = r'$. Так как r — число дуг в наибольшем паросочетании. Но E — это разрез в G, индуцированный множеством вершин $A \cup \{s\}$. Поэтому по теореме 25.1 $F = \sum_{e\in E} f(e)$, и, следовательно, $F \le r$.

Таким образом, задача определения наибольшего числа выполненных работ сведена к задаче определения максимального потока в специально построенном орграфе.

Т26.3. Построим орграф G такой, как в задаче Т26.2. Применим алгоритм 26.2 для определения оптимальной целочисленной потоковой функции f с суммарным потоком F. Алгоритм завершает свою работу на том шаге, на котором устанавливается отсутствие увеличивающей цепи в G. Это означает, что на последнем шаге будет помечено множество вершин S, содержащее источник s, но не содержащее сток t. При этом, как было показано в доказательстве теоремы 26.2, $F = c(S)$. Введем следующие обозначения: T — множество всех непомеченных вершин, $X = S \cap A$, $Y = T \cap A$.

По определению орграфа G суммарный поток в G не может превзойти число $\min\{m, n\}$. Поэтому разрез (S, T) не содержит дуг вида (a_i, b_k), так как их пропускные способности превосходят $\min\{m, n\}$. Отсюда

$$F = c(S) = \sum_{e\in(S,T)} c(e) = \sum_{e\in(S,T)} 1 = |(S,T)| \tag{26.1}$$

Если вершина a_i помечена и f — построенная оптимальная целочисленная потоковая функция, то или $f((s, a_i)) = 0$, или существует такая единственная вершина b_j, что $f((a_i, b_j)) = 1$. Поэтому $f((a_i, b_k)) = 0 \; (k \ne j)$ и все вершины, смежные с вершиной a_i, помечены. Следовательно, $B(X) \subseteq S$. Согласно правилу пометки, алгоритм поиска увеличивающей цепи оставит непомеченными вершины из $B \setminus B(X)$, поэтому $B \setminus B(X) \subseteq T$. Поскольку дуги, принадлежащие (S, T), соединяют помеченные вершины с непомеченными, то $(S, T) = (\{s\}, Y) \cup (B(X), \{t\})$. Отсюда с учетом (26.1) имеем:

$$F = |(S, T)| = |(\{s\}, Y)| + |(B(X), \{t\})| = |Y| + |B(X)| \tag{26.2}$$

Пусть теперь M — наибольшее паросочетание в H. При решении задачи Т26.2 было показано, что $F = |M|$. Предположим, что $m = |M|$. Тогда любой работе из произвольного набора работ C можно назначить своего индивидуального исполнителя. Следовательно $|C| \leq |B(C)|$. Предположим обратное; это неравенство выполняется для любого набора работ С. Тогда из (26.2) следует, что $F = |Y| + |B(X)| > |Y| + |X| = m$. Следовательно, $m = |M|$.

Т26.4. Ответ: 2400.

П26.21. Применим алгоритм 26.2. Перед первым шагом все дуги орграфа имеют тип I. Поэтому алгоритм поиска увеличивающей цепи на этом шаге помечает вершины и дуги в следующем порядке: *s, (s, a)*, a, (*s*, c), *c*, (*a, b), b*, (c, *d*), *d*, (6, *t*), *t*. Найдена увеличивающая цепь (*s*, *a*), (a, *b*), (*b*, *t*), состоящая только *из* прямых дуг. Вдоль этой цепи перешлем дополнительный поток, равный min{14–0, 9-0, 6-0} = 6, как это показано на рис. 26.8. Напомним, что первое число рядом с дугой указывает ее пропускную способность, второе - поток по ней.

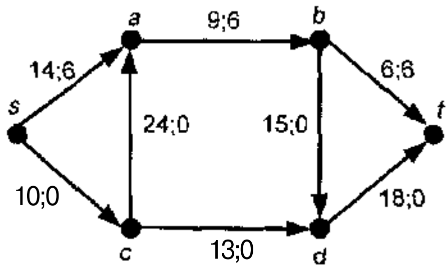


Рис. 26.8. Орграф с суммарным потоком 6

После этого шага дуга (*b*, *t*) имеет тип *D*, а все остальные дуги - тип /. На втором шаге вершины и дуги помечаются в следующем порядке: *s*, (*s*, *a*), *a*, *(s, c)*, *c*, *(a, b)*, *Ь*, *(c, d)*, *d*, (*d*, *t*), *t*. Итак, найдена увеличивающая цепь *(s, c)*, *(c, d)*, *(d, t)*, состоящая только из прямых дуг. Вдоль этой цепи перешлем дополнительный поток, равный min{10–0, 13-0, 18-0} = 10, как это показано на рис. 26.9. Дуги (*s*, *c)* и (*b*, *t*) имеют тип *D*, остальные — тип /.

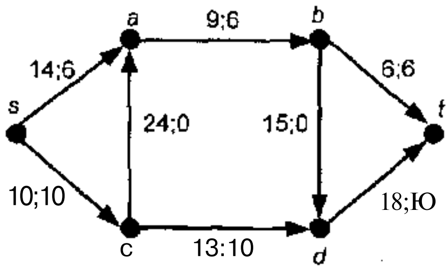


Рис. 26.9. Орграф с суммарным потоком 16

На третьем шаге вершины и дуги помечаются в следующем порядке: *s*, *(s, a)*, *a*, *(a, b)*, *b*, *(b, d)*, *d*, *(d, c)*, *c*, *(d, t)*, *t*. Найдена увеличивающая цепь *(s, a)*, *(a, b)*, *(b, d)*, *(d, t)*, вдоль которой перешлем дополнительный поток, равный min{14–6, 9-6, 15-0, 18-10} = 3, как это показано на рис. 26.10.

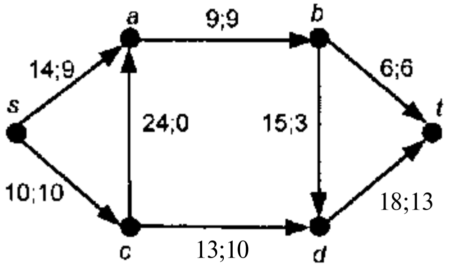


Рис. 26.10. Орграф с суммарным потоком 19

На четвертом шаге вершины и дуги помечаются в следующем порядке: *s*, *(s, a)*, *a*. Вершина *t* остается непомеченной. Поэтому суммарный поток *F*, найденный на предыдущем шаге, максимален и равен $F = \sum_{e \in D^+(t)} f(e) = 6 + 13 = 19$. Если обозначить через *S* множество помеченных на последнем шаге вершин $\{s, a\}$, а через *T* — множество непомеченных вершин, то

$$(S, T) = \{(s, c), (c, a), (a, b)\}, c(S) = c((s,c)) + c((a,b)) = 10 + 9 = 19.$$

Следовательно $F = c(S)$, что согласуется со следствием 26.1.

Глава 27

Модели сетевого планирования и управления

Часто приходится планировать выполнение сложных проектов взаимосвязанных операций, направленных на достижение определенных целей. Примерами таких проектов в экономике могут служить комплексы работ по сооружению большого объекта; комплексы мероприятий по реконструкции и модернизации производства; комплексы мер по внедрению нового технологического процесса; совокупности работ, связанных с автоматической обработкой прогнозной и плановой информации, и др. При этом возникает ряд важных проблем, например: наилучшая организация проведения отдельных операций с тем, чтобы завершить весь проект в кратчайший срок; рациональное распределение ресурсов, минимизирующее суммарные затраты по выполнению всех операций; выявление операций, влияющих на окончание в срок всего проекта, и др. Каждый проект можно представить в виде орграфа, называемого сетевым графиком. Для этого необходима следующая информация: а) список всех операций проекта; б) время, необходимое для выполнения каждой операции; в) списки операций, непосредственно предшествующих каждой операции.

Определение

Сетевым графиком проекта называется орграф $G = (K, E)$, в котором множество вершин V отождествлено с множеством операций $\{v_1, \ldots, v_n\}$ проекта, и пара вершин $\{v_i, v_k\}$ является дугой (v_i, v_k), если и только если операция v_i непосредственно предшествует операции v_k.

Всюду считается, что G не содержит контуров и поэтому вершины занумерованы так, что для любой дуги (v_i, v_k) верно $i<k$ (см. теорему 20.1). Отметим, что известны методы преобразования контуров в ациклические конфигурации, однако это выходит за рамки данной книги.

Введем переменные x_k, y_k, z_k, где x_k — время начала выполнения операции v_k, y_k — время окончания операции v_k, z_k — количество дополнительных средств, вложение которых в операцию v_k сокращает время ее выполнения до величины $f(z_k)$, где f — заданная функция, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Обозначим через S множество всех таких вершин v_i сетевого графика G, для которых $D^{-}(v_i)=\varnothing$, а через T — множество всех таких вершин v_t, для которых $D^{-}(v_t)=\varnothing$.

Рассмотрим математические модели трех оптимизационных задач сетевого планирования и управления.

Задача 1. Предположим, что для каждой операции v_k зафиксирована длительность t_k ее выполнения. Требуется:

а) определить минимально возможную длительность t_{kr} выполнения всего проекта;

б) определить минимально возможные значения e_k переменных x_k, т. е. найти наиболее ранние сроки начала всех операций (очевидно, что при таких значениях e_k достигается минимально возможная величина t_{kr});

в) определить максимально возможные значения p_k переменных y_k (т. е. найти наиболее поздние сроки завершения всех операций), при которых не будет допущено превышение минимальной длительности t_{kr} выполнения всего проекта.

Следующие два алгоритма решают эти задачи.

Алгоритм А

- Шаг $к$ ($k \geq 1$). Рассмотрим вершину v_k. Определим величину e_k по следующему правилу: если $v_k \in S$, то $e_k = 0$; если $v_k \notin S$, то для каждой дуги (v_i, v_k) из $D^{-}(v_k)$ вычислить сумму $e_i + t_i$ и e_k положить равным максимальной из этих сумм.
- После вычисления всех величин e_i определим t_{kr} по формуле $t_{kr} = \max\{e_i + t_i\}$.

Алгоритм Б

- Шаг $к$($к \geq 1$). Рассмотрим вершину v_{n+1-k}. (На первом шаге рассмотрим вершину v_n, на втором — v_{n-1}, на третьем — v_{n-2} и т. д.) Определим величину p_k по следующему правилу: если $v_k \in T$, то $p_k = t_{kr}$; если v_k g T, то для каждой дуги (v_k, v_j) из D (v_k) вычислить разность $p_j - t_j$ и p_k положить равным минимальной из этих разностей.

Корректность алгоритма А вытекает из следующего замечания: наиболее ранний срок начала операций v_k равен максимальной из сумм наиболее ранних сроков начала операций, непосредственно предшествующих v_k, и соответствующих времен их выполнения. Корректность алгоритма Б вытекает из следующего замечания: наиболее поздний срок завершения операции v_k равен минимальной из разностей между наиболее поздними сроками окончания операций, непосредственно следующих за v_k, и соответствующими временами их выполнения.

Определение

Величина $r_k = p_k - e_k - t_k$ называется полным резервом времени операции v_k. Операция называется критической, если любая задержка в ее выполнении приводит к задержке завершения всего проекта. Другими словами, критическая операция - это операция, полный резерв времени которой равен нулю.

Знание всех критических операций необходимо для предотвращения задержки их выполнения, вызывающей задержку окончания проекта. Для некритических операций можно допустить задержку, не превышающую полного резерва, не нарушая при этом своевременности окончания проекта.

Задача 2. Предположим, что для каждой операции v_k задана функция $f_k(z_k)$, определяющая длительность этой операции в зависимости от величины z_k вложенных в нее дополнительных средств, а также минимально возможное время b_k выполнения операции, указывающее допустимый предел насыщения этой операции дополнительными средствами. Накладывается также ограничение на сумму дополнительных вложений, которая не должна превышать величины d. Требуется найти такие значения переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n$, при которых общее время выполнения проекта было бы минимальным. Формально эту задачу можно сформулировать как задачу условной оптимизации следующим образом: целевая функция $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n) = \max y_i \to \min$,

а множество планов задается системой

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} z_k \le d, \\ y_k - x_k \ge b_k, \\ y_k - x_k = f_k(z_k), \\ x_k \ge 0,\ y_k \ge 0,\ z_k \ge 0, \\ y_i \le x_k \quad \text{для каждой дуги} \quad (v_i, v_k) \in D^+(v_k) \\ k = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{27.1}$$

Если в качестве целевой взять функцию $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k$, а первое ограничение в (27.1) заменить ограничением $\max\limits_{v_i \in T} y_i \le th$, то получим двойственную задачу: минимизировать суммарное количество дополнительно привлекаемых средств, при котором общее время выполнения проекта не будет превышать заданного порога th.

Задача 3. Предположим, что в начальном состоянии сетевого графика длительность каждой операции v_k установлена на минимальном уровне ti_k, в то время как затраты на эту операцию максимальны и равны c_k. Допускается увеличение длительности операции v_k до уровня ta_k ; при этом увеличение продолжительности на единицу времени вызывает уменьшение стоимости выполнения операции v_k на величину s_k , $k = 1,\dots, n$. Требуется, не превышая заданного порога th длительности выполнения всего проекта, минимизировать стоимость его выполнения за счет резервов времени. Формально эту задачу можно сформулировать как задачу условной оптимизации следующим образом: целевая функция

$$f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)=\sum_{k=1}^{n}\left(c_k-s_k\left(y_k-x_k-ti_k\right)\right),$$

а множество планов задается системой

$$\begin{cases} ti_k \le y_k - x_k \le ta_k, \\ y_i \le th \text{ для каждой вершины } v_i \in T \\ x_k \ge 0, \quad y_k \ge 0, \\ y_i \le x_k \text{ для каждой дуги } (v_i, v_k) \in D^+(v_k) \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Замечание

В этой главе tik и tak обозначают индексированные константы. Эти обозначения не следует воспринимать, как произведение t и i_k или t и a_k.

Задачи для самостоятельного решения

Общая формулировка задач П27.1 —П27.21 в буквенных обозначениях

Некоторый проект предусматривает осуществление девяти операций a, b, c, d, e, f, i, j, m. Списки непосредственно предшествующих им операций даны в табл, 27.1.

Таблица 27.1

Операции	*я*	*h*	*c*	*d*	*e*	*f*	*i*	*j*	*m*
Списки предшествующих операций	*i* *e*	*i* *j* *a*	—	—	*c* *d*	*c* *d*	—	*c*	*i* *e*
Длительности операций	t_a	t_b	t_c	t_d	t_e	t_f	t_i	t_j	t_m

Требуется:

а) построить сетевой график данного проекта и переименовать его вершины символами $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$ так, что для любой дуги (v_i, v_k) будет верно $i < k$;

б) определить наиболее ранние сроки начала всех операций, при которых достигается минимально возможная длительность t_{kr} всего проекта; найти величину t_{kr};

в) определить наиболее поздние сроки завершения всех операций, при которых длительность всего проекта останется равной t_{kr};

г) найти полные резервы времени всех операций и с их помощью выявить критические операции.

П27.1. Дано: $t_a = 6$, $t_b = 8$, $t_c = 3$, $t_d = 6$, $t_e = 1$, $t_f = 9$, $t_i = 4$, $t_j = 5$, $t_m = 5$.

П27.2. Дано: $t_a = 2$, $t_b = 4$, $t_c = 3$, $t_d = 5$, $t_e = 2$, $t_f = 11$, $t_i = 3$, $t_j = 7$, $t_m = 5$.

П27.3. Дано: $t_a = 1$, $t_b = 5$, $t_c = 3$, $t_d = 4$, $t_e = 2$, $t_f = 6$, $t_i = 4$, $t_j = 5$, $t_m = 6$.

П27.4. Дано: $t_a = 4$, $t_b = 7$, $t_c = 2$, $t_d = 5$, $t_e = 4$, $t_f = 7$, $t_i = 1$, $t_j = 5$, $t_m = 8$.

П27.5. Дано: $t_a = 5$, $t_b = 4$, $t_c = 4$, $t_d = 3$, $t_e = 1$, $t_f = 6$, $t_i = 8$, $t_j = 3$, $t_m = 6$.

П27.6. Дано: $t_a = 4$, $t_b = 4$, $t_c = 5$, $t_d = 3$, $t_e = 3$, $t_f = 9$, $t_i = 5$, $t_j = 7$, $t_m = 11$.

П27.7. Дано: $t_a = 2$, $t_b = 4$, $t_c = 13$, $t_d = 3$, $t_e = 4$, $t_f = 1$, $t_i = 5$, $t_j = 3$, $t_m = 7$.

П27.8. Дано: $t_a = 5$, $t_b = 4$, $t_c = 3$, $t_d = 5$, $t_e = 3$, $t_f = 6$, $t_i = 4$, $t_j = 2$, $t_m =$ [illegible].

П27.9. Дано: $t_a = 1$, $t_b = 3$, $t_c = 3$, $t_d = 2$, $t_e = 4$, $t_f = 7$, $t_i = 4$, $t_j = 2$, $t_m = 8$.

П27.10. Дано: $t_a = 5$, $t_b = 4$, $t_c = 2$, $t_d = 6$, $t_e = 12$, $t_f = 8$, $t_i = 7$, $t_j = 1$, $t_m = 3$.

П27.11. Дано: $t_a = 5$, $t_b = 2$, $t_c = 6$, $t_d = 5$, $t_e = 1$, $t_f = 3$, $t_i = 8$, $t_j = 9$, $t_m = 2$.

П27.12. Дано: $t_a = 3$, $t_b = 3$, $t_c = 3$, $t_d = 4$, $t_e = 7$, $t_f = 1$, $t_i = 4$, $t_j = 6$, $t_m = 2$.

П27.13. Дано: $t_a = 6$, $t_b = 2$, $t_c = 1$, $t_d = 3$, $t_e = 5$, $t_f = 1$, $t_i = 12$, $t_j = 4$, $t_m = 7$.

П27.14. Дано: $t_a = 4$, $t_b = 4$, $t_c = 8$, $t_d = 4$, $t_e = 2$, $t_f = 10$, $t_i = 6$, $t_j = 1$, $t_m = 3$.

П27.15. Дано: $t_a = 2$, $t_b = 8$, $t_c = 3$, $t_d = 7$, $t_e = 2$, $t_f = 1$, $t_i = 13$, $t_j = 4$, $t_m = 12$.

П27.16. Дано: $t_a = 12$, $t_b = 3$, $t_c = 5$, $t_d = 2$, $t_e = 1$, $t_f = 5$, $t_i = 3$, $t_j = 4$, $t_m = 9$.

П27.17. Дано: $t_a = 8$, $t_b = 4$, $t_c = 4$, $t_d = 2$, $t_e = 2$, $t_f = 1$, $t_i = 1$, $t_j = 7$, $t_m = 5$.

П27.18. Дано: $t_a = 10$, $t_b = 4$, $t_c = 3$, $t_d = 2$, $t_e = 7$, $t_f = 6$, $t_i = 3$, $t_j = 7$, $t_m = 4$.

П27.19. Дано: $t_a = 7$, $t_b = 1$, $t_c = 4$, $t_d = 5$, $t_e = 6$, $t_f = 1$, t_i -13, $t_j = 5$, $t_m = 2$.

П27.20. Дано: $t_a = 4$, $t_b = 4$, $t_c = 6$, $t_d = 2$, $t_e = 5$, $t_f = 1$, $t_i = 7$, $t_j = 11$, $t_m = 4$.

П27.21. Некоторый проект предусматривает осуществление десяти операций *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *i*, ý, *m*, *n*. Списки непосредственно предшествующих им операций даны в табл. 27.2.

Таблица 27.2

Операции	*a*	**Ъ**	**c**	*d*	*e*	/	*i*	*j*	*m*	***n***
Списки предшествующих операций	—	—	—	a b	b c	d	f	f **e**	***j***	***i***
Длительности операций	**10**	**5**	15	18	19	**18**	8	**25**	**8**	**30**

Требуется:

а) построить сетевой график данного проекта и переименовать его вершины символами v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10} так, что для любой дуги (v_i, v_k) будет верно $i<k$;

б) определить наиболее ранние сроки начала всех операций, при которых достигается минимально возможная длительность t_{kr} всего проекта; найти величину t_{kr};

в) определить наиболее поздние сроки завершения всех операций, при которых длительность всего проекта останется равной t_{kr};

г) найти полные резервы времени всех операций и с их помощью выявить критические операции.

К27.1. Проект состоит из семи операций v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7. Длительности этих операций линейно зависят от величины г дополнительных вложений и описываются функциями вида t-qz. Известны также минимальные длительности операций. Все необходимые данные сведены в следующую табл. 27.3.

Таблица 27.3

Операции	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
Списки предшествующих операций	—	v_1	—	v_2 v_3	v_1	v_2 v_3	v_5 v_6
Значения константы t	10	12	20	16	14	0	6
Значения константы q	0.1	0.6	0.4	0.64	0.42	0	0.12
Минимальные длительности операций	6	5	12	10	6	0	4

Требуется найти такое распределение дополнительных средств между операциями, при котором длительность всего проекта будет минимальной. Сумма всех вложений не должна превысить 12 ден. ед.

К27.2. В условии задачи К27.1 изменены исходные данные, которые сведены в табл. 27.4.

Таблица 27.4

Операции	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
Списки предшествующих операций	—	v_1	—	v_2 v_3	v_1	v_2 v_3	v_5 v_6
Значения константы t	12	10	16	18	15	0	1
Значения константы q	0.2	0.2	0.62	0.71	0.22	0	0.22
Минимальные длительности операций	7	6	13	8	5	0	5

Требуется найти такое распределение дополнительных средств между операциями, при котором длительность всего проекта будет минимальной. Сумма всех вложений не должна превысить 16 ден. ед.

К27.3. В условии задачи К27.1 изменены исходные данные, которые сведены в табл. 27.5.

Таблица 27.5

Операции	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
Списки предшествующих операций	—	v_1	—	v_2 v_3	v_1	v_2 v_3	v_5 v_6
Значения константы t	11	11	8	17	14	0	9
Значения константы q	0.1	0.15	0.51	0.38	0.42	0	0.09
Минимальные длительности операций	8	7	14	12	8	0	6

Требуется найти такое распределение дополнительных средств между операциями, при котором длительность всего проекта будет минимальной. Сумма всех вложений не должна превысить 14 ден. ед.

К27.4. В условии задачи К27.1 изменены исходные данные, которые сведены в табл. 27.6.

Таблица 27.6

Операции	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
Списки предшествующих операций	—	—	—	V|	v_1	v_2 v_4	v_3 v_5 v_6
Значения константы t	14	20	10	0	4	12	5
Значения константы q	0.15	0.3	0.1	0	0.5	0.3	0.25
Минимальные длительности операций	8	12	6	0	ɔ	7	3

Требуется определить такие сроки выполнения каждой операции, при которых общая сумма дополнительных вложений будет минимальной, а длительность всего проекта не превысит 26.

К27.5. В условии задачи К27.4 изменены исходные данные, которые сведены в табл. 27.7.

Таблица 27.7

Операции	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
Списки предшествующих операций	—	—	—	V|	V|	v_2 v_4	v_3 v_5 V(,
Значения константы t	15	2!	И	0	5	13	6
Значения константы q	0.16	0.31	0.11	0	0.51	0.31	0.26
Минимальные длительности операций	9	13	7	0	4	8	4

Требуется определить такие сроки выполнения каждой операции, при которых общая сумма дополнительных вложений будет минимальной, а длительность всего проекта не превысит 30.

К27.6. В условии задачи К27.4 изменены исходные данные, которые сведены в табл. 27.8.

Таблица 27.8

Операции	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
Списки предшествующих операций	—	—	—	V|	v_1	v_2 v_4	v_3 v_5 v_6
Значения константы t	13	18	8	0	2	10	3
Значения константы q	0.12	0.27	0.07	0	0.45	0.26	0.22
Минимальные длительности операций	7	11	5	0	2	6	2

Требуется определить такие сроки выполнения каждой операции, при которых общая сумма дополнительных вложений будет минимальной, а длительность всего проекта не превысит 32.

К27.7. Проект состоит из семи операций v_1,v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7. Для каждой операции v_k известны нижняя ti_k и верхняя ta_k границы (уровни) их длительности, а также максимальные начальные затраты c_k и коэффициенты s_k уменьшения стоимости при увеличении продолжительности операции на единицу времени (начиная с минимального уровня длительности *tit)*. Все необходимые данные сведены в табл. 27.9

Таблица 27.9

Операции	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
Списки предшествующих операций	—	—	V|	V|	v_2 v_3	v_3	v_5
Нижний уровень длительности ti_k	9	10	0	3	4	5	8
Верхний уровень длительности ta_k	11	15	0	5	7	8	10
c_k	62	-10	0	75	129	0	1
s_k	2	5	0	5	4	10	3

Требуется, не превышая порога длительности проекта, равного 34, определить сроки выполнения каждой операции, при которых стоимость проекта будет минимальной.

К27.8. Решить задачу К27.7 при новых значениях констант ta_k и c_k, указанных в табл. 27.10.

Таблица 27.10

Операции	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
Верхний уровень длительности ta_k	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
c_k	32	90	0	215	129	300	101

К27.9. Решить задачу К27.7 при новых значениях констант ta_k и c_k, указанных в табл. 27.11.

Таблица 27.11

Операции	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
Верхний уровень длительности ta_k	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
c_k	38	92	0	220	132	304	104

К27.10. Решить задачу К27.7 при новых значениях констант ta_k и c_k, указанных в табл. 27.12.

Таблица 27.12

Операции	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
Верхний уровень длительности ta_k	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
c_k	35	82	0	210	125	288	98

Ответы, указания, решения

П27.1. Сетевой график данного проекта представлен на рис. 27.1, на котором вершины a, b, c, d, e,f, i,j, m, n переименованы соответственно в символы v_1,v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10} (рядом с вершинами указаны длительности операций).

В соответствии с алгоритмом А последовательно определяем величины e_i:

$e_1 = e_2 = e_3 = 0$;

$e_4 = \max\{e_1 + t_1, e_2 + t_2\} = \max\{0 + 10, 0 + 5\} = 10$;

$e_5 = \max\{e_2 + t_2, e_3 + t_3\} = \max\{0 + 5, 0 + 15\} = 15$;

$e_6 = \max\{e_4 + t_4\} = 10 + 18 = 28$;

$e_7 = \max\{e_6 + t_6\} = 28 + 18 = 46;$

$e_8 = \max\{e_6 + t_6, e_5 + t_5\} = \max\{28 + 18, 15 + 19\} = 46;$

$e_9 = \max\{e_7 + t_7\} = 46 + 8 = 54;$

$e_{10} = \text{тах}\{e_8 + t_8\} = 46 + 25 = 71;$

$t_{kr} = \max\{e_{10} + t_{10}, e_9 + t_9\} = \max\{71 + 8,\ 54 + 30\} = 84$, поскольку $T = \{v_9, v_{10}\}$.

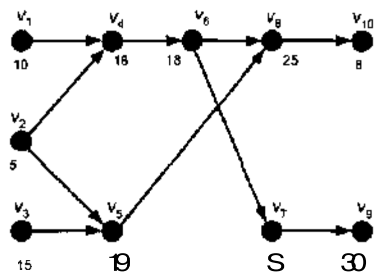


Рис. 27.1. Сетевой график проекта

В соответствии с алгоритмом Б последовательно определяем величины p_i:

А.. $= p_9 = t_{kr} = 84$;

$p_8 = \min\{p_{10} - t_{10}\} = 84 - 8 = 76$;

$p_7 = \min\{p_9 - t_9\} = 84\ 30 = 54$;

$p_6 = \min\{p_8 - t_8, p_7 - t_7\} = \min\{76 - 25,\ 54 - 8\} = 46;$

$p_5 = \min\{p_8 - t_8\} = 76 - 25 = 51;$

$p_4 = \min\{p_6 - t_6\} = 46 - 18 = 28;$

$p_3 = \min\{p_5 - t_5\} = 51 - 19 = 32;$

$p_2 = \min\{p_4 - t_4, p_5 - t_5\} = \min\{28 - 18\ 51 - 19\} = 10;$

$p_1 = \min\{p_4 - t_4\} = 28 - 18 = 10.$

Определим теперь полные резервы времени всех операций:

$r_1 = p_1 - e_1 - t_1 = 0$, $r_2 = p_2 - e_2 - t_2 = 5$, $r_3 = p_3 - e_3 - t_3 = 17$,

$r_4 = p_4 - e_4 - t_4 = 0$, $r_5 = p_5 - e_5 - t_5 = 17$, $r_6 = p_6 - e_6 - t_6 = 0$,

$r_7 = p_7 - e_7 - t_7 = 0$, $r_8 = p_8 - e_8 - t_8 = 5$, $r_9 = p_9 - e_9 - t_9 = 0$,

$r_{10} = P\backslash ч - e_{10} - t_{10} = 5$.

Критические операции: v_1, v_4, v_6, v_7, v_9.

Общие указания к решению задач К27.1 - К27.10 с помощью Mathcad

При задании целевых функций и некоторых ограничений удобно использовать операцию "векторизации" $\overrightarrow{V(x, y, \ldots, t)}$ над некоторым алгебраическим выражением $V(x, y, \ldots, t)$, которое составлено из арифметических операций над векторами x, y, . . -, t одинаковой размерности. Как уже отмечалось в *гл. 10,* векторизация производит арифметические операции над координатами векторов x, y, . . ., t, имеющих одинаковые номера. Например, если в модели II функции $f_k(z_k)$ линейны и равны $t_k - q_k z_k$, где t_k, q_k - заданные константы, то одна из групп ограничений данной модели может быть записана так: $y\text{-}x = \overrightarrow{t - q \cdot z}$ где *к-е* координаты векторов t, q, z равны соответственно t_k, q_k, z_k. Целевую функцию модели III можно записать так:

$$f(x,y) := \sum \overrightarrow{c - s \cdot (y - x - ti)}$$

где *к-е* координаты векторов c, s, x, y, ti равны соответственно c_k, s_k, x_k, y_k, ti_k.

При выборе метода решения данных оптимизационных задач с помощью встроенной функции *minimize* рекомендуется сделать следующее: щелкнуть правой кнопкой мыши на функции *minimize* в блоке решения соответствующей задачи и выбрать опцию **линейный.**

К27.1. Ответы: $z_1 = z_3 = z_5 = z_6 = z_7 = 0$, $z_2 = 2.625$, $z_4 = 9.375$, $t_{kr} = 30.425$.

К27.4. Ответы: общая минимальная сумма дополнительных вложений равна 36.667, причем $z_2 = 20$, $z_6 = 16.667$, $z_1 = z_3 = z_4 = z_5 = z_7 = 0$.

К27.7. Ответы: минимальная стоимость проекта равна 170, при этом величины e_i и p_j могут быть такими: $e_1 = 4$, $e_2 = 0$, $e_3 = e_4 = e_5 = e_6 = 15$, $e_7 = 22$; $p_1 = p_2 = p_3 = 15$, $p_4 = 20$, $p_5 = 22$, $p_6 = 23$, $p_7 = 32$.

К27.8. Ответы: минимальная стоимость проекта равна 519, при этом величины e_i и p_j таковы: $e_1 = e_2 = 0$, $e_3 = e_5 = e_6 = 10$, $e_4 = 9$, $e_7 = 26$, $p_1 = 9$, $p_2 = p_3 = 10$, $p_5 = 26$, $p_4 = p_6 = p_7 = 34$.

Глава 28

Динамическое программирование

Рассмотрим систему, которая с течением времени меняет свои состояния $s_0, s_1, \ldots, s_n$, т. е, в системе происходит некоторый процесс, начинающийся с состояния s_0. По крайней мере, одно из состояний $s_1, \ldots, s_n$ является конечным — при переходе системы в такое состояние процесс, происходящий в ней. завершается. Предположим, что каждое состояние s_i описывается набором значений r параметров $p_1, p_2, \ldots, p_r$ (в этом случае система называется r-параметрической); кроме того, любое состояние s_i связано с множеством $\varphi(s_i)$ локальных управлений, каждое из которых способно переводить систему из состояния s_i в некоторое другое состояние s_k, причем обязательно $k > i$, т. е. рассматриваются системы без обратных связей. Управление из $\varphi(s_i)$, переводящее систему из состояния s_i в состояние s_k, обозначим u_{ik}. Каждому управлению u_{ik} соответствуют доходы (затраты), связанные с его реализацией и равные a_{ik}, $a_{ik} \geqq 0$. Задача поиска оптимального управления данной системы состоит в том, чтобы найти такую последовательность локальных управлений

$$s_0 \xrightarrow{u_{0j}} s_j \xrightarrow{u_{ji}} s_i \xrightarrow{u_{ik}} s_k \xrightarrow{u_{kt}} \ldots \xrightarrow{u_{rm}} s_m \xrightarrow{u_{me}} s_e$$

из начального состояния s_0 в одно из конечных состояний s_e, при котором суммарная величина доходов (затрат)

$$a_{0j} + a_{ji} + a_{ik} + \ldots + a_{me}$$

была бы максимальной (минимальной). Данная последовательность локальных управлений называется оптимальным управлением из состояния s_0.

Сформулируем эту задачу в терминах теории графов. Пусть $G = (V, E)$— взвешенный орграф с множеством вершин $V = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$, в котором пара $\{s_i, s_k\}$ является дугой, если и только если в $\varphi(s_i)$ существует управление u_{ik}. Вес дуги (s_i, s_k) равен a_{ik} и непременно $k > i$. $D^+(s_0) = 0$, и в G только вершина s_0 обладает подобным свойством. Вершину s_e, для которой $D(s_e) = 0$, назовем конечной в орграфе G. Исходная задача поиска оптимального управления эквивалентна задаче нахождения в орграфе G пути максимальной (минимальной) длины, соединяющего вершину s_0 с одной из конечных вершин. Этот путь назовем оптимальным путем из вершины s_0.

Процедура решения задачи оптимального управления методом динамического программирования основана на следующем *принципе оптимальности Беллмана*: при рассмотрении состояния s_i нужно выбирать такое локальное управление u_{ik} в $\varphi(s_i)$, которое в совокупности с оптимальным управлением из состояния s_k составляет оптимальное управление из состояния s_i. На языке теории графов этот принцип можно сформулировать следующим образом. Предположим, что уже были найдены длины $w_{i+1}, w_{i+2}, \ldots, w_n$ оптимальных путей из вершин $s_{i+1}, s_{i+2}, \ldots, s_n$ соответственно, а множество *D (si)* состоит из дуг $(s_i, s_{i_1}), (s_i, s_{i_2}), \ldots, (s_i, s_{i_t})$. Тогда w_i равно наибольшей (наименьшей) из сумм

$$a_{ii_1} + w_{i_1},\ a_{ii_2} + w_{i_2}, \ldots, a_{ii_t} + w_{i_t},$$

т. е. $w_i = \operatorname{extr} \{a_{ik} + w_k\}$, где *extr* обозначает максимум или минимум в зависимости от того, являются ли веса a_{ik} доходами или затратами соответственно. Рассмотрим применение описанного выше метода к решению двух экономических задач.

Задача о замене оборудования состоит в определении оптимальных сроков замены старого оборудования новым. Старение оборудования включает его физический и моральный износ, в результате чего растут производственные затраты, затраты на ремонт и обслуживание, снижаются производительность и ликвидная стоимость. Критерием оптимальности являются суммарные затраты на эксплуатацию в течение планового периода. Формально рассмотрим эту задачу в упрощенной постановке. Даны: первоначальная стоимость *cost* оборудования; ликвидная стоимость *likv*(i) оборудования, возраст которого /лет; стоимость *zatr*(i) содержания в течение одного года оборудования, которое к началу этого годового периода уже эксплуатировалось ровно i лет. В конце эксплуатационного периода имеющееся оборудование должно быть продано. Требуется найти оптимальную стратегию замены оборудования за период в *и* лет, минимизирующую суммарные затраты. Очевидно, что текущее состояние данной системы определяется двумя параметрами / и *к*, где k — количество лет, прошедших с начала первого приобретения оборудования, /— возраст оборудования, которое эксплуатируется на данный момент. Таким образом, состояния системы удобно обозначать через s_{ik}. Множество $\varphi(s_{ik})$ состоит из локальных управлений "замена", "сохранение": "замена" означает продажу оборудования и покупку нового, а "сохранение" — продолжение эксплуатации оборудования еще в течение ближайшего года. Локальному управлению "замена" соответствуют затраты, равные *cost* + *zatr*(0) - *likv(i),* а локальному управлению "сохранение" соответствуют затраты, равные *zatr*(i). Кроме того, "замена" переводит систему из состояния s_{ik} в состояние $s_{1,k+1}$, а "сохранение" — из состояния s_{ik} в состояние $s_{i+1,k+1}$. Добавим фиктивное состояние s_f, в которое переходит система после окончания эксплуатационного периода в результате продажи имеющегося оборудования (переход в состояние s_f может произойти из состояний $s_{1n}, s_{2n}, \ldots, s_{nn}$).

Рассмотрим данную задачу при следующих исходных данных: $n = 3$, *cost* = 8000, *likv*(1)=4000, *likv(2)* =3000, *likv*(3)= 1000, *zatr*(0) = 1400, *zatr*(1) = 1500, *zatr*(2) = 1700. Используя вышеописанную графовую интерпретацию общей задачи динамического программирования, построим взвешенный орграф *G,* изображенный на рис. 28.1, чей путь минимальной длины, соединяющий вершины s_{00}, s_f, и будет определять оптимальную стратегию замены оборудования данной системы (веса указаны рядом с соответствующими дугами). Хотя в описании принципа динамического программирования указано, что затраты должны быть неотрицательными, отрицательные веса дуг не влияют на решение задачи, так как эти дуги ведут в конечную вершину.

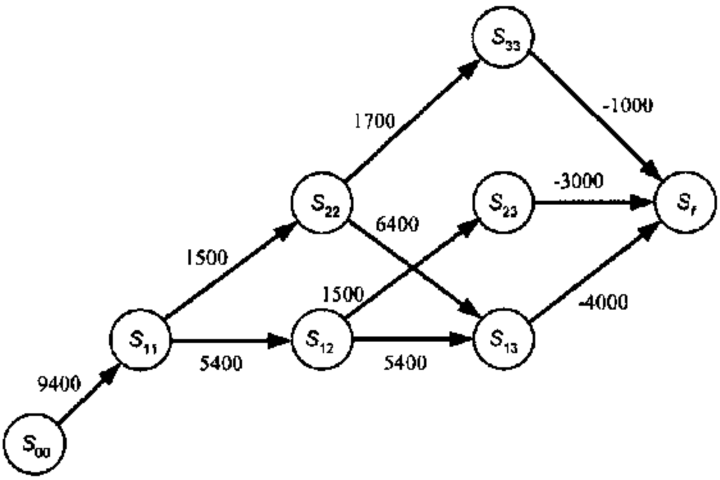


Рис. 28.1. Взвешенный орграф G задачи о замене оборудования

Определим теперь путь минимальной длины из s_{00} в s_f, используя принцип оптимальности Беллмана (при этом для каждой вершины s_{ik} "запоминается" ближайшая вершина pot_{ik}, указывающая направление оптимального пути из s_{ik} в sj):

$w_{33} = -1000$, $w_{23} = -3000$, $w_{13} = -4000$, $pot_{33} = pot_{23} = pot_{13} - s_f$,

$w_{22} = \min\{1700 + w_{33}, 6400 + w_{13}\} = \min\{1700 - 1000, 6400 - 4000\} = 700$,

$pot_{22} = s_{33}$,

$w_{12} = \min\{1500 + w_{23}, 5400 + w_{13}\} = \min\{1500 - 3000,\ 5400 - 4000\} = -1500$,

$pot_{12} = s_{23}$,

$w_{11} = \min\{1500 + w_{22}, 5400 + w_{12}\} = \min\{1500 + 700,\ 5400 - 1500\} = 2200$,

$pot_{11} = s_{22}$, $w_{00} = 9400 + w_{11} = 11600$, $pot_{00} = s_{11}$.

Итак, оптимальный путь проходит через вершины s_{00}, $pot_{00} = s_{11}$, $pot_{11} = s_{22}$, $pot_{22} = s_{33}$, $pot_{33} = s_f$. Найденный оптимальный путь определяет оптимальную стратегию замены оборудования за три года: "сохранение", "сохранение", "сохранение".

Рассмотрим теперь задачу об оптимальном распределении денежных средств между предприятиями. Группе из n предприятий $П_1$, $П_2$, ...,$П_n$ выделяются дополнительные средства на реконструкцию и модернизацию производства. Известна матрица A, в которой на позиции (i, k) находится величина $a_{ik} \geq 0$, равная приросту выпуска продукции на предприятии $П_k$ при выделении ему дополнительных средств в размере

/ден. ед. ($i = 0, 1, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$). Требуется так распределить между предприятиями общую сумму средств в m ден. ед., чтобы суммарный прирост выпуска продукции был максимальным.

Данную систему также представим как двухпараметрическую: текущее состояние системы определим двумя параметрами i и k, которые показывают, что между первыми k предприятиями $П_1, П_2, \dots, П_k$ уже распределена сумма в /ден. ед. Поэтому состояния данной системы будем обозначать через s_{ik}. Множество $\varphi(s_{ik})$ состоит из локальных управлений "выделить r ден. ед. предприятию $П_{k+1}$", $r = 0, 1, \dots, m - i$. Этим управлениям соответствуют приросты выпуска продукции $a_{r,k+1}$, $r = 0, 1, \dots, m - i$. Кроме того, управление "выделить r ден. ед. предприятию $П_{k+1}$" переводит систему из состояния s_{ik} в состояние $s_{i+r,k+1}$. Множество конечных состояний есть $s_{0n}, s_{1n}, \dots, s_{mn}$.

Рассмотрим данную задачу при следующих исходных данных:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 9 & 11 & 13 \\ 17 & 34 & 28 \end{pmatrix}, n = 3, m = 2.$$

Используя вышеописанную графовую интерпретацию общей задачи динамического программирования, построим взвешенный орграф G, изображенный на рис. 28.2, чей путь максимальной длины, соединяющий вершину s_{00} с одной из конечных вершин, будет определять оптимальное распределение денежных средств между тремя предприятиями.

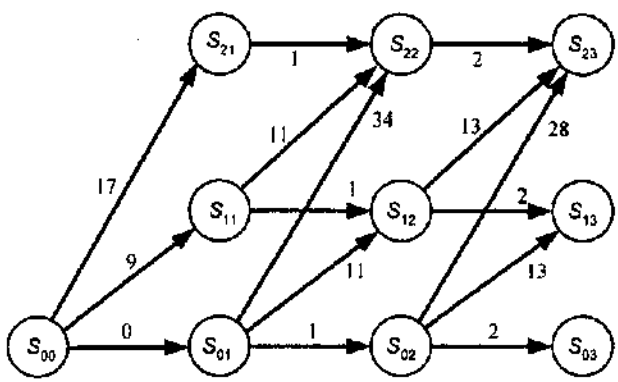


Рис. 28.2. Взвешенный орграф G задачи об оптимальном распределении средств

Определим теперь путь максимальной длины из s_{00} в одну из конечных вершин, используя принцип оптимальности Беллмана (при этом для каждой вершины s_{ik} "запоминается" ближайшая вершина pot_{ik}, указывающая направление оптимального пути из s_{ik}):

$$w_{23} = w_{13} = w_{03} = 0\ ,\ w_{22} = 2\ ,\ pot_{22} = s_{23}\ ,$$

$$w_{12} = \max\{13 + w_{23}, 2 + w_{13}\} = 13,\ \ pot_{12} = s_{23}\ ,$$

$$w_{02} = \max\{28 + w_{23}, 13 + w_{13}, 2 + w_{03}\} = 28,$$

$$pot_{02} = s_{23},\ w_{21} = 1,\ pot_{21} = s_{22},$$

$$w_{11} = \max\{11 + w_{22}, 1 + w_{12}\} = \max\{11 + 2, 1 + 13\} = 14,$$

$$pot_{11} = s_{12},$$

$$w_{01} = \max\{34 + w_{22}, 11 + w_{12}, 1 + w_{02}\} = \max\{34 + 2, 11 + 13, 1 + 28\} = 36,$$

$$pot_{01} = s_{22},$$

$$w_{00} = \max\{17 + w_{21}, 9 + w_{11}, 0 + w_{01}\} = \max\{17 + 1, 9 + 14, 0 + 36\} = 36,$$

$$pot_{00} = s_{01}.$$

Итак, оптимальный путь проходит через вершины $s_{00}, pot_{00} = s_{01}, pot_{01} = s_{22}, pot_{22} = s_{23}$. Найденный оптимальный путь определяет оптимальное распределение денежных средств между тремя предприятиями: второму предприятию необходимо выделить всю сумму в 2 ден. ед., остальным — ничего. При этом будет достигнут максимальный прирост выпуска продукции, равный 36.

Компьютерный раздел

Кнопка $\boxed{\texttt{break}}$ подпанели **Программирование** (Programming) вводит оператор прерывания `break`, который, как правило, используется совместно с условным оператором *if;* при этом *break* вводится на месте левой метки оператора `if`. Оператор *break* прерывает выполнение цикла и осуществляет переход к строке программного модуля, следующей за прерванным циклом; при этом сохраняются последние значения всех переменных цикла. Например, в результате выполнения программного модуля

```
a ← 0
for  i ∈ 1..10
    a ← a + 1
    break if i = 6
a
```

переменная *c* примет значение 6.

Следует отметить, что в случае вложенных циклов прерывается именно тот цикл, в блоке операторов которого присутствует оператор прерывания *break*. Например, в результате выполнения программного модуля c:=

```
b ← 0
for i ∈ 1..7
  for j ∈ 1..9
    b ← b+1
    break if j = 3
b
```

переменная c примет значение 21. Действительно, внутренний цикл с ранжированной переменной *j* будет прерываться всякий раз после трех выполнений, а число таких прерываний будет равно 7, поскольку внешний цикл с ранжированной переменной i будет выполняться 7 раз. А вот в результате выполнения программного модуля

c:=

```
b ← 0
for i ∈ 1..7
    b ← b + 1
    for j ∈ 1..9
        break if j = 3
b
```

переменная *c* примет значение 7.

Задачи для самостоятельного решения

Общая формулировка задач П28.1-П28.20 и К28.1 в буквенных обозначениях

Плановый период эксплуатации оборудования рассчитан на *n* лет. В конце этого периода имеющееся оборудование должно быть продано. Стоимость нового оборудования равна *cost*. Даны также ликвидная стоимость *likv(i)* и затраты *zatr*(*i*) на содержание в течение одного года оборудования возраста *i* лет, $i = 0, 1, \ldots, n$. Требуется найти оптимальную стратегию замены оборудования за указанный временной период, минимизирующий суммарные затраты.

П28.1. Дано: $n = 4$, $cost = 8500$,

i	0	1	2	3	4
$likv(i)$	—	6000	5000	3000	1000
$zatr(i)$	600	800	1100	1500	—

П28.2. Дано: $n = 4$, $cost = 3000$,

i	0	1	2	3	4
$likv(i)$	—	1200	1000	800	100
$zatr(i)$	400	600	1000	1900	—

П28.3. Дано: $n = 4$, $cost = 8400$,

i	0	1	2	3	4
$likv(i)$	—	7000	4000	3000	1000
$zatr(i)$	200	2000	2100	2400	—

П28.4. Дано: $n = 4$, $cost = 1000$,

i	0	1	2	3	4
$likv(i)$	—	800	500	300	100
$zatr(i)$	400	1000	1700	3400	—

П28.5. Дано: $n = 4$, $cost = 9000$,

i	0	1	2	3	4
$likv(i)$	—	1100	700	500	200
$zatr(i)$	100	1000	1600	2000	—

П28.6. Дано: $n = 4$, $cost = 4000$,

i	0	1	2	3	4
$likv(i)$	—	3400	2000	1000	900
$zatr(i)$	200	600	1300	3000	—

П28.7. Дано: n = 5, $cost$=5400,

i	0	1	2	3	4	5
$likv(i)$	—	3500	3000	2400	2000	1000
$zatr(i)$	500	2000	2100	2400	2600	—

П28.8. Дано: n=5, $cost$ =1100,

i	0	1	2	3	4	5
$likv(i)$	—	1000	900	450	400	100
$zatr(i)$	800	1700	1900	2900	4200	—

П28.9. Дано: n=5, $cost$ = 3200,

i	D	1	2	3	4	5
$likv(i)$	—	1400	700	500	400	200
$zatr(i)$	200	700	1500	3200	3700	—

П28.10. Дано: «=5, $cost$ = 3000,

i	0	1	2	3	4	5
$likv(i)$	—	2000	1300	900	500	200
$zatr(i)$	400	800	1300	1400	2100	—

П28.11. Дано: n=6, $cost$ = 3000,

i	0	1	2	3	4	5	6
$likv(i)$	—	2100	1800	1100	800	100	20
$zatr(i)$	700	900	1200	1900	2400	3100	—

П28.12. Дано: n=6, cos/ = 2600,

/	0	1	2	3	4	5	6
$likv(i)$	—	2200	1300	1000	300	100	70
$zatr(i)$	100	300	800	1300	2400	3100	—

П28.13. Дано: $n = 6$, $cost = 1500$,

i	0	1	2	3	4	5	6
$likv(i)$	—	1400	600	500	300	100	90
$zatr(i)$	1200	1600	2500	3000	3800	4000	—

П28.14. Дано: $n = 6$, $cost = 4000$,

i	0	1	2	3	4	5	6
$likv(i)$	—	2000	1800	1000	500	300	100
$zatr(i)$	400	1100	1700	2500	3500	4100	—

П28.15. Дано: $n = 7$, $cost = 5500$,

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$likv(i)$	—	5000	4200	2300	1500	800	300	200
$zatr(i)$	400	700	1200	1900	2400	3500	3700	—

П28.16. Дано: $n = 7$, $cost = 2000$,

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$likv(i)$	—	1800	1200	900	600	500	300	200
$zatr(i)$	900	1300	1500	1600	1700	2500	3100	—

П28.17. Дано: $n = 7$, $cost = 1100$,

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$likv(i)$	—	900	800	600	500	300	200	20
$zatr(i)$	50 0	900	1100	1200	1400	2500	2700	"

П28.18. Дано: $n = 7$, $cost = 3000$,

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$likv(i)$	—	1900	1300	900	500	400	300	130
$zatr(i)$	90	100	400	500	800	1000	1400	—

П28.19. Дано: $n = 8$, $cost = 1000$,

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$likv(i)$	—	900	700	600	400	200	100	50	20
$zatr(i)$	80	200	500	600	800	900	1100	1300	—

П28.20. Дано: $n = 8$, $cost = 1300$,

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$likv(i)$	—	1000	900	800	600	500	400	300	200
$zatr(i)$	200	250	300	400	550	700	900	1000	—

К28.1. Дано: $n = 10$, $cost = 7500$, а данные в таблице необходимо умножить на 10.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$likv(i)$	—	600	500	300	100	95	95	84	80	40	35
$zatr(i)$	60	80	110	150	155	155	160	162	250	300	—

К28.2. Разработать общий алгоритм решения на базе Mathcad задачи большой размерности о замене оборудования.

К28.3. Решить задачи П28.1 - П28.20, опираясь на решение задачи К28.2.

К28.4. Группе из 4 предприятий выделяются дополнительные средства. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 12 & И & 16 \\ 31 & 26 & 36 & 37 \\ 42 & 36 & 45 & 46 \\ 62 & 54 & 60 & 63 \\ 76 & 78 & 77 & 80 \end{pmatrix},$$

в которой на позиции (i, k), $i = 0, 1, ..., m$, $к = 1, 2, ..., n$, находится величина, равная приросту выпуска продукции на k-м предприятии при выделении ему дополнительных средств в размере в /ден. ед. Требуется так распределить общую сумму в 5 ден. ед., чтобы суммарный прирост выпуска продукции был максимальным.

К28.5. Группе из 8 предприятий выделяются денежные средства в размере 10 ден. ед. Дана матрица (28.1), в которой на позиции (i, k), $i = 0, 1, ..., m$, $к = 1, 2, ..., n$, находится величина, равная приросту выпуска продукции на k-ом предприятии при выделении ему дополнительных средств в размере в /ден. ед. Требуется так распределить дополнительные денежные средства между предприятиями, чтобы суммарный прирост выпуска продукции был максимальным.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 10 & 12 & 11 & 16 & 12 & 11.5 & 13.4 & 16.8 \\ 31 & 26 & 36 & 37 & 28 & 28 & 32 & 30.6 \\ 42 & 36 & 45 & 46 & 44 & 42 & 43 & 39.5 \\ 62 & 54 & 60 & 63 & 57 & 56 & 68.8 & 60 \\ 76 & 78 & 77 & 80 & 76 & 77 & 79 & 80 \\ 79 & 79.9 & 82 & 82.7 & 83 & 84 & 80 & 80.5 \\ 92 & 95 & 90 & 91 & 91 & 86 & 83 & 86 \\ 100 & 103 & 108 & 110 & 99 & 98.9 & 92 & 112 \\ 112 & 112 & 120 & 112 & 104 & 105 & 103 & 113 \\ 125 & 116 & 120.8 & 116 & 119 & 149 & 120 & 135 \end{pmatrix} \qquad (28.1)$$

К28.6. Разработать общий алгоритм решения на базе Mathcad задачи большой размерности об оптимальном распределении средств.

Ответы, указания, решения

К28.1. Ответы: минимальные суммарные затраты будут равны 19 500, если применить следующую оптимальную стратегию замены оборудования: "сохранение", "сохранение", "замена", "сохранение", "замена", "сохранение", "замена", "сохранение", "замена", "сохранение".

К28.2. Следующий алгоритм решает задачу о замене оборудования на базе Mathcad. Вначале необходимо ввести исходные данные: векторы `lik` и `zatr`, i-е координаты которых содержат соответственно ликвидную стоимость и затраты на содержание оборудования возраста i лет; начальную стоимость `cost` и эксплуатационный период п. Следующий программный блок с помощью матрицы ***pot*** (см. численный пример в данной главе) формирует вектор *kritput (pot)* оптимальной стратегии замены оборудования:

```
kritput(pot) :=
    v0 ← "сохранить"
    for  k ∈ 1..n − 1
        i ← pot_{i,k}
        v_k ← "заменить"   if  i = 1
        v_k ← "сохранить"  otherwise
    v
```

Следующий программный блок формирует матрицу pot и элементы w_{ik} матрицы w, равные длинам оптимальных путей из вершин s_{ik}:

```
v:=  for  i ∈ 1..n
          w_{i,n} ← −likv_i
     for  к е л - 1, л - 2 . . 1
          for  i 6 1..k
               b_0 ←
               b_1 ← w_{i,k+1} - likv_i + cost + zatr_0
               if  b_0 < b_1
                    w_{i,k} ← b_0
                    pot_{i,k} ← i + 1
               otherwise
                    w_{i,k} ← b_1
                    pot_{i,k} ← 1
     w_{0,0} ← w_{1,1} + cost + zatr_0
     stack(kritput(pot), w_{0,0})
```

К28.4. Ответы: первому предприятию дополнительных средств выделять не следует, второму необходимо выделить одну ден. ед., третьему и четвертому— по 2 ден. ед. При таком распределении средств обший прирост выпуска продукции будет максимальным и составит 85.

К28.5. Ответы: первому, пятому, шестому и седьмому предприятиям дополнительных средств выделять не следует, второму необходимо выделить 5 ден. ед., третьему и четвертому — по 2 ден. ед., восьмому — 1 ден. ед. При таком распределении средств общий прирост выпуска продукции будет максимальным и составит 174.8.

К28.6. При вводе исходной матрицы A необходимо предусмотреть в ней дополнительный (самый левый) столбец, состоящий из одних нулей. Это связано с тем, что в данной задаче удобно нумеровать строки и столбцы матрицы, начиная с нуля. Следующий программный блок формирует матрицы w и pot.

```
v:= | for j ∈ 0..m
    |     w_{j,n} ← 0
    | for k ∈ n-1, n-2..0
    |     for i ∈ 0..m
    |         | max ← -1
    |         | for r ∈ 0..m - 1
    |         |     if w_{i+r,k+1} + a_{r,k+1} > max
    |         |         | max ← w_{i+r,k+1} + a_{r,k+1}
    |         |         | w_{i,k} ← max
    |         |         | pot_{i,k} ← i + r
    |         |
    |         | break if k = 0
    | stack(kritput(pot), w_{0,0}))
```

После завершения этого программного блока элемент w_{ik} будет равен длине максимального пути из вершины s_{ik} в одну из конечных вершин s_{jn}, $pot_{i,k}$ = i + r — числу ден. ед., распределенных между первыми k + 1 предприятиями при условии, что i — число ден. ед., распределенных между первыми k предприятиями, $0 \le r \le m-i$, i = 0, 1,..., m, w_{00} — длина максимального пути из s_{00} в одну из конечных вершин.

Следующий программный блок с помощью матрицы pot формирует вектор $kritput(pot)$ оптимального распределения денежных средств между предприятиями:

```
kritput(pot) :=
    | i ← 0
    | for k ∈ 0..n - 1
    |     | v_k ← pot_{i,k} - i
    |     | i ← pot_{i,k}
    | v
```

Поскольку pot_{ik} — число ден. ед., распределенных между первыми $k+1$ предприятиями, а i — число ден. ед., распределенных между первыми k предприятиями, то pot_{ik} - i — число ден. ед., выделенных $(k+1)$-му предприятию.

Глава 29

Матричные игры

В природе и обществе часто встречаются ситуации, в которых те или иные участники имеют несовпадающие интересы. Такие ситуации называются конфликтными ситуациями. Характерной их особенностью является то, что участники ситуаций не знают действий, которые предпринимаются или будут предприниматься другими участниками, т. е. каждый из них находится в состоянии неопределенности. Возможный исход событий зависит от поведения всех участников ситуации.

В качестве примера конфликтных ситуаций можно привести военные столкновения, выборы в парламент, спортивные соревнования, конкуренцию при производстве и сбыте некоторого товара, освоение нового месторождения полезных ископаемых и т. д. Математические модели конфликтных ситуаций называются играми, а их участники - игроками. Теория игр занимается изучением конфликтных ситуаций и поиском оптимального поведения игроков в них.

В этой главе будут рассмотрены простейшие игры: матричные игры двух лиц с нулевой суммой. Пусть два игрока A и B располагают конечным числом возможных действий: игрок A может сделать любой выбор из множества $A_1, A_2, ..., A_m$, игрок B — любой выбор из множества B_1, B_2, ..., B_n. Выборы A_i и B_k, $i = 1, 2, ..., m$, $k = 1, 2, ..., n$, называются чистыми стратегиями игроков A и B соответственно. С этими стратегиями связана так называемая платежная матрица

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{29.1}$$

в которой элемент a_{ik} равен выигрышу игрока A и проигрышу игрока B, если игрок A применяет чистую стратегию A_i ("делает ход A_i"), а игрок B применяет чистую стратегию B_k ("делает ход B_k"). Прежде чем сформулировать, в чем заключается решение игры, рассмотрим следующий пример.

Пример

Пусть платежная матрица равна

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Минимальный выигрыш игрока *A* при выборе им стратегии A_1 равен минимальному из элементов первой строки матрицы *M*, равному $\min\{1,2,3\}=1$, а при выборе стратегии A_2 — минимальному из элементов второй строки, равному $\min\{6,5,4\}=4$. Однако в силах игрока А выбрать "лучшее из худшего", т. е. $\max\{1,4\}=4$. Следовательно для получения игроком *A* максимального гарантированного выигрыша он должен выбирать стратегию *Аг.* Выигрыш в этом случае будет не меньше 4. Максимальный проигрыш игрока В при выборе им стратегии B_1 равен максимальному из элементов первого столбца, равному тах$\{1,6\}=6$, при выборе стратегии B_2 — максимальному из элементов второго столбца, равному тах$\{2,5\}=5$, и, наконец, при выборе стратегии *Въ* — максимальному из элементов третьего столбца, равному $\max\{3,4\}=4$. Также в силах игрока *B* выбрать "лучшее из худшего", т.е. $\min\{6,5,4\}=4$. Следовательно для получения игроком 6 минимально возможного проигрыша, он должен выбирать стратегию Вз. Проигрыш в этом случае будет не больше 4.

Отметим, что если игрок *A* будет придерживаться стратегии *Аг,* а игрок *B* откажется от стратегии B_3, то проигрыш игрока *B* увеличится. Аналогичное произойдет, если игрок *B* будет придерживаться стратегии Вз, а игрок *A* откажется от стратегии A_2: выигрыш игрока *A* уменьшится.

Обобщим рассмотренный пример на общий случай платежной матрицы (29.1). Число $\alpha_i=\min\limits_k a_{ik}$ есть минимально возможный выигрыш игрока *A,* применяющего чистую стратегию A_i, а число $\beta_k=\max a_{ik}$ — максимально возможный проигрыш игрока *B,* применяющего чистую стратегию B_k. Далее, число $a^*=\max\limits_i\min\limits_k a_{ik}$, называемое максимином в чистых стратегиях, есть минимальный гарантированный выигрыш *A* при некоторой его чистой стратегии и при любой игре *B*, а число $\beta^*=\min\limits_k\max\limits_i a_{ik}$, называемое **минимаксом** в чистых стратегиях, есть максимальный гарантированный проигрыш *B* при некоторой его чистой стратегии и при любой игре *A.* Чистые стратегии A_r и B_s называются оптимальными, если $a_{rs}=\alpha^*=\beta^*$.

Определение

Решить игру с платежной матрицей (29.1) в чистых стратегиях означает найти оптимальные чистые стратегии.

Оптимальные чистые стратегии A_r, B_s обеспечивают ситуацию равновесия, заключающуюся в равенстве

$$a_{rs}=\max_i\min_k a_{ik}=\min_k\max_i a_{ik} \qquad (29.2)$$

Не для всякой платежной матрицы существуют оптимальные чистые стратегии и, следовательно, достигается ситуация равновесия. Например, игра с платежной матрицей $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ не имеет решения в чистых стратегиях. Однако ниже будет показано, что если игра будет продолжаться достаточно долго, то ситуация равновесия всегда достижима.

Утверждение 29.1. $\alpha^* \le \beta^*$.

Доказательство утверждения дано в задаче Т29.1.

Определим теперь функцию $m + n$ переменных $v(x_1, \ldots x_m, y_1, \ldots, y_n) = \sum^{m} \sum^{n} a_{ik} x_i y_k$, **называемую** платежной функцией игры с матрицей (29.1), и предположим, что игра длится e ходов: за каждый ход игроки A и B, применив некоторые стратегии A_i и B_k, соответственно выигрывают и проигрывают a_{ik}. Очевидно, средний выигрыш (проигрыш) игрока A (игрока B) будет равен сумме всех выигрышей (проигрышей) за все е ходов, деленной на e. Обозначим через p_i (q_k) частоту, с которой игрок A (игрок B) выбирал чистую стратегию A_i (B_k), т. е. $p_i = \frac{a_i}{e}$ $\left(q = \frac{b_k}{e}\right)$, где a_i (b_k) есть число применений стратегии A_i (B_k). Очевидно, $p_1 + \ldots + p_m = 1$, $q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1$.

Определение

Точки $p = (p_1, \ldots p_m) \in Af^m$ и $q = (q_1, \ldots, q_n) \in Af^n$, координаты которых удовлетворяют условиям $p_i \ge 0$, $q_k \ge 0$, $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$, $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1 > q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1$ называются смешанными стратегиями игроков A и B соответственно.

Из теории вероятностей известно, что в случае статистической независимости выбора чистых стратегий от хода к ходу, частоты p_i и q_k приближаются к вероятностям pr_i и qr_k событий "игрок A применит стратегию A_i" и "игрок B применит стратегию B_k" соответственно, а средний выигрыш (проигрыш) приближается к величине $v(pr_1, pr_2, \ldots, pr_m, qr_1, qr_2, \ldots, qr_n)$ — математическому ожиданию выигрыша (проигрыша). Поэтому величину $v(p, q)$ резонно назвать средним выигрышем (проигрышем) игрока A (игрока B) при смешанных стратегиях $p = (p_1, \ldots p_m)$ и $q = (q_1, \ldots, q_n)$.

Пусть p и q являются смешанными стратегиями игроков A и B соответственно. Число $\min\limits_{q} v(p, q)$ есть минимально возможный средний выигрыш игрока A, применяющего смешанную стратегию p, а число $\max\limits_{p} v(p, q)$ есть максимально возможный средний проигрыш игрока B, применяющего стратегию q. Далее, число $\max\limits_{p} \min\limits_{q} v(p, q)$, называемое **максимином** в смешанных стратегиях, есть минимальный гарантированный выигрыш игрока A при некоторой его смешанной стратегии и при любой смешанной стратегии игрока B, а число $\min\limits_{q}\max\limits_{p} v(p, q)$, называемое **минимаксом** в смешанных стратегиях, есть максимальный гарантированный проигрыш игрока B при некоторой его смешанной стратегии и при любой смешанной стратегии игрока A.

Определение

Смешанные стратегии p^* и q^* называются оптимальными, если

$$v(p^*, q^*) = \max_{p}\min_{q} v(p, q) = \min_{q}\max_{p} v(p, q) \qquad (29.3)$$

Оптимальные смешанные стратегии p^* и q^* обеспечивают ситуацию равновесия, заключающуюся в равенстве (29.3). Решить игру с платежной матрицей (29.1) в смешанных стратегиях означает найти оптимальные смешанные стратегии.

Отметим, что каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной. Так, чистая стратегия A_i есть точка $e_i^m = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ из A^m, i-я координата которой равна 1, а остальные координаты нулевые. Аналогично чистая стратегия B_k есть точка $e_k^n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ из A^n, k-я координата которой равна 1, а остальные координаты нулевые. Кроме того, $v(e_i^m, e_k^n) = a_{ik}$. Этим объясняется согласованность вышеприведенных определений и соотношений (29.2) и (29.3).

Лемма 29.1. Смешанные стратегии p^* и q^* являются оптимальными, если и только если для любых смешанных стратегий p и q из A^m и A^n соответственно верно

$$v(p, q^*) \le v(p^*, q^*) \le v(p^*, q) \qquad (29.4)$$

Доказательство леммы дано в задаче Т29.2.

Теорема 29.1. Смешанные стратегии $p^* = (p_1^*, \ldots, p_m^*)$, $q^* = (q_1^*, \ldots q_n^*)$ игры с платежной матрицей (29.1) являются оптимальными, если и только если точки $(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*, v^*)$, $(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*, v^*)$, где $v^* = v(p^*, q^*)$ являются оптимальными планами соответственно следующих задач ЛП:

$$f(q_1, \ldots, q_n, v) = v \to \min$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} q_k \le v, \quad i = 1, \ldots, m, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} q_k = 1, \; q_k \ge 0, \; k = 1, \ldots, n. \end{cases} \qquad (29.5)$$

$$g(p_1, \ldots, p_m, v) = v \to \max$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ik} p_i \geq v, & k = 1, \ldots, n, \\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \; p_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, m. \end{cases} \qquad (29.6)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что задачи ЛП (29.5) и (29.6) обязательно имеют планы. Так, если v — некоторое число, превосходящее все элементы матрицы (29.1), то точка (1, 0, ..., 0, v) — план задачи (29.5). Действительно, для этой точки при произвольном i верно $a_{i1}q_1 + \ldots + a_{in}q_n = a_{i1} \leq v$. Аналогичные рассуждения можно провести для задачи (29.6).

Поскольку задачи (29.6) и (29.5) являются двойственными (см. задачу Т29.3), то в силу теоремы 19.1 они имеют некоторые оптимальные планы $(p^*, v^*) = (p_1^*, \ldots, p_m^*, v^*)$ и $(q^*, v^*) = (q_1^*, \ldots, q_n^*, v^*)$ соответственно. Пусть p и q — произвольные смешанные стратегии игроков A и B. Тогда

$$v(p, q^*) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} p_i q_k^* = \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} q_k^* \right) \leq \sum_{i=1}^{m} p_i v^* = 1 \cdot v^* = v^*$$

Аналогично $v(p^*, q) \geq v^*$. В частности, $v(p^*, q^*) \leq v^* \leq v(p^*, q^*)$, откуда $v^* = v(p^*, q^*)$. Доказана выполнимость (29.4). Следовательно p^* и q^* — оптимальные смешанные стратегии игры с платежной матрицей (29.1) в силу леммы 29.1.

Обратно, пусть теперь $p^* = (p_1^*, \ldots p_m^*)$ и $q^* = (q_1^*, \ldots, q_n^*)$ — оптимальные смешанные стратегии игры с платежной матрицей (29.1). Тогда в силу леммы 29.1

$$v(e_i^m, q^*) = 1 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{ik} q_k^* \leq v(p^*, q^*), \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

А это означает, что $(q_1^*, \ldots q_n^*, v(p^*, q^*))$ — план задачи (29.5). Предположим, что он не оптимален. Тогда имеется оптимальный план этой задачи $(q', v') = (q_1', \ldots q_n', v')$, для которого $v' < v(p^*, q^*)$. Но тогда

$$v(p^*, q') = \sum_{i=1}^{m} p_i^* \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} q_k' \right) \leq \sum_{i=1}^{m} p_i^* v' = v' < v(p^*, q^*),$$

что противоречит (29.4). Итак, $(q_1^*, \ldots, q_n^*, v(p^*, q^*))$ — оптимальный план задачи (29.5). Аналогично показывается, что $(p_1^*, \ldots, p_m^*, v(p^*, q^*))$ — оптимальный план задачи (29.6). Теорема доказана.

Следствие **29.1.** Игра с любой платежной матрицей имеет оптимальные смешанные стратегии.

Доказательство см. в задаче Т29.4.

Задачи для самостоятельного **решения**

Т29.1. Доказать утверждение 29.1.

Т29.2. Доказать лемму 29.1.

Т29.3. Доказать, что задачи (29.5) и (29.6) являются двойственными.

Т29.4. Доказать следствие 29.1.

Ответы, указания, решения

Т29.1. Игрок A, применив некоторую чистую стратегию, может обеспечить себе некоторый выигрыш α, который не менее α^*. В свою очередь игрок B, применив некоторую чистую стратегию, не позволит A выиграть больше β^*, какую бы стратегию игрок A не применил. Отсюда $\alpha^* \le \alpha \le \beta^*$, т. е. $\alpha^* \le \beta^*$.

Т29.2. Пусть p^* и q^* — оптимальные смешанные стратегии. Тогда верно соотношение (29.3). Равенство $v(p^*, q^*) = \max\limits_p \min\limits_q v(p, q)$, в частности, означает, что $v(p^*, q^*) = \min\limits_q v(p^*, q)$, откуда следует неравенство $v(p^*, q^*) \le v(p^*, q)$ для любой смешанной стратегии $q \in \Delta^n$. Аналогично, равенство $v(p^*, q^*) = \min\limits_q \max\limits_p v(p, q)$ означает, что $v(p^*, q^*) = \max\limits_p v(p, q^*)$, откуда $v(p, q^*) \le v(p^*, q^*)$ для любой смешанной стратегии $p \in \Delta^m$. Соотношение (29.4) доказано.

Предположим теперь, что верно (29.4). Тогда $\max\limits_p v(p, q^*) = v(p^*, q^*) = \min\limits_q v(p^*, q)$ и, следовательно,

$$
\begin{aligned}
\min_q \max_p v(p, q) &\le \max_p v(p, q^*) = v(p^*, q^*) = \\
&= \min_q v(p^*, q) \le \max_p \min_q v(p, q).
\end{aligned}
\tag{27.7}
$$

С другой стороны, из (29.4) следует, что

$$
\min_q v(p, q) \le v(p, q^*) \le v(p^*, q^*) \le v(p^*, q) \le \max_p v(p, q)
$$

для любых смешанных стратегий p е $A/'''$ и $q \in Af''$. Поэтому ввиду произвольности p и q

$$\max_p \min_ч v(p,\ q) \le v(p^*,\ q^*) \le \min_ч \max_p v(p,\ q)$$

Последнее вместе с (29.7) влечет (29.3).

Т29.3. Перепишем задачи (29.5) и (29.6) в следующем виде:

$$/' = -(v_1 - v_2) \to \max$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=\backslash}^{n} a_{ik} q_k + (-1)\cdot(v_1 - v_2) \le 0, i = 1, \ldots, m, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)\cdot q_k + 0\cdot(v_1 - v_2) \le -1, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} q_k + 0\cdot(v_1 - v_2) \le 1, \\ q_k \ge 0,\ к = /, \ldots, n,\ v_1 \ge 0,\ v_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$g' = -(v_1 - v_2) \to \min$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ik} p_i + (-1)\cdot(v_1 - v_2) \ge 0,\ k = 1, \ldots, n, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} (-1)\cdot p_i + 0\cdot(v_1 - v_2) \ge -1, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} p_i + 0\cdot(v_1 - v_2) \ge 1, \\ p_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, m, v_1 \ge 0,\ v_2 \ge 0. \end{cases}$$

Дальше воспользоваться определением двойственной задачи из *гл. 18*.

Т29.4. При доказательстве теоремы 29.1 было показано, что задачи (29.5) и (29.6) обязательно имеют оптимальные планы. Поэтому остальное следует из формулировки этой теоремы.

Глава 30

Игры с природой

Для принятия решения при управлении производственными процессами необходима информация о состоянии объекта управления. В случае отсутствия достаточно полной информации возникает неопределенность в принятии решения. Зачастую эта неопределенность становится неустранимой из-за случайного характера явлений. Например, случайный характер спроса на продукцию делает невозможным точное прогнозирование объема его выпуска. В подобных ситуациях лицо, принимающее решение (игрок *A*), вступает в игровые отношения с некоторым абстрактным лицом (игроком *B*), которое условно можно назвать "природой". Таким образом, под природой будем подразумевать совокупность неопределенных факторов, влияющих на эффективность принимаемых решений; всюду дальше "природа" — это игрок *B*.

Выделим следующие две особенности игр с природой:

а) игрок *B* применяет чистые стратегии независимо от того, выгодно ли это игроку *A* или нет, т. е. *B* безразличен к выигрышу и не стремится воспользоваться промахами *A*;

б) решение достаточно находить только для "сознательного" игрока *A*, ибо игрок *B* не способен воспринимать какие-либо рекомендации.

Игры с природой также могут решаться как в чистых, так и смешанных стратегиях. Однако ввиду перечисленных выше особенностей понятие оптимальной стратегии перестает быть однозначно трактуемым и зависит от формулируемых критериев оптимальности, основанных на здравом смысле и интуиции. Эти критерии позволяют с разных точек зрения оценить ситуацию. И если выводы, сделанные на основе различных критериев, совпадают, то они принимаются. В противном случае нужны дополнительные исследования. Рассмотрим некоторые из этих критериев применительно к платежной матрице (29.1).

Критерий Вальда — это критерий крайнего пессимизма, так как игрок *A* исходит из предположения, что *B* действует против него наилучшим для себя образом. Поэтому оптимальной чистой стратегией игрока *A* по этому критерию считается стратегия, при которой достигается "лучшее из худшего", т. е. выигрыш игрока *A* совпадает с числом $a^* = \max_i \min_k a_{ik}$. В случае неоднократного повторения игры оптимальной смешанной стратегией $p = (p_1, \ldots, p_m)$ игрока *A* по этому критерию считается та, при которой минимальный средний выигрыш $\min_k \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_{ik} p_i \right\}$ будет максимальным. Очевидно, нахождение такой смешанной стратегии эквивалентно определению оптимального плана $\left(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*, v^*\right)$ задачи (29.6), в котором $\left(p_1^*, \ldots, p_m^*\right)$ и v* как раз и будут соответственно искомыми оптимальной смешанной стратегией и максимальным средним выигрышем.

Для формулировки следующего критерия необходимо понятие матрицы рисков.

Определение

Пусть b_k равен максимальному элементу в k-м столбце матрицы (29.1). Тогда риском r_{ik} игрока *А,* применяющего стратегию А при стратегии B_k природы, называется число $r_{ik} = b_k - a_{ik}$. Другими словами, риск r_{ik} указывает ту сумму, которую игрок *А,* применяя стратегию А, не доберет до максимально возможной в случае, если природа предпочтет стратегию B_k.

Критерий Сэвиджа также является критерием крайнего пессимизма, так как оптимальной чистой стратегией игрока *А* по этому критерию считается та, при которой достигается "минимальный риск из максимально возможных", т. е. риск будет равен $r^* = \min\limits_i \max\limits_k r_{ik}$.

Критерий Гурвица, называемый критерием пессимизма-оптимизма, рекомендует рассчитывать на нечто среднее. Оптимальной чистой стратегией по этому критерию считается та, при которой выигрыш составит

$$\max_i \left\{ \alpha \min_k a_{ik} + (1-\alpha) \max_k a_{ik} \right\},$$

где число $\alpha \in (0, 1)$ выбирается из субъективных соображений. При $\alpha = 1$ критерий Гурвица превращается в критерий Вальда, а при а = 0 — в критерий крайнего оптимизма, так как в этом случае рекомендует выбирать "лучшее из лучшего".

Пример

За некоторый период времени на предприятии потребление сырья носит случайный характер и может составить 10, 11, 12 вес. ед. Если сырья окажется недостаточно, то запас его можно пополнить, что потребует дополнительных затрат в размере 5 ден. ед. на одну единицу дополнительного сырья. Если же запас превысит потребности, то дополнительные затраты на содержание и хранение остатков составят 2 ден. ед. на одну единицу сырья. Требуется выбрать оптимальную стратегию заказа сырья.

В данной ситуации в качестве игрока *А* выступает администрация предприятия, которая может заказать 10, 11 или 12 вес. ед. сырья (это будут соответственно чистые стратегии A_1, A_2, Аз игрока *А).* Чистыми стратегиями игрока *В* являются фактические расходы сырья в процессе производства, составляющие соответственно 10, 11 или 12 вес. ед. Таким образом, платежная матрица данной игры будет равна

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -10 \\ -2 & 0 & -5 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (30.1)$$

Например, элемент $a_{13} = -10$ указывает прибыль при чистых стратегиях A_1 и B_3 игроков A и 8 соответственно, поскольку в этом случае запас сырья равен 10 вес. ед., а потребность в нем равна 12 вес. ед., и в итоге дополнительные расходы, связанные с приобретением недостающих двух весовых единиц сырья, составят 2x5 = 10 ден. ед. Аналогично определяются остальные элементы платежной матрицы (30.1).

Применим сначала критерий Вальда. Поскольку в (30.1) $\min_k a_{1k} = -10$, $\min_k a_{2k} = -5$, $\min_k a_{3k} = -4$, то $\max\{-10, -5, -4\} = -4$. Этот максимин достигается, если A применит чистую стратегию A_3, т. е. предприятие должно заказать 12 вес. ед. сырья. При этом дополнительные затраты не превысят 4 ден. ед., какая бы ситуация со спросом не сложилась.

Для определения оптимальной смешанной стратегии по критерию Вальда необходимо решить следующую задачу ЛП:

$$v \to \max$$

$$\begin{cases} -2p_2 \quad -4p_3 \ge v \\ -5p_1 \ -2p_3 \ge v \\ -10p_1 \ -5p_2 \ge v \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1, \ p_1 \ge 0, \ p_2 \ge 0, \ p_i \ge 0. \end{cases}$$

Решив ее (например, с помощью Mathcad), получим оптимальный план (0.2856, 0, 0.7144, -2.857). Поэтому оптимальная смешанная стратегия равна (0.2856, 0, 0.7144). Экономическая интерпретация этого результата такова: если средний запас сырья будет поддерживаться на уровне $0.2856 \cdot 10 + 0 \cdot 11 + 0.7144 \cdot 12 = 11.43$ вес. ед., то независимо от игрока B дополнительные затраты не превысят 2.857 ден. ед.

Чтобы воспользоваться критерием Сэвиджа, составим матрицу рисков:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 2 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $r^* = \min\left\{\max_k r_{1k}, \max_k r_{2k}, \max_k r_{3k}\right\} = \min\{10, 5, 4\} = 4$. Этот минимакс опять-таки достигается, если A применит чистую стратегию A_3.

Применим критерий Гурвица, положив $\alpha = 0{,}6$:

$$\max\{0.6 \cdot (-10) + 0.4 \cdot 0;\ 0.6 \cdot (-5) + 0.4 \cdot 0;\ 0.6 \cdot (-4) + 0.4 \cdot 0\} =$$
$$= \max\{-6, -3, -2.4\} = -2.4$$

И опять-таки этот результат достигается в случае стратегии A_3.

Задачи для самостоятельного решения

Общая формулировка задач П30.1 — П30.10 в буквенных обозначениях

Фермер может посеять на данном участке одну из трех культур A_1, A_2, A_3. Урожайность каждой из культур во многом зависит от погоды, которая может быть засушливой, нормальной или дождливой (влияние других факторов не учитывается). Известна цена c_i одного центнера культуры A_i, а также урожайности (ц/га) каждой культуры A_i: h_{i1} — урожайность при засушливой погоде, h_{i2} — урожайность при нормальной погоде, h_{i3} — урожайность при дождливой погоде. Требуется: придать описанной ситуации игровую схему и составить платежную матрицу; пользуясь критериями Вальда, Сэвиджа и Гурвица (величина параметра a для критерия Гурвица задается) выяснить, какую культуру следует сеять, чтобы обеспечить наибольший доход.

П30.1. Дано:

$c_1 = 2,\quad c_2 = 3,\quad c_3 = 4,\quad h_{11} = 6,\quad h_{12} = 7,\ h_{13} = 6.5,$

$h_{21} = 3,\quad h_{22} = 5,\quad h_{23} = 4,\quad h_{31} = 2.75,\quad h_{32} = 4,\quad h_{33} = 2.5,\quad a = 0.7.$

П30.2. Дано:

$c_1 = 3,\quad c_2 = 5,\quad c_3 = 4,\quad h_{11} = 2,\quad h_{12} = 3,\quad h_{13} = 1,$

$h_{21} = 1,\quad h_{22} = 2,\quad h_{23} = 1.6,\quad h_{31} = 2,\quad h_{32} = 3,\quad h_{33} = 1,\quad \alpha = 0.8.$

П30.3. Дано:

$c_1 = 2,\quad c_2 = 3,\quad c_3 = 5,\quad h_{11} = 6,\quad h_{12} = 7,\quad h_{13} = 5,$

$h_{21} = 3,\quad h_{22} = 4,\quad h_{23} = 5,\quad h_{31} = 3,\quad h_{32} = 3.2,\quad h_{33} = 1.8,\quad a = 0.9.$

П30.4. Дано:

$c_1 = 5,\quad c_2 = 6,\quad c_3 = 4,\quad h_{11} = 2,\quad h_{12} = 2.2,\quad h_{13} = 1.8,$

$h_{21} = 2,\quad h_{22} = 3,\quad h_{23} = 1,\quad h_{31} = 2,\quad h_{32} = 4,\quad h_{33} = 3,\quad a = 0.6.$

П30.5. Дано:

$c_1 = 7,\quad c_2 = 6,\quad c_3 = 8,\quad h_{11} = 2,\quad h_{12} = 3,\quad h_{13} = 3.5,$

$h_{21} = 3,\quad h_{22} = 4,\quad h_{23} = 2,\quad h_{31} = 2,\quad h_{32} = 3,\quad h_{33} = 1,\quad a = 0.7.$

П30.6. Дано:

$c_1 = 8,\quad c_2 = 10,\quad c_3 = 9,\quad h_{11} = 2,\quad h_{12} = 3,\quad h_{13} = 2.5,$

$h_{21} = 2,\quad h_{22} = 2.5,\ h_{23} = 1.9,\quad h_{31} = 2,\quad h_{32} = 3,\quad h_{33} = 1,\quad \alpha = 0.8.$

П30.7. Дано:

$c_1 = 10$, $c_2 = 15$, $c_3 = 12$, $h_{11} = 5$, $h_{12} = 5.5$, $h_{13} = 3$,

$h_{21} = 2$, $h_{22} = 3$, $h_{23} = 4$, $h_{31} = 4$, $h_{32} = 5$, $h_{33} = 2$, $a = 0.9$.

П30.8. Дано:

$c_1 = 6$, $c_2 = 8$, $c_3 = 7$, $h_{11} = 2$, $h_{12} = 3$, $h_{13} = 3.5$,

$h_{21} = 2$, $h_{22} = 2.5$, $h_{23} = 1.5$, $h_{31} = 2$, $h_{32} = 3$, $h_{33} = 1$, $\mathbf{a = 0.8}$.

П30.9. Дано:

$c_1 = 9$, $c_2 = 10$, $c_3 = 12$, $h_{11} = 2$, $h_{12} = 3$, $h_{13} = 2.5$,

$h_{21} = 2$, $h_{22} = 2.5$, $h_{23} = 2.2$, $h_{31} = 2$, $h_{32} = 2.5$, $h_{33} = 1.5$, $\mathbf{a = 0.7}$.

П30.10. Дано:

$c_1 = 8$, $c_2 = 12$, $c_3 = 10$, $h_{11} = 1$, $h_{12} = 1.5$, $h_{13} = 1.25$,

$h_{21} = 0.5$, $h_{22} = 1.5$, $h_{23} = 1$, $h_{31} = 0.9$, $h_{32} = 1.1$, $h_{33} = 0.8$, $a = 0.7$

Общая формулировка задач **П30.11—П30.20** в буквенных обозначениях

За зиму потребление мазута на ТЭЦ в зависимости от погоды составляет b_1, b_2 или b_3 весовых единиц. Если для обеспечения заданной температуры теплоносителя объема запасенного мазута окажется недостаточно, то можно закупить недостающее количество мазута в отопительный сезон, что потребует дополнительных затрат в размере c единиц на единицу веса мазута. Если же запас мазута превысит потребности, то дополнительные затраты на содержание и хранение остатка составят d единиц на единицу веса мазута. Требуется: придать описанной ситуации игровую схему и составить платежную матрицу, пользуясь критериями Вальда, Сэвиджа и Гурвица (величина параметра α для критерия Гурвица задается); выяснить оптимальный уровень запаса мазута, при котором общие затраты на приобретение, содержание и хранение мазута будут минимальными.

П30.11. Дано:

$b_1 = 20$, $b_2 = 22$, $b_3 = 24$, $c = 3$, $d = 2$, $a = 0.6$.

П30.12. Дано:

$b_1 = 7$, $b_2 = 8$, $b_3 = 9$, $c = 4$, $d = 2$, $a = 0.8$.

П30.13. Дано:

$b_1 = 11$, $b_2 = 12$, $b_3 = 13$, $c = 5$, $d = X$ $\alpha = 0.7$.

П30.14. Дано:

$b_1 = 14$, $b_2 = 16$, $b_3 = 18$, $c = 7$, $d = 3$, $a = 0.8$.

П30.15. Дано:

$b_1 = 17$, $b_2 = 19$, $b_3 = 21$, $c = 8$, $d = 4$, a $= 0.9$.

П30.16. Дано:

$b_1 = 10$, $b_2 = 12$, $b_3 = 14$, $c = 9$, $d = 5$, $\alpha = 0.6$.

П30.17. Дано:

$b_1 = 13$, $b_2 = 15$, $b_3 = 17$, $c = 11$, $d = 5$, a $= 0.7$.

П30.18. Дано:

$b_1 = 19$, $b_2 = 20$, $b_3 = 21$, $c = 4$, rf $= 2$, a $= 0.6$.

П30.19. Дано:

$b_1 = 30$, $b_2 = 32$, $b_3 = 34$, $c = 5$, rf $= 3$, a $= 0.8$.

П30.20. Дано:

$b_1 = 12$, $b_2 = 14$, $b_3 = 16$, $c = 4$, rf $= 1$, $\alpha = 0.7$.

П30.21. Для отопления дома в зимний период используется уголь, цена на который зависит от времени года и характера зимы. Летом тонна угля стоит 7.5 руб., в мягкую зиму — 8.5, в обычную — 9, а в холодную — 9.5 руб. Расход угля в отопительный сезон полностью определяется характером зимы: в мягкую зиму достаточно 6 т, на обычную требуется 7 т, а в холодную зиму расходуется 8 т. Понятно, что затраты домовладельца зависят от количества запасенного им на зиму угля. При анализе возможных вариантов уровня запаса следует иметь в виду, что в случае необходимости недостающее количество угля можно приобрести и зимой. Надо также учесть, что не будет возможности продать оставшийся после зимы уголь.

Требуется: придать описанной ситуации игровую схему и составить платежную матрицу; пользуясь критериями Вальда, Сэвиджа и Гурвица (величина параметра а для критерия Гурвица равна 0.6), выяснить оптимальный уровень запаса угля для отопления дома, гарантирующего домовладельцу минимальные затраты.

Общая формулировка задач **К30.1—К30.10** в буквенных обозначениях

На технологическую линию поступает сырье m видов с различным содержанием примесей. Линия может работать в m режимах. Дана матрица M порядка m, в которой на позиции $(i, к)$ находится число, равное доходу предприятия от реализации единицы продукции, изготовленной из сырья k-го вида при i-м режиме работы технологической линии. Поступление сырья того или иного вида недетерминировано. Определить оптимальное распределение временного фонда загрузки технологической линии по режимам работы с тем, чтобы обеспечить максимально гарантированный доход от выпущенной продукции.

К30.1. $M = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 & 10 \\ 7 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 10 & 5 \end{pmatrix}$.

К30.2. $M = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 8 & 8 \\ 5 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 3 \\ 7 & 0 & 14 & 5 \end{pmatrix}$.

К30.3. $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 4 & 8 & 12 & 5 & 3 \\ 2 & 11 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

К30.4. $M = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 12 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 5 & 8 & 11 & 11 \\ 9 & 6 & 4 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

К30.5. $M = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 11 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 2 \\ 13 & 5 & 13 & 11 & 0 \\ 8 & 9 & 6 & 0 & 13 \\ 5 & 3 & 11 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.

К30.6. $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 10 & 8 & 7 & 13 & 11 \\ 3 & 14 & 0 & 0 & 6 \\ 11 & 7 & 11 & 10 & 7 \\ 4 & 12 & 17 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

К30.7.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 10 & 7 & 6 & 5 & 6 \\ 8 & 11 & 2 & 15 & 5 & 4 & 4 \\ 7 & 0 & 6 & 8 & 11 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 8 & 0 & 5 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 4 & 11 & 0 & 5 & 8 \\ 11 & 3 & 6 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 3 & 6 & 7 & 12 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

К30.8.

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 0 & 2 & 6 & 11 & 4 \\ 7 & 0 & 6 & 5 & 0 & 3 & 5 \\ 8 & 11 & 7 & 8 & 1 & 6 & 14 \\ 5 & 8 & 0 & 3 & 6 & 11 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & 9 & 13 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 7 & 10 & 1 & 7 \\ 12 & 7 & 0 & 4 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

К30.9.

$$M = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 4 & 6 & 7 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 11 & 7 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 11 & 9 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & 2 & 13 \\ 5 & 6 & 0 & 13 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

К30.10.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 0 & 3 & 2 & 10 \\ 3 & 9 & 10 & 14 & 5 & 8 \\ 5 & 1 & 0 & 8 & 11 & 10 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 0 & 12 & 2 & 3 \\ 9 & 13 & 12 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

К30.11. В новом жилом массиве создается телеателье для ремонта в стационарных условиях не более 8 тыс. телевизоров в год. Для упрощения будем считать, что поток заявок на ремонт в условиях стационара может составлять 2, 4, 6 или 8 тыс. в год. Накопленный опыт аналогичных предприятий показывает, что прибыль от ремонта одного телевизора составляет 9 ден. ед,; потери, вызванные отказом в ремонте из-за недостатка мощностей, оцениваются в 5 ден. ед., а убытки от простоя специалистов и оборудования при отсутствии заявок обходятся в 6 ден. ед. в расчете на каждый телевизор. Придав рассматриваемой ситуации игровую схему, составить платежную матрицу и дать рекомендации о мощности создаваемого телеателье.

Ответы, указания, решения

П30.21. Одним из участников рассматриваемой в задаче ситуации является домовладелец, озабоченный необходимостью заготовки определенного количества угля на предстоящий отопительный сезон. Если описанной ситуации придать игровую схему, то домовладелец выступает в ней в качестве сознательного игрока *А,* заинтересованного в минимизации затрат на приобретение угля. Вторым участником (игроком *В)* является природа, реализующая свои состояния по присущим ей законам. Заготавливая летом уголь, домовладелец может ориентироваться либо на мягкую (первая его чистая стратегия *A\),* либо на обычную (вторая его чистая стратегия A_2), либо на холодную зиму (третья его чистая стратегия A_3), покупая соответственно 6, 7 или 8 т угля.

Природа может реализовать либо мягкую (первое возможное состояние природы $П_1$), либо обычную (второе возможное состояние природы $П_2$), либо холодную зиму (третье возможное состояние природы $П_3$), что потребует расхода соответственно 6, 7 или 8 т угля. Таким образом, платежная матрица игры с природой будет иметь размер 3x3.

Вычислим элемент a_{11}, соответствующий ситуации *(Л\,П\).* Это наиболее благоприятный случай. В самом деле, домовладелец в расчете на мягкую зиму купил летом 6 т угля, заплатив 6 x 7.5 = 45 руб. Наступившая зима оказалась мягкой и потому дополнительных затрат не потребовалось. Таким образом, выигрыш игрока *А* равен -45, т. е. $a_{11} = -45$.

Рассмотрим теперь ситуацию (A_1,$П_2$), т. е. случай, когда домовладелец приобрел летом 6 тонн угля в расчете на мягкую зиму, а зима оказалась обыкновенной. Пришлось дополнительно купить зимой 1 т угля по цене 9 руб., а потому общие расходы на отопление составили $45 + 9 = 54$ руб. Так что выигрыш в этом случае равен 54 руб., т. е. $a_{12} = -54$. В ситуации (A_1,$П_3$) общие расходы, учитывая холодную зиму, составили 45 + 2 x 9.5 = 64 руб., и поэтому $a_{13} = -64$.

Рассуждая аналогично, находим и остальные элементы платежной матрицы. Равенство элементов $a_{21} = a_{22} = -52.5$ и $a_{31} = a_{32} = a_{33} = -60$ объясняется тем, что неизрасходованный на отопление уголь нет возможности продать для возмещения затрат (по условию задачи). В итоге имеем следующую платежную матрицу

$$M = \begin{pmatrix} -45 & -54 & -64 \\ -52.5 & -52.5 & -62 \\ -60 & -60 & -60 \end{pmatrix}.$$

По критерию Вальда игрок A должен выбрать ту чистую стратегию, при которой достигается **максимин** $\max_i \min_k a_{ik}$. В нашей задаче $\min_k a_{1k} = -64$, $\min_k a_{2k} = -62$, $\min_k a_{3k} = -60$, откуда $\max\{-64, -62, -60\} = -60$, т. е. игрок A должен выбрать стратегию A_3.

По критерию Гурвица игрок A должен выбрать ту чистую стратегию, при которой достигается $\max_i \{\alpha \min_k a_{ik} + (1 - \alpha) \max_k a_{ik}\}$. В нашей задаче с учетом $\alpha = 0.6$

$$\alpha \min_k a_{1k} + (1-\alpha)\max_k a_{1k} = 0.6 \cdot (-64) + 0.4 \cdot (-45) = -56.4,$$

$$\alpha \min_k a_{2k} + (1-\alpha)\max_k a_{2k} = 0.6 \cdot (-62) + 0.4 \cdot (-52.5) = -58.2,$$

$$\alpha \min_k a_{3k} + (1-\alpha)\max_k a_{3k} = 0.6 \cdot (-60) + 0.4 \cdot (-60) = -60,$$

откуда $\max\{-56.4, -58.2, -60\} = -56.4$, т. е. игрок A по критерию Гурвица должен выбрать стратегию A_1.

Для использования критерия Сэвиджа необходимо построить матрицу рисков, элементы r_{ik} которой находятся по формуле

$$r_{ik} = \max_i a_{ik} - a_{ik}.$$

В нашей задаче $\max_i a_{i1} = -45$, $\max_i a_{i2} = -52.5$, $\max_i a_{i3} = -60$. Поэтому матрица рисков будет иметь следующий вид:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1.5 & 4 \\ 7.5 & 0 & 2 \\ 15 & 7.5 & 0 \end{pmatrix}$$

По критерию Сэвиджа игрок A должен выбрать ту чистую стратегию, при которой достигается минимакс $\min_i \max_k r_{ik}$. В нашем случае $\max_k r_{1k} = 4$, $\max_k r_{2k} = 7.5$, $\max_k r_{3k} = 15$. Отсюда $\min\{4, 7.5, 15\} = 4$, т. е. игрок A должен выбрать стратегию A_1.

К30.1. Указания. Необходимо решить с помощью Mathcad следующую задачу ЛП:

$$g(p_1, p_2, p_3, p_4, v) = v \rightarrow \max$$

$$M^T \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} v \\ v \\ v \\ v \end{pmatrix}, \quad p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1, \; p_i \geq 0, \; i = 1, 2, 3, 4.$$

В итоге будет получен следующий результат; технологической линии в первом режиме следует работать 29% времени, в **четвертом** — 71% времени, во втором и третьем режимах использовать линию нецелесообразно.

К30.11. Указания. Чистыми стратегиями игрока *A* будут его решения об открытии телеателье для удовлетворения 2, 4, 6 или 8 тыс. заявок в год соответственно. Игрок *B* также может реализовать любое из четырех своих состояний, когда за год поступит соответственно 2, 4, 6 или 8 тыс. заявок. Платежная матрица будет иметь следующий вид:

$$M = \begin{pmatrix} 18 & 8 & -2 & -12 \\ 6 & 36 & 26 & 16 \\ -6 & 24 & 54 & 44 \\ -18 & 12 & 42 & 72 \end{pmatrix}.$$

В результате решения соответствующей задачи ЛП (см. предыдущую задачу) будет получен следующий ответ: доход телеателье не опуститься ниже 9 тыс. ден. ед. в год, если оно будет рассчитывать на обслуживание $0.75 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 6 + 0.25 \cdot 8 = 3.5$ тыс. заявок в год.

Глава 31

Метод ветвей и границ в задачах дискретного программирования

Если множество планов X задачи условной оптимизации (см. *гл. 15)* конечно, то она называется задачей дискретного программирования. Для решения такой задачи достаточно перенумеровать планы из X и затем последовательно вычислить значения целевой функции для этих планов, запоминая на каждом шагу тот из них, для которого значение функции является наименьшим (наибольшим) среди вычисленных. Однако эта процедура часто практически не реализуема из-за большого числа элементов множества X.

Другой подход к решению связан с такой организацией перебора, при котором множество планов делится на подмножества и для анализа выбирается наиболее перспективное для содержания оптимального плана подмножество. При этом часто удается отбрасывать не отдельные точки, а достаточно большие подмножества планов, заведомо не содержащие оптимальных планов. Именно такая идея и положена в основу группы алгоритмов, которые принято называть методом ветвей и границ.

Опишем этот метод для решения задачи

$$f(x_1, \ldots, x_n) \to \min$$

$$\text{на множестве планов } X = X_1 \cap X_2,$$

$$\text{где } X_1 \text{ — конечное множество из } Af'', \tag{31.1}$$

$$X_2 \text{ — множество из } Af'', \text{ удовлетворяющее}$$

$$\text{некоторой системе ограничений.}$$

Определение

Ориентированное дерево называется корневым, если в нем имеется в точности одна вершина, называемая корнем, в которую не входит ни одна дуга, а в каждую другую вершину входит ровно одна дуга. Висячая вершина корневого дерева называется листом.

Очевидно, в корневом дереве для каждой вершины v существует единственный путь, соединяющий корень с этой вершиной.

Каждый алгоритм метода ветвей и границ состоит из правила выбора (сокращенно ПВ) и правила дробления (сокращенно ПД). ПВ позволяет выбрать для анализа очередное подмножество планов $\Omega \subseteq X$ с помощью специальной функции р, называемой оценочной (требования, предъявляемые к оценочным функциям, описаны ниже), и известного лучшего (на данный момент) значения/; целевой функции/ Значение//; называется рекордом, а план а, для которого /fa) $= f_R$ — рекордным планом. (Отметим, что подмножество Ω может оказаться пустым.) ПД указывает, каким образом выбранное множество Ω разбивается на некоторое число более мелких подмножеств.

ПВ и ПД определяют корневое дерево, вершинами которого являются выбираемые подмножества, а каждая дуга (О, 2) означает, что множество Σ получено из множества Ω одним применением ПД.

Оценочная функция р должна обладать следующим свойством: для каждого подмножества Ω выполняется соотношение $\rho(\Omega) \leq \min /(a)$, если Ω непустое, и $\rho(\Omega) = \infty$, если Ω — пустое множество. Другими словами, оценочная функция обеспечивает легко вычисляемую границу $\rho(\Omega)$, ниже которой не может опуститься ни одно значение целевой функции, вычисленное для планов из О.

Рассмотрим пример построения корневого дерева для решения следующей задачи. Известно, что среди 16 монет есть одна фальшивая, которая легче остальных. Требуется определить эту монету за 4 взвешивания.

Зададим ПД: множество монет разбивается на два подмножества с одинаковым количеством монет; ПД не применимо к одноэлементным множествам. Зададим ПВ: выбирается лист с тем множеством монет, суммарный вес которых будет наименьшим. Одно из возможных корневых деревьев, получающихся при решении этой задачи, изображено на рис. 31.1. Фальшивой монетой оказывается монета 1 или монета 2.

Опишем один из алгоритмов метода ветвей и границ для решения задачи (31.1), в котором детализируются ПВ и правило корректировки рекорда. Что касается ПД и оценочной функции, то они будут зависеть от конкретного вида задачи (31.1).

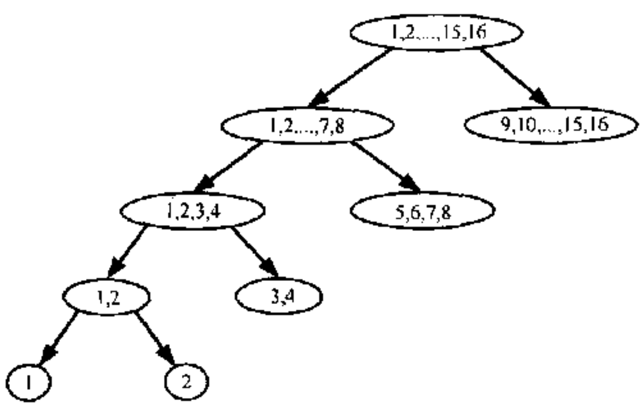


Рис. 31.1. Корневое дерево для решения задачи о монетах

Алгоритм одновременного ветвления

- Шаг 0. Обозначить через T_l тривиальное корневое дерево, состоящее из единственной вершины $\Omega_1 = X_1^{(1)} \cap X_2 = X_1 \cap X_2$. Назвать вершину Ω_1 перспективным листом и положить f_R равным $+\infty$. Вычислить $\rho(\Omega_1)$.
- Шаг k ($k \geq 1$).

О Если дерево T_k не имеет перспективных листьев, то алгоритм прекращает работу. В этом случае: если $f_R < +\infty$, то f_R является оптимальным значением целевой функции, а рекордный план — оптимальным планом; если $f_R = +\infty$, то задача (31.1) не имеет решений.

Если дерево T_k имеет перспективные листья, то выбрать среди них лист $\Omega_k = X_1^{(k)} \cap X_2$ с наименьшим значением оценочной функции р среди всех перспективных листьев. Построить новое корневое дерево T_{k+1}, применив ПД к вершине Ω_k. Полученные в результате дробления множества Ω_k листья $\Omega_{k_1} = X_1^{(k_1)} \cap X_2, \ldots, \Omega_{k_m} = X_1^{(k_m)} \cap X_2$, где $X_1^{(k)} = X_1^{(k_1)} \cup \ldots \cup X_1^{(k_m)}$, назвать перспективными.

Для каждого $i=1,\ldots,m$ вычислить $\rho(\Omega_{k_i})$. Если при этом можно указать такой план $\alpha \in \Omega_{k_i}$, что $f(\alpha) = \rho(\Omega_{k_i})$, то сравнить $f(a)$ и f_R. В случае когда $f(\alpha) < f_R$, произвести коррекцию f_R и рекордного плана, положив их соответственно равными Да) и а. Если Ω_{k_i} состоит из одной точки а, то вычислить значение Да) и, если Да) $< f_R$, опять-таки произвести коррекцию f_R и рекордного плана, положив их соответственно равнымиДа) и а.

Лишить статуса перспективных те листья Ω_j в T_{k+1}, чьи оценки $\rho(\Omega_j)$ не меньше текущего рекорда f_R. Перейти к следующему шагу.

Утверждение 31.1. Алгоритм одновременного ветвления корректен и завершает свою работу через конечное число шагов.

Доказательство. Конечность алгоритма вытекает из конечности множества $X\backslash$ и того факта, что каждый вновь полученный лист содержит меньше элементов множества X_1, чем лист, из которого он образован. По завершению алгоритма все листья потеряют статус перспективных. Поскольку на каждом шаге этот статус теряют листья, в которых значения оценочной функции р не меньше рекорда, то значение целевой функции для всех планов, содержащихся в этих листьях, тем более не будут меньше окончательного рекорда. Это означает, что по завершению алгоритма при $f_R < +\infty$ рекордный план будет оптимальным, а при $f_R = +\infty$ задача (31.1) не будет иметь решений.

Применим алгоритм одновременного ветвления к решению задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП):

$$f(x_1, \ldots, x_n) \to \min$$

на множестве планов $X = X_1 \cap X_2$,

где множество X_1 определено условиями:

$$\begin{cases} 0 \le x_i \le b_i, b_i \text{ целое число}, \\ x_i \text{ целое число}, i = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

множество X_2 определено системой линейных уравнений и неравенств S; $f(x_1, \ldots, x_n)$ — линейная функция.

Начальное корневое дерево состоит из одной вершины $\Omega_1 = X_1 \cap X_2$ и $f_R = +\infty$. Для вычисления $\rho(\Omega_1)$ решим задачу

$$f(x_1, \ldots, x_n) \to \min$$

$$\text{на множестве планов } \overline{\Omega_1} = \overline{X_1} \cap X_2,$$

где множество $\overline{X_1}$ определено условиями $0 \le x_i \le b_i, i = 1, \ldots, n$. В качестве $\rho(\Omega_1)$ возьмем оптимальное значение целевой функции этой задачи.

Ниже будут определены ПД и оценочная функция ρ. Опережая события, отметим, что в результате ПД будут получаться вершины вида $\Omega_k = X_1^{(k)} \cap X_2$, где $X_1^{(k)}$ определено условиями

$$\begin{cases} a_{k_i} \le x_i \le b_{k_i}, \quad a_{k_i}, b_{k_i} \text{ -целочисленные константы}, \\ x_i \text{ - целое число}, \ i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Устраним условие целочисленности и рассмотрим множество $\overline{\Omega_k} = \overline{X_1^{(k)}} \cap X_2$, где $\overline{X_1^{(k)}}$ определено условиями

$$\begin{cases} a_{k_i} \le x_i \le b_{k_i}, \quad a_{k_i}, b_{k_i} \text{ -целочисленные константы}, \\ i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Перейдем к определению оценочной функции. Если задача ЛП

$$f(x_1, \ldots, x_n) \to \min$$

$$\text{на множестве планов } \overline{\Omega_k} \tag{31.2}$$

не имеет решений, то положим $\rho(\Omega_k) = +\infty$. В противном случае $\rho(\Omega_k) = f(a^*)$, где a^* — оптимальный план задачи (31.2). $f(a^*)$ действительно является значением оценочной функции для множества Ω_k, так как оптимальное значение функции f для целочисленных планов не меньше ее оптимального значения для всех планов.

Если все координаты точки a^* целочислены, то $a^* \in \Omega_k$ и, следовательно, производится коррекция рекорда и рекордного плана. В этом случае вершина Ω_k удаляется из числа перспективных, так как для нее значение оценочной функции будет не меньше f_R.

Определим ПД. Если все координаты точки a^* целые, то, как сказано ранее, вершина Ω_k не является перспективной. В противном случае выбирается некоторая нецелочисленная координата α_s точки a* и множество $X_1^{(1)}$ разбивается на два непересекающихся множества заменой ограничения $a_k \le x_s \le b_k$ ограничениями $a_{k_s} \le x_s \le [\alpha_s]$ и $[\alpha_s]+1 \le x_s \le b_{k_s}$. Напомним, что $[z]$ обозначает целую часть числа z.

Пример

Решить методом ветвей и границ задачу ЦЛП:

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 \le 15 \\ -x_1 + 2x_2 \le 0 \\ -7x_1 + 2x_2 \le 0 \\ 0 \le x_i \le 5 \\ x_i \text{ - целые, } i = 1, 2. \end{cases}$$

В этой задаче множество X_1 определено системой

$$\begin{cases} 0 \le x_i \le 5, \\ x_i \text{ - целые, } i = 1, 2. \end{cases}$$

а множество X_2 определено системой

$$S = \begin{cases} 5x_1 - x_2 \le 15 \\ -x_1 + 2x_2 \le 0 \\ -7x_1 + 2x_2 \le 0 \end{cases}.$$

Для определения $\rho(\Omega_1)$ решим задачу ЛП:

$$f = x_1 - x_2 \to \min$$

на множестве планов $\overline{\Omega}_1 = \begin{cases} S, \\ 0 \le x_i \le 5, \ i = 1, 2 \end{cases}$

Оптимальный план этой задачи $a^* = (1,\ 3.5)$, $\rho(\Omega_1) = \min f(\alpha) = f(a^*) = -2.5$.

Первый шаг алгоритма. Применив ПД к вершине Ω_1, получим вершины $\Omega_1^{(1)}$ и $\Omega_1^{(2)}$:

$$\Omega_1^{(1)} = \begin{cases} S \\ 0 \le x_1 \le 5 \\ 0 \le x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \text{ — целые} \end{cases}, \qquad \Omega_1^{(2)} = \begin{cases} S \\ 0 \le x_1 \le 5 \\ 4 \le x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \text{ - целые} \end{cases}$$

Листья $\Omega_1^{(1)}$ и $\Omega_1^{(2)}$ назовем перспективными. Вычислим значения оценочной функции:

$$\rho\left(\Omega_1^{(1)}\right) = \min_{\alpha\in\Omega_1^{(1)}} f(\alpha) = -\frac{15}{7} = f\left(\alpha^*\right), \quad \alpha^* = \left(\frac{6}{7}, 3\right);$$

$$\rho\left(\Omega_1^{(2)}\right) = \min_{\alpha\in\Omega_1^{(2)}} f(\alpha) = -2 = f(\alpha^*). \quad \alpha^* = (2, 4)$$

Последний план целочисленный, поэтому производим коррекцию рекорда: $f_R = -2$, рекордный план равен (2,4). Лист $\Omega_1^{(1)}$ остается перспективным, поскольку $\rho\left(\Omega_1^{(1)}\right) = -\frac{15}{7} < f_R = -2$. Лист $\Omega_1^{(2)}$ теряет статус перспективного, так как $\rho\left(\Omega_1^{(2)}\right) = -2 \geq f_R = -2$.

Второй шаг алгоритма. Имеется единственный перспективный лист $\Omega_1^{(1)}$. Обозначим его через Ω_2 и, применив к нему ПД, получим вершины $\Omega_2^{(1)}$ и $\Omega_2^{(2)}$:

$$\Omega_2^{(1)} = \begin{cases} S \\ 0 \le x_1 \le 0 \\ 0 \le x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 - \text{целые} \end{cases}, \qquad \Omega_2^{(2)} = \begin{cases} S \\ 1 \le x_1 \le 5 \\ 0 \le x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 - \text{целые} \end{cases}$$

Листья $\Omega_2^{(1)}$ и $\Omega_2^{(2)}$ назовем перспективными и для них вычислим значения оценочной функции:

$$\rho\left(\Omega_2^{(1)}\right) = \min_{\alpha\in\Omega_2^{(1)}} f(\alpha) = 0 = f\left(\alpha^*\right), \quad \alpha^* = (0 \quad 0);$$

$$\rho\left(\Omega_2^{(2)}\right) = \min_{\alpha\in\Omega_2^{(2)}} f(\alpha) = -2 = f\left(\alpha^*\right), \quad \alpha^* = (1, 3).$$

Хотя оба плана целочисленные, рекорд не изменяет своего значения, равного -2. Листья $\Omega_2^{(1)}$ и $\Omega_2^{(2)}$ теряют статус перспективных, поскольку $\rho\left(\Omega_2^{(1)}\right) = 0 > f_R = -2$, $\rho\left(\Omega_2^{(2)}\right) = -2 \geq f_R = -2$. Так как перспективных листьев больше нет, то задача решена. Оптимальным планом является план (2,4), а оптимальное значение равно -2.

Замечание

Задачи ЛП, соответствующие задачам ЦЛП, следует решать с помощью Mathcad.

Компьютерный раздел

Встроенная функция `csort(M,n)` (или `rsort(M,n)`) переставляет строки (столбцы) матрицы M так, что во вновь полученной матрице элементы столбца с номером п (строки с номером п) расположатся в порядке возрастания числовых значений. Например, если $M=\begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 5 \\ c & 1 \end{pmatrix}$, то матрица csort(M,1) будет равна $\begin{pmatrix} c & 1 \\ a & 3 \\ b & 5 \end{pmatrix}$ (значение ORIGIN здесь считается нулевым).

Встроенная функция submatrix(M, i, m, k, n) выделяет в матрице M подматрицу, состоящую из элементов, расположенных на пересечении строк с номерами $i, i+1, \ldots, m-1, m$ и столбцов с номерами $k, k+1, \ldots, n-1, n$. Например, если $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, то submatrix(M, 0, 1, 1, 2) будет равна $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Встроенная функция round(a, n) округляет действительное число a до n знаков после десятичной точки.

Встроенная функция *ceil(a)* определяет наименьшее целое число, большее или равное a. Встроенная функция *floor(a)* определяет наибольшее целое число, меньшее или равное a.

Кнопка return подпанели Программирование (Programming) вызывает шаблон return • оператора прерывания программного модуля; при этом подпрограмма-функция примет значение переменной (или константы), имя (или значение) которой будет введено на месте метки этого шаблона. Например, в результате выполнения программного модуля

```
c:=
  a ← 15
  b ← 20
  for  i∈1..10
     return a if i=5
  b
```

значение переменной c будет равно 15 (а не 20).

Задачи для самостоятельного решения

К31.1. Решить следующую задачу ЦЛП:

$$f = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 10 \\ 2x_1 + 4x_3 \ge 14 \\ 2x_2 + x_3 \ge 7 \\ 0 \le x_i \le 10,\ x_i \text{ - целое},\ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

К31.2. Решить следующую задачу ЦЛП:

$$f = 6x_1 + x_2 + 4x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 6 \\ x_1 + 3x_3 \geq 4 \\ 2x_2 + 3x_3 \geq 11 \\ 0 \leq x_i \leq 7,\ x_i \text{ - целое, } i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

К31.3. Решить следующую задачу ЦЛП:

$$f = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 10 \\ 2x_1 + 4x_3 \geq 14 \\ 2x_2 + x_3 \geq 7 \\ 0 \leq x_i \leq 10,\ x_i \text{ -целое, } i = 1,2,3. \end{cases}$$

К31.4. Решить следующую задачу ЦЛП:

$$f = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 13 \\ 4x_1 + 2x_3 \geq 9 \\ 3x_2 + 2x_3 \geq 14 \\ 0 \leq x_i \leq 13,\ x_i \text{ -целое, } i = 1,2,3. \end{cases}$$

К31.5. Решить следующую задачу ЦЛП:

$$f = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 9 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 13 \\ 3x_2 + 2x_3 \geq 9 \\ 0 \leq x_i \leq 8,\ x_i \text{ - целое, } i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

К31.6. Решить следующую задачу ЦЛП:

$$f = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 11 \\ 3x_1 + 4x_3 \geq 13 \\ x_2 + 3x_3 \geq 11 \\ 0 \leq x_i \leq 13,\ x_i \text{ - целое, } i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

КЗ 1.7. Решить следующую задачу ЦЛП:

$$/ = 5x_1 + 4x_2 + x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 10 \\ 2x_1 + 3x_3 \geq 13 \\ x_2 + 3x_3 \geq 5 \\ О \leq х_i \leq 6,\ x_i \text{ –целое, } i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

К31.8. Решить следующую задачу ЦЛП:

$$/ = 4x_1 + 3А_2 + x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 9 \\ 2x_1 + x_3 \geq 9 \\ 3x_2 + 2x_3 \geq 11 \\ О \leq x_i \leq 12,\ x_i \text{ –целое, } i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

К31.9. Решить следующую задачу ЦЛП:

$$/ = 3А_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 13 \\ 2x_1 + 3x_3 \geq 9 \\ x_2 + 3x_3 \geq 11 \\ О \leq х_i \leq И,\ x_i \text{ - целое, } i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

К31.10. Решить следующую задачу ЦЛП:

$$/ = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 11 \\ 2x_1 + 3x_3 \geq 10 \\ 3x_2 + 2x_3 \geq 11 \\ 0 \leq х_i \leq 8,\ х_i \text{ –целое, } / = 1, 2, 3. \end{cases}$$

К31.11. На некотором предприятии выполняются три вида работ на оборудовании четырех типов. Дана матрица

$$Й = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & ! & I \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

в которой на позиции (i, k) находится число, равное себестоимости использования единицы оборудования k-го типа на работе /-го вида. Ограничения по суммарной себестоимости для работ первого, второго и третьего видов равны соответственно 23, 22 и 15. Производственные эффекты от использования единицы оборудования каждого типа равны соответственно 1,4, 3, 5. Предполагается, что оборудование всех типов является неделимым и на оборудовании любого типа можно выполнять любую работу. Кроме того, на предприятии не более !00 единиц оборудования каждого типа. Требуется составить план использования оборудования, обеспечивающий наивысший суммарный производственный эффект.

Таблица 31.1

Номер проекта	1	2	3	4	5
Расходы на материалы	2	3	1.5	4	1
Расходы на энергию	3	2	4	3	1.5
Прочие расходы	4	3	2	1	3
Прибыль	5	4	3	2	1

К31.12. Существует пять проектов использования капиталовложений. В таб. 31.1 даны расходы на материалы, энергию, а также прочие расходы и прибыль от реализации каждого проекта (в млн. ден. ед.). Известны также ограничения на расходы: на материалы — 7, на энергию — 10, на прочие — 6. Требуется определить набор проектов, обеспечивающий в пределах имеющихся ресурсов максимальную прибыль.

Ответы, указания, решения

Общий алгоритм решения задач ЦЛП методом ветвей и границ с помощью Mathcad будет показан на примере задачи К3 1.12.

К31.1. Ответы. Оптимальный план равен (0,2,4), оптимальное значение целевой функции равно 8.

К31.ll. Ответы. Необходимо использовать 7 единиц оборудования третьего типа и 15 единиц оборудования четвертого типа. Максимальный производственный эффект равен 96.

К31.12. Задать начало отсчета нумерации строк и столбцов матриц и векторов: ORIGIN:=1. Ввести исходные данные:

матрицу $\mathrm{в} := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1.5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 1.5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ расходов на реализацию проектов, вектор $c^T := (7, 10, б)$ ограничений на расходы. векторы $a l^T := (0, 0, 0, 0, 0)$, $b\backslash^T := (1, 1,1,1, 1)$ ограничений на переменные (при $x_i = 1$ i-й проект используется, а при x, =0 - нет), вектор $x^T :=$ (о, 0, 0, О,о) начальных значений переменных, целевую функцию $f(x) := -(d \cdot x)$, где $d^T := (5, 4, 3, 2, 1)$. В данных обозначениях исходную задачу ЦЛП можно записать так:

$$f(x) = -\left[d^T \cdot x^1\right] \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} Bx \le c \\ a1 \le x \le b1 \\ x \text{ - целочисленный вектор.} \end{cases}$$

Поэтому в качестве начального рекордного плана можно взять нулевой вектор, а в качестве рекорда — значение целевой функции на этом плане: `resol:=x` `re:=f(resol)`.

Забегая вперед отметим, что значения оценочной функции для листьев $\Omega_k^{(1)}$ и $\Omega_k^{(2)}$ будут вычисляться посредством решения соответствующих задач ЛП, общий вид которых таков:

$$f(x) \to \min \qquad\qquad f(x) \to \min$$

$$\overline{\Omega}_k^{(1)} = \begin{cases} Bx \le c \\ a1 \le x \le b1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \overline{\Omega}_k^{(2)} = \begin{cases} Bx \le c \\ a2 \le x \le b2 \end{cases}$$

(векторы $a1$, $b1$, $a2$, $b2$ ограничений на переменные, получаемые в результате применения ПД, будут заново определяться на каждом шаге алгоритма).

Теперь перейдем к описанию алгоритма решения данной задачи с помощью Mathcad. Алгоритм может быть использован при решении любой задачи ЦЛП, однако его шаги демонстрируются на примере данной задачи. Вначале необходимо создать две вспомогательные подпрограммы-функции *list* и `newbound`.

Подпрограмма-функция *list* позволяет на каждом шаге запоминать в матрице *k* векторы `a1`, `b1`, `a2`, `b2` ограничений на переменные во вновь образованных листьях $\Omega_{k-1}^{(1)}$, $\Omega_{k-1}^{(2)}$, а также значения $f(y_1)$ и $f(y_2)$ оценочных функций для этих листьев. При этом значение переменной *no* будет равно количеству листьев на данном шаге; данные, касающиеся листа $\Omega_{k-1}^{(1)}$, вносятся на место прежнего листа Ω_{k-1}, к которому была применена ПД; данные, касающиеся листа $\Omega_{k-1}^{(2)}$, вносятся в строку матрицы *k* с номером *no*. Затем производится сортировка листьев, после которой в первой строке матрицы *k* будет храниться информация, касающаяся листа с минимальным значением оценочной функции. Итак,

```
list(a1, a2, b1, b2, y1, y2, no, k) :=
        k[1,1] ← a1
        k[1,2] ← b1
        k
        k
```

$$\left| \begin{aligned} & k_{no,2} \leftarrow b2 \\ & k_{no,3} \leftarrow y2 \\ & k_{no,4} \leftarrow f(y2) \\ & k \leftarrow csort(k,4) \end{aligned} \right.$$

Подпрограмма-функция newboundопределяет номер строки л в матрице k, начиная с которой в ней хранится информация о листьях, теряющих статус перспективных, поскольку для них значения оценочной функции не меньше текущего рекорда re. Вторая часть этой подпрограммы фактически применяет ПД к перспективному листу Ω_k с наименьшим значением оценочной функции. Вся информация, касающаяся этого листа, находится в первой строке матрицы k. Более точно: определяется нецелочисленная координата y_s и обновляются соответствующие координаты векторов $a2$ и $b1$; обновленные векторы $a2$ и $Ы$ будут использоваться на следующем шаге при определении значений оценочной функции для новых листьев $\Omega_k^{(1)}$ И $\Omega_k^{(2)}$. Итак,

newbound(k,no, re):=

$$\left| \begin{aligned} & i \leftarrow 1 \\ & while \ \ k_{i,4} < re \\ & \quad \left| \begin{aligned} & \mathbf{i} \leftarrow \mathbf{i} + \mathbf{1} \\ & break \ \ if \ \ i > no \end{aligned} \right. \\ & n \leftarrow i \\ & return \ \ \text{"end"} \ \ if \ \ n = 1 \\ & a2 \leftarrow k_{1,1} \end{aligned} \right.$$

$$\left| \begin{aligned} & Ы \leftarrow k_{1,2} \\ & y \leftarrow k_{1,3} \\ & s \leftarrow 1 \\ & while \ \ floor(y_s) = y_s \\ & \qquad S \leftarrow S+1 \end{aligned} \right.$$

$$\left| \begin{aligned} & a2_s \leftarrow ceil(y_s) \\ & b1_s \leftarrow floor(y_s) \\ & stack(a2, b1, n) \end{aligned} \right.$$

Следующая подпрограмма-функция производит коррекцию рекордного плана:

$$res(y1, y2, resol, re) := \left| \begin{array}{l} res \leftarrow resol \;\; if \;\; (floor(y1) \neq y1) \cdot (floor(y2) \neq y2) \\ if \;\; (floor(y1) = y1) \cdot (floor(y2) \neq y2) \\ \quad \left| \begin{array}{l} res \leftarrow y1 \;\; if \;\; f(y1) = \min(f(y1), re) \\ res \leftarrow resol \;\; otherwise \end{array} \right. \\ if \;\; (floor(y1) \neq y1) \cdot (floor(y2) = y2) \\ \quad \left| \begin{array}{l} res \leftarrow y2 \;\; if \;\; f(y2) = \min(f(y2), re) \\ res \leftarrow resol \;\; otherwise \end{array} \right. \\ if \;\; (floor(y1) = y1) \cdot (floor(y2) = y2) \\ \quad \left| \begin{array}{l} res \leftarrow y1 \;\; if \;\; f(y1) = \min(f(y1), f(y2), re) \\ res \leftarrow y2 \;\; if \;\; f(y2) = \min(f(y1), f(y2), re) \\ res \leftarrow resol \;\; if \;\; re = \min(f(y1), f(y2), re) \end{array} \right. \\ res \end{array} \right.$$

Следующий блок вычисляет значение оценочной функции для листа Ω_0, равное f(y1) = -8.75, а также применяет ПД к этому листу, заново определяя векторы a_1, b_1, a_2, b_2:

Given

$B \cdot x \leq c \quad a1 \leq x \leq b1 \quad y1 := minimize(f, x) \; y1 := round(y1, 6)$

$k := list(a1, b1, b1, y1, y1, 1, k) \quad M := newbound(k, 1, re)$

$a1 := k_{1,1} \; b2 := k_{1,2} \quad b1 := submatrix(M, m + 1, 2 \cdot m, 1, 1)$

$a2 := submatrix(M, 1, m, 1, 1) \quad no := submatrix(M, 2 \cdot m + 1, 2m + 1, 1, 1)$

Отметим необходимость применения здесь функций round(y1, 6), round(y2, 6) для устранения незначащих цифр (начиная с шестого знака после запятой), возникающих при решении соответствующих задач ЛП. Так, если некоторое число *a* является целым, то наличие незначащих цифр в представлении этого числа в памяти компьютера приведет при сравнении двух целых чисел floor(a) и *a* к неправильному выводу о том, что эти числа различны.

Следующий блок вычисляет значения оценочной функции для листьев $\Omega_0^{(1)}$ и $\Omega_0^{(2)}$, равные соответственно $f(y1) = -8.5$ и $f(y2) = -8.3181$, а также применяет ПД к листу $\Omega_0^{(1)}$ (который для удобства переобозначим через Ω_1), заново определяя векторы a1, b1, a2, b2:

Given

$$B \cdot x \leq c \quad a1 \leq x \leq b1 \quad y1 := minimize(f, x) \; y1 := round(y1, 6) \tag{31.3}$$

Given

$B \cdot x \le c \quad a2 \le x \le b2 \quad y2 := minimize(f, x) \quad y2 := round(y2, 6)$

$resol := res(y1, y2, resol, re) \quad re := f(resol)$

$k := list(a1, a2, b1, b2, y1, y2, no, k) \quad M := newbound(k, no, re)$

$a1 := k_{1,1} \quad b2 := k_{1,2} \quad b1 := submatrix(M, m + 1, 2 \cdot m, 1, 1)$

$a2 := submatrix(M, 1, m, 1, 1) \quad no := submatrix(M, 2m + 1, 2m + 1, 1, 1)$

Еще одно применение блока (31.3) позволяет вычислить значения оценочной функции для листьев $\Omega_1^{(1)}$ и $\Omega_1^{(2)}$, соответственно равные $f(y1) = -8.333$ и $f(y2) = -8$, а также применить ПД к листу $\Omega_1^{(1)}$ (который для удобства переобозначим через Ω_2). При этом произойдет коррекция рекорда и рекордного плана, которые станут равными -8 и (1, o, 1, 0, 0). Еще одно применение блока (31.3) вычисляет значения оценочной функции для листьев $\Omega_2^{(1)}$ и $\Omega_2^{(2)}$, при этом $\rho(\Omega_2^{(1)}) = f(y1) = -7.333$, а вторая задача ЛП не имеет решения. Поэтому надо положить $y2 := resol$. Поскольку из оставшихся листьев только $\Omega_0^{(2)}$ сохранит статус перспективного, то ПД будет применено именно к этому листу (который для удобства переобозначим через Ω_3). И наконец, последнее применение блока (31.3) позволяет вычислить значения оценочной функции для листьев $\Omega_3^{(1)}$ и fif, соответственно равные $f(y1) = -7.333$, $f(y2) = -7$, и установить отсутствие перспективных листьев (M = *"end")*. В итоге имеем ответ: необходимо реализовать первый и третий проект в соответствии с найденным оптимальным планом (1, 0, 1, 0, 0), при этом максимальная прибыль от реализации проектов составит 8 млн ден. ед.

Глава 32

Общая задача нелинейного программирования

Рассмотрим следующую задачу условной оптимизации *(см. гл. 15)*:

$$f(x_1, ..., x_n) \to \max(\min)$$
$$\text{на множестве планов } X \subseteq Af^n \qquad (32.1)$$

Точка M^* из X называется локально оптимальным планом задачи (32.1), если найдется такая ее **ε-окрестность** $B(e, M^*)$, что M^* — оптимальный план задачи

$$/(x_,, ..., x_,) \to \max(\min)$$
$$\text{на множестве планов } B(\varepsilon, N^*) \cap X \qquad (32.2)$$

Определение

Градиентом **grad***f*(*M*₀) функции $f(x_1 ... x_n)$ в точке $M_0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ называется вектор, /-я координата которого равна частной производной функции *f* в точке M_0 по *i*-й переменной x,: grad $f(M_0) = (f'_{x_1}(M_0), ..., f'_{x_n}(M_0))$.

Вектор –grad $f(M_0)$ называется антиградиентом функции *f* в точке *Mo*. Точка, в которой функция *f* **имеет** градиент, равный нулевому вектору, называется стационарной точкой этой функции.

Теорема 32.1. Пусть M^* — внутренняя точка множества *X*, являющаяся локально оптимальным планом задачи (32.1). Тогда если в точке M^* существует градиент функции/ то M^* — стационарная точка функции/

Доказательство. Пусть $M^* = (x_1^*, ... x_n^*)$. Тогда функция $g(x_1) = f(x_1, x_2^*, ..., x_n^*)$ является функцией одной переменной, дифференцируемой в точке А** . Поскольку M^* является внутренней точкой множества *X*, то можно считать, что окрестность $B(\varepsilon, M^*)$ целиком содержится в *X*. Следовательно, функция / принимает в точке M^* наибольшее (наименьшее) значение на множестве планов $B(\varepsilon, M^*)$. Это, в частности, означает, что функция *g* принимает наибольшее (наименьшее) значение на некотором множестве $(x_1^* - \varepsilon, x_1^* + \varepsilon) \subset Af^1$. Тогда по теореме Ферма x_1^* — стационарная точка функции *g*, т. е.

$$0 = g'(x_1^*) = f'_{x_1}(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = f'_{x_1}(M^*).$$

Для остальных частных производных функции f рассуждения аналогичны. Теорема доказана.

Теперь сформулируем общую задачу нелинейного программирования:

целевая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \to \max\ (\min)$,

а множество планов X задается системой

$$\begin{cases} g_i(x_1, \ldots, x_n)\{\le, =, \ge\}b_i, \\ i = 1, \ldots, m \end{cases} \tag{32.3}$$

и функции $f, g_1, \ldots, g_m$ определены и непрерывны всюду в R^n.

Теорема 32.2. Если множество планов X задачи (32.3) ограничено и f имеет градиенты во всех внутренних точках множества X, то задача (32.3) имеет оптимальные планы, причем каждый из них является либо граничной точкой множества X, либо изолированной точкой, либо стационарной точкой функции f.

Доказательство. В силу следствия 15.2 X — замкнутое множество. Но тогда по теореме 15.2 функция f имеет оптимальные планы на множестве X. Пусть M^* — один из них. Если M^* — внутренняя точка в X, то выполняются условия теоремы 32.1, откуда M^* — стационарная точка функции f. Если M^* — не внутренняя точка в X, то M^* либо изолированная, либо граничная для X. Теорема доказана.

Пример

Решить следующую задачу нелинейного программирования:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to \min$$

$$x_1^2 + x_2^2 \le 4.$$

Множество точек из R^2, удовлетворяющих неравенству $x_1^2 + x_2^2 \le 4$, ограничено. Поэтому в силу теоремы 32.2 оптимальные планы находятся среди граничных и стационарных точек. Поскольку граничные точки удовлетворяют уравнению $x_1^2 + x_2^2 = 4$, то в каждой граничной точке функция f имеет следующий вид: $f = x_1^2 + (4 - x_1^2) = 4$. Найдем стационарные точки функции f. $\mathrm{grad} f(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2)$, т. е. точка (0, 0) — единственная стационарная точка функции f, причем $f(0, 0) = 0$. Поэтому (0, 0) — оптимальный план исходной задачи.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах П32.1—П32.21 найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y)$ в области, заданной системой неравенств.

П32.1. $f = x^2 + y^2 - 9xy + 27, \quad 0 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le 3.$

П32.2. $f = x^2 + 2y^2 + 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad x + y \le 3.$

П32.3. $f = 3 - 2x^2 - xy - y^2$, $x \le 1$, $y \ge 0$, $y \le x$.

П32.4. $f = x^2 + 3y^2 + x - y$, $x \ge 0$, $y \ge -1$, $x + y \le 1$.

П32.5. $f = x^2 + 2xy + 2y^2$, $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

П32.6. $f = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$, $x \ge -1$, $y \ge -1$, $x + y \le 1$.

П32.7. $f = 10 + 2xy - x^2$, $0 \le y \le 4 - x^2$.

П32.8. $f = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$, $x \le 0$, $y \le 0$, $x + y + 2 \ge 0$.

П32.9. $f = x^2 + xy - 2$, $4x^2 - 4 \le y \le 0$.

П32.10. $f = x^2 + xy$, $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 3$.

П32.11. $f = 2x^2 + 3y^2 + 1$, $y^2 + \frac{9}{4}x^2 \le 9$.

П32.12. $f = x^3 + y^3 - 3xy$, $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$.

П32.13. $f = 2x^2y - x^3y - x^2y^2$, $x + y \le 6$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

П32.14. $f = x^2 + 2xy - y^2$, $x + y + 4 \ge 0$, $x \le 0$, $y \le 0$.

П32.15. $f = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$, $y \le 2x$, $0 \le x \le 1$, $y \ge 0$.

П32.16. $f = x^2 + xy - 2$, $0 \ge y \ge 4x^2 - 4$.

П32.17. $f = \frac{1}{2}x^2 - xy$, $2x^2 \le y \le 8$.

П32.18. $f = xy + x + y$, $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 4$.

П32.19. $f = x^2 - xy + y$, $-2 \le x \le 2$, $-3 \le y \le 3$.

П32.20. $f = 3 + 2x^2y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$.

П32.21. $f = x^2 + y^2 - xy + x + y$, $y \le 0$, $-3 \le x \le 0$, $y \ge -x - 3$.

Ответы, указания, решения

П32.21. Множество планов X изображено на рис. 32.1.

Выясним, существуют ли стационарные точки, лежащие внутри данной области, т. е. внутри треугольника OAB. Поскольку $\operatorname{grad} f(x, y) = (2x - y + 1, 2y - x + 1)$, то необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ 2y - x + 1 = 0. \end{cases}$$

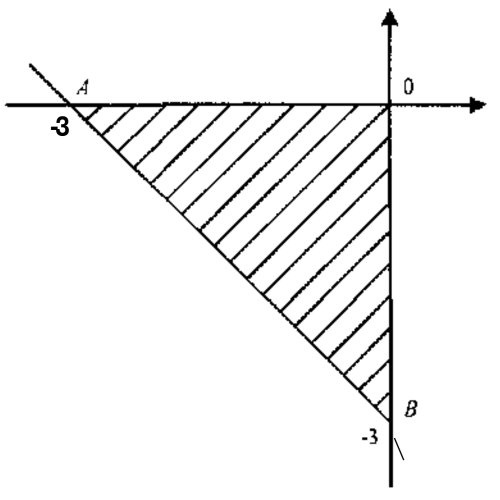


Рис. 32.1. Множество планов X

Откуда $x = -1$, $y = -1$. Точка $M_1 = (-1,-1)$ попадает в область X и $f(M_1) = -1$.

Исследуем теперь функцию / в граничных точках. На отрезке OB $x=0$, откуда $g(y) = f(0, y) = y^2 + y$, и задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений функции g одной переменной на отрезке $OB = [-3, 0]$. Найдем эти значения:

ст'=2у+1, я' =0 при у = $-\frac{1}{2}$, $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$; на концах отрезка OB $g(-3) = 6$, $g(0) = 0$. Поэтому наибольшее значение функции / на отрезке OB равно 6, а наименьшее равно 0.

Аналогично рассматривается отрезок $OA = [-3, 0]$, на котором $y = 0$: $t(x) = f(x, 0) = x^2 + x$, $t'_x = 2x + 1$, $t'_x = 0$ при $x = -\frac{1}{2}$, $t\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, $t(-3) = 6$,

$t(0) = 0$. Итак, наибольшее значение функции /на отрезке OA равно 6, а наименьшее значение равно 0.

И, наконец, на отрезке AB прямой $y = -x - 3$ имеем: $r(x) = f(x, -x-3) = x^2 + (-x-3)^2 - x(-x-3) + x + (-x-3) = 3x^2 + 9x + 6$,

$r'_x = 6x + 9$, $r' = 0$ при $x = -\frac{3}{2}$, $r\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$. На концах отрезка AB значения функции уже были найдены.

Сравнивая все полученные значения функции f, заключаем, что наибольшее значение функции /в области X равно 6, а наименьшее значение функции f в области X равно -1.

Глава 33

Метод множителей Лагранжа

Часто граничные точки множества X невозможно определить из ограничений задачи. В этих случаях теорема 32.2 становится бесполезной, но может быть применен другой метод, называемый методом множителей Лагранжа. Основу метода составляет следующая теорема, которую приведем без доказательства.

Теорема 33.1. Пусть все ограничения в задаче (32.3) являются равенствами. Предположим, что точка M^* из X такова, что функции f, $g_1, \ldots, g_m$ имеют непрерывные частные производные первого порядка во всех точках некоторой окрестности точки M^*, а система векторов $\operatorname{grad} g_1(M^*), \ldots, \operatorname{grad} g_m(M^*)$ линейно независима. Тогда если M^* — локально оптимальный план задачи (32.3), то найдутся такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, что точка M^* будет стационарной точкой функции

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) =$$
$$= f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m g_m(x_1, \ldots, x_n)$$

(Функция L называется функцией Лагранжа.)

Следствие 33.1. Если множество планов X задачи (32.3) ограничено и все ограничения являются равенствами, то эта задача имеет оптимальные планы, причем каждый из них либо является стационарной точкой соответствующей функции Лагранжа, либо в нем нарушаются предположения теоремы 33.1.

Доказательство. Так как множество планов X ограничено и замкнуто (следствие 15.2), то в силу теоремы 32.2 задача (32.3) имеет оптимальный план M^*. Но тогда M^* — локально оптимальный план этой задачи. И если для M^* выполняются предположения теоремы 33.1, то M^* — стационарная точка соответствующей функции Лагранжа. Следствие доказано.

Пример

Решить следующую задачу нелинейного программирования:

$$f(x, y, z) = x + y + z \to \max$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 27$$

Поскольку $|x| \le 3$, $|y| \le 3$, $|z| \le 3$, то множество планов X этой задачи ограничено и она в силу следствия 33.1 имеет некоторый оптимальный план M^*. Проверим выполнимость предположений теоремы 33.1 в точке $M^* = (x^*, y^*, z^*)$. В данной задаче имеется единственное ограничение $g_1(x, y, z) = 27$, где $g_1 = x^2 + y^2 + z^2$. Поэтому $\operatorname{grad} g_1(M^*) = (2x^*, 2y^*, 2z^*)$. Система векторов, состоящая из одного вектора, является линейно зависимой, если и только если этот вектор нулевой (см. задачу Т2.1). Но $\operatorname{grad} g_1(M^*) = 0$, если $x^* = y^* = z^* = 0$, что невозможно ввиду $M^* \in X$. Итак, в точке M^* выполняются условия теоремы 33.1, откуда в силу следствия 33.1 M^* — стационарная точка функции Лагранжа

$$L(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 27).$$

Найдем все стационарные точки функции Лагранжа L:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ 1 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 27 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ y = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ z = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ \dfrac{1}{4\lambda^2} + \dfrac{1}{4\lambda^2} + \dfrac{1}{4\lambda^2} = 27 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{6}.$$

Отсюда следует, что (3, 3, 3) и (-3, -3, -3) — стационарные точки функции L. Так как $f(3, 3, 3) = 9$, $f(-3, -3, -3) = -9$, то план $M^* = (3, 3, 3)$ является решением задачи.

Лемма 33.1. Пусть M^* — внутренняя точка некоторого множества $Y \subseteq R^n$, причем M^* — локально оптимальный план задачи

$$f(x_1, \dots, x_n) \to \max\ (\min) \tag{33.1}$$

на множестве планов $X \cap Y$.

Тогда M^* — локально оптимальный план задачи (32.1).

Доказательство. Поскольку M^* — локально оптимальный план задачи (33.1), то по определению существует такая окрестность $B(\varepsilon, M^*)$, что M^* является оптимальным планом задачи

$$f(x_1, \dots, x_n) \to \max\ (\min)$$

на множестве планов $B(\varepsilon, M^*) \cap (X \cap Y)$.

Но M^* — внутренняя точка в Y. Поэтому можно считать окрестность $B(\varepsilon, M^*)$ таковой, что $B(\varepsilon, M^*) \subseteq Y$. Но тогда

$$B(\varepsilon, M^*) \cap (X \cap Y) = (B(\varepsilon, M^*) \cap Y) \cap X = B(\varepsilon, M^*) \cap X.$$

Поэтому план M^* является оптимальным планом задачи (32.2) и, следовательно, локально оптимальным планом задачи (32.1).

Следствие 33.2. Пусть первые κ ограничений задачи нелинейного программирования (32.3) являются равенствами, а остальные $m-\kappa+1$ ограничений — нестрогими неравенствами, и пусть Y и Z — соответственно множества всех точек из Af^n, удовлетворяющих первым κ и последним $m-k+1$ ограничениям этой задачи. Предположим, что множество планов $X=Y\cap Z$ ограничено. Тогда задача (32.3) имеет оптимальные планы, причем каждый оптимальный план M^* из X является стационарной точкой функции Лагранжа

$$L(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_k)=$$
$$=f(x_1,\ldots,x_n)+\lambda_1 g_1(x_1,\ldots,x_n)+\ldots+\lambda_k g_k(x_1,\ldots,x_n)$$

при условии, что $g_i'(M^*)\neq b_i, i=\kappa+1,\ldots,m$, функции $f, g_1, \ldots, g_k$ имеют непрерывные частные производные первого порядка во всех точках некоторой окрестности точки M^*, а система векторов $\operatorname{grad} g_1(M^*)$, ..., $\operatorname{grad} g_k(M^*)$ линейно независима.

Доказательство. В силу теоремы 32.2 задача (32.3) имеет оптимальные планы. Пусть M^* — один из тех оптимальных планов, для которых выполняются предположения данного следствия. Тогда M^* — локально оптимальный план задачи (32.3). Поскольку $g_i(M^*)\neq b_i$, $i=\kappa+1,\ldots,m$, то из теоремы 15.1 следует, что M^* —внутренняя точка множества Z. Поэтому из леммы 33.1 вытекает, что Л-/*— локально оптимальный план задачи

$$f(x_1,\ldots,x_n)\to\max(\min)$$

на множестве планов $Y=\{$

$i=1\ldots\kappa$

Остальное следует из теоремы 33.1.

Пример

Применим следствие 33.2 к решению следующей задачи нелинейного программирования:

$$f(x,y,z)=x+y+z\to\min$$

$$\begin{cases} xyz=1000\\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.\end{cases}$$

Поскольку $f(10, 10, 10) = 30 < 50$, то эта задача эквивалентна следующей:

$$x+y+z\to\min$$

$$X=\begin{cases} xyz=1000\\ x\ge 0, y\ge 0,\ z\ge 0\\ x+y+z\le 50.\end{cases} \tag{33.2}$$

(Вместо 50 можно взять любое число большее, чем 30.) Обозначим через Y множество точек в Af^3, удовлетворяющих ограничению $xyz = 1000$, а через Z — удовлетворяющих ограничениям $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, $x + y + z \le 50$. Так как множество планов $X = Yr,Z$ ограничено, то из теоремы 15.2 следует, что задача (33.2) имеет оптимальные планы. Пусть $M^* = (x^*, y^*, z^*)$ — произвольный оптимальный план. Поскольку точка $M_0 = (10, 10, 10)$ является планом задачи (33.2) и $f(M_0) = 30$, то $f(M^*) \le 30 < 50$. Кроме того, $x^* y^* z^* = 1000$, откуда $x^* > 0$, $y^* > 0$, $z^* > 0$, $\operatorname{grad} g_1(M^*) = (y^* z^*, x^* z^*, x^* y^*) \ne \bar{0}$, где $g_1(x, y, z) = xyz - 1000$. Поэтому выполняются все предположения следствия 33.2, в силу которого M^* должна быть стационарной точкой функции

$$L(x, y, z, \lambda) = x + y + z + X(xyz - 1000).$$

Найдем все ее стационарные точки, учитывая также, что $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.
$L'_x = 1 + \lambda yz$, $L'_y = 1 + Xxz$, $L'_z = 1 + \lambda xy$, $L'_\lambda = xyz - 1000 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 1 + Xyz = 0 \\ 1 + \text{te} = 0 \\ 1 + \lambda xy = 0 \\ xyz = 1000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda yz) \cdot (\lambda xz) \cdot (\lambda xy) = (-1)^3 \\ xyz = 1000 \end{cases} \Rightarrow \lambda^3 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{100} \Rightarrow \begin{cases} yz = 100 \\ xz = 100 \\ xy = 100 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 10.$$

Таким образом, оптимальный план M^* совпадает с точкой (10,10,10).

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие задачи нелинейного программирования с ограничениями в виде равенств:

П33.1. $f = x + y + z \to \min$

$x^2 + y^2 + z^2 = 3$

П33.2. $f = xy \to \min$

$x^2 + y^2 = 1$

П33.3. $/ = x - 2y + 2z \to \max$

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$

П33.4. $f = 2x + y - 2z \to \max$

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$

П33.5. $/ = 6 - 4x - 3 \to \max$

$x^2 + y^2 = 1$

П33.6. $/ = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \to$ mi

$x^2 + y^2 = 1$

П33.7. / = -2.V+ $2y + z \to \max$

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$

П33.8. $f = xyz \to \max$

$x^2 + y^2 + z^2 = 12$

П33.9. / = $xyz \to \min$

$x^2 + y^2 + z^2 = 48$

П33.10. $f = 2xyz \to \max$

$x^2 + y^2 + z^2 = 3$

Общаяформулировказадач **П33.11—П33.20** вбуквенныхобозначениях

Пусть $f(x, y, z)$ является функцией полезности набора товаров, состоящего из x единиц товара первого вида, y единиц товара второго вида и z единиц товара третьего вида. Цена единицы товара /-го вида равна c_i, /=1,2, 3. Требуется найти стоимость наиболее дешевого набора, имеющего предписанное значение 6 его функции полезности.

П33.11. Дано: $f = xyzb = 1000$, $c_1 = 4$, $c_2 = 25$, $c_3 = 10$.

П33.12. Дано: $f = 2xyz$, 6 = 1000, с, = 25 , $c_2 = 8$, $c_3 = 10$.

П33.13. Дано: $f = xyz$, $b = 512$, с, = 4 , $c_2 = 16$, $c_3 = 8$.

П33.14. Дано: / = $5xyz$, 6 = 512, $c_1 = 8$, $c_2 = 16$, $c_3 = 20$.

П33.15. Дано: $f = xyz$, b = \25, с, = 5 , $c_2 = 5$, $c_3 = 5$.

П33.16.Дано: / = $8xyz$, 6 = 125, с, = 20 , $c_2 = 10$, $c_3 = 5$.

П33.17. Дано: $f = xyz$, 6 = 216, с, = 9 , $c_2 = 8$, $c_3 = 3$.

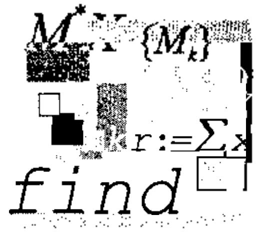
П33.18. Дано: $f = 7xyz$, $b = 216$, с, = 8 , $c_2 = 9$, $c_3 = 21$.

П33.19. Дано: / = xyz , 6 = 729 , $c_1 = 27$, $c_2 = 3$, с, = 9 .

П33.20. Дано: / = $2xyz$, b = 729 , с, = 9 , $c_2 = 6$, $c_3 = 27$.

Глава 34

Понятие о градиентных методах



Вначале дадим определение производной функции по направлению.

Определение

Пусть $\bar{l} \in R^n$ — вектор единичной длины и $M_0 \in Af^n$ Производной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в точке M_0 по направлению вектора $\bar{l}$ называется число

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{l}}(M_0) = \lim \frac{f(M_0 + t\bar{l}) - f(M_0)}{}$$

(Можно сказать, что $\frac{\partial f}{\partial \bar{l}}(M_0)$ — это скорость изменения функции f в точке M_0 по направлению вектора $\bar{l}$).

Теорема 34.1.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{l}}(M_0) = \left[\operatorname{grad} f(M_0) \cdot \bar{l}\right]$$

Доказательство. Пусть $M_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_n)$. Положим $\varphi(t) = M_0 + t\bar{l}$. Тогда

$$f(\varphi(t)) = f(M_0 + t\bar{l}) = f(x_1^0 + tl_1 \;.\;.\;.\; x_n^0 + tl_n), f(\varphi(0)) = f(M_0) = f(x_1^0, \ldots, x_n^0),\quad M_0 = \varphi(0).$$

Используя правило дифференцирования сложных функций, получим:

$$f_t'(\varphi(0)) = f_{x_1}'(M_0) \bullet (x_1^0 + tl_1)' + \ldots + f_{x_n}'(M_0) \cdot (x_n^0 + tl_n)' =$$
$$= f_{x_1}'(M_0) \cdot l_1 + \ldots + f_{x_n}'(M_0) \cdot l_n = \left[\operatorname{grad} f(M_0) \cdot \bar{l}\right]$$

Но с другой стороны,

$$f_t'(\varphi(0)) = \lim_{t\to 0} M \quad \underset{t}{bl} \quad m = \lim_{t\to 0+} \frac{f(M_0 + t\bar{l}) - f(M_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \bar{l}}(M_0),$$

что доказывает теорему.

Следствие 34.1. Градиент функции указывает направление максимальной ее скорости роста, причем эта скорость равна длине градиента.

Доказательство. Согласно теореме 34.1, скорость изменения функции f в точке M_0 в направлении вектора $\bar{l}$ равна $[\operatorname{grad} f(M_0)\cdot \bar{l}]$. Но по теореме 1.2 имеем: $[\operatorname{grad} f(M_0)\cdot \bar{l}] \le |\operatorname{grad} f(M_0)|\cdot|\bar{l}| = |\operatorname{grad} f(M_0)|$. При этом равенство $[\operatorname{grad} f(M_0)\cdot \bar{l}] = |\operatorname{grad} f(M_0)|$ достигается, если и только если косинус угла между векторами $\operatorname{grad} f(M_0)$ и $\bar{l}$ равен I. Другими словами скорость роста функции будет максимальной, если и только если векторы $\bar{l}$ и $\operatorname{grad} f(M_0)$ имеют одинаковое направление, т.е. вектор $\bar{l}$ равен вектору $\operatorname{grad} f(M_0)$, умноженному на некоторое положительное число (см. задачу Т1.3). Следствие доказано.

Опишем теперь общую схему градиентных алгоритмов для решения задачи (32.3), в которой целевая функция / имеет градиент во всех точках множества планов X. Предположим также, что решается задача максимизации функции.

О Шаг 0. Выбрать начальный план M_1.

• Шаг i ($i \ge 1$).

1. Вычислить $\operatorname{grad} f(M_i)$. Если $\operatorname{grad} f(M_i) = 0$, то M_i — стационарная точка функции/ В противном случае определить направление

$$M_i + t\cdot \operatorname{grad} f(M_i),\quad t \ge 0, \tag{34.1}$$

на котором функция/возрастает с максимальной скоростью.

2. Возможны два случая.

а) Направление (34.1) для некоторого / > 0 не выводит за границы множества X. В этом случае определить план M_{i+1}, для которого достигается наибольшее вдоль направления (34.1) значение функции/ Перейти к п. 3.

б) Направление (34.1) выводит за границы множества Л' при любом $t>0$. В этом случае точка Л/, граничная, и необходимо найти направление, которое, с одной стороны, не выводит из области X, а с другой — обеспечивает наибольшее возрастание функции / Такое направление определяет некоторый вектор $\bar{r}_i$, косинус угла между которым и вектором $\operatorname{grad} f(M_i)$

$$\frac{[\bar{r}_i\cdot \operatorname{grad} /(Л/,)]}{|\bar{r}_i|\cdot|\operatorname{grad} f(M_i)|},$$

минимально возможный среди векторов, указывающих направление из точки M_i, не выводящее за пределы X. Найти $\bar{r}_i$, определить план M_{i+1}, в котором достигается наибольшее вдоль направления Л/, $+t\bar{r}_i$, $t > 0$, значение функции / Перейти к п. 3.

3. Если $|M_{i+1} - M_i| \leq$ Е, где ε —некоторое заранее фиксированное число $\varepsilon > 0$, то алгоритм завершает свою работу и в качестве приближенного оптимального плана берется точка M_{i+1}. В противном случае перейти к следующему шагу.

Если решается задача на минимум, то направления выбираются с помощью антиградиентов функции f.

Задачи для самостоятельного решения

Т34.1. Доказать, что в пространстве $A/^2$ единичный вектор, составляющий угол а с положительной полуосью координат $0x$, равен $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Т34.2. Доказать, что в пространстве $A/^3$ единичный вектор $\bar{/}$, составляющий углы а, β и у соответственно с положительными полуосями координат Ox, $0y$ и Oz, равен $(\cos\alpha$, cos/?, cosy).

П34.1. Найти производную функции $f(x,y) = x^5 y^6$ в точке $M = (1, 1)$ по направлению вектора $\bar{v} = (3, -2)$.

П34.2. Найти производную функции $f(x, y, z) = xy + z^2 - xyz$ в точке (1,2,3) в направлении, образующем с положительными полуосями координат соответственно углы 60°, 45°, 60°.

П34.3. Найти производную функции /(x, y, $z) = xyz$ в точке (4, 1, 2) в направлении, идущем от этой точки к точке (8, 9, 10).

П34.4. Найти направление наискорейшего возрастания функции /(x, $y) = y^2 + xy +$ \5 в точке $(-1, 1)$ и найти наибольшую скорость возрастания функции/в этой точке.

П34.5. Найти производную функции $f(x, y, z) = xyz$ в точке (1,2,3) в направлении вектора $(\cos\alpha$, cos/?, cosy). Чему равна величина градиента в этой точке?

П34.6. Дана функция $f(x,y) = \arcsin\dfrac{x}{x+y}$. Найти угол между градиентами этой функции в точках $M_1 = (1, 1)$ и $M_2 = (3, 4)$.

П34.7. Найти производную функции $f(x, y) = x^4 - 3x^2 y + 3xy^2$ в точке (I, 1) в направлении, идущем от этой точки к точке (4, 3).

П34.8. Найти производную функции /(x, $y) =$ arcctg (xy) в точке (1, 1) в направлении биссектрисы первого координатного угла.

Общая формулировка задач К34.1—К34.10

Предприятие выпускает 3 вида продукции. При ее изготовлении используется 4 вида сырья. Дана матрица N размера 4×3, в которой на позиции (i, k) находится число a_{ik}, равное количеству сырья i-го вида, расходуемого на изготовление единицы продукции k-го вида. Даны также плановые себестоимости и оптовые цены (из расчета на единицу продукции): $r=(5,\ 10,7)$ и $c=(7,\ 13,\ 12)$. (В этих векторах k-я координата соответствует продукции k-го вида.) Из-за брака в производстве расход сырья зависит от объема x_k производства продукции k-го вида и выражается функциями $(a_{ik}+x_k)x_k$, а себестоимость продукции — функцией $r_k+0.1x_k$, $k=1, 2, 3$. Продукция может выпускаться в любых соотношениях, так как сбыт обеспечен. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль, если вектор запасов сырья равен $b=(100,\ 120,\ 150,\ 145)$.

К34.1. $N=\begin{pmatrix} 10 & 20 & \text{[illegible]} \\ 20 & 10 & 12 \\ 20 & 20 & 14 \\ 18 & 13 & 14 \end{pmatrix}.$

К34.2. $N=\begin{pmatrix} 12 & 24 & 5 \\ 10 & 7 & 16 \\ 24 & 21 & 14 \\ 11 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$

К34.3. $N=\begin{pmatrix} \text{[illegible]} & 23 & 5 \\ 11 & 10 & 11 \\ 13 & 23 & 14 \\ 21 & 17 & 18 \end{pmatrix}.$

К34.4. $N=\begin{pmatrix} 13 & 22 & 16 \\ 14 & 15 & 8 \\ 15 & 5 & 9 \\ 16 & 17 & 10 \end{pmatrix}.$

К34.5. $N=\begin{pmatrix} \text{[illegible]} & 8 & 15 \\ 23 & 13 & 13 \\ 8 & 23 & 17 \\ 19 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$

К34.6. $N=\begin{pmatrix} 6 & 14 & 17 \\ 10 & 9 & 7 \\ 10 & 16 & 13 \\ 14 & 15 & 10 \end{pmatrix}.$

К34.7. $N=\begin{pmatrix} 15 & 6 & 16 \\ 25 & 13 & 15 \\ 23 & 17 & 14 \\ \text{[illegible]} & 9 & 13 \end{pmatrix}.$

К34.8. $N=\begin{pmatrix} 1 & 17 & 16 \\ 18 & 7 & 12 \\ 13 & 24 & 10 \\ 24 & 15 & 9 \end{pmatrix}.$

К34.9. $N=\begin{pmatrix} 16 & 12 & 8 \\ 15 & 11 & 7 \\ 14 & 10 & 6 \\ 13 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$

К34.10. $N=\begin{pmatrix} 10 & 14 & 18 \\ 11 & 15 & 19 \\ 12 & 16 & 20 \\ 13 & 17 & 21 \end{pmatrix}.$

Ответы, указания, решения

Т34.2. Точки положительной полуоси Oz имеют вид $(0,0,0)+t\bar{p}$, где $\bar{p}=(0,0,1)$. Пусть $\bar{l}=(l_1,l_2,l_3)$. По условию угол между векторами $\bar{p}$ и $\bar{l}$ равен γ. Поэтому

$$\cos\gamma=\frac{\left|\bar{p}\cdot\bar{l}\right|}{\left|\bar{p}\right|\cdot\left|\bar{l}\right|}=\frac{l_3}{\left|\bar{l}\right|}=l_3.$$

Аналогично показывается, что $l_1=\cos\alpha$, $l_2=\cos\beta$.

П34.1. Единичный вектор, имеющий одинаковое направление с вектором $\bar{v}$, равен $\bar{l}=\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}=\left(\frac{3}{\sqrt{13}},-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$. Теперь по теореме 34.1

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \bar{l}}=\left[\operatorname{grad} f(M)\cdot\bar{l}\right]=\frac{15}{\sqrt{13}}-\frac{12}{\sqrt{13}}=\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

П34.2. Воспользоваться задачей Т34.2.

П34.3. Указание: направляющий вектор равен (4, 8, 8).

П34.6. Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{7}\right)$.

П34.8. Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

К34.1. Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad следующий.

ORIGIN:=1; ввести исходные данные N, $\bar{r}$, $\bar{c}$, $\bar{b}$ в векторно-матричном виде;

$m := rows(N)$ $n := cols(N)$ $i := 1;n$ $x_i := 0$ $j := 1;m$ $I_j := 1$

$f(x) := (c-(r+0.1\cdot x))\cdot x$

Given

$$\sum_{j=1}^{n}\left(N^{\langle j\rangle}+x_j\cdot I\right)x_j\le b \quad x\ge 0$$

$$y := maximize(f,x) \quad y=\begin{pmatrix}0.644\\0\\4.723\end{pmatrix} \quad f(y)=22.6$$

Глава 35

Градиентные методы в двумерном пространстве

Достаточно наглядно градиентные алгоритмы иллюстрируются в пространстве $A/^2$. Предположим, что все функции в задаче (32.3) являются функциями двух переменных x и y. В этом случае множество планов X представляет собой некоторую область на координатной плоскости *Oxy,* а целевая функция $z = f(x, y)$ изображается в виде поверхности в трехмерном пространстве. Например, множество точек *(x,y,z),* координаты которых связаны соотношением

$$\frac{(x-2)^2}{4} \quad \frac{(y-2)^2}{9}$$

составляют эллиптический параболоид, изображенный на рис. 35.1.

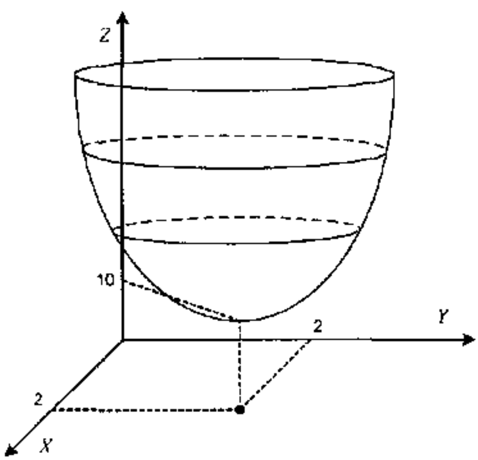


Рис. 35.1. Эллиптический параболоид

Если пересекать эту поверхность разными плоскостями z = С параллельно координатной плоскости Оху, то на этой поверхности будут "вырезаться" линии, проекции которых на плоскость Оху называются линиями уровня. В нашем случае линии уровня есть эллипсы (рис. 35.2). Вдоль любой линии уровня С значения функции/неизменны и равны С.

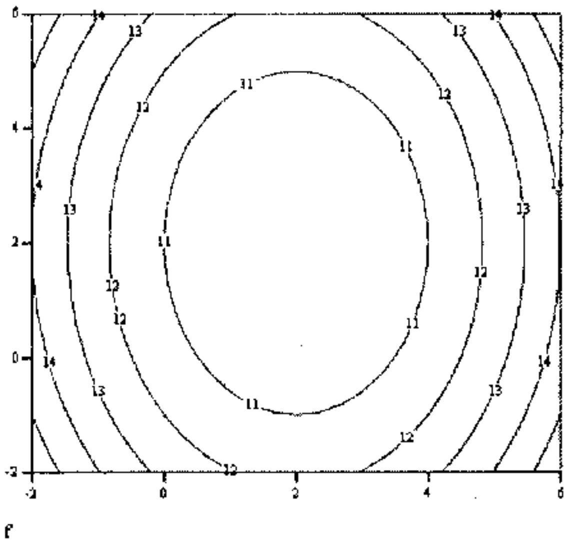


Рис. 35.2. Линии уровня эллиптического параболоида

Определение

Линией уровня С функции $f(x, y)$ называется множество точек (x, y) координатной плоскости Oxy, удовлетворяющих уравнению $f(x, y) = C$.

Теорема 35.1. Пусть функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка всюду в Af^2. Предположим. что $f(M) = C$ и $\operatorname{grad} f(M) \neq \bar{0}$. Тогда в некоторой окрестности точки M линия уровня С будет совпадать с графиком некоторой дифференцируемой функции $y = \varphi(x)$ при $f'_y(M) \neq 0$ или $x = \psi(y)$ при $f'_x(M) \neq 0$.

Эта теорема утверждает, что всякая линия уровня в некоторой окрестности любой своей точки, в которой градиент отличен от нулевого вектора, может быть представлена графиком дифференцируемой функции одной переменной.

Следствие 35.1. Если $\operatorname{grad} f(M) \neq \bar{0}$, то этот градиент является нормальным вектором прямой, касающейся линии уровня в точке M.

Доказательство. Предположим, что $M = (x_0, y_0)$, $C = f(M)$ и $f'_y(M) \neq 0$. Тогда по теореме 35.1 в окрестности точки M линия уровня Дх, y) = С может быть представлена графиком дифференцируемой функции y = ф (х). (Очевидно, что $y_0 = \varphi(x_0)$.) Поэтому в окрестности точки M C =fix, φ (х)). Продифференцировав это равенство почленно, получим:

$$C' = f'_x(x, \varphi(x)),\ 0 = f'_x(M) + f'_y(M)\varphi'(x_0),\ \varphi'(x_0) = -\frac{f'_x(M)}{f'_y(M)}.$$

Поскольку уравнение касательной к графику функции $y = \varphi(x)$ в точке (x_0, y_0) есть $y - y_0 = \varphi'(x_0)(x - x_0)$, то это уравнение можно записать в виде

$$y - y_0 = -\frac{f'_x(M)}{f'_y(M)}(x - x_0),\quad 0 = (y - y_0)\cdot f'_y(M) + (x - x_0)\cdot f'_x(M).$$

Отсюда по следствию 13.2 вектор $(f'_x(M), f'_y(M))$ является нормальным вектором касательной к линии уровня в точке M. Случай $f'_x(M) \neq 0$ рассматривается аналогично. Следствие доказано.

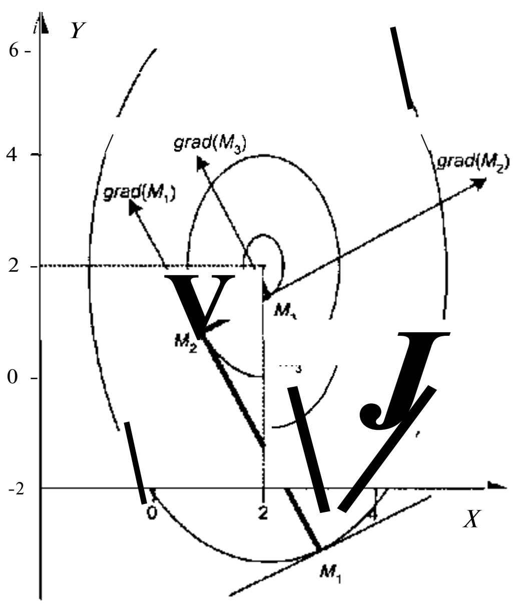


Рис. 35.3. Графическая иллюстрация градиентного алгоритма

На рис. 35.3 иллюстрируется общая схема градиентных алгоритмов при решении следующей задачи нелинейного программирования;

$$f(x,y) = \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} + 10 \to \min$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Последовательность точек M_1, M_2, M_3, M_4,... приближается к оптимальной точке $M^* = (2, 2)$. В силу следствия 35.1 градиент в каждой точке M_i перпендикулярен касательной к линии уровня в точке M_i.

Компьютерный раздел

Встроенная функция `rnd(z)` генерирует числа, равномерно распределенные на промежутке [0, z].

Построение графиков функций двух переменных (поверхностей) осуществляется следующим образом. Определите функцию `f(x, y)` двух переменных `x` и y. На подпанели **Графики** (Graph) щелкните на кнопке построения поверхностей. Па экране появится шаблон построения поверхностей, как показано на рис. 35.4. Единственным полем ввода этого шаблона является метка в левом нижнем углу, на месте которой введите имя функции `f`. Щелкните левой кнопкой мыши вне поля графика: поверхность `f(x, y)` будет построена (рис. 35.5).

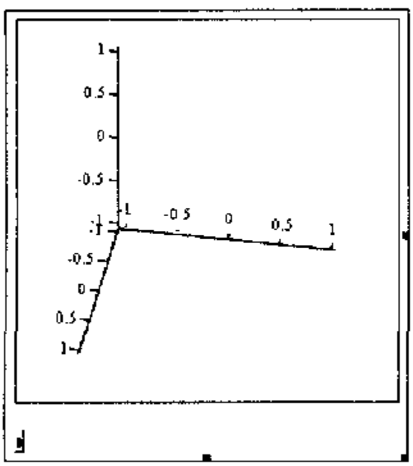


Рис. 35.4. Шаблон для построения поверхностей

$$f(x,y) := x^2 + y^2$$

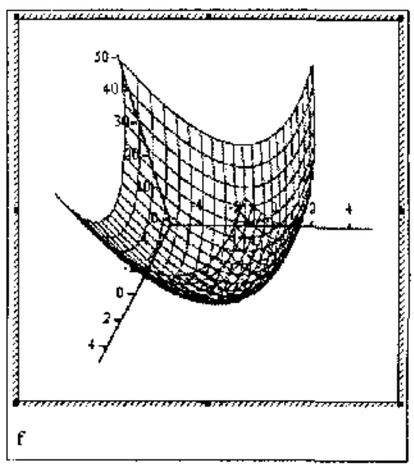


Рис. 35.5. Пример построения поверхности

С помощью одного шаблона можно изобразить несколько поверхностей, если на месте метки шаблона ввести через запятую имена соответствующих функций.

Вращение поверхностей осуществляется следующим образом. Поместите указатель мыши в область графика и, удерживая левую кнопку мыши, передвигайте мышь в том или ином направлении. Если передвигать мышь при нажатой клавшие <Ctrl>, то можно отдалять и приближать объект.

Форматирование трехмерных графиков осуществляется с помощью диалогового окна **3-D Plot Format** (рис. 35.6), вызываемого двойным щелчком левой кнопкой мыши на области графика. Вкладки `Plot1`, Plot2, `Plot3` И Т.Д. ЭТОГО окна соответствуют функциям, имена которых были указаны в шаблоне графика.

Назначение опций диалогового окна **3-D Plot Format** описано в *приложении 4*.

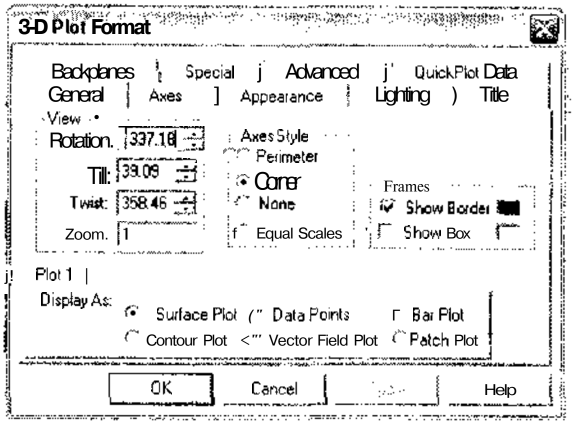


Рис. 35.6. Диалоговое окно для форматирования поверхностей

Задачи для самостоятельного решения

Общая формулировка задач П35.1 — П35.10 в буквенных обозначениях

Для сохранения здоровья и работоспособности человек должен потреблять в сутки не менее: b_1 условных единиц белков, b_2 условных единиц жиров, b_3 условных единиц углеводов. Имеется два вида продуктов $П_1$ и $П_2$: стоимость единицы каждого из них равна соответственно C_1 и C_2 денежных единиц. Имеется матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},$$

в которой a_{1i} равно количеству условных единиц белков в единице продукта $П_i$, a_{2i} равно количеству условных единиц жиров в единице продукта $П_i$, a_{3i} равно количеству условных единиц углеводов в единице продукта $П_i$, $i = 1,2$. Требуется составить математическую модель задачи, позволяющую сформировать из продуктов $П_1$ и $П_2$ суточную диету, которая содержала бы белков, жиров и углеводов не менее минимальных обоснованных норм и требовала бы минимальных денежных затрат. Решить задачу графическим способом.

П35.1. Дано: $b_1 = 20$, $b_2 = 40$, $b_3 = 88$, $C_1 = 6$, $C_2 = 10$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 3 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}.$$

П35.2. Дано: $b_1 = 69$, $b_2 = 84$, $b_3 = 39$, $C_1 = 4$, $C_2 = 12$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 16 \\ 21 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

П35.3. Дано: $b_1 = 45$, $b_2 = 138$, $b_3 = 135$, $C_1 = 13$, $C_2 = 10$,

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 6 & 23 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

П35.4. Дано: $b_1 = 92$, $b_2 = 128$, $b_3 = 56$. $C_1 = 12$, $C_2 = 11$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 23 \\ 8 & 12 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

П35.5. Дано: $b_1 = 63$, $b_2 = 147$, $b_3 = 126$, $C_1 = 12$, $C_2 = 9$,

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 7 & 21 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

П35.6. Дано: $b_1 = 60$, $b_2 = 24$, $b_3 = 105$, $C_1 = 3$, $C_2 = 6$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 14 \\ 3 & 2 \\ 21 & 5 \end{pmatrix}.$$

П35.7. Дано: $b_1 = 22$, $b_2 = 40$, $b_3 = 138$, $C_1 = 4$, $C_2 = 9$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 12 \\ 23 & 6 \end{pmatrix}.$$

П35.8. Дано: $b_1 = 50$, $b_2 = 140$, $b_3 = 20$, $C_1 = 4$, $C_2 = 3$,

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 10 & 12 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

П35.9. Дано: $b_1 = 40$, $b_2 = 104$, $b_3 = 20$, $C_1 = 7$, $C_2 = 5$,

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 8 & 10 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

П35.10. Дано: $b_1 = 138$, $b_2 = 60$, $b_3 = 110$, $C_1 = 6$, $C_2 = 10$,

$$A = \begin{pmatrix} 23 & 6 \\ 5 & 4 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}.$$

Общая формулировка задач П35.11 — П35.22 в буквенных обозначениях

Предприятие выпускает изделия двух видов, используя для их изготовления сырье двух типов. Известна матрица A норм расхода сырья, на позиции (i, k) которой находится число, равное количеству сырья i-го типа, расходуемого на изготовление единицы изделия k-го вида. Даны также запасы сырья b_1, b_2 и оптовые цены p_1, p_2 на единицу изделия каждого вида соответственно. Себестоимость единицы изделия k-го вида изменяется линейно относительно x_k объема выпуска этого вида изделий и равна $d_{k0} + d_{k1}x_k$, $k = 1, 2$. Требуется составить математическую модель, пользуясь которой можно найти план выпуска изделий, обеспечивающий предприятию наивысшую прибыль. Решить задачу графическим способом.

П35.11. Дано: $b_1 = 30$, $b_2 = 40$, $p_1 = 4$, $p_2 = 7$,

$d_{10} = 1$, $d_{11} = 0.25$, $d_{20} = 3$, $d_{21} = 0.25$,

$$A = \begin{pmatrix} 2.5 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

П35.12.Дано: $b_1 = 30$, $b_2 = 60$, $p_1 = 8$, $p_2 = 7$,

$d_{10} = 6$, $d_{11} = 0.1$, $d_{20} = 4$, $d_{21} = 0.1$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}.$$

П35.13.Дано: $b_1 = 60$, $b_2 = 10$, $p_1 = 10$, $p_2 = 11$,

$d_{10} = 7$, $d_{11} = 0.1$, $d_{20} = 9$, $d_{21} = 0.1$,

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

П35.14. Дано: $b_1 = 14$, $b_2 = 42$, $p_1 = 15$, $p_2 = 13$,

$d_{10} = 14$, $d_{11} = 0.2$, $d_{20} = 11$, $d_{21} = 0.2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

П35Л5. Дано: $b_1 = 7$, $b_2 = 10$, $p_1 = 12$, $p_2 = 11$,

$d_{10} = 9$, $d_{11} = 0.2$, $d_{20} = 10$, $d_{21} = 0.2$,

$$/1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

П35.16. Дано: $b_1 = 51$, $b_2 = 105$, $p_1 = 15$, $p_2 = 13$,

$d_{10} = 13$, $d_{11} = 0.1$, $d_{20} = 10$, $d_{21} = 0.1$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 15 & 7 \end{pmatrix}.$$

П35.17. Дано: $b_1 = 40$, $b_2 = 84$, $p_1 = 11$, $p_2 = 17$,

$d_{10} = 9$, $d_{11} = 0.2$, $d_{20} = 14$, $d_{21} = 0.2$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}.$$

П35.18. Дано: $b_1 = 30$, $b_2 = 102$, $p_1 = 12$, $p_2 = 14$,

$d_{10} = 8$, $d_{11} = 0.2$, $d_{20} = 12$, $rf_{21} = 0.2$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}.$$

П35.19.Дано: $b_1 = 51$, $b_2 = 105$, $p_1 = 12$, $p_2 = 8$,

$rf_m = 5$, $d_{11} = 0.25$, $d_{20} = 4.5$, $d_{21} = 0.25$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8.5 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}.$$

П35.20. Дано: $b_1 = 45$, $b_2 = 136$, $p_1 = 13$, $p_2 = 12$,

$d_{10} = 7.4$, $d_{11} = 0.4$, $rf_{20} = 7.2$, $d_{21} = 0.4$,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}.$$

П35.21. При подкормке посева необходимо внести в расчете на один гектар почвы следующих веществ не менее: 25 ед. B_1,30 ед. B_2 и 60 ед. B_3. Есть возможность приобрести удобрения У, и $У_2$. Цена единицы веса удобрения $У_1$ равна 4 ден. ед., а цена единицы веса удобрения $У_2$ равна 8 ден. ед. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 12 \end{pmatrix},$$

в которой элемент на позиции $(i, к)$ равен количеству вещества B_i, содержащемуся в единице удобрения $У_k$. Требуется составить математическую модель задачи, по которой можно будет найти план закупки удобрений, обеспечивающий подкормку посева с соблюдением указанных норм и гарантирующий минимальные денежные затраты. Решить задачу графическим способом.

П35.22. Предприятие выпускает изделия двух видов, при изготовлении которых используется сырье двух типов. Запасы сырья равны 90 и 88 единиц изделия соответственно. Оптовые цены на единицу изделия каждого вида равны соответственно 12 и 10. Дана матрица норм расхода сырья

$$\begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 8 & 11 \end{pmatrix},$$

на позиции $(i, к)$ которой находится число, равное количеству сырья /-го типа, расходуемого на изготовление единицы изделия k-го вида. Себестоимость единицы изделия первого вида при объеме выпуска*) равна $7 + 0.2x_1$, а себестоимость единицы изделия второго вида при объеме выпуска x_2 равна $8 + 0.2x_2$. Составить математическую модель, пользуясь которой можно найти план выпуска изделий, обеспечивающий предприятию наибольшую прибыль. Решить задачу графическим способом.

Задачи К35.1 – К35.11 являются соответственно продолжением задач П35.11 – П35.20, П35.22,

К35.1-К35.11. Изобразить целевую функцию в виде поверхности в трехмерном пространстве; построить линии уровня этой поверхности; изобразить множество планов в виде области на координатной плоскости.

Ответы, указания, решения

П35.21. Обозначим через x_1 и x_2 соответственно количества весовых единиц удобрений $У_1$ и $У_2$, которые планируется купить, а через/— затраты, связанные с приобретением удобрений. Тогда целевую функцию / в принятых обозначениях и с учетом цен на удобрения можно записать в виде

$$f = 4x_1 + 8x_2,$$

где $4x_1$ — стоимость x_1 весовых единиц удобрения $У_1$, $8x_2$ — стоимость x_2 весовых единиц удобрения $У_2$.

План (x_1, x_2) закупки удобрений должен удовлетворять упомянутым в задаче ограничениям на содержание в них химических веществ B_1, B_2 и B_3. Например, вещества B_1 в x_1 единицах удобрения У, будет присутствовать $5x_1$ единиц, вещества В, в x_2 единицах удобрения $У_2$ будет присутствовать 1-x?_ единиц, так что общее количество составит $5x_1 + x_2$ единиц. По условию задачи эта сумма должна быть не меньше 25, что можно выразить неравенством

$$5x_1 + x_2 \geq 25 \tag{35.1}$$

Проводя аналогичные рассуждения в отношении веществ B_2 и B_3, получим еще два неравенства, которым должны удовлетворять переменные x_1 и x_2:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\geq 30 \\ 3x_1 + 12x_2 &\geq 60 \end{aligned} \tag{35.2}$$

По смыслу задачи переменные x_1 и x_2 не могут выражаться отрицательными числами, т. е.

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \tag{35.3}$$

В итоге имеем следующую математическую модель задачи:

$$/ = 4x_1 + 8x_2 \to \min$$

$$X = \begin{cases} 5x_1 + x_2 \geq 25 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 30 \\ 3x_1 + 12x_2 \geq 60 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Целевая функция $z = 4x_1 + 8x_2$ определяет в трехмерном пространстве плоскость. Поэтому линиями уровня функции / будут параллельные прямые, перпендикулярные градиенту grad f = (4, 2), который указывает направление наискорейшего роста функции/

Изобразим на координатной плоскости $x_1 0 x_2$ множество планов X данной задачи. Известно, что точки, координаты которых удовлетворяют нестрогому линейному неравенству, располагаются по одну сторону от граничной прямой и на самой прямой, т. е. занимают одну из полуплоскостей, порождаемых этой граничной прямой. Уравнение граничной прямой получается приравниванием левой и правой частей данного неравенства. Так, на основании неравенства (35.1) получаем уравнение

$$5x_1 + x_2 = 25 \tag{35.4}$$

граничной прямой, соответствующей этому неравенству. Переписав его в виде

5 25

замечаем, что прямая (35.4) отсекает на оси Ox, отрезок в 5 ед., а на оси Ox? – в 25 ед. Неравенство (35.1) определяет полуплоскость, которой точка (0,0) не принадлежит, поскольку ее координаты не удовлетворяют этому неравенству: 5 • 0 + 1 • 0 < 25.

Аналогичным образом устанавливаются полуплоскости, порождаемые граничными прямыми

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 = 30 \\ 3x_1 + 12x_2 = 60 \end{aligned} \qquad (35.5)$$

и соответствующие неравенствам (35.2).

Учитывая, что неравенства (35.3) определяют первую четверть координатной плоскости $x_1 0 x_2$, находим множество планов X как общую часть (пересечение) всех установленных полуплоскостей. В нашем случае это неограниченная многоугольная область с вершинами A, B, C и D (рис. 35.7).

Остается в этой области найти точку, координаты которой доставляют минимум целевой функции.

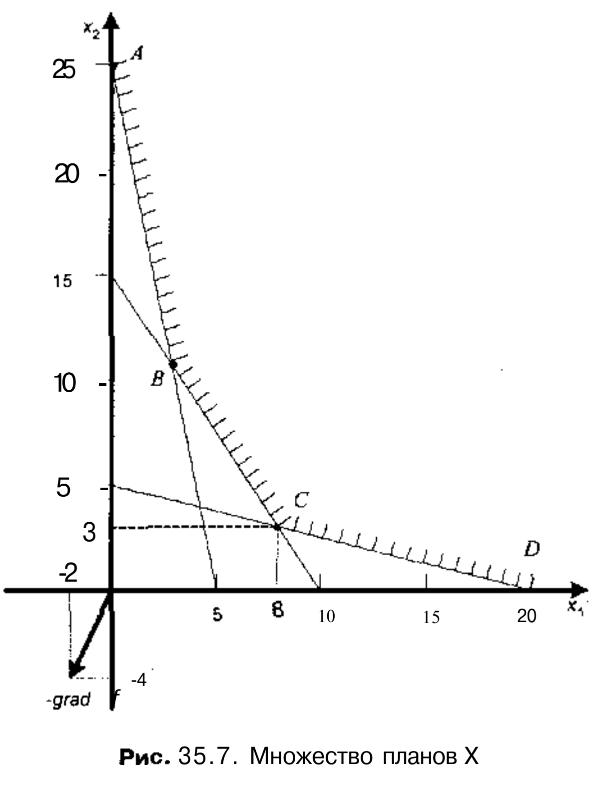


Рис. 35.7. Множество планов X

Из рис. 35.7 видно, что линия уровня, соответствующая минимально возможному значению функции f на множестве планов X, должна проходить через точку C, так как это последняя (крайняя) точка области X в направлении антиградиента $-\mathrm{grad}\, f$. Координаты точки С находятся в результате решения системы уравнений (35.5), задающих граничные прямые BC и CD: $C = (8, 3)$, $f(C) = 56$.

Итак, по оптимальному плану приобретать следует 8 вес. Ед. удобрения У, и 3 вес. ед. $У_2$ (в расчете на 1 га посева). При этом затраты будут минимальными и составят 56 ден. ед.

П35.22. Целевая функция данной задачи имеет следующий вид:

$$f(x_1, x_2) = (12 - (7\ 0.2x_1))x_1 + (10 - (8 + 0.2x_2))x_2$$

Упростив ее, получим искомую математическую модель с учетом ограничений на запасы сырья:

$$/ = 5x_1 - 0.2x_1^2 + 2x_2 - 0.2x_2^2 \to \max$$

$$\begin{cases} 13x_1 + 6x_2 \le 90 \\ 8x_1 + 11x_2 \le 88 \ . \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Целевая функция определяет в трехмерном пространстве параболоид вращения. В пересечении этого параболоида с плоскостями, параллельными координатной плоскости $x_1 0 x_2$, будут окружности с центрами на оси параболоида. Каждой такой окружности отвечает определенное значение функции / Поэтому линиями уровня функции f будут концентрические окружности с общим центром в точке P, являющейся проекцией оси параболоида на плоскость $x_1 0 x_2$. Чтобы найти координаты точки P и радиусы этих окружностей, преобразуем целевую функцию/ выделив в ней полные квадраты относительно переменных x_1 и x_2:

$$-5/ = -25x_1 + x_1^2 - 10x_2 + x_2^2,$$

$$-5f = x_1^2 - 25x_1 + \left(\frac{25}{2}\right)^2 + x_2^2 - 10x_2 + 5^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2 - 5^2,$$

$$(x_1 - 12.5)^2 + (x_2 - 5)^2 = 181.25 - 5/.$$

Итак, координаты точки P равны (12.5, 5), а радиусы r окружностей вычисляются по формуле $r = \sqrt{181.25 - 5f}$.

Множество планов X данной задачи определяет на координатной плоскости $x_1 0 x_2$ многоугольник *OABC*, изображенный на рис. 35.8. На этом же рисунке изображены линии уровня, отвечающие следующим значениям функции f: $f = 10$, $/ = 20$, $f = 30$, $/ = 35$.

Как видно из рис. 35.8, координаты точки M^* из области *OABC*, через которую проходит линия уровня, отвечающая максимальному значению функции / находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} 13x_1 + 6x_2 = 90 \\ x_2 - 5 = \dfrac{6}{13}(x_1 - 12.5) \end{cases}$$

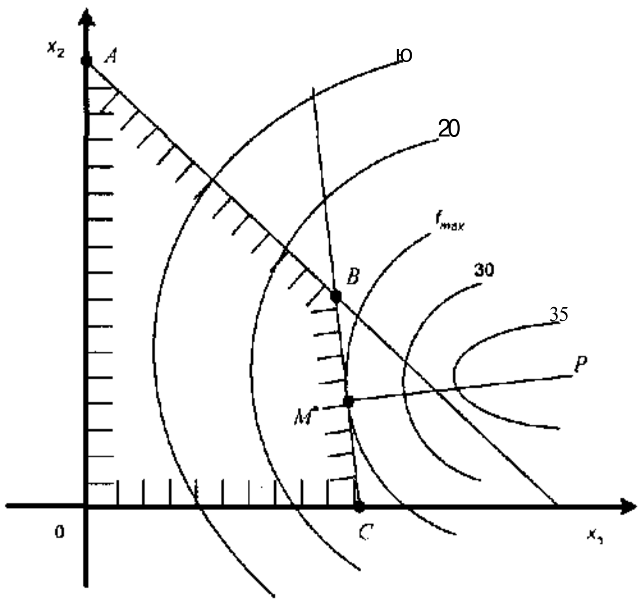


Рис. 35.8. Множество планов и линии уровня функции f

где уравнение $13x_1 + 6x_2 = 90$ задает граничную прямую BC, а уравнение $x_2 - 5 = \frac{6}{13}(x_1 - 12.5)$ задает прямую PM^*, проходящую через точку M^* перпендикулярно прямой BC (угловой коэффициент этой прямой равен $-1/k$, где k — угловой коэффициент граничной прямой BC, равный $-13/6$). Решив данную систему, найдем точку $M^* = (6, 2)$ и значение целевой функции $f(M^*) = 26$ в этой точке. Итак, для получения предприятием максимальной прибыли, составляющей 26 ден. ед., следует выпустить 6 изделий первого вида и 2 изделия второго вида.

К35.11. Вначале отметим, что задача П35.22 может быть легко решена с помощью Mathcad следующим образом:

$f(x,y) := 5\cdot x - 0.2\cdot x^2 + 2\cdot y - 0.2\cdot y^2$

$x := 0 \qquad y := 0$

Given

$x \ge 0 \qquad y \ge 0 \qquad 13\cdot x + 6\cdot y \le 90 \qquad 8\cdot x + 11\cdot y < 88$

$M := \mathrm{maximize}(f, x, y) \qquad M = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad f(M) = 26$

Теперь вернемся к задаче К35.11, алгоритм решения которой с помощью Mathcad следующий.

1. Задать целевую функцию:

$f(x, y) := 5\cdot x - 0.2\cdot x^2 + 2\cdot y - 0.2\cdot y^2$

2. Построить поверхность z = f(x, y). Для этого вызвать шаблон трехмерного графика и на месте метки ввести идентификатор функции f. Для получения необходимого изображения произвести настройку параметров рисунка: на вкладке **General** (Общие) диалогового окна **3D Plot Format** (Формат 3-мерного графика) в группе **Display As** (Отобразить как) выбрать опцию **Surface Plot** (График поверхности); на вкладке **Appearance** (Появление) выбрать опции **Fill Surface** (Заполнить поверхность), **Wireframe** (Сетка), **Colormap** (Цветовая карта) (в группе **Fill Options)** и **Solid Color** (Непрерывный цвет) (в группе **Line Options);** на вкладке **Special** включить опции **Fill** (Заполнить), **AutoContour** (Автоконтур), **Draw Lines** (Провести линии); на вкладке **Advanced** (Дополнительно) в раскрывающемся списке **Choose Colormap** выбрать Blues; на вкладке **QuickPlot Data** (Параметры графика) в полях start установить -200, в полях end установить 200; на вкладках X-Axis, Y-Axis, Z-Axis (Оси OX, OY, OZ) включить опции **Show Numbers** (Показать цифры), **Auto Grid** (Автосетка), **Draw Lines** (Провести линии), **Auto Scale** (АвтоШкала) и отключить опцию **Draw Ticks** (Провести метки). Закрыть диалоговое окно **3D Plot Format.** Удерживая левую кнопку мыши, вращать график, добившись его положения, показанного на рис. 35.9.

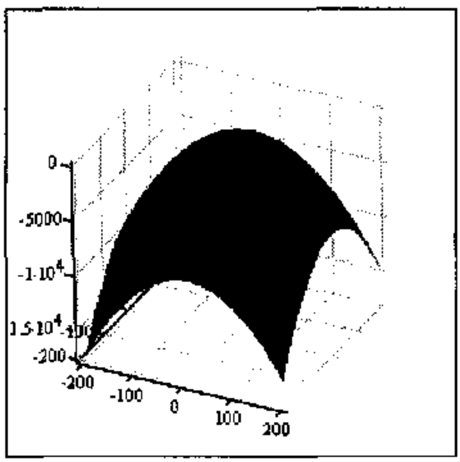
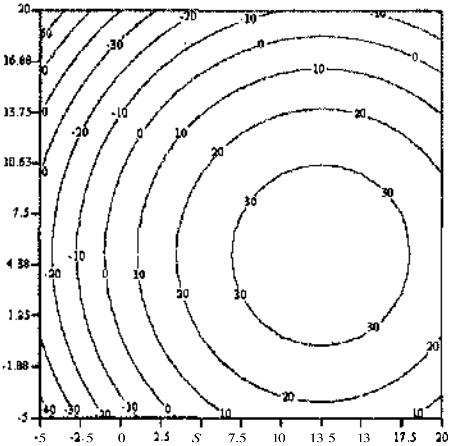


Рис. 35.9. Пример построения поверхности в Mathcad

3. Построить линии уровня поверхности *z = fix, y)*. Для этого ввести шаблон трехмерного графика и на месте метки ввести идентификатор/ Для получения необходимого изображения произвести настройку параметров рисунка: на вкладке **General** в группе **Display** As выбрать опцию **Contour Plot** (Контурный график); на вкладке **Apperance** выбрать опции No **Fill** (Не заполнять), **Contour Lines, Solid Color** (Непрерывный цвет); на вкладке **QuickPlot Data** в полях start установить -5, в полях end установить 20; на вкладке **Special** включить опции **Auto Contour, Draw Lines, Numbered** (Нумерация); на вкладках **Axes** для координат X и Y включить опции **Auto Scale, Show Numbers** и отключить опции **Auto Grid, Draw Lines,** а в поле Number установить 8 на вкладке X-Axes и 10 —

на вкладке **Y-Axes;** на вкладке Z-Axes отключить опцию **Show Numbers.** Закрыть диалоговое окно **3D Plot Format.** Нажать клавишу <Enter>, после чего получится изображение, показанное на рис. 35.10.



f

Рис. 35.10. Пример построения линий уровня в Mathcad

4. Задать число планов N, которые будут изображены в виде точек на координатной плоскости, а также диапазоны $[x_{min}; x_{max}]$, $[y_{min}; y_{max}]$, в которых могут изменяться числа (координаты точек), генерируемые функцией ***rnd:***

$N := 10\,000$ $xmax := 10$ $xmin := 0$ $ушах := 10$ $ymin := 0$

Сформировать матрицу P размера №2, /-я строка которой будет содержать генерируемые функцией ***rnd*** координаты (x, y) (i + 1)-й точки, удовлетворяющие системе неравенств $\begin{cases}13x + 6y \le 90\\ 8x + 11y \le 88\end{cases}$:

```
P:=
  for  i ∈ 0..N-1
       x ← rnd(xmax - xmin) + xmin
       y ← rnd (ymax - ymin) + ymin
       while  0 = (8·x + 11·y < 88)·(13·x + 6·y < 90)
              x ← rnd(xmax - xmin) + xmin
              y ← rnd (ymax - ymin) + ymin
       P_{i,0} ← x
       P_{1,1} ← y
  P
```

Отметим, что знак = в операторе *while* вводится с подпанели **Логические** (Boolean).

5. Изобразить множество планов на координатной плоскости. Для этого ввести шаблон декартового графика клавишей <@>. В рамке под осью абсцисс на месте метки ввести вектор $P^{<0>}$, а на месте метки слева от оси ординат ввести вектор $P^{<1>}$. Ниже оси абсцисс ввести границы x_{min} и x_{max} изменения координаты x, а слева от оси ординат ввести границы y_{min} и y_{max} изменения координаты y. После нажатия клавиши <Enter> получится искомое изображение, как это показано на рис. 35.11.

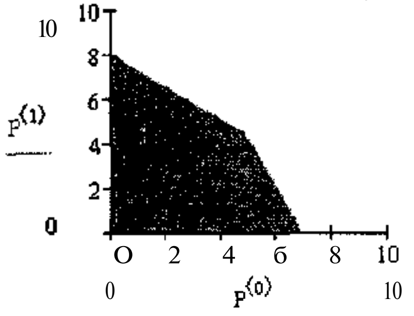
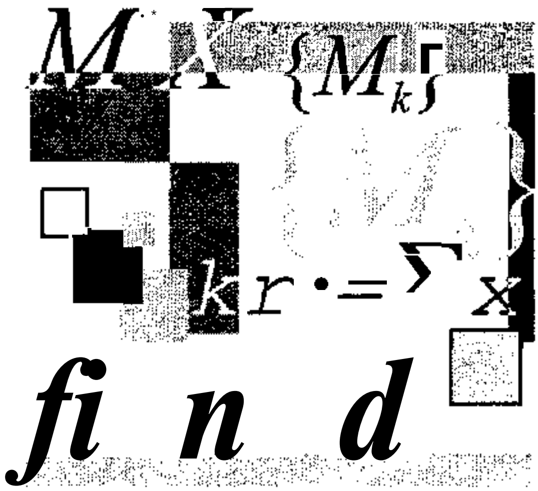


Рис. 35.11. Множество планов на координатной плоскости



Часть III

Модели управления запасами и системы массового обслуживания

Глава 36

Экономический смысл определенного интеграла

Почти все экономические приложения определенного интеграла основаны на следующей идее, которую мы обоснуем в самом общем виде, чтобы затем автоматически применять в конкретных экономических задачах.

Предположим, что "нечто" накапливается с течением времени. Обозначим через $V[x, y]$ количество "нечто", накопленное за промежуток времени *[x,y]*. Предположим, что функция V обладает свойством аддитивности: для любых отрезков *[x,z]* и *[z, y]* верно $V[x, y] = V[x, z] + V[z, y]$. Покажем, как может быть вычислено значение $V[a, b]$, если известна непрерывная функция $s(t)$, выражающая мгновенную скорость накопления "нечто", т. е. значение $s(t)$ равно приросту "нечто" за единицу времени в момент времени /. Разобьем отрезок [a, b] на n равных отрезков длины $\Delta t = \dfrac{b-a}{n}$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. На каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ в силу теоремы 15.2 функция s достигает свои наименьшее m_k и наибольшее M_k значения. Тогда для любого k верно

$$m_k \cdot \Delta t \le V[x_{k-1}, x_k] \le M_k \cdot \Delta t,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta t \le \sum_{k=1}^{n} V[x_{k-1}, x_k] = V[a, b] \le \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta t \qquad (36.1)$$

Но суммы $\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta t$ и $\sum_{k=1}^{n} M_k \Delta t$ являются соответственно нижней и верхней суммами Дарбу функции *s(t)*. Из математического анализа известно, что их предел при $\Delta t \to 0$ равен интегралу $\int_a^b s(t)dt$. Кроме того, если все члены сходящейся последовательности чисел $\{x_n\}$ не более (не менее) некоторого числа 6, то и ее предел не более (не менее) этого числа. Отсюда, с учетом (36.1), имеем:

$$\int_a^b s(t)dt = \lim \sum^{n} m_k \Delta t \le V[a, b] \le \lim \sum^{n} M_k \Delta t = \int_a^b s(t)dt,$$

т.е. $v[a,b]=\int_a^b s(t)dt$.

Пример

Суммарной дисконтированной стоимостью $V[T]$ денежного потока со скоростью /(О за период времени [О, *T]* называется величина, равная капиталу, положенному в банк под банковский процент, который обеспечит денежный поток в размере /(0 для любого времени *te* [0, 7]. По формуле непрерывных процентов $i(t)=e^{\frac{rt}{100}}\cdot s(t)$, где *s(t)* — величина капитала, который к моменту времени *t* вырастет до величины *i(t)* при г процентах годовых. Поэтому $s(t)=i(t)\cdot e^{\frac{-rt}{100}}$ есть "мгновенная дисконтированная стоимость". Отсюда $V[T]=\int^T i(t)\cdot e^{\frac{-rt}{100}}dt$.

Задачи для самостоятельного решения

Т36.1. Вывести формулу расхода электроэнергии в сутки, если дана мощность потребления электроэнергии $q(t)$ в момент времени t.

Т36.2. Доказать, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком неотрицательной функции $y=f(x)$, отрезком $[a, b]$ и прямыми $x=a$, $x=b$, равна $\int_a^b f(x)dx$.

Т36.3. Рассмотрим ситуацию, когда денежный поток не прекращается никогда, например, в случае эксплуатации земельного участка. Чему равна дисконтированная стоимость земельного участка, если r — процентная годовая ставка банка, $i(t)$ – заданная скорость денежного потока.

Ответы, указания, решения

Т36.1. Ответ: $\int_0^{24} q(t)dt$.

Т36.2. Указание. "Мгновенное количество добавляемого нечто" в момент времени x~ это отрезок $[0,f(x)]$, где $x\in[a, b]$. Поэтому площадь криволинейной трапеции можно интерпретировать как "количество плоскости", проходимой (заметаемой) отрезком [О,/С*)] переменной длины $f(x)$, когда х пробегает весь отрезок [д, b].

Т36.3. Ответ: $\int_0 i(t)e^{-\frac{rt}{100}}dt$.

Глава 37

Статические модели управления запасами без дефицита

Запасы создаются по различным причинам. Одна из них состоит в том, что если в некоторый момент производства потребуется какой-то вид деталей, который поставляется другим предприятием, а он отсутствует на складе, то процесс производства может остановиться. Поэтому на складе всегда должно быть некоторое количество деталей данного вида. Однако, если запасы увеличить, то возрастает стоимость их хранения. Задача управления запасами состоит в выборе для предприятия целесообразной стратегии приобретения и хранения деталей.

Модели управления запасами весьма разнообразны, так как зависят от характера поставок товара и спроса на него, издержек и условий хранения запаса, а также критерия оптимальности. В данной главе рассматриваются статические модели без дефицита. В таких моделях спрос полностью удовлетворяется запасаемым товаром, а пополнение товара происходит в детерминированные дискретные моменты времени партиями одинакового объема n. Известны издержки c_1 хранения единицы товара в единицу времени, общее потребление Q товара за весь рассматриваемый временной период T, а также интенсивность $b(t)$ расхода запаса в момент времени t ($b(t)$ может быть произвольным многочленом). Затраты на доставку $g(n)$ линейно зависят от объема поставляемой партии n: $g(n) = c_2 + c_3 n$. Критерий оптимальности заключается в определении такого объема n поставляемых партий товара, при котором общие затраты на создание и хранение за весь период будут минимальными. Графически количество хранимого товара можно представить, как показано на рис. 37.1.

Из смысла определенного интеграла, описанного в *гл. 36,* следует, что $\int_0^t b(x)dx$ — это объем израсходованного товара за время t. Отсюда $y(t) = n - \int_0^t b(x)dx$ — объем товара, хранящегося на складе в момент времени t. Поэтому мгновенные издержки в момент времени t составят $c_1 y(t)$, а время u, за которое произойдет полное исчерпание запаса, определится из уравнения $y(t) = 0$.

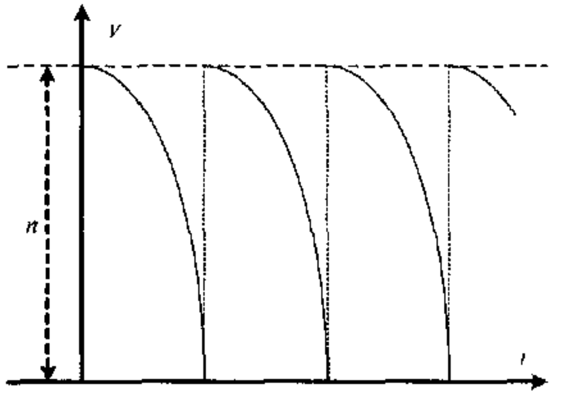


Рис. 37.1. Графическая иллюстрация модели управления запасами без дефицита

Итак, издержки хранения одной партии товара объема n составят $\int_0^u c_1 y(t)dt$ (см. гл. 36). Если учесть, что число таких партий равно Q/n, то общие издержки за весь период T составят

$$C(n) = \frac{Q}{n}\left(\int_0^u c_1 y(t)\,dt + c_2 + c_3 n\right).$$

Поэтому оптимальным будет такой объем n поставляемых партий товара, при котором функция $C(n)$ принимает наименьшее значение.

В многопродуктовых моделях управления запасами возможны дополнительные ограничения, например, на площадь складских помещений. Пусть имеется m видов продукции, для хранения которых отводится общая площадь S складских помещений. Условимся, что параметры c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}, n_i, Q_i, u_i относятся к продукции i-го вида и соответствуют по смыслу параметрам c_1, c_2, c_3, n, Q, u. Предположим, что продукция каждого вида расходуется равномерно. Это означает, что интенсивность расхода продукции i-го вида равна Q_i/T, а $y(t, i) = n_i - \int_0^t \frac{Q_i}{T} dx$ — объем продукции i-го вида, хранящегося на складе в момент времени t. Отсюда по аналогии с однопродуктовой задачей заключаем, что общие издержки составят

$$C(n) = \sum_{i=1}^{m} \frac{Q_i}{n_i}\left(\int_0^u c_{1i}\, y(t,i)\,dt + c_{2i} + c_{3i} n_i\right).$$

Задача теперь состоит в том, чтобы определить с учетом отводимой площади S такой вектор $(n_1, \ldots, n_m)$ объемов поставляемых партий товаров, при котором общие издержки $C(n)$ будут минимальными.

Компьютерный раздел

Для символьных вычислений (то есть построения аналитических выражений) используется подпанель Символика (Symbolic), показанная на рис. 37.2, которая вызывается щелчком на кнопке панели Математика (Math). Подпанель **Символика** (Symbolic) содержит 24 кнопки. Кнопка $\boxed{\to}$ вызывает шаблон $\boxed{\blacksquare\to}$ знака символьного вычисления. На месте метки вводится выражение, которое необходимо вычислить (или представить) в символьном виде. Можно также сначала ввести выражение, а затем, выделив его синим курсором, с помощью подпанели **Символика** (Symbolic) ввести символ $\boxed{\to}$ вычисления в символьном виде. Предположим, например, что надо в символьном виде вычислить неопределенный интеграл. Для этого щелчком по кнопке Л подпанели **Исчисление** (Calculus) вызовите шаблон $\boxed{\int \blacksquare\, d\blacksquare}$ вычисления неопределенного интеграла. На месте левой метки этого шаблона введите подинтегральное выражение *x″,* па месте правой - переменную интегрирования x. С помощью кнопки $\boxed{\to}$ (это же можно сделать комбинацией клавиш <Ctrf> + <.>) введите знак символьного вычисления: $\boxed{\int x^3 dx \to}$. После нажатия клавиши <Enter> на экране получите $\boxed{\int x^3 dx \to \frac{1}{4}\cdot x^4}$.

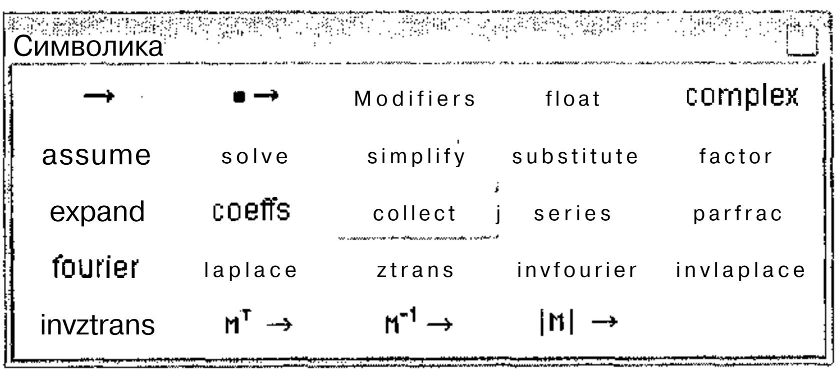


Рис. 37.2. Подпанель **Символика**

Зачастую результат символьного вычисления, однажды уже полученный в некотором документе Mathcad, приходится неоднократно использовать в том же документе. В подобных случаях целесообразно поступать следующим образом. Пусть некоторое выражение *E,* зависящее от *п* переменных (параметров) x1, x2, ... , хп, необходимо вычислить в символьном виде. В нужном месте рабочего листа введите идентификатор функции л переменных, например, f(x1, x2, ... , хл). Затем введите знак присваивания := клавишей <:> и справа от этого знака— выражение *E.* Выделите это выражение синим курсором и введите знак $\rightarrow$ символьного вычисления. После нажатия клавиши <Enter>, справа от знака $\rightarrow$ появится искомое представление, которое можно будет использовать в дальнейших вычислениях посредством вызова функции $f(x1,\ x2,\ \ldots,\ xn)$. Рассмотрим пример символьного вычисления определенного интеграла $\int_a^b x^n dx$. В нужном месте рабочего листа введите идентификатор функции $f(a,\ b,\ л)$ трех переменных a, b, л; затем знак присваивания <:=> и далее шаблон $\boxed{\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare\, d\blacksquare}$ для вычисления определенных интегралов (этот шаблон вызывается кнопкой и $\boxed{N.}$ подпанели **Исчисление** (Calculus). На месте соответствующих меток введите пределы интегрирования a и b, подынтегральную функцию x^n и переменную интегрирования *к*. Выделив курсором ввода выражение справа от знака присваивания :=, введите знак символьного вычисления $\rightarrow$. После нажатия клавиши <Enter> на экране получится следующее выражение:

$$f(a,b,n) := \int_a^b x^n dx \rightarrow b^n \cdot \frac{b}{(п+1)} - a \cdot \frac{a^n}{(л+1)}$$

Это выражение можно упростить, если перед вводом знака $\rightarrow$, выделив синим курсором интеграл, щелчком кнопкой $\boxed{\text{simplify}}$ подпанели Символика (Symbolic) ввести ключевое слово *simplify*.

$$f(a,b,n) := \int_a^b x^n dx \text{ simplify} \rightarrow \frac{b^{(n+1)} - a^{(n+1)}}{(л+1)}$$

Теперь можно вычислять значения этого интеграла при любых a, b, л, не прибегая каждый раз к повторному интегрированию. Так, например, если a и b равны 3 и 7, а л пробегает все значения от 4 до 7 с шагом 0.5, то

$a := 3 \quad b := 7 \quad$ л := 4,4 . 5 . . 7

$f(a,b,n) =$

3312.8
8008.41
19486.667
47693.436
117336.571
290013.59"7
719780

Важное замечание: если некоторой переменной a уже было присвоено некоторое числовое значение, но впоследствии эта переменная должна участвовать в роли параметра в символьных вычислениях, то необходимо переопределить эту переменную следующим образом: $a := a$. Следующие два примера демонстрируют принципиальность этого замечания.

Пример 1

$a := 0 \quad n := 4$

$\int_a^b x^n dx \quad simplify \rightarrow \frac{1}{5} \cdot b^5$

Пример 2

$a := 0 \quad n := 4$

$n := n \quad a := a$

$\int_a^b x^n dx \; simplify \rightarrow \frac{b^{(n+1)} - a^{(n+1)}}{(n+1)}$

Кнопка $\boxed{\text{solve}}$ подпанели **Символика** (Symbolic) вызывает шаблон $\boxed{\blacksquare\ \text{solve}, \blacksquare \rightarrow}$ для символьного решения уравнения (или системы уравнений), приведенного к виду с нулевой правой частью; при этом левая часть уравнения вводится на месте левой метки, а на месте правой метки вводится переменная, относительно которой это уравнение должно быть разрешено. Например, если требуется решить уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ относительно z и в дальнейшем использовать символьный вид этого решения, то вначале следует ввести идентификатор функции $f(x, y)$ двух переменных x, y и знак присваивания :=; после этого кнопкой $\boxed{\text{solve}}$ вызвать шаблон $\boxed{\blacksquare\ \text{solve}, \blacksquare \rightarrow}$; на месте левой метки шаблона ввести выражение $x^2 + y^2 + z^2 - 1$, на месте правой — z. После нажатия клавиши <Enter> на экране получится следующее:

$$f(x,y) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 \quad solve, z \quad \rightarrow \begin{bmatrix} (-x^2 - y^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \\ -(-x^2 - y^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

Теперь можно вычислять значения переменной z при различных значениях переменных x и y. Например, если $x = y = 0.5$, то

$$f(0.5, 0.5) = \begin{pmatrix} 0.707 \\ -0.101 \end{pmatrix}$$

В случае символьных вычислений до завершения редактирования вводимых формул и выражений на рабочем листе рекомендуется отключать опцию **Автоматические вычисления** (Automatic Calculation) в меню Математика (Math), поскольку возможны зацикливания вычисляемых процедур при неправильном вводе.

Задачи для самостоятельного решения

Общая формулировка задач К37.1 —**К37.13** в буквенных обозначениях

Спрос на телевизоры «Горизонт» в городе N составляет Q штук в год. Затраты на доставку каждой партии товара постоянны и равны *С1* ден. ед. Затраты на хранение одного телевизора составляют *С* ден. ед. в день. Найти оптимальный размер поставляемой партии телевизоров и оптимальный интервал между поставками. Спрос на телевизоры равномерен и непрерывен.

К37.1. Дано: 2 = 2000, C1 = 0.01, *С2* = 20 000.

К37.2. Дано: *Q* = 1300, *C* =0.04, *C1*= 10 000.

К37.3. Дано: *Q*= 1000, *C1* =0.02, *C2* = 15 000.

К37.4. Дано: *Q*= 1200, *C1* = 0.03, *C2* = 24 000.

К37.5. Дано: *Q* = 900, *C* = 0.06, C2 = 12 000.

К37.6. Дано: *Q* = 1400, *C1* = 0.01, C2 = 13 000.

К37.7. Дано: *Q* = 1700, *C* = 0.03, C2 = 9000.

К37.8. Дано: *Q* = 1000, C1 = 0.05, *C2* = 16 000.

К37.9. Дано: *Q* = 1600, *C1* = 0.04, *C2* = 10 000.

К37.10. Дано: 2 = 2500, C1 = 0.07, *C1* = 9000.

К37.11. Потребность сборочного предприятия в деталях некоторого типа составляет 120 000 деталей в год, причем эти детали расходуются равномерно в процессе производства. Детали могут поставляться партиями одинакового объема? и их дефицит недопустим. Хранение одной детали на складе обходится в 0.35 ден. ед. в сутки, а поставка одной партии деталей стоит 10 000 ден. ед. Определить оптимальный объем поставляемой партии и оптимальный интервал между поставками. Определить также, на сколько процентов увеличатся затраты на создание и хранение запаса по сравнению с минимальными затратами при увеличении объема партии на 1000 деталей.

К37.12. Решить предыдущую задачу при дополнительных условиях: интенсивность расхода деталей линейно зависит от времени t и равна t / 12 + 5; затраты на поставку одной партии деталей линейно зависят от объема партии n и равны 100 + 10n ден. ед.

К37.13. Восемь различных видов продукции хранятся на складе с целью непрерывного использования в технологическом процессе. Продукция каждого вида расходуется равномерно. Дефицит не допускается, и запас должен мгновенно пополняться после поступления заказа. Для каждого вида продукции имеются следующие данные об условиях хранения и спроса (в порядке нумерации видов продукции): для хранения единицы продукции необходимы площади складских помещений соответственно в размерах 10, 5, 7, 5, 8, 8, 3, 9 кв. м.; затраты на оформление заказов на партию продукции составляют соответственно 100, 50, 90, 20, 20. 25, 40, 40 ден. ед.; затраты на хранение единицы продукции равны соответственно 0.1, 0.2, 0.2, 0.1, 0.3, 0.3, 0.1, 0.15 ден. ед.; месячная потребность завода в продукции равна соответственно 300, 100, 150, 300, 500, 360, 300, 120 единиц. Найти оптимальные партии заказов для восьми видов продукции, если общая площадь складских помещений составляет 200 кв. м.

Ответы, указания, решения

Общий алгоритм решения задач К37.1—К37.13 с помощью Mathcad.

Ввести исходные данные: общий объем Q потребляемого товара и общее время г, за которое это потребление происходит; издержки хранения $c1$ единицы товара в единицу времени, коэффициенты c2 и c3 функции затрат $g(n)$ на доставку одной партии товара объема л; начальное значение (некоторое положительное число) для искомого объема л поставляемых партий товара. Переопределить переменную л для символьных вычислений: л := л. Ввести интенсивность $b(x)$ расхода товара и определить время u, за которое произойдет полное исчерпание одной партии товара:

$$y(t) := л - \int_0^t b(x)\,dx \quad u(n) := y(t) \quad solve, t \rightarrow$$

Определить символьное выражение функции издержек $C(n)$:

$$C(n) := \frac{u}{n}\cdot\left(\int_0^u c1\cdot y(t)\,dt + g(n)\right) \quad simplify \rightarrow$$

Определить искомое оптимальное значение для n:

$$л := minimize(C, n)$$

Если уравнение $y(t) = 0$ имеет несколько решений, то после оператора $u(n) := y(t)$ solve, $t \rightarrow$ необходимо добавить оператор $u(n) := u(n)_0$, позволяющий выбрать положительный действительный корень, который будет содержаться в первой компоненте вектора решений u.

К37.11. Ответы: и = 4334.36, 2.1625%.

К37.12. Ответ: n = 56.475.

К37.13. Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad следующий. Ввести исходные данные: общую площадь s складских помещений, вектор s_q допустимых площадей для хранения единицы продукции каждого вида, а также величины Q, $c1$, $c2$ (в векторной форме) и m. Задать начальные значения для вектора л:

$$m := rows(Q) \quad i := 0;\ m-1 \quad n_i := 10.$$

Переопределить переменные Q, cl, c2, л для символьных вычислений:

$$Q := Q \quad cl := c1 \quad c2 := c2 \quad л := п$$

Определить периоды времени $u(i)$ между последовательными поставками продукции 1-го вида:

$$y(t,i) := n_i - \int^{t} \frac{Q_i}{m}\,dx \qquad u(i) := y'(t,i)\ \ \mathit{solve},\ t \rightarrow$$

Определить символьное выражение функции издержек *C(n)*:

$$C(n) := \sum \frac{Q_i}{\ } \cdot \Big| \int c1_i \cdot y(t,i)\,dt + c2_i \qquad \mathtt{simplify} \rightarrow$$

Определить искомый вектор *n* оптимальных объемов поставляемых партий продукции:

Given $n \cdot Sq \le S$ л>0 л$:=$ *minimize*(C', n)

Ответ: п = (57.7, 29.1, 40.4, 35.3, 29.7, 28.4, 49.8, 22.7).

Глава 38

Статические модели управления запасами с дефицитом

В моделях управления запасами, в которых допускается наличие дефицита, при отсутствии запасаемого товара спрос сохраняется, а потребление отсутствует. В результате этого к моменту поступления новой партии товара объема n образуется дефицит $n - s$, накопившийся с момента поступления предыдущей партии. Необходимость дефицита приводит к тому, что максимальный уровень запаса товара, существующий в момент поступления новой партии, меньше объема партии n на величину дефицита $n - s$ и равен $n-(n-s)=s$. Графически данную модель можно представить в виде, изображенном на рис. 38.1.

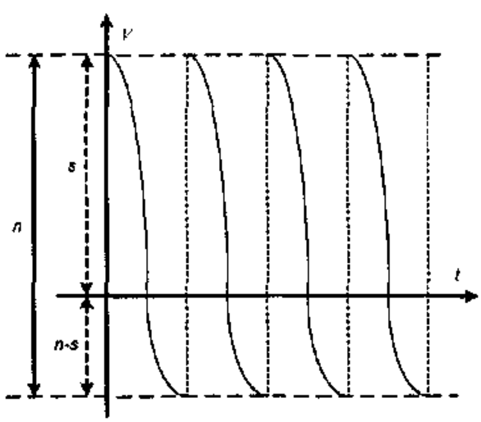


Рис. 38.1. Графическая иллюстрация модели управления запасами с дефицитом

Задача состоит в том, чтобы определить такой объем n поступающей партии и такой максимальный уровень запаса s в момент поступления, при которых общие издержки были бы минимальными.

Все параметры, определенные в *гл. 37*, сохраняют свой смысл и для моделей, рассматриваемых в данной главе. Помимо этого должны быть заданы интенсивность $r(l)$ накопления дефицита в момент времени t и штрафные издержки c_d дефицита единицы товара в единицу времени.

По аналогии с главой 37 устанавливаем, что мгновенные издержки хранения в момент времени t равны $c_1 y(t)$, где $y(t) = s - \int\limits_0^t b(x)dx$, а время u, за которое происходит полное исчерпание запаса, определяется из уравнения $y(t) = 0$. Поскольку интеграл $w(t) = \int r(x)dx$ равен дефициту товара на момент времени t, то $c_4 w(t)$ — это мгновенные штрафные издержки дефицита в этот момент, а время v, за которое происходит накопление дефицита до величины $n-s$, определяется из уравнения $w(t) = n - s$. Таким образом, издержки хранения и дефицита между двумя последовательными поставками партий товара, составят

$$\int\limits_0^u c_1 y(t)\,dt + \int\limits_0^v c_4 w(t)dt\,,$$

а общие издержки за весь период T будут описываться функцией двух переменных

$$C(n,s) = \frac{Q}{n}\left(\int\limits_0^u c_1 y(t)dt + \int\limits_0^v c_2 w(t)dt + g(n)\right)$$

Задачи для самостоятельного решения

Общая формулировка задач K38.1—K38.12 в буквенных обозначениях

Потребность сборочного предприятия в деталях некоторого типа составляет Q деталей в год. Детали могут поставляться партиями одинакового объема. Хранение одной детали на складе стоит c_1 ден. ед. в сутки, поставка одной партии обходится в c_2 ден. ед. Спрос на детали сохраняется и после исчерпания запаса на складе, причем интенсивность накопления дефицита постоянна и равна интенсивности расхода поставляемых партий деталей. Отсутствие на сборке одной детали приносит в сутки убытки в размере c_4 ден. ед. Найти оптимальный объем поставляемой партии и оптимальный уровень запаса в момент поставки, минимизирующие общие издержки.

K38.1. Дано: $Q = 120000$, $c_1 = 0.35$, $c_2 = 10000$, $c_4 = 3.5$.

K38.2. Дано: $Q = 125000$, $c_1 = 0.4$, $c_2 = 8000$, $c_4 = 3.1$.

K38.3. Дано: $Q = 110000$, $c_1 = 0.3$, $c_2 = 12000$, $c_4 = 3.8$.

K38.4. Дано: $Q = 115000$, $c_1 = 0.31$, $c_2 = 11000$, $c_4 = 3.4$.

K38.5. Дано: $Q = 17000$, $c_1 = 0.36$, $c_2 = 14000$, $c_4 = 3.2$.

K38.6. Дано: $Q = 121000$, $c_1 = 0.38$, $c_2 = 9000$, $c_4 = 3.3$.

K38.7. Дано: $Q = 112000$, $c_1 = 0.32$, $c_2 = 11000$, $c_4 = 3.5$.

K38.8. Дано: $Q = 120000$, $c_1 = 0.31$, $c_2 = 10000$, $c_4 = 3.2$.

К38.9. Дано: Q= 115 000, $c1$ = 0.34, $c2$ = 9000, $c4$ = 3.3.

К38.10. Дано: Q = 120 000, $c\backslash$ = 0.37, $c2$ = 13 000. $c4$ = 3.4.

К38.11. Решить задачу К38.1 при следующих дополнительных условиях: интенсивность расхода деталей квадратично зависит от времени t и равна $t^2/12$; интенсивность накопления дефицита линейно зависит от времени t и равна 5/.

К38.12. Спрос на телефоны в городе N составляет 150 аппаратов в месяц. Затраты на доставку каждой партии товара на склад линейно зависят от объема партии n и равны 1000 + 10n ден. ед. Затраты на хранение одного телефона в день составляют 35 ден. ед. Спрос на телефоны сохраняется и после исчерпания их на складе, причем интенсивность этого спроса постоянна и равна интенсивности расхода поставляемой партии. Дефицит одного телефона приносит убытки в размере 250 ден. ед. в день. Найти оптимальный объем поставляемой партии и оптимальный уровень запаса в момент поставки, минимизирующие общие издержки.

Ответы, указания, решения

Общий алгоритм решения задач К38.1 - К38.12 с помощью Mathcad.

Ввести исходные данные: общий объем Q потребляемого товара и общее время m, за которое это потребление происходит; издержки хранения $c1$ и дефицита $c4$ единицы товара в единицу времени, коэффициенты c2 и c3 функции затрат у(л) на доставку одной партии товара объема л; начальные значения для объема n поставляемых партий и уровня запаса s в моменты поставок. Переопределить переменные n и s для символьных вычислений: л := л s := s. Ввести интенсивность $b(x)$ расхода товара и определить время u, за которое произойдет полное исчерпание одной партии товара:

$$y(t) := s - \int_0^t b(x)\,dx \quad u(s) := y(t) \ \ solve, t \rightarrow .$$

Ввести интенсивность $r(x)$ накопления дефицита и определить время v, за которое дефицит достигнет величины л - s:

$$w(t) := \int_0^t r(x)\,dx \quad v(s,n) := w(t) - (n - s) \ \ solve, t \rightarrow$$

Если уравнения $y(t)=0$ и $w(t)=n-s$ имеют несколько решений, то необходимо добавить операторы $u(s) := u(s)_0$ и $v(s, n) := v(s, n)_0$, позволяющие выбрать положительные действительные корни. Определить символьное выражение функции издержек $c(s,$ л) :

$$C(s,n) := \frac{Q}{n}\cdot\left(\int_0^{u(s)} c1\cdot y(t)\,dt + \int_0^{v(s,n)} c4\cdot w(t)\,dt + g(n)\right) \rightarrow$$

Определить искомые оптимальные значения для n и s:

Op := $minimize(C, s,$ л$)$.

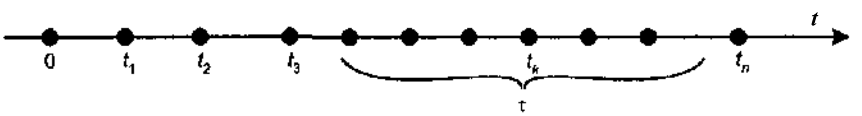
К38.11. Ответы: n = 2540, s = 2347.

К38.12. Ответы: n = 15.23, s = 7.236.

Глава 39

Простейшие потоки событий

Потоком событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени. Такой поток можно изобразить как последовательность точек $t_1, \ldots, t_n, \ldots$ на числовой оси, соответствующих случайным моментам появления событий:



Поток событий называется стационарным, если вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени зависит только от длины этого участка и не зависит от того, где именно на оси 0/ расположен этот участок. Поток событий называется потоком без последействия, если для любых непересекающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой. Поток событий называется ординарным, если вероятности попадания на участок времени малой длины двух или более событий пренебрежимо малы по сравнению с вероятностью попадания на этот участок одного события.

Стационарность потока означает, что вероятностные характеристики этого потока не должны меняться в зависимости от времени. Например, такая характеристика, как интенсивность потока событий, равная математическому ожиданию числа событий в единицу времени, должна оставаться постоянной для стационарного потока.

На практике часто встречаются потоки событий, которые стационарны только на ограниченном участке времени. Например, поток вызовов, поступающих на телефонную станцию в дневное время, может считаться таковым. Тот же поток в течение целых суток уже не будет стационарным, поскольку ночью интенсивность вызовов гораздо меньше, чем днем.

Отсутствие последействия в потоке означает, что события появляются в последовательные моменты времени независимо друг от друга. Например, поток пассажиров, входящих на станцию метро, можно считать потоком без последействия потому, что причины, обусловившие приход отдельного пассажира именно в тот, а не другой момент, не связаны с аналогичными причинами для других пассажиров. Однако условие отсутствия последействия может быть нарушено за счет появления такой зависимости. Например, поток пассажиров, покидающих станцию метро, уже не может считаться потоком без последействия, так как моменты выхода пассажиров, прибывших одним и тем же поездом, зависимы между собой.

Ординарность потока означает, что события в потоке приходят поодиночке, а не парами, тройками и т. д. Например, поток клиентов, направляющихся в парикмахерскую, практически можно считать ординарным, чего нельзя сказать о потоке клиентов, идущих в ЗАГС для регистрации брака.

Определение

Поток событий называется простейшим, если он стационарный, ординарный и без последействия.

Простейший поток играет среди потоков событий особую роль, до некоторой степени аналогичную роли нормального закона среди других законов распределения. Согласно центральной предельной теореме, при суммировании большого числа независимых случайных величин, подчиненных практически любым законам распределения, получается случайная величина, приближенно распределенная по нормальному закону. Аналогично можно сказать, что при суммировании (взаимном наложении) большого числа ординарных, стационарных потоков с практически любым последействием получается поток, сколь угодно близкий к простейшему. Условия, которые должны для этого соблюдаться, аналогичны условиям центральной предельной теоремы, а именно: складываемые потоки должны оказывать на сумму приблизительно равномерно малое влияние.

Сформулируем теперь несколько важных свойств простейших потоков. Напомним, что случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром a, если вероятность $P(X=m)$ того, что она примет значение m, равна $\frac{a^m}{m!}e^{-a}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$

Через $P(B)$ будем обозначать вероятность события B, а через $P(B \setminus D)$ — вероятность события B при условии, что произошло событие D.

Теорема 39.1. Пусть простейший поток событий имеет интенсивность X. Тогда если случайная величина X выражает число событий этого потока, попадающих на участок времени длины г, то X распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda\tau$.

Доказательство теоремы дано в задаче Т39.1.

Напомним, что случайная величина X имеет показательное распределение с параметром a, если $P(X < t) = 1 - e^{-at}$.

Следствие 39.1. Случайная величина T, равная промежутку времени между двумя последовательными событиями простейшего потока с интенсивностью X, имеет показательное распределение с параметром X.

Доказательство. Вероятность $P(T \geq t)$ — это вероятность того, что на участке времени длиной t, начинающегося в момент t_k появления одного из событий потока, не появится ни одного из последующих событий. Так как простейший поток не обладает последействием, то наличие в начале участка — в точке t_k — какого-то события никак не влияет на вероятность появления тех или других событий в дальнейшем. Но в силу теоремы 39.1 вероятность того, что на участке времени t не появится ни одного события потока, равна $\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t}$. Отсюда $P(T>t) = e^{-\lambda t}$ или $P(T<!) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Следствие 39.2. Для простейшего потока с интенсивностью А. вероятность попадания на участок времени Δt одного события равна $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, где $o(\Delta t)$ — бесконечно малая величина более высокого порядка, чем Д/.

Доказательство. Пусть T— случайная величина, равная промежутку времени между двумя последовательными событиями потока. Из следствия 39.1 вытекает, что $P(T<\Delta t) = 1 - e^{\lambda\Delta t}$=Д/(0), где $\Delta f(t)$ — приращение функции *fit)* = $1 - e^{-\lambda t}$ в точке /. Поскольку $\Delta f(t) = df(t) + o(\Delta t)$ и $df(0) = f'(0)$Д/ = *XAt*, то *P(T<Al) = XAt + o(At)*. Но ввиду ординарности потока и отсутствия последействия в нем вероятность *P(T<At)* можно рассматривать как вероятность попадания на участок времени Δt одного события потока. Следствие доказано.

Теорема 39.2. Пусть имеется физическая система с дискретными состояниями $S_1, \ldots, S_n$, которая может переходить из состояния S_i в состояние S_k под воздействием потока событий с интенсивностью λ_{ik}, $i \neq k$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, n$. Обозначим через $P_i(t)$ вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии S_i. Тогда:

$$P_r'(t) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{n} P_i(t)\lambda_{ir} - P_r(t)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{n} \lambda$$

Доказательство. Обозначим через A_i событие, заключающееся в том, что система в момент времени / находится в состоянии S_i, а через C —событие, заключающееся в том, что система в момент времени $t + \Delta t$ находится в состоянии S_r. Поскольку $A_1 A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий, то по формуле полной вероятности

$$P(C) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(C| A_i) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{n} P_i(t)P(C| A_i) + P_r(t)P(C| A_r)$$

Вывести систему из состояния S_r может суммарный поток с интенсивностью $\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{n}\lambda_{ri}$.

Тогда в силу следствия 39.2 имеем

$$P(C | A_r) = 1 - (\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{n}\lambda_{ri})\Delta t + o(\Delta t)$$

Систему из состояния S_i в состояние S_r может перевести поток с интенсивностью *А,,*. Поэтому опять-таки по следствию 39.2, *P(C \'A,) = X,,At + o(Al)*. В итоге получим:

$$P(C) = P_r(t + \Delta t) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{n} P_i(t)\lambda_{ir}\Delta t + P_r(t) - P_r(t)\Delta t\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{n}\lambda_{ri} + o(\Delta t)$$

Отсюда

$$\frac{P_r(t+\Delta t)-P_r(t)}{\Delta t}=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{n} P_i(t)\lambda_{ir}-P_r(t)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{n}\lambda_{ri}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

Переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим искомое равенство.

Задачи для самостоятельного решения

Т39.1. Пусть случайная величина X может принимать только два значения 1 или 0, причем $P(X=1)=p$. Доказать, что математическое ожидание случайной величины X равно p.

Т39.2. Доказать: $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^m\left(\frac{a}{n}\right)^m\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m}=\frac{a^m}{m!}e^{-a}$

Т39.3. Доказать теорему 39.1.

Т39.4. Пусть случайная величина T распределена по показательному закону с параметром X. Пусть стало известно, что T уже не может принимать значения меньшие, чем t_0. Тогда случайная величина $T-t_0$ распределена по показательному закону с тем же параметром X.

Т39.5. Пусть случайная величина T выражает промежуток времени между двумя последовательными событиями простейшего потока, интенсивность которого равна X. Предположим, что уже прошло некоторое фиксированное время t_0 с момента последнего события, в течение которого новых событий не появилось. Тогда случайная величина $T-t_0$ — остаточное время до появления нового события — имеет то же распределение, что и случайная величина T.

Ответы, указания, решения

Т39.1. Указание. Воспользоваться определением математического ожидания дискретной случайной величины.

Т39.2. По определению биномиальных коэффициентов C_n^m

$$C_n^m\left(\frac{a}{n}\right)^m\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m}=\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{n^m}\,\frac{a^m}{m!}\,\frac{\left(1-\frac{a}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{a}{n}\right)^m}$$

Остальное вытекает из следующих соотношений:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)...(n-m+1)}{n^m}=\prod_{i=1}^{m}\lim_{n\to\infty}(1-\frac{i}{n})=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{a}{n})^m=1,\quad \lim_{n\to\infty}(1-\frac{a}{n})^{\frac{n}{a}}=e$$

Т39.3. Разделим отрезок времени г на n равных элементарных отрезков длины m/n. Назовем элементарный отрезок занятым (свободным), если на него попадает хотя бы одно событие (не попадает ни одного события) данного простейшего потока. Ввиду стационарности потока его интенсивность X не зависит от времени и потому математическое ожидание числа событии, попадающих на элементарныи отрезок, равно $\frac{\lambda\tau}{n}$ (другими словами, это среднее число событий, попадающих на этот отрезок). Поскольку поток ординарен, то при достаточно малоїї длине отрезка $\frac{\tau}{n}$ можно пренебречь возможностью попадания на элементарный отрезок более одного события. Поэтому из задачи Т39.1 следует, что величина $\frac{\lambda\tau}{n}$ при достаточно большом n будет равна вероятности занятости элементарного отрезка. Ввиду отсутствия последействия попадания событий в непересекающиеся отрезки независимы. Поэтому n элементарных отрезков можно рассматривать как n независимых испытаний с двумя исходами: отрезок занят или отрезок свободен. Поскольку вероятность занятости отрезка равна $\frac{\lambda\tau}{n}$, то по формуле Бернулли для n независимых испытаний вероятность того, ровно ли m из n элементарных отрезков окажутся занятыми, равна $C_n^m(\frac{\lambda\tau}{n})^m(1-\frac{\lambda\tau}{n})^{n-m}$. Остальное теперь следует из задачи Т39.2.

Т39.4. Достаточно доказать, что вероятность события "$T-t_0<t$" при условии, что произошло событие "$T\geq t_0$", равна $1-e^{-\lambda t}$.

Итак, $P(T-t_0<t\mid T\geq t_0)=P(T<t+t_0\mid T\geq t_0)=\dfrac{P[(T<t+t_0)(T\geq t_0)]}{P(T\geq t_0)}=$

$$=\frac{P(t_0\leq T<t+t_0)}{P(T\geq t_0)}=\frac{P(T<t+t_0)-P(T<t_0)}{P(T\geq t_0)}=$$

$$=\frac{(1-e^{-\lambda(t+t_0)})-(1-e^{-\lambda t_0})}{e^{-\lambda t_0}}=\frac{e^{-\lambda t_0}-e^{-\lambda(t+t_0)}}{e^{-\lambda t_0}}=1-e^{-\lambda t}$$

Т39.5. Утверждение непосредственно следует из задачи Т39.4 и следствия 39.1.

Глава 40

Замкнутые системы массового обслуживания

В данном параграфе рассматриваются системы массового обслуживания, в которых интенсивность потока поступающих заявок зависит от состояния самих систем.

Пусть система состоит из n каналов обслуживания и m источников заявок, $m \geq n$. Предположим, что каждый источник порождает простейший поток заявок с интенсивностью λ, причем источник не может посылать следующую заявку до завершения обслуживания своей предыдущей заявки (в этом и выражается замкнутость данной системы). Предположим также, что каждый канал порождает простейший поток обслуженных заявок с интенсивностью μ. Все состояния данной системы можно разбить условно на три группы; S_0 = "все каналы свободны", S_i = "ровно i каналов занято и поступило ровно i заявок", i = 1, ..., n, S_j = "все каналы заняты и ровно j - n заявок находятся в очереди для обслуживания", $j = n + 1, \ldots, m$. Графически все возможные переходы из состояния в состояние, а также интенсивности потоков событий, под воздействием которых эти переходы возможны, можно изобразить так, как это показано на рис. 40.1. Действительно, если система находится в состоянии S_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, то в состояние "$i + 1$ каналов занято" она может перейти под воздействием суммарного потока заявок от m - i источников с интенсивностью $(m - i)\lambda$; из S_i в состояние "$i - 1$ каналов занято" можно перейти под воздействием суммарного потока обслуженных заявок, поступающего от i каналов обслуживания с интенсивностью $i\mu$. Напомним, что i источников прекращают поставку заявок до завершения обслуживания своих последних заявок. Если же система находится в состоянии S_j, $j = n, \ldots, m - 1$, то в состояние S_{j+1} она может перейти под воздействием суммарного потока заявок с интенсивностью $(m-j)\lambda$, а в состояние S_{j-1} — под воздействием суммарного потока обслуженных заявок с интенсивностью $n\mu$, поступающего от n каналов обслуживания.

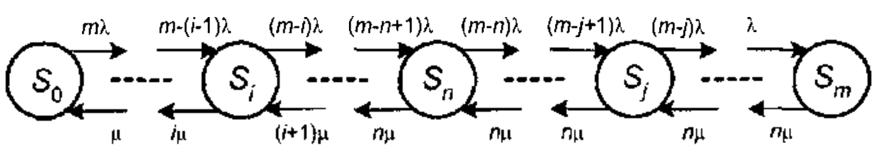


Рис. 40.1. Многоканальная СМО

Итак, пользуясь теоремой 39.2 и рис. 40.1, составим систему линейных дифференциальных уравнений, описывающую вероятности $P_r(t)$ нахождения данной системы в состоянии S_r в момент времени t, $r = 0, 1, \dots, m$:

$$\begin{cases} P_0'(t) = \mu P_1(t) - m\lambda P_0(t) \\ P_i'(t) = (m-i+1)\lambda P_{i-1}(t) + (i+1)\mu P_{i+1}(t) - ((m-i)\lambda + i\mu)P_i(t), \quad i = 1, \dots, n-1 \\ P_j'(t) = (m-j+1)\lambda P_{j-1}(t) + n\mu P_{j+1}(t) - ((m-j)\lambda + n\mu)P_j(t), \quad j = n, \dots, m-1 \\ P_m'(t) = \lambda P_{m-1}(t) - n\mu P_m(t) \end{cases} \tag{40.1}$$

Особый интерес представляют вероятности $P_r(t)$ в предельном стационарном режиме, т. е. при $t \to \infty$, которые называются предельными вероятностями состояний системы.

Теорема **40.1**. Если из каждого состояния $S_0, S_1, \dots, S_m$ системы через некоторые промежуточные состояния можно перейти в любое другое состояние, то предельные вероятности состояний этой системы существуют.

Как видно из рис. 40.1 к данной системе применима теорема 40.1. И поскольку в предельном режиме $P_r'(t) = 0$, $r = 0, 1, \dots, m$, то следующая система линейных уравнений описывает предельные вероятности состояний системы:

$$\begin{cases} 0 = \mu P_1 - m\lambda P_0 \\ 0 = (m-i+1)\lambda P_{i-1} + (i+1)\mu P_{i+1} - ((m-i)\lambda + i\mu)P_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ 0 = (m-j+1)\lambda P_{j-1} + n\mu P_{j+1} - ((m-j)\lambda + n\mu)P_j, \quad j = n, \dots, m-1 \\ 0 = \lambda P_{m-1} - n\mu P_m \\ P_0 + P_1 + \dots + P_m = 1 \end{cases} \tag{40.2}$$

Частным случаем замкнутых систем массового обслуживания являются одноканальные системы. Графически этот случай представлен на рис. 40.2. Для получения систем дифференциальных и алгебраических уравнений, описывающих данную систему, достаточно в (40.1) и (40.2) исключить вторые блоки уравнений (при $i = 1, \dots, n-1$) и положить $n = 1$.

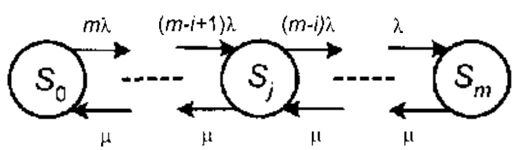


Рис. 40.2. Одноканальная СМО

Теорема **40.2**. Пусть система на рис. 40.1 находится в предельном стационарном режиме. Тогда:

- среднее число N_{zan} занятых каналов в системе будет равно:

$$\sum_{i=1}^{n} iP_i + n\sum_{i=n+1}^{m} P_i \tag{40.3}$$

- среднее число A заявок, обслуживаемых системой в единицу времени равно
- среднее число N_{post} заявок, связанных с процессом обслуживания (среднее число поступивших заявок), равно $m - A / \lambda$;
- среднее число N_{och} заявок в очереди равно $N_{post} - N_{zan}$.

(Отметим, что используемые в теореме вероятности P_i, $i = 1, \ldots, m$ получаются после решения системы уравнений (40.2).)

Доказательство. Пусть X — случайная величина, равная числу занятых каналов. Поскольку

$$X = \begin{cases} i, & \text{если система находится в состоянии } S_i, i \le n; \\ n, & \text{если система находится в состоянии } S_j, j \ge n+1, \end{cases}$$

то математическое ожидание случайной величины X, равное N_{zan}, вычисляется по формуле (40.3).

Так как μ есть среднее число заявок, обслуживаемых одним каналом в единицу времени, то $N_{zan}\mu$ — среднее число заявок, обслуживаемых всей системой в единицу времени.

Величина $m - N_{post}$ есть среднее число источников, чьи заявки поступают на обслуживание. Следовательно, $\lambda(m - N_{post})$ — среднее число поступающих заявок в единицу времени. Поэтому $\lambda(m - N_{post}) = A$ ввиду замкнутости системы, в которой среднее число поступающих заявок в единицу времени равно среднему числу обслуженных заявок в единицу времени. Итак, $N_{post} = m - A / \lambda$.

Четвертое утверждение следует из теоремы сложения математических ожиданий: математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий. Теорема доказана.

Компьютерный раздел

Встроенная функция `rkfixed(p, tn, te, N, F)` выдает таблицу результатов решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений *методом Рунге-Кутта* четвертого порядка точности с фиксированным шагом интегрирования $\frac{te - tn}{N}$. Эта функция зависит от 5 переменных: `tn`, `te` — начало и конец промежутка интегрирования системы, `N` — число шагов интегрирования, p— вектор начальных значений, F— вектор левых частей системы уравнений (с нулевой правой частью). Результатом решения системы дифференциальных уравнений с помощью функции `rkfixed` является матрица: столбец с номером 0 этой матрицы будет содержать значения независимой переменной, столбец с номером $i + 1$ будет содержать значения i-й функции в соответствующих точках.

Пример использования функции *rkfixed*

$$F(x,Y):=\begin{bmatrix}1+Y_0+x^2\\ \sin(Y_1+x^2)+Y_2\\ 2\cdot x\cdot(Y_1)^2\end{bmatrix}\qquad Y:=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad tn:=0\quad te:=1\qquad N:=5$$

$$rkfixed(Y,tn,te,N,F)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0.2 & 0.224 & 1.181 & 0.05\\ 0.4 & 0.515 & 1.404 & 0.254\\ 0.6 & 0.906 & 1.689 & 0.736\\ 0.8 & 1.437 & 2.062 & 1.725\\ 1 & 2.155 & 2.583 & 3.664\end{pmatrix}$$

Клавиша <@> вызывает шаблон (рис. 40.3) для построения графиков функций одной переменной в прямоугольных координатах. Внешняя рамка снабжена тремя маркерами для изменения размеров, а также служит для перемещения графика. Собственно, график будет находиться внутри меньшей рамки, снизу и слева от которой находятся две метки: нижняя — для ввода имен независимых переменных, левая — для ввода имен соответствующих им функций. Переход от метки к метке осуществляется клавишей <Tab>.

По умолчанию диапазон изменения значений функций вдоль оси 0у определяется автоматически, а диапазон изменения значений независимых переменных вдоль оси Ох задается от –10 до 10. Для изменения этих диапазонов имеются специальные метки. Две такие метки для ввода границ изменения графиков вдоль оси 0х появляются слева и справа от вводимых имен независимых переменных. Еще две метки для ввода границ изменения графиков вдоль оси 0у появляются ниже и выше от вводимых имен функций (рис. 40.4). С помощью одного шаблона можно строить несколько графиков функций на одной координатной плоскости (важно только, чтобы независимые переменные этих функций имели одинаковые диапазоны изменения). Для этого на месте метки снизу от оси *Ох* вводятся через запятую имена переменных, а на месте метки слева от оси Оу — имена соответствующих им функций.

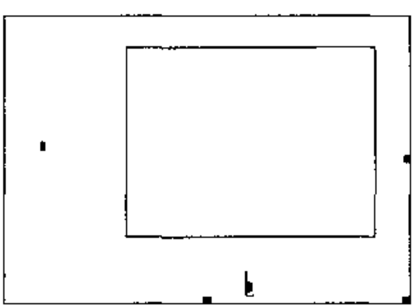


Рис. 40.3. Шаблон графика в прямоугольных координатах

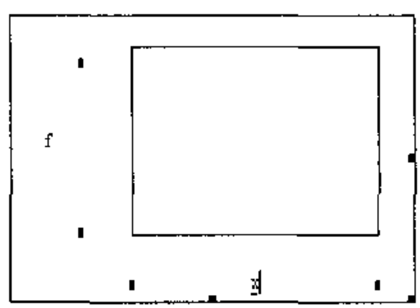


Рис. 40.4. Шаблон графика с метками для ввода диапазонов изменения

Рассмотрим пример построения на одной координатной плоскости графиков четырех функций, заданных различными способами: две функции $y = tgx$ и $y = x^2 + 1$ определены на интервале $[0; \pi/2)$; функция $y = t$, зависящая от ранжированной переменной t с диапазоном изменения от 0 до $\pi/2$ и с шагом изменения 0.1; и наконец, функция заданная в табличном виде;

x	0	0.3	0.5	0.6	0.9	1	1.1	1.2
y	5	2	5.5	2.5	3	4	1	6

В начале рабочего листа определим эти функции следующим образом:

$$f(x) := x^2 + 1 \quad g(t) := t \quad t := 0, 0.1 .. \frac{\pi}{2} \quad Y := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5.5 \\ 2.5 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad X := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0.9 \\ 1 \\ 1.1 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

Функция тангенс является встроенной функцией Mathcad и имеет вид $tan(x)$, а i-е координаты векторов X и Y будут совпадать с координатами i-й точки графика четвертой функции, заданной табличным способом.

Для построения графиков клавишей <@> введите шаблон. На месте метки под осью Ox введите имена независимых переменных x, x, t, X; на месте появившихся меток для ввода диапазонов изменения этих переменных введите числа 0 и $\pi/2$. На месте метки слева от оси 0y введите имена функций $tan(x)$, $f(x)$, $g(t)$, Y (через запятую); на месте появившихся меток для ввода диапазонов изменения этих функций введите $min(Y) - 1$ — внизу и $max(Y) + 1$ — вверху, как это показано на рис. 40.5.

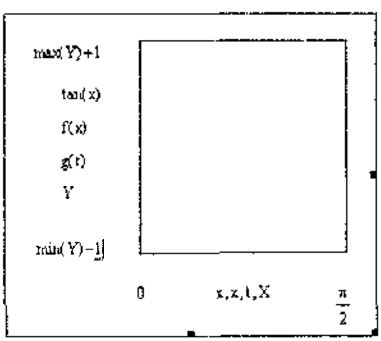


Рис. 40.5. Шаблон графика с введенными параметрами

Задание и изменение внешнего вида графиков пользователем осуществляется с помощью диалогового окна **Formatting Currently Selected X-Y Plot,** которое вызывается двойным щелчком кнопки мыши на выделенной области графика. Это окно имеет четыре вкладки: **Оси** X-Y (X-Y Axes)— для форматирования осей графиков, **Следы** *(Traces)* — для форматирования самих графиков, **Метки** (Labels) — для оформления заголовков и подписей к графикам, **Умолчания** (Defaults) — для применения на графиках установок по умолчанию. При активизации вкладки **Следы** (Traces) открывается 6 полей для выбора параметров графиков, как это показано на рис. 40.6.

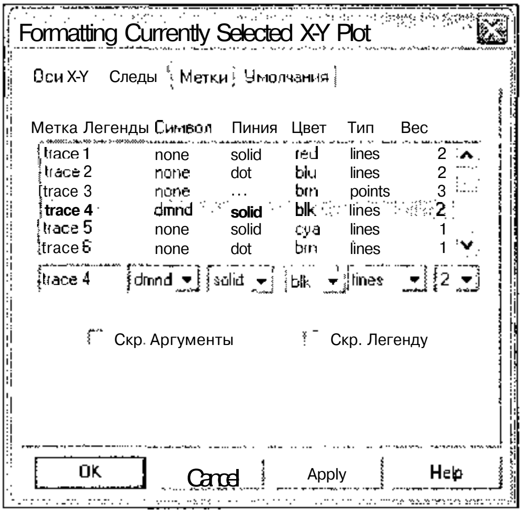


Рис. 40.6. Вкладка **Следы**

Поле **Метка Легенды** (Legend Label) присваивает имя trace i *i*-му графику, ставя этому графику в соответствие набор параметров, содержащихся в строке trace i. Поле **Символ** (Symbol) задает вид каждой точки соответствующего графика. Поле **Линия** (Line) задает вид линии соответствующего графика: solid — сплошная, dash — штриховая, dot — точечная, dadot — штрихпунктирная. При этом поле **Линия** (Line) доступно, если в поле **Тип** (Type) выбран параметр lines. Поле **Тип** (Type) задает один из семи типов графика: lines — в виде кривой, bar — в виде столбцов и т. д. Поля **Цвет** (Color) и **Вес** (Weight) задают соответственно цвет и толщину линий.

В нижней части вкладки Следы (Traces) расположены две опции: опция **Скр. Аргументы** (Hide Arguments) регулирует вывод слева от оси $0y$ фрагментов линий графиков; опция **Скр. Легенда** (Hide Legend) регулирует вывод под графиком имен trace i соответствующих графиков.

Вкладка **Оси** X-Y (X-Y Axes) содержит 6 опций для каждой координаты (рис. 40.7). Охарактеризуем наиболее используемые из них. Опция **Сетка** (Grid Lines) задает отображение сетки в виде прямых, параллельных осям; опция **Нумерация** (Numbered) отображает координаты линий сетки. Опция **АвтоСетка** (Auto Grid) автоматически определяет число прямых в сетке (если включена опция **Сетка** (Grid Lines)); если опция **АвтоСетка** (Auto Grid) отключена, то активизируются поля **№ Сеток** (Number of Grids) для задания количества прямых в сетке.

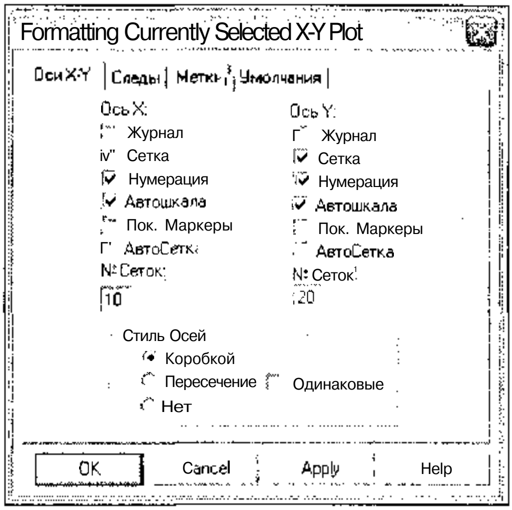


Рис. 40.7. Вкладка Оси X-Y

После выполнения всех необходимых установок окно **Оси** X-Y (Formatting Currently Selected X-Y Plot) следует закрыть, щелкнув кнопкой **OK**.

Последующее нажатие клавиши <Enter> приведет к появлению графиков на экране. В нашем случае при установках, выделенных на рис. 40.6, 40.7, это будет выглядеть так, как показано на рис. 40.8.

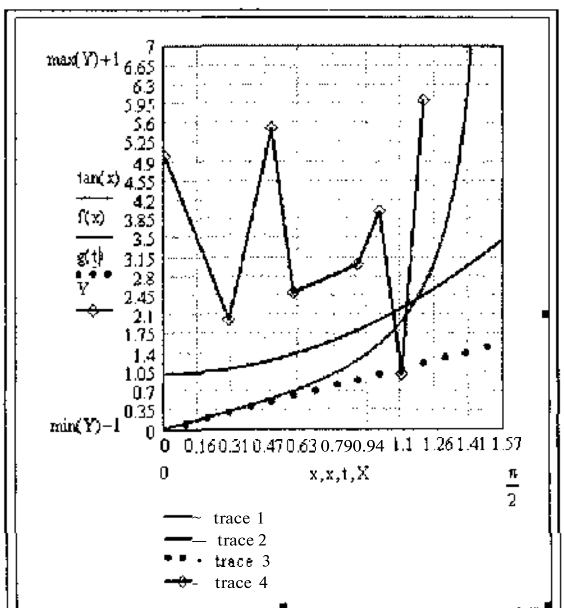


Рис. 40.8. Вид графиков на экране Mathcad

Задачи для самостоятельного решения

Общая формулировка задач **К40.1—К40.12** в буквенных обозначениях

n рабочих обслуживают κ станков. Каждый станок останавливается в среднем 2 раза в час. Процесс наладки одного станка занимает у рабочего в среднем 10 мин. Определить: предельные вероятности состояний данной системы; промежуток времени, в течение которого система переходит в стационарный режим; среднее число неисправных станков.

К40.1. Дано: $n = 1$, $\kappa = 3$.

К40.2. Дано: $n = 2$, $\kappa = 6$.

К40.3. Дано: $n = 3$, $k = 8$.

К40.4. Дано: $n = 4$, $\kappa = 10$.

К40.5. Дано: $n = 5$, $k = 12$.

К40.6. Дано: *n*=\, $k = 6$.

К40.7. Дано: $n = 2$, $\kappa = 10$.

К40.8. Дано: и = 3, $\kappa = 14$.

К40.9. Дано: $n = 4$, $\kappa = 16$.

К40.10. Дано: $n = 5$, $\kappa = 20$.

К40.11. Задана система "экскаватор-самосвалы". Экскаватор погружает за один рабочий цикл 1 т грунта. Грузоподъемность самосвала равна 7 т. Число самосвалов, обслуживающих экскаватор, равно 5. Рабочий цикл экскаватора длится 0.295 мин, а время обращения самосвала равно 10 мин. Проанализировать поведение данной системы массового обслуживания за первые полчаса ее функционирования. Определить промежуток времени, в течение которого система переходит в стационарный режим. Определить продуктивность экскаватора, а также среднее число простаивающих машин.

К40.12. Рассматривается круглосуточная работа пункта проведения профосмотра танков подразделения, в котором 18 единиц боевой техники и 8 групп технического осмотра танков. На осмотр и выявление дефектов каждого танка затрачивается в среднем одной группой техосмотра 6 ч. На осмотр в среднем поступает 3 танка за 12 ч. Найти основные характеристики данной системы массового обслуживания. Определить также максимально возможную интенсивность поступления танков на профилактику, с тем чтобы среднее число машин в очереди не превышало 50% от общего числа поступающих машин. Построить графики вероятностей нахождения системы в различных состояниях в зависимости от времени /.

Ответы, указания, решения

Общий алгоритм решения задач К40.1 —**К40.12** с помощью Mathcad

Ввести исходные данные: число каналов обслуживания я, число m источников заявок, интенсивности обслуживания и поступления заявок μ и X соответственно. Задать начальные значения для вероятностей состояний: $j := 1;m \quad P_j := 0 \quad P_0 := -1$. Переопределить константы для символьных вычислений (в этом случае Mathcad будет рассматривать их снова как переменные, что необходимо для получения символьного вида систем уравнений): $\mu := \mu \qquad X := X \qquad P := p$.

Сформировать вектор $D(P)$ правых частей систем алгебраических и дифференциальных уравнений для определения предельных вероятностей P_j И вероятностей $P_r(t)$ нахождения системы в состояниях S_r в момент времени с соответственно:

$D(P) :=$

$$\left|\begin{array}{l}
D_0 \leftarrow P_1 \cdot \mu - P_0 \cdot m \cdot \lambda \\
for \quad i \in 1..n-1 \quad if \quad n>1 \\
\qquad D_i \leftarrow P_{i-1} \cdot (m-i+1) \cdot \lambda + P_{i+1} \cdot (i+1) \cdot \mu - P_i \cdot (i \cdot \mu + (m-i) \cdot \lambda) \\
for \quad j \in n..m-1 \\
\qquad D_j \leftarrow P_{j-1} \cdot (m-j+1) \cdot \lambda + P_{j+1} \cdot n \cdot \mu - P_j \cdot (n \cdot \mu + (m-j) \cdot \lambda) \\
D_m \leftarrow P_{m-1} \cdot \lambda - P_m \cdot n \cdot \mu \\
D
\end{array}\right.$$

Определить предельные вероятности состояний, а также основные характеристики предельного стационарного режима:

Given $\quad \sum_{i=1}^{m} P_i = 1 \qquad D(P) = 0 \qquad Pp := find(P)$

$$N_{zan} := \sum_{i=1}^{n} Pp_i \cdot i + n \cdot \sum_{j=n+1}^{m} Pp_j \qquad A := N_{zan} \cdot \mu \qquad N_{post} := m - \frac{A}{\lambda}$$

Задать параметры *tn*, *te*, *N* для решения системы дифференциальных уравнений, описывающей вероятности нахождения системы в различных состояниях в момент времени t: tn и te — начало и конец промежутка интегрирования системы, N — число шагов интегрирования. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$DR(t, P) := D(P) \qquad S := rkfixed(P, tn, te, N, DR).$$

Результат решения системы дифференциальных уравнений будет представлен в виде матрицы s размера $(N + 1) \times (m + 2)$. При этом столбец с номером 0 матрицы s будет содержать значения независимой переменной t, столбец с номером $i + 1$ будет содержать значения вероятности $P_i(t)$ нахождению системы в состояния S_i в моменты времени t.

Построить графики функций $P_i(t)$. Для этого ввести шаблон графика. В рамке под осью абсцисс на месте метки ввести вектор $S^{<i>}$, а в метке слева от оси ординат ввести векторы $S^{<i+1>}$, $i = 0, 1, ..., m$. Ниже оси абсцисс ввести границы *tn* и te изменения аргумента, а слева от оси ординат ввести соответственно значения 0 и 1 изменения функций.

Для получения необходимого изображения произвести настройку параметров рисунка следующим образом: на вкладке След *(Traces)* выбрать для каждого $i = 0, 1, ..., m$ режимы:

Legend label	Symbol	Line	Color	Type	Weight
trace i+1	none	solid	(*i*+1)-й цвет	lines	2

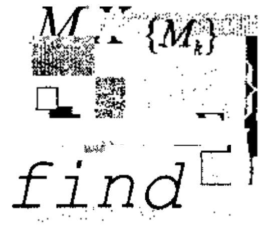
а на вкладке **Оси** X-Y (X-Y Axes) отметить флажками опции Сетка (Grid Lines), **Нумерация** (Numbered) и задать необходимое число вертикальных и горизонтальных линий сетки в опции № сеток (Number of grids).

К40.1. Ответы: A = 3.923, N_{zan}=0.654, N_{post}= 1.038, N_{och}= 0.385, система переходит в стационарный режим приблизительно через 54 мин.

К40.2. Ответы: A = 8.334, N_{zan}=1.389, N_{post}= 1.832, N_{och}= 0.443, предельные вероятности равны соответственно 0.153, 0.305, 0.254, 0.17, 0.085, 0.028, 0.005. Система переходит в стационарный режим приблизительно через 1.3 ч.

К40.11. Ответы: система переходит в стационарный режим приблизительно через 18 мин; среднее число простаивающих машин равно 0.746; экскаватор обслуживает один самосвал в среднем в течение 2.84 минут; предельные вероятности состояний равны соответственно 0.271, 0.281, 0.232, 0.144, 0.059, 0.013.

К40.12. Ответы: система переходит в стационарный режим приблизительно через 17 ч; среднее число машин в очереди составляет 37% от общего числа поступающих машин; если интенсивность поступления танков на профилактику не будет превышать 0.664 машин в час, то число машин в очереди не превысит 50% от общего числа поступающих машин.



Глава 41

Открытые системы массового обслуживания

В данной главе рассматриваются системы массового обслуживания, в которых интенсивность простейшего потока поступающих заявок равна λ и не зависит от состояния системы. Предполагается, что система состоит из n каналов обслуживания и каждый канал порождает простейший поток обслуженных заявок с интенсивностью μ. Заявки, поступающие в момент, когда заняты все каналы, становятся в очередь ожидая обслуживания. Количество мест в очереди ограничено числом $k = m - n$: при наличии в очереди k заявок вновь поступающие заявки покидают систему необслуженными.

Все состояния данной системы можно разбить условно на три группы: S_0="все каналы свободны", S_i = "ровно i каналов занято и поступило ровно i заявок", $i = 1, ..., n$, S_j = "все каналы заняты и $j - n$ заявок находятся в очереди", $j = n + 1, ..., m$. Графически все возможные переходы из состояния в состояния, а также интенсивности потоков событий, под воздействием которых эти переходы возможны, можно изобразить так, как это показано на рис.41.1.

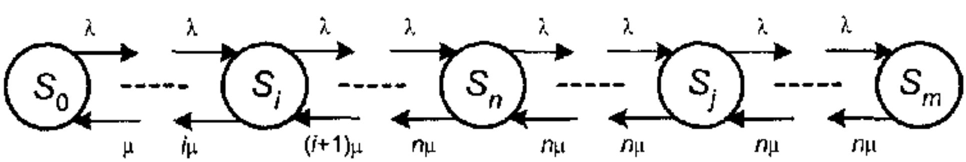


Рис.41.1. Многоканальная открытая СМО

Действительно, если система находится в состоянии S_r, $r = 0, 1, ..., m$, то в состояние S_{r+1} она может перейти под воздействием потока заявок с интенсивностью λ. Из состояния S_i в состояние S_{i-1}, $i = 1, ..., n$, можно перейти под воздействием суммарного потока обслуженных заявок, поступающего от i каналов, с интенсивностью $i\mu$. Из состояния S_j в состояние S_{j-1}, $j = n + 1, ..., m$, можно перейти под воздействием суммарного потока обслуженных заявок, поступающего от n каналов, с интенсивностью $n\mu$.

Пользуясь теоремами 39.2, 40.1 и рис. 41.1, составим систему линейных алгебраических уравнений, описывающую предельные вероятности состояний системы:

$$\begin{cases} 0 = \mu P_1 - \lambda P_0 \\ 0 = \lambda P_{i-1} + (i+1)\mu P_{i+1} - (\lambda + i\mu) P_i, \\ 0 = \lambda P_{j-1} + n\mu P_{j+1} - (\lambda + n\mu) P_j, \qquad j = n, \ldots, m-1, \\ 0 = \lambda P_{m-1} - n\mu P_m \\ P_0 + P_1 + \ldots + P_m = 1 \end{cases} \tag{41.1}$$

Если мест в очереди не предусмотрено, то имеем частный случай открытой системы массового обслуживания. Графически этот случай описывается на рис. 41.2. Для получения системы алгебраических уравнений, описывающей стационарный режим в этом случае, достаточно из системы (41.1) удалить третий блок уравнений (при $j = n, \ldots, m-1$) и положить $m = n$ (если рассматриваемая система массового обслуживания одноканальная, то из (41.1) исключается второй блок уравнений; если система одноканальная и без очереди, то исключается второй и третий блоки уравнений).

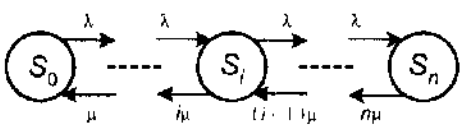


Рис. **41.2.** Открытая СМО без очереди

Будем обозначать через $M(X)$ математическое ожидание случайной величины X.

Теорема **41.1.** Пусть система на рис. 41.1 находится в предельном стационарном режиме. Тогда:

- вероятность $P_{от}$ отказа заявке на обслуживание равна P_m;
- вероятность Q принятия заявки на обслуживание равна $1-P_m$;
- среднее число A заявок, принимаемых системой на обслуживание в единицу времени, равно λQ;
- среднее число N_{zan} занятых каналов равно A/μ;
- среднее число N_{och} заявок в очереди равно $\sum_{i=1}^{m-n} iP_{n+i}$;
- среднее время t_w ожидания заявки в очереди равно $\frac{1}{n\mu}\sum_{i=1}^{m-n} iP_{n-1+i}$;
- среднее время t_{sys} нахождения заявки в системе равно $t_w + Q/\mu$.

Доказательство. Очевидно, что заявка получает отказ только в том случае, когда все n каналов и все m мест в очереди заняты, т. е. система находится в состоянии S_m. Отсюда следуют первые три утверждения теоремы.

Среднее число заявок A, принимаемых системой на обслуживание в единицу времени равно $N_{zan}\mu$, поскольку $N_{zan}\mu$ есть среднее число заявок, обслуженных системой в единицу времени. Отсюда $N_{zan} = A/\mu$.

Пусть X — случайная величина, равная числу занятых мест в очереди. Тогда вероятность события "$X = i$" равна P_{n+i}, $i = 1, \dots, m - n$. Следовательно, $N_{och} = M(X) = 1P_{n+1} + 2P_{n+2} + \dots + (m - n)P_m$.

Обозначим через T_w случайную величину, равную времени ожидания заявки в очереди. Если заявка застанет не все каналы занятыми, то ей вообще не придется ждать. Если заявка придет в момент, когда заняты n каналов, а очереди нет, то ей придется ждать время, равное $\frac{1}{n\mu}$ (поток освобождения n каналов имеет интенсивность $n\mu$). Аналогично, если заявка застанет в очереди r заявок, то ей придется ждать время, равное $\frac{r}{n\mu}$. Если же вновь пришедшая заявка застанет в очереди уже $n - m$ заявок, то она покинет систему необслуженной. Поэтому:

$$t_w = M(T_w) = \frac{1}{n\mu}P_n + \frac{2}{n\mu}P_{n+1} + \dots + \frac{m-n}{n\mu}P_{m-1},$$

что доказывает шестое утверждение теоремы.

Если обозначить через T_{sys} случайную величину, равную времени пребывания заявки в системе, а через T_0 — случайную величину, равную времени обслуживания заявки, то $T_{sys} = T_w + T_0$, откуда по свойству математического ожидания суммы случайных величин $t_{sys} = t_w + M(T_0)$. Но

$$T_0 = \begin{cases} 1/\mu, & \text{если заявка принята на обслуживание,} \\ 0, & \text{если заявка получает отказ на обслуживание.} \end{cases}$$

Поэтому $M(T_0) = \frac{1}{\mu}Q + 0 \cdot P_{отк} = \frac{Q}{\mu}$, откуда $t_{sys} = t_w + \frac{Q}{\mu}$. Теорема доказана.

Задачи для самостоятельного решения

Общая формулировка задач **K41.1 — K41.12** в буквенных обозначениях

Имеется n телефонных линий. Вызов, пришедший в момент, когда все линии заняты, получает отказ. Интенсивность потока вызовов в минуту равна λ. Средняя продолжительность одного разговора равна t минут. Определить основные характеристики данной системы массового обслуживания в стационарном режиме.

K41.1. Дано: $n = 1$, $\lambda = 0.8$, $t = 1.5$.

K41.2. Дано: n = 10Д = 0.8, $t = 1.5$.

К41.3. Дано: $n = 1$, $\lambda = 0.6$, $t = 1.6$.

К41.4. Дано: $n = 10$, $\lambda = 0.6$, $/ = 1.6$.

К41.5. Дано: $n = 2Д = 0.8$, $t = 1.5$.

К41.6. Дано: и = 8 Д = 0.8, $t =$ **1.5.**

К41.7. Дано: $n = 1Д = 0.5$, $t = 1.8$.

К41.8. Дано: $n= 10Д = 0.5$, $/= 1.8$.

К41.9. Дано: $n = 5Д = 0.2$, $t = 2$.

К41.10. Дано: $n = 1Д = 0.2$, $t = 2$.

К41.ll. Автозаправочная станция имеет одну заправочную колонку. Площадка при станции допускает пребывание в очереди на заправку не более трех машин одновременно. Если площадка занята, то очередная машина проезжает мимо. Поток машин, прибывающих для заправки, имеет интенсивность 2 машины в минуту, а процесс заправки одной машины в среднем длится 2 мин. Определить основные характеристики данной системы массового обслуживания.

К41.12. Решить предыдущую задачу при условии наличия на автозаправочной станции двух заправочных колонок.

Ответы, указания, решения

Общий алгоритм решения задач К41.1 —**К41.12** с помощью Mathcad

Ввести исходные данные: число каналов обслуживания л; максимально допустимое число заявок m, которое может находиться в системе; интенсивности ц обслуживания и λ поступления заявок. Задать начальные значения для вероятностей состояний: $j := 1;m$. $P_j := 0$ $P_0 := 1$. Переопределить константы для символьных вычислений: $\mu := \mu$ $\lambda := \lambda$ $P := P$. Сформировать вектор $D(P)$ правых частей системы алгебраических уравнений для нахождения предельных вероятностей состояний:

$D(P) :=$

$$\left|\begin{array}{l} D_0 \leftarrow P_1 \cdot \mu - P_0 \cdot m \cdot \lambda \\ for\quad i \in 1;n-1 \quad if \quad n > 1 \\ \qquad D_i \leftarrow P_{i-1} \cdot \lambda + P_{i+1} \cdot (i+1) \cdot \mu - P_i \cdot (i \cdot \mu + \lambda) \\ for\quad j \in n;m \quad if \quad m > n \\ \qquad D_j \leftarrow P_{j-1} \cdot \lambda + P_{j+1} \cdot n \cdot \mu - P_j \cdot (n \cdot \mu + \lambda) \\ \\ D_{m+1} \leftarrow 1 - \sum_{j}^{m} P_j \\ D \end{array}\right.$$

Определить предельные вероятности состояний, а также основные характеристики предельного стационарного режима:

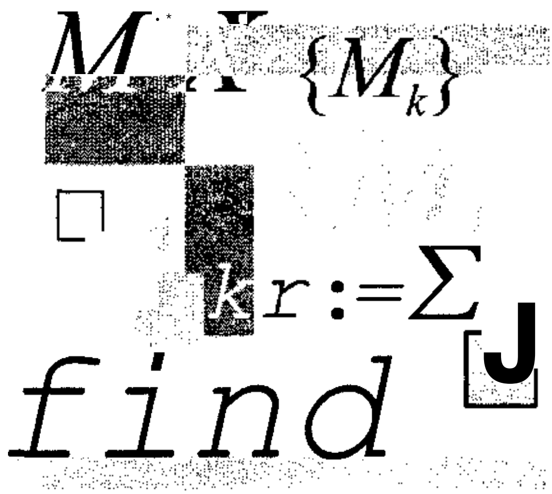
Given $D(P) = 0$ $\quad Pp := Find(P)$ $\quad P_{ot} := Pp_m$ $\quad Q := 1 - P_{ot}$

$A := \lambda \cdot Q$

$N_{zan} := A/\mu$ $\quad N_{och} := \sum_{i=1}^{m-n} i \cdot P_{n+i}$ $\quad t_w := \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^{m-n-1} i \cdot P_{n+i+1}$

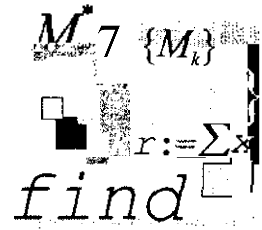
$t_{sys} := t_w + Q/\mu$

К41.12. Ответы. Вероятность того, что машина будет вынуждена проехать мимо станции необслуженной, равна 0.512; среднее число машин, обслуживаемых станцией за минуту, равно 0.976; среднее число занятых колонок равно 1.952; среднее число машин в очереди равно 2.176; среднее время ожидания в очереди равно 1.088 мин; среднее время пребывания машины на станции равно 2.064 мин.



Часть IV

Математическая статистика и корреляционно-регрессивные модели



Глава 42

Двумерные случайные величины

Основные обозначения, используемые в данной и последующих главах: $P(A)$ — вероятность события A; $M(X)$ и $D(X)$ — математическое ожидание и дисперсия случайной величины X (сокращенно с. в. X); $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$ — среднее квадратическое отклонение. Иногда скобки в записи $M(X)$, $D(X)$ будут опускаться. Множество всех точек (x,y) из Af^2, удовлетворяющих системе неравенств $\begin{cases} a \le x < b \\ c \le y < d \end{cases}$, называется прямоугольником и обозначается $[a, b) \times [c, d)$. Условимся, что если речь идет о дискретных с. в. X и K, то X и $У$ имеют конечные множества своих значений $\{x_1, ..., x_m\}$ и $\{y_1, ..., y_n\}$ соответственно; при этом $P(X = x_i) = p_i$, $i = 1, ..., m$, $P(Y = y_k) = q_k$, $k = 1, ..., n$.

Если X и Y — случайные величины, то вектор $(X,У)$ называется двумерной с. в. с одномерными составляющими X и Y. Свойства двумерной с. в. определяются не только свойствами ее составляющих, но и зависимостями между ними.

Определение

Функцией распределения двумерной с. в. (X, У) называется функция F(x, y) такая, что $F(x, y) = P((X < x) \cdot (Y < y))$ для любых x, y из Af^1.

Очевидно, в случае дискретной с. в. $(X, У)$ $F(x, y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} p_{ik}$, где p_{ik} — вероятность того, что случайная величина X примет значение x_i, случайная величина $У$ примет значение y_k, а суммирование берется по всем i, для которых $x_i < x$, и по всем $к$, для которых $y_k < y$.

Свойства функции распределения $F(x, y)$ двумерной с. в. (X, Y):

1. $0 \le F(x,y) \le 1$ для любой точки $(x, y) \in Af^2$.
2. $F(x, y)$ есть неубывающая функция по каждому из аргументов x и y.
3. $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$, $F(+\infty, +\infty) = 1$.

4. $F(x, +00) = F\backslash(x)$, $F(+\infty, y) = F_2(y)$, где $F_1(x)$ и $F_2(y)$ — функции распределения одномерных составляющих X и Y соответственно.

5. Вероятность попадания двумерной с. в. (X, Y) в прямоугольник $[x_1, x_2) \times [y_1, y_2)$ однозначно определяется ее функцией распределения следующим образом:

$$P((X \in [x_1, x_2)) \cdot (Y \in [y_1, y_2))) =$$

$$= F(x, y_2) + F(x_1, y_1) - F(x, _2) - F(x_2, y\backslash) \qquad (42.1)$$

Доказательство свойств см. в задаче Т42.1.

Определение

Множеством нулевой меры в Af^2 называется такое множество точек, которое можно покрыть прямоугольниками сколь угодно малой суммарной площади. Двумерная с. в. называется непрерывной, если ее функция распределения непрерывна и имеет всюду в Af^2, за исключением, быть может, точек множества нулевой меры, частные производные первого порядка и смешанные производные второго порядка. Двумерная с. в. называется дискретной, если дискретны ее одномерные составляющие.

Двумерная дискретная с. в. полностью характеризуется матрицей P размера $m \times n$, в которой на позиции $(i, к)$ находится число $p_{ik} = P((X = x_i) \cdot (Y = y_k))$. Строчные и столбцовые суммы элементов матрицы P представляют соответственно вероятностные распределения одномерных составляющих X и $У$. Действительно, поскольку события $(Y = y_k), к = 1, \ldots, n$, образуют полную группу попарно несовместных событий, то по теореме сложения вероятностей имеем:

$$p_i = P(x = x_i) = \sum_{k=1}^{n} P((X = x_i) \cdot (Y = y_k)) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}, \ i = 1, \ldots, m.$$

Аналогично,

$$q_k = P(Y = y_k) = \sum_{i=1}^{m} p_{ik}, \ k = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим теперь среднюю плотность $\varphi_{ср}(x, y)$ попадания непрерывной с.в. (X, Y) в прямоугольник $[x, x + Ax) \times [y, y + \Delta y)$:

$$\varphi_{cp}(x, y) = \frac{P((x \le X\ x + \Delta x) \cdot (y \le Y < y + \Delta y))}{Ax \cdot \Delta y} =$$

$$= \frac{F(x + \Delta x, y + Ду) + F(x, y) - F(x, y + Ду) - F(x + \Delta x, y)}{Дх \cdot Ду}$$

(согласно свойству 5 функции распределения $F(x, y)$).

Найдем предельную плотность:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \varphi_{cp}(x, y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x,\, y+\Delta y)-F(x,\, y+\Delta y)}{\Delta x} -\right.$$

$$\left.- \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x,\, y)-F(x,\, y)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{F'_x(x,\, y+\Delta y)-F'_x(x,\, y)}{\Delta y} = F''_{xy}(x,\, y)$$

Определение

Плотностью (или совместной плотностью) непрерывной двумерной с.в. называется смешанная производная второго порядка от ее функции распределения.

Геометрически эту функцию можно интерпретировать как поверхность, поэтому ее называют поверхностью распределения (рис. 42.1).

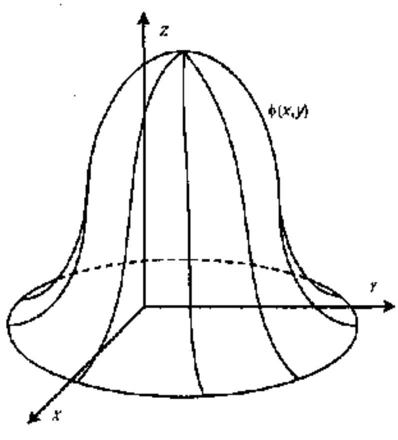


Рис. 42.1. Поверхность распределения $\varphi(x, y)$

Свойства плотности $\varphi(x, y)$ непрерывной двумерной с. в. (X, Y):

1. $\varphi(x, y) \geq 0$ для любой точки (x, y) из R^2.
2. Вероятность попадания с.в. (X, Y) в область D равна

$$\iint_D \varphi(x, y)\,dx\,dy .$$

3. $F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\varphi(x, y)\,dx\,dy$ •

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}$$

5. $\varphi_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y)dy$, $\varphi_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y)dx$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ — плотности одномерных составляющих X и К соответственно.

Доказательство этих свойств дано в задаче Т42.3.

Компьютерный раздел

Встроенная функция if(*L*,*A*, *B*) зависит от трех выражений *L*, Л, в, причем *L* — логическое (булево) выражение. Результатом выполнения этой функции будет *A* или б, в зависимости от того, какое значение — истинное или ложное — соответственно примет логическое выражение *L*. Пусть, например, требуется определить функцию *f(x)*, которая равна -2x при $x \le 0$ и равна *arctg x* при $x > 0$. В нужном месте рабочего листа введите *f(x)* и знак присваивания := клавишей <:>. Затем с помощью команды **Функция** (Function) меню **Вставка** (Insert) вызовите диалоговое окно **Вставить Функцию** (Insert Function), изображенное на рис. 42.2. Это окно содержит два списка: левый содержит названия групп, на которые разбиты встроенные функции Mathcad, а правый — идентификаторы этих функций. Под списками находятся два окна, в которых дается определение выбранной функции. Для выбора функции *if* в левом списке выберите строку **All** (Все) и затем в правом списке — строку if (Если). Щелчок на кнопке **Вставить** (Insert) приведет к появлению шаблона функции *if* справа от знака присваивания: *f(x)* := if(▪,▪,▪). На месте первой метки этого шаблона введите логическое выражение $x \le 0$, на месте второй — выражение *-2x*, затем синим курсором выделите третью метку. Далее, в диалоговом окне **Вставить Функцию** (Inseit Function) в левом списке выделите строку Trigonometric, а в правом — строку atari с идентификатором функции арктангенса. Щелчок кнопкой **OK** приведет к появлению шаблона atan(▪) (при этом диалоговое окно исчезнет). На месте метки этого шаблона введите x. После нажатия клавиши <Enter> функция *fix)* будет определена:

f(x) := i(x ≤ 0,-2x,atan(x))

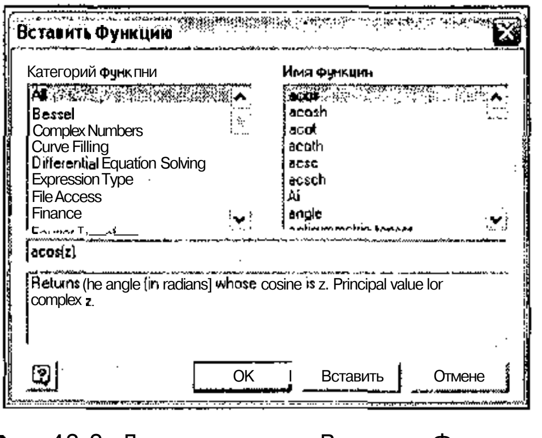


Рис. 42.2. Диалоговое окно Вставить Функцию

Так, если на рабочем листе теперь ввести выражение `f(1)`, а затем знак символьного вывода →, то справа от этого знака появится значение $\frac{\pi}{4}$ — как результат `arctg(1)`; то же время $f(-1) \to 2$, что соответствует результату `(-2)·(-1)`.

Подпанель Логические (Boolean) вызывается кнопкой [<≥] панели **Математика** (Math). Пять первых кнопок служат для ввода знаков неравенств и знака логического равенства, пять последних кнопок служат для ввода операторов булевой логики. Каждая из кнопок вызывает шаблон с метками, на месте которых вводятся произвольные выражения— арифметические или логические, связанные знаком, изображенным на соответствующей кнопке.

Рассмотрим два примера. Пусть требуется определить булеву функцию $f(x, y)$, которая принимает значения 1 или 0 в зависимости от того, равны или не равны между собой выражения $2x$ и $y - 1$. В нужном месте рабочего листа введите идентификатор функции $f(x, y)$, знак присваивания := и шаблон логического равенства [▪ = ▪]. На месте меток введите выражения $2x$ и $y - 1$. В результате получите:

$$f(x,y) := 2x = y - 1$$

Теперь очевидно, что $f(2, 5) = 1$, но $f(2, 6) = 0$.

Предположим, что требуется определить булеву функцию $f(x, y)$, которая принимает значения 1 или 0 в зависимости от того, удовлетворяет ли пара (x, y) по крайней мере одной из следующих систем уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x + y \ge 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y < 0 \end{cases}.$$

Введите идентификатор функции $f(x, y)$, знак присваивания :=. Последовательные щелчки левой кнопкой мыши кнопками [∧], [∨], [∧] приведут к появлению справа от знака := шаблона [▪ ∧ ▪ ∨ ▪ ∧ ▪]. Введите последовательно на месте меток выражения $x > 0$, $y + x \ge 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $y < 0$. Затем, выделив правым синим уголком выражение $x > 0 \wedge y + x \ge 1$, клавишей <)> возьмите его в скобки. Аналогично поступите с выражением $x^2 + y^2 = 4 \wedge y < 0$. В результате получится:

$$f(x,y) := (x > 0 \wedge y + x \ge 1) \vee (x^2 + y^2 = 4 \wedge y < 0)$$

Теперь, например, $f(0, 1) = 0$, но $f(2, 0) = 1$.

Для вычисления двойных интегралов используется кнопка [∫∫] подпанели **Исчисление** (Calculus): двойной щелчок этой кнопкой вызовет шаблон $\int_{▪}^{▪}\int_{▪}^{▪} ▪ \, d▪ \, d▪$, на месте меток которого вводятся пределы интегрирования, подинтегральная функция и переменные интегрирования. При этом следует помнить, что первая переменная интегрирования относится к внутреннему интегралу. Например, запись $\iint f(x,y)dydx$ означает, что переменная у относится к внутреннему интегралу $\int_2^3 f(x,y)dy$

Если предполагается, что результатом вычисления интеграла будет константа, то для вычисления этого интеграла в Mathcad целесообразно использовать знак равенства =. Если же предполагается, что результатом вычисления интеграла будет функция, зависящая от некоторой переменной или параметра, то следует для его вычисления использовать знак символьного вывода ->. Например:

$$\int_0^1\int_0^1 x\cdot y^2 dydx = \frac{1}{6} \qquad \int_0^a\int_0^b x\cdot y^2 dydx \to \frac{1}{6}\cdot a^2\cdot b^3$$

$$\int_0^a\int_0^b x\cdot y^2 dxdx \to \frac{1}{6}\cdot a^3\cdot b$$

Задачи для самостоятельного решения

Т42.1. Доказать свойства функции распределения двумерной случайной величины.

Т42.2. Доказать, что вероятность того, что двумерная непрерывная с. в. (X, Y) примет пару отдельно взятых значений, равна нулю: $P((X=x_i)\cdot(Y=y_k))=0$.

Т42.3. Доказать свойства совместной плотности непрерывной двумерной с. в. (X, Y).

П42.1. Двумерная с. в. (X, Y) распределена равномерно в круге радиуса 1 и с центром в начале координат. Найти совместную плотность и плотности одномерных составляющих, а также вероятность того, что расстояние случайной точки (X, Y) от начала координат будет меньше 1/3.

Общая формулировка задач К42.1 — **К42.11**

Дана совместная плотность

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3(a-\sqrt{x^2+y^2})}{\pi a^3}, & \text{если } x^2+y^2\le a^2\\ 0, & \text{если } x^2+y^2>a^2\end{cases}$$

двумерной с. в. (X, Y). Изобразить поверхность распределения $z=\varphi(x,y)$ и кривые распределения одномерных составляющих; найти аналитические выражения плотностей одномерных составляющих; определить вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область D.

К42.1. Дано: $a=2$ и D — квадрат со стороной 1 и с центром в точке (0, 0), причем стороны квадрата параллельны осям координат.

К42.2. Дано: $a = 2$ и D — квадрат, точки которого удовлетворяют неравенству $|x| + |y| < 1$.

К42.3. Дано: $a = 3$ и D — круг радиуса 2 и с центром в точке (0, 0).

К42.4. Дано: $a = 6$ и D — круг радиуса 1 и с центром в точке (1, 1).

К42.5. Дано: $a = 2$ и D — круг радиуса 1 и с центром в точке (1,0).

К42.6. Дано: $a = 1$ и D —треугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

К42.7. Дано: $a = 2$ и D — треугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x+y=1$, $x - y = 1$.

К42.8. Дано: $a = 2$ и D — треугольник, ограниченный прямыми $y = 0$, $y + x=1$, $y - x = 1$.

К42.9. Дано: $a = 3$ и D — прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 2$.

К42.10. Дано: $a = 4$ и D —прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$.

К42.11. Дана совместная плотность

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x+y), & \text{если } 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

двумерной с. в. (X, Y). Изобразить поверхность распределения $z = \varphi(x, y)$ и кривые распределения одномерных составляющих; найти аналитические выражения плотностей одномерных составляющих; определить вероятность попадания случайной точки (X, Y) в круг радиуса 1 и с центром в точке (0, 0).

Ответы, указания, решения

Т42.1. Первые три свойства доказываются непосредственно по определению. Докажем четвертое свойство:

$F(x, +\infty) = P((X < x) \cdot (Y < +\infty)) = P(X < x) = F_1(x)$, поскольку "$Y < +\infty$" — достоверное событие.

Докажем пятое свойство:

$F(x_2, y_2) = P((X < x_1) \cdot (Y < y_2)) + P((x_1 < X < x_2) \cdot (y_2))$,
$F(x_1, y_2) = P((X < x_1) \cdot (Y < y_2))$.

Следовательно,

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) = P((x_1 \le X < x_2) \cdot (Y < y_2)) \qquad (*)$$

Аналогично,

$$F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1) = P((x_1 \le X < x_2) \cdot (Y < y_1)) \qquad (**)$$

Почленно вычтем из равенства (*) равенство (**):

$F(x_2, y_2) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) = P((x_1 \le X < x_2) \cdot (Y < y_2)) -$
$P((x_1 \le X < x_2) \cdot (Y < y_1))$.

Поскольку
$P((x_1 \le X < x_2) \cdot (Y < y_2)) = P((x_1 \le X < x_2) \cdot (Y < y_1)) + P((x_1 \le X < x_2) \cdot (y_1 \le Y < y_2))$, то имеем (42.1).

Т42.2. Указание: воспользоваться пятым свойством функции распределения $F(x, y)$ и ее непрерывностью.

Т42.3.

1. Поскольку функция $F(x, y)$ — неубывающая функция по каждому из своих аргументов (свойство 2 функции распределения двумерной с. в.), то предельная плотность $\varphi\ (x,y)$ неотрицательна.

2. Величина $\varphi\ (x, y)dxdy$ с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, есть вероятность попадания с. в. (X, Y) в элементарный прямоугольник со сторонами dx, dy, прилегающий к точке (x, y). Количественно эта вероятность равна объему элементарного параллелепипеда, ограниченного сверху поверхностью $\varphi\ (x, y)$ и опирающегося на данный элементарный прямоугольник (рис. 42.3). Отсюда вероятность попадания с.в. (X, Y) в область D равна объему цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $\varphi\ (x, y)$ и опирающегося на область D, что и доказывает свойство 2.

3–4. Свойства 3 и 4 непосредственно следуют из свойства 2.

5. Согласно свойству 4 функции распределения F(x, y), $F_1(x) = F(x, +\infty) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)dxdy$. Отсюда по свойству интеграла с переменным верхним пределом $F_1'(x) = \varphi_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)dy$.

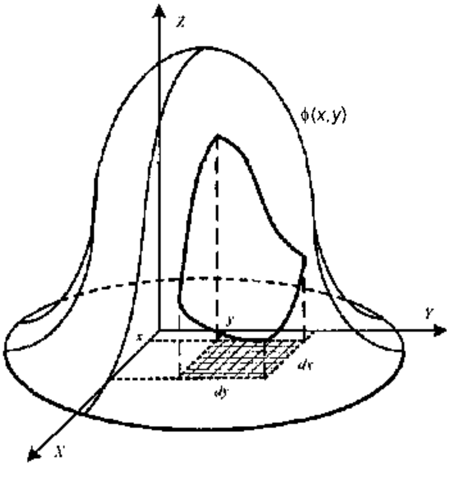


Рис. 42.3. Элементарный параллелепипед

П42.1. Свойство 4 совместной плотности $\varphi(x, y)$ означает, что объем тела, ограниченного поверхностью $\varphi(x, y)$ и плоскостью $0xy$, равен 1. В нашем случае $\varphi(x, y) = C$ (C — некоторая константа) при $x^2 + y^2 \le 1$ и $\varphi(x, y) = 0$ при $x^2 + y^2 > 1$. Поэтому соответствующий объем тела будет равен объему цилиндра высоты C, в основании которого круг радиуса 1. Отсюда $1 = \pi C$, $C = 1/\pi$, $\varphi(x, y) = \begin{cases} 1/\pi, \text{ при } & x^2 + y^2 \le 1 \\ 0, \text{ при } & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$.

Пусть $x \in [-1; 1]$. Тогда $\varphi_1(x) = \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$. При $x \notin [-1; 1]$ $\varphi_1(x) = 0$,

$P(x^2 + y^2 \le 1/9) = \int\limits_{-1/3}^{1/3} \int\limits_{-\sqrt{1/9-x^2}}^{\sqrt{1/9-x^2}} \frac{1}{\pi} dx dy = \frac{1}{9}$. Последнее равенство становится очевидным, если заметить, что площадь круга, заданного неравенством $x^2 + y^2 \le 1/9$, составляет 1/9 от площади всего круга, в котором равномерно распределена с. в. (X, Y).

К42.1-К42.10. Плотность одномерной составляющей X при $a = 2$ есть

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{16} \dfrac{-4(4-x^2)^{\frac{1}{2}} + x^2 \ln(2 + (4-x^2)^{\frac{1}{2}}) - x^2 \ln(2 - (4-x^2)^{\frac{1}{2}})}{\pi}, & \text{при } |x| \le 2 \\ 0, \text{ при } |x| > 2 \end{cases}$$

К42.11. Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad следующий.

Задать функцию $f(x, y) := \frac{1}{2} \cdot sin(x + y)$ и с ее помощью найти аналитические выражения плотностей одномерных составляющих:

$$\varphi 1(x) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dy \to \frac{1}{2} \cdot \sin(x) + \frac{1}{2} \cos(x)$$

$$\varphi 2(y) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx \to \frac{1}{2} \cdot \sin(y) + \frac{1}{2} \cdot \cos(y)$$

при условии, что $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $y \in [0; \frac{\pi}{2}]$; в противном случае плотности равны нулю.

Задать совместную плотность $\varphi(x, y)$:

$$\varphi(x, y) := if(0 \le x \le \frac{\pi}{2} \wedge 0 \le y \le \frac{\pi}{2}, f(x, y), 0)$$

и построить поверхность $z = \varphi(x, y)$. Для этого ввести шаблон трехмерного графика и на месте метки ввести идентификатор функции φ. Для получения необходимого изображения произвести настройку параметров рисунка так, как это было сделано при построении поверхности $z = \varphi(x, y)$ в задаче К35.11 (за исключением вкладки **QuickPlot** Data диалогового окна 3D Plot **Format**, параметры которой устанавливаются по умолчанию). Поверхность показана на рис. 42.4.

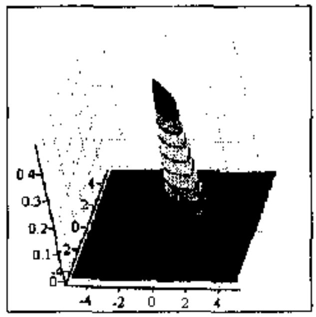


Рис. 42.4. Поверхность распределения φ *(x, y)*

Задать плотности одномерных составляющих:

$$\varphi 1(x) := /ДО \le x \le \frac{\pi}{2}, \varphi 1(x), 0), \quad \varphi 2(y) := //(0 \le y \le \frac{\pi}{2}, \varphi 2(y), 0)$$

и построить графики соответствующих кривых распределения. Для этого ввести шаблон декартового графика клавишей <@> и на месте соответствующих меток (см. компьютерный раздел *гл. 40)* ввести x, y и φ 1 (x), φ 2 (y). Графики показаны на рис. 42.5.

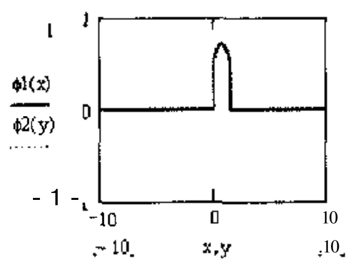


Рис. 42.5. Графики кривых распределения

Задать область *D,* в которую должна попадать случайная точка *(x, Y):*

$$field(x, y) := (x^2 + y^2 \le 1)$$

и определить вероятность попадания случайной точки в эту область:

$$v(x, y) := if(field(x, y), \varphi(x, y), 0)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(x, y)\,dy\,dx = 0.281$$

Глава 43

Условные распределения и их числовые характеристики

Условным законом распределения одной из одномерных составляющих двумерной с. в. (X, Y) называется ее закон распределения, вычисленный при условии, что другая составляющая приняла определенное значение.

Условные распределения дискретных составляющих (X, Y) находятся, согласно теореме умножения вероятностей, по следующим формулам:

$$P(X=x_i|Y=y_k)=\frac{p_{ik}}{q_k}=\frac{p_{ik}}{\sum\limits_i p_{ik}},\quad P(Y=y_k\,|\,X=x_i)=\frac{p_{ik}}{p_i}=\frac{p_{ik}}{\sum\limits_k p_{ik}} \qquad (43.1)$$

В случае непрерывных с. в. (X, Y) необходимо определить плотности условных распределений одномерных составляющих X и Y, обозначаемых соответственно $\varphi(x|y)$ и $\psi(y|x)$ и называемых условными плотностями.

Теорема 43.1.

$$\varphi(x, y)=\varphi(x|y)\,\varphi_2(y)=\psi(y|x)\,\varphi_1(x).$$

При $\varphi_1(x)\neq 0,\ \ \varphi_2(y)\neq 0$

$$\varphi(x\,|\,y)=\frac{\varphi(x,y)}{\varphi_2(y)}=\frac{\varphi(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)dx},\quad \psi(y\,|\,x)=\frac{\varphi(x,y)}{\varphi_1(x)}=\frac{\varphi(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)dy} \qquad (43.2)$$

Доказательство теоремы дано в задаче Т43.1.

Соответствие формул (43.1) и (43.2) становится очевидным, если соотнести знаки суммирования и интегрирования, вероятности и плотности.

Пример

Пусть двумерная с. в. (X, Y) характеризует длину и массу осколка снаряда. Длина осколка X безотносительно к его массе есть с. в. с плотностью $\varphi_1(x)$:

этот закон распределения можно исследовать, рассматривая все без исключения осколки и оценивая их только по длине. Однако, чтобы определить закон распределения длины осколка вполне определенной массы, скажем 20 г, необходимо исследовать не все осколки, а только определенную группу, в которой масса приблизительно равна 20 г. При этом получим условный закон распределения длины осколка при массе 20 г с условной плотностью $\varphi(x|20)$. Этот условный закон распределения отличается от безусловного $\varphi_1(x)$, поскольку более тяжелые осколки должны обладать и большей длиной.

Условные математическое ожидание и дисперсия с. в. Y (с. в. X) при определенном значении x с. в. X (при данном значении y с. в. Y) обозначаются через $M(Y|x)$ и $D(Y|x)$ ($M(X|y)$ и $D(X|y)$) соответственно. Они определяются по обычным формулам математического ожидания и дисперсии безусловных случайных величин, в которых вероятности и плотности заменяются условными вероятностями или плотностями. Так, для дискретных случайных величин

$$M(Y|x_i)=\sum_k y_k \frac{p_{ik}}{p_i}, \qquad D(Y|x_i)=\sum_k (y_k - M(Y|x_i))^2 \frac{p_{ik}}{p_i},$$

$$M(X|y_k)=\sum_i x_i \frac{p_{ik}}{q_k}, \qquad D(X|y_k)=\sum_i (x_i - M(X|y_k))^2 \frac{p_{ik}}{q_k},$$

и для непрерывных случайных величин

$$M(Y|x)=\int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y|x)dy, \qquad D(Y|x)=\int_{-\infty}^{\infty}(y-M(Y|x))^2\varphi(y|x)dy$$

$$M(X|y)=\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x|y)dx, \qquad D(X|y)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X|y))^2\varphi(x|y)dx$$

Эти определения можно интерпретировать двояко. Так, в более общем случае $M(Y|x)$ можно рассматривать как неслучайную функцию параметра x, абстрагируясь от того факта, что x является значением с. в. X. Если же $M(Y|x)$ рассматривать как функцию с. в. X, принимающей возможные значения x, то $M(Y|x)$ есть случайная величина. Сказанное подытожим следующим определением.

Определение

Условное математическое ожидание $M(Y|x)$, рассматриваемое как неслучайная функция параметра x, от которого зависит распределение с. в. Y, называется регрессией Y по x. Условное математическое ожидание $M(Y|x)$, рассматриваемое как функция случайной величины X, называется условным математическим ожиданием Y по X и будет обозначаться через $M(Y|X)$. Аналогично определяются регрессия X по y и условное математическое ожидание X по Y. Графики функций $y = M(Y|x)$ и $x = M(X|y)$ называются линиями регрессии соответственно Y по x и X по y.

Определение

С. в. X и Y называются независимыми, если функция распределения двумерной с. в. (X, Y) равна произведению функций распределения ее одномерных составляющих: $F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$ для любых x, y. В противном случае X и Y называются зависимыми.

Теорема 43.2

1. если $p_{ik} = p_i q_k j = 1, ..., m, \kappa = 1,.., n$.
2. Если (X, Y)— непрерывная двумерная с. в., то X и К независимы, если и Если $(X, У)$ — дискретная двумерная с. в., то X и $У$ независимы, если и только только если $\varphi(x,y) = ф_{,}(x)\ \varphi_2(y)$ при любых x, y.
3. Если (X, Y) — непрерывная двумерная с. в., то X и Y независимы, если и только если $\varphi(x|y) = ф_1(x)$ или $\varphi(y\backslash x) = \varphi_2(y)$ при любых x,y.

Доказательство теоремы дано в задаче Т43.2.

Проиллюстрируем понятие зависимости и независимости с. в. X и Y на примере линейной регрессии Y по x.

На рис. 43.1 -43.3 изображены линии регрессии $y = M(Y|x)$ и условные плотности $\varphi(y|x_1)$, $\varphi(y|x_2)$, $\varphi(y|x_3)$. На рис. 43.1 с изменением x меняется как условное математическое ожидание $M(Y|x)$, так и условная плотность $ф(y|x)$. На рис. 43.2 с изменением x меняется только условная плотность, а условное математическое ожидание остается неизменным. На рис. 43.3 с изменением x условная плотность $\varphi(y|x)$ остается неизменной и потому можно предположить, что $\varphi(y|x) = \varphi_2(y)$, и следовательно, X и Y независимы.

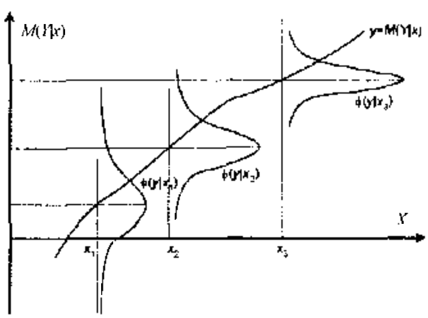


Рис. 43.1. Пример регрессии: меняются $M(Y|x)$ и $ф(y|x)$

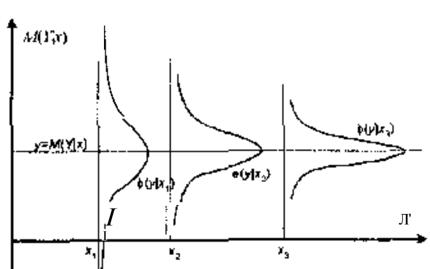


Рис. 43.2. Пример регрессии: меняется $ф(y\backslash x)$, но $M(Y|x)$ неизменно

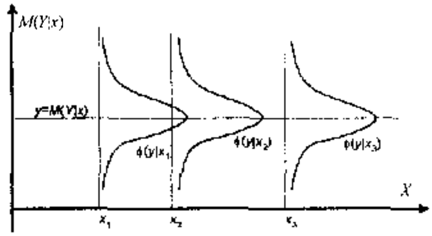


Рис.43.3. Пример регрессии: $M(Y|x)$ и $\varphi(y|x)$ неизменны

Определение

Ковариацией K_{xy} с. в. X и У называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин от своих математических ожиданий:

$$K_{xy}=M[(X-M(X))(Y-M(Y)].$$

Из определения следует, что для дискретной с. в. (X,Y)

$$K_{xy}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(x_i-M(X))(y_k-M(Y))p_{ik},$$

а для непрерывной с. в. $(X, У)$

$$K_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))(y-M(Y))\varphi(x,y)dxdy.$$

Ковариация характеризует как рассеяние, так и зависимость с. в. (X, Y). Если, например, одна из одномерных составляющих незначительно отклоняется от своего среднего значения, то ковариация будет мала, как бы тесно пи были связаны X и У. Чтобы избежать влияния рассеяния случайных величин на ковариацию и получить показатель характеристики зависимости между X и Y, переходят от K_{xy} к безразмерной величине $\rho_{xy}=\dfrac{K_{xy}}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$, которая называется коэффициентом корреляции с. в. X \\ Y.

Теорема 43.3 (свойства ковариации и коэффициента корреляции).

- Если X и Y независимы, то $K_{xy}=\rho_{xy}=0$.
- $K_{xy}=M(XY)-M(X)M(Y)=\dfrac{D(X+Y)-D(X)-D(Y)}{2}$.
- $K_{xy}^2\le D(X)D(Y)$, $\quad |\rho_{xy}|\le 1$.
- Если $|\rho_{xy}|=1$, то между с. в. X и Y существует функциональная зависимость.

Доказательство теоремы дано в задаче Т43.3.

Определение

С. в. X и Y называются некоррелированными, если $\rho_{xy} = 0$.

Таким образом, из независимости случайных величин следует их некоррелированность (теорема 43.3). Обратное в общем случае неверно (см. задачу П43.2).

Компьютерный раздел

Имена переменных и функций называются идентификаторами. Идентификаторы в Mathcad могут иметь практически любую длину. Они состоят из символов, каждый из которых может быть буквой (в том числе и греческой), а также цифрой. При этом первым символом должна быть буква. Допускаются и некоторые специальные символы, например, знак подчеркивания "_". Строчные и прописные буквы различаются. Идентификаторы должны быть уникальными, т. е. они не должны совпадать с именами встроенных функций и функций, определенных пользователем. В Mathcad идентификатор может содержать подстрочные символы, т. е. в нем некоторые последние символы, являющиеся составной частью этого идентификатора, могут быть набраны в виде "нижних индексов". Перед вводом подстрочных символов необходимо нажать клавишу <.>. Визуально идентификаторы с подстрочными символами почти не отличаются от индексированных элементов матриц и векторов. Важно помнить, что перед вводом индексов элементов матриц нажимается клавиша <[>.

В Mathcad можно производить трассировку графика в прямоугольных координатах, т. е. определять координаты точек такого графика. Пусть, например, построен график функции φ 1(x), которая определена в рабочем листе Mathcad-документа следующим образом:

$$\phi1(x) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(x+y)\,dy \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\sin(x) + \frac{1}{2}\cdot\cos(x)$$

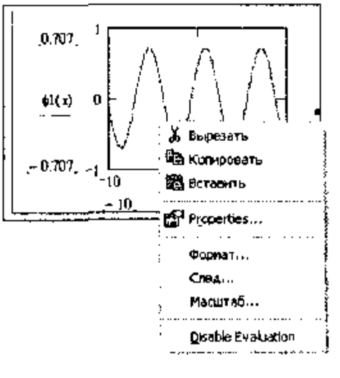


Рис. 43.4. Контекстное меню одномерных графиков

После щелчка правой кнопкой мыши на области графика появится меню, как это показано на рис. 43.4. После выбора команды След (Trace) этого меню появится диалоговое окно **X-Y Trace,** показанное на рис. 43.5. Подведите курсор мыши к линии графика и щелкните левой кнопкой мыши. Появится перекрестие из двух перпендикулярных пунктирных линий, которое можно перемешать вдоль графика, не отпуская левой кнопки мыши. Координаты соответствующих точек при этом будут появляться в полях *X-Value*, *Y-Value* окна **X-Y Trace.** Предварительно отметьте опцию **Отслеж. точек данных** (Trace Data Points) этого окна, с тем чтобы перекрестие удерживалось на линии графика.

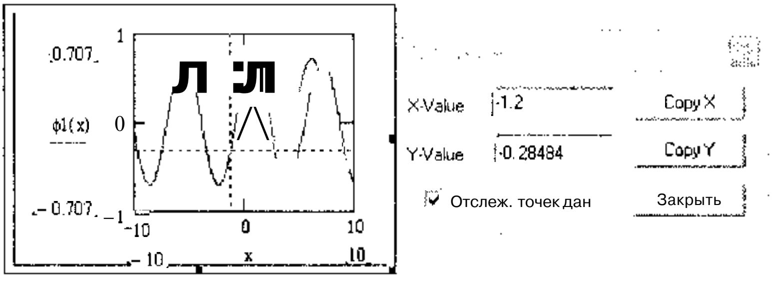


Рис. 43.5. Трассировка графика

Задачи для самостоятельного решения

Т43.1. Доказать теорему **43.1.**

Т43.2. Доказать теорему 43.2.

Т43.3. Доказать теорему 43.3.

П43.1. Двумерная с. в. (X, Y) распределена равномерно в круге радиуса 1 с центром в начале координат. Найти условные плотности, регрессии Y по x и X по y, условную дисперсию $D(Y\backslash x)$, коэффициент корреляции.

П43.2. Являются ли с. в. X и Y из задачи П43.1 зависимыми и некоррелированными?

Общая формулировка задач К43.*i*, где *i* = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

К43.*i*. Для двумерной с. в. (X, Y) из задачи К42.*i* найти условные плотности и коэффициент корреляции; построить линии регрессии и графики дисперсий $D(Y|x)$ и $D(X\backslash y)$.

Ответы, указания, решения

Т43.1. Обозначим через R элементарный прямоугольник со сторонами dx, dy, прилегающий к точке (x, y). Тогда, с одной стороны, $P((X, Y) \in R) \varphi(x, y)dxdy$ (см. задачу Т42.3). Но, с другой стороны,

$$P((X,Y) \in R) = P((x \le X < x + dx) \cdot (y \le Y < y + dy)) = P(x \le X < x + dx) =$$

$$= P(y \le Y < y + dy \backslash x \le X < x + dx) = \varphi_1(x)dx \cdot \varphi(y|x)dy. \quad \text{Отсюда } \varphi(y|x) = \frac{\varphi(x, y)}{\varphi_1}.$$

Т43.2.

1. Пусть $x_1 < \ldots < x_m$, $y_1 < \ldots < y_n$, $x_i < x < x_{i+1}$, $y_k < y < y_{k+1}$. Тогда по определению функции распределения

$$F(x,y) = \sum_{r=1}^{i} \sum_{s=1}^{k} p_{rs}, \quad F_1(x) = \sum_{r=1}^{i} p_r, \quad F_2(y) = \sum_{s=1}^{k} q_s.$$

откуда

$$F_1(x)F_2(y) = \sum_{r=1}^{i} \sum_{s=1}^{k} p_r q_s.$$

Остальное теперь следует из сопоставления полученных выражений для F(x, y) и F1(x)F2(y) при произвольных i, k.

2. Пусть с. в. X и Y независимы, т.е. $F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$. Тогда $F''_{xy}(x, y) = F'_1(x)F'_2(y)$. Но по определению $F''_{xy}(x, y) = \varphi(x, y)$, $F'_1(x) = \varphi_1(x)$, $F'_2(y) = \varphi_2(y)$, откуда $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$.

Обратно: пусть верно равенство $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$. Согласно свойству 3 плотности $\varphi(x, y)$ из главы 42:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \varphi(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \varphi_1(x)\varphi_2(y)dxdy = \int_{-\infty}^{x} \varphi_1(x)dx \int_{-\infty}^{y} \varphi_2(y)dy = F_1(x)F_2(y),$$

т. е. с. в. X и Y независимы.

3. По доказанному в п. 2, X и Y независимы, если и только если $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$. Но по теореме 43.1 $\varphi(x, y) = \varphi(x \backslash y)\varphi_2(y)$. Остальное следует из сопоставления полученных выражений для $\varphi(x, y)$.

Т43.3.

1. Пусть двумерная с. в. (X, Y) дискретна и X и Y независимы. Тогда $p_{ik} = p_i q_k$ (теорема 43.2) и, следовательно,

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (x_i - M(X)) \cdot (y_k - M(Y)) p_i q_k =$$

12 Зак. 4223

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i p_i - p_i M(X))\cdot\sum_{k=1}^{n}(y_k q_k - q_k M(Y)) =$$

$$=(M(X)-\sum_{i=1}^{m} p_i M(X))\cdot(M(Y)-\sum_{k=1}^{n} q_k M(Y))=0,$$

поскольку $\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{k=1}^{n} q_k = 1.$

Пусть двумерная с. в. (X, Y) непрерывна и X и Y независимы. Тогда $\varphi(x,y) = \varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y)$, (теорема 43.2) и, следовательно,

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - M(X))\varphi_1(x)(y - M(Y))\varphi_2(y)dxdy =$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(x - M(X))\varphi_1(x)dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty}(y - M(Y))\varphi_2(y)dy =$$

$$=(\int_{-\infty}^{\infty}x\varphi_1(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty}M(X)\varphi_1(x)dx)(\int_{-\infty}^{\infty}y\varphi_2(y)dy - \int_{-\infty}^{\infty}M(Y)\varphi_2(y)dy) =$$

$$=(M(X) - M(X))(M(Y) - M(Y)) = 0,$$

поскольку $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(y)dy = 1$ (по свойству плотности случайной величины).

2. При доказательстве используются следующие известные свойства математического ожидания случайной величины: $M(C) = C$, $M(CX) = CM(X)$, где C – константа, $M(Z + U) = M(Z) + M(U)$. Итак,

$$K_{xy} = M(XY - Y\cdot M(X) - X\cdot M(Y) + M(X)M(Y)) =$$

$$=M(XY) - M(X)M(Y) - M(X)M(Y) + M(X)M(Y) = M(XY) - M(X)M(Y);$$

$$D(X+Y) = M(X + Y - M(X+Y))^2 = M((X - M(X)) + (Y - M(Y)))^2$$

$$= M(X - M(X))^2 + M(Y - M(Y))^2 + 2M[(X - M(X))\cdot(Y - M(Y))] =$$

$$= D(X) + D(Y) + 2K_{xy}.$$

Утверждение доказано.

3. Обозначим $Z=\frac{X - M(X)}{\sqrt{D(X)}}$, $U=\frac{Y - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}}$. Тогда:

$$\left|\frac{K_{xy}}{\sqrt{D(X)D(Y)}}\right| \le 1 \quad \text{или } |2M(ZU)| \le 2.$$

Но $M(Z^2) = M(\frac{X - M(X)}{\sqrt{D(X)}})^2 = \frac{1}{D(X)}M(X - M(X))^2 = \frac{D(X)}{D(X)} = 1$

Аналогично, $M(U^2) = 1$, откуда $2 = M(Z^2) + M(U^2)$. Следовательно, $|2M(ZU)| \le M(Z^2) + M(U^2)$, $0 \le M(Z^2) + M(U^2) \pm 2M(ZU)$, $0 \le M(Z^2 + U^2 \pm 2ZU)$, $0 \le M(Z \pm U)^2$.

Последнее неравенство очевидно. Утверждение доказано.

4. Из предыдущего доказательства следует, что равенство $\left|\dfrac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}\right| = 1$ равносильно равенству $0 = M(Z \pm U)^2$. Последнее возможно, если и только если $Z = \pm U$ или $\dfrac{Y - M(Y)}{\sigma_y} \equiv \pm \dfrac{X - M(X)}{\sigma_x}$ и $Y = \pm \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - M(X)) + M(Y)$, причем перед первым слагаемым берется знак плюс (минус) при $\rho_{xy} = 1$ ($\rho_{xy} = -1$). Утверждение доказано.

П43.1. Плотность двумерной с. в. (X, Y) и плотности ее одномерных составляющих были найдены в задаче П42.1. Из условия также ясно, что при $x^2 > 1$ $\varphi(y|x) = 0$. Пусть $x^2 \le 1$. Тогда в силу теоремы 43.1

$$\varphi(y|x) = \frac{\varphi(x,y)}{\varphi_1(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} & \text{при } x^2 + y^2 \le 1, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

$$\varphi(x|y) = \frac{\varphi(x,y)}{\varphi_2(y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}} & \text{при } x^2 + y^2 \le 1, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Далее. $M(Y|x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y \mid x) y\,dy = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy$. Последний интеграл равен нулю, поскольку подынтегральная функция нечетна, а пределы интегрирования симметричны.

Пусть $|x| \le 1$. Тогда $D(Y \mid x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y \mid x)(y - M(Y \mid x))^2\,dy =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y^2\,dy = \frac{1-x^2}{3}.$$

При $|x| > 1$ $D(Y|x) = 0$, поскольку $\varphi(y|x) = 0$ при $|x| > 1$. Так как $M(X) = M(Y) = 0$ (из симметрии распределения в круге следует, что центр его массы лежит в начале координат), то

$$K_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xy\varphi(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{1} x\,dx \cdot \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{\pi}\,dy = 0.$$

Отсюда $\rho_{xy} = 0$.

П43.2. Ответы: с. в. X и /зависимы и некоррелированы.

К43.11. Алгоритм решения задачи с помощью Mathcad.

Определить условные плотности:

$$\varphi_y(x,y) := \frac{\varphi(x,y)}{\varphi 2(y)} \qquad \frac{\varphi(x,y)}{\varphi 1(x)}$$

где функции $\varphi(x,y)$, $\varphi 2(y)$, $\varphi 1(x)$ были определены в задаче К42.11. Найти математические ожидания и дисперсии одномерных составляющих X и Y:

$$Mx := \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi 1(x)dx \quad My := \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi 2(y)dy$$

$$Dx := \int_{-\infty}^{\infty} (x - Mx)^2 \varphi 1(x)dx \qquad Dy := \int_{-\infty}^{\infty} (y - My)^2 \varphi 2(y)dy$$

$Mx = 0.785$ $\quad My = 0.785$ $\quad Dx = 0.188$ $\quad Dy = 0.188$

Определить ковариацию k и коэффициент корреляции p:

$$k := \int\int (x - Mx)\cdot(y - My)\cdot\varphi(x,y)dxdy \quad \rho := \frac{k}{} \quad k = -0.046 \quad \rho = -0.245$$

Определить условные математические ожидания и дисперсии:

$$My_x(x) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cdot\varphi_x(x,y)dy \quad Mx_y(y) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\varphi_y(x,y)dx$$

$$Dy_x(x) := \int^{\frac{\pi}{2}} (y - My_x(x))^2\cdot\varphi_x(x,y)dy \quad Dx_y(y) := \int^{\frac{\pi}{2}} (x - Mx_y(y))^2\cdot\varphi_y(x,y)dx$$

Построить их графики, задав диапазон изменения аргументов от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Глава 44

Двумерный нормальный закон распределения

Напомним, что одномерная с. в. Z называется распределенной по нормальному закону с параметрами a, σ, если ее плотность равна $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}$. В этом случае параметры a и σ являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением с. в. Z.

Определение

Двумерная с. в. (X, Y) называется распределенной по (двумерному) нормальному закону с параметрами a_x, σ_x, a_y, σ_y, ρ, если ее совместная плотность равна

$$\frac{1}{\sigma_x\sigma_y 2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}A(x,y)},$$

где $A(x, y) = \left(\frac{x-a_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-a_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-a_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-a_y}{\sigma_y}\right)^2$.

Теорема 44.1. Одномерные составляющие двумерной с. в., распределенной по двумерному нормальному закону с параметрами a_x, σ_x, a_y, σ_y, ρ, имеют нормальные законы распределения соответственно с параметрами a_x, σ_x и a_y, σ_y, а их коэффициент корреляции равен ρ.

Доказательство см. в задаче Т44.1.

Теорема 44.2. Если двумерная с. в. (X, Y) распределена по нормальному закону, то независимость ее одномерных составляющих равносильна их некоррелированности.

Доказательство дано в задаче Т44.2.

Считается, что двумерная с. в. (X, Y) обладает свойством равноизменчивости (гомоскедастичностью), если дисперсии каждой из одномерных составляющих X и Y постоянны при всех значениях другой.

Теорема 44.3. Если двумерная с. в. (X, Y) распределена по нормальному закону с параметрами a_x, σ_x, a_y, σ_y, ρ, то она обладает свойством равноизменчивости, а линии регрессии Y по x и X по y являются прямыми, причем

$$M(Y|x) = a_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - a_x),\ D(Y|x) = \sigma_y^2(1-\rho^2),$$

$$M(X|y) = a_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - a_y),\ D(X|y) = \sigma_x^2(1-\rho^2).$$

Доказательство теоремы дано в задаче Т44.3.

Проиллюстрируем свойство равноизменчивости. По теореме 43.1 условная плотность при $Y = y_1$ равна

$$\varphi(x|y_1) = \frac{\varphi(x, y_1)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, y_1)dx}.$$

Так как совместная плотность $\varphi(x, y)$ геометрически представляет некоторую поверхность (см. *гл. 42),* то $\varphi(x, y_1)$ — это кривая, полученная при пересечении этой поверхности плоскостью $y = y_1$, параллельной координатной плоскости $0xz$ и отсекающей на оси $0y$ отрезок y_1 (рис. 44.1). Из геометрического смысла интеграла следует теперь, что число $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, y_1)dx$ равно площади S_1 части плоскости $y = y_1$, ограниченной $\varphi(x, y_1)$ и прямой $y = y_1$ (эта часть на рис. 44.1 заштрихована). Таким образом, кривая $\varphi(x|y_1)$ получается "растяжением" кривой $\varphi(x, y_1)$ в $1/S_1$ раз в плоскости $y = y_1$. Если (X, Y) обладает свойством равноизменчивости, то ввиду совпадения условных дисперсий $D(X|y_1)$ и $D(X|y_2)$ кривые $\varphi(x|y_1)$ и $\varphi(x|y_2)$ совпадут при наложении друг на друга параллельным переносом, что видно из рис. 44.1.

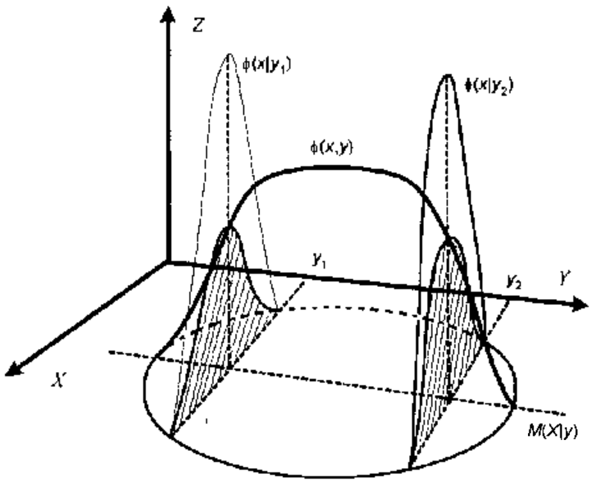


Рис.44.1. Иллюстрация свойства равноизменчивости

Задачи для самостоятельного решения

Т44.1. Доказать теорему 44.1.

Т44.2. Доказать теорему 44.2.

Т44.3. Доказать теорему 44.3.

Ответы, указания, решения

Т44.1. Указания. При вычислении интеграла $\varphi_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, y)dy$ надо сделать замену переменных $u=\frac{x-a_x}{\sigma_x}$, $v=\frac{y-a_y}{\sigma_y}$ и воспользоваться формулой интегрального исчисления:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2\pm 2bz+c}dz=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2+ac}{a}}.$$

Для вывода этой формулы достаточно дополнить показатель до полного квадрата и воспользоваться тем, что $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ есть плотность нормального закона с параметрами 0, 1 и потому $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=1$.

При вычислении интеграла:

$$K_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a_x)(y-a_y)\varphi(x, y)dxdy$$

необходимо ввести новые переменные u, v (см. выше), а также переменную $w=\frac{v-\rho u}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}$, и воспользоваться правилами интегрирования нечетных и четных функций с симметричными пределами интегрирования.

Т44.2. В силу теоремы 44.1 ρ есть коэффициент корреляции с. в. X и Y. Поэтому в случае их некоррелированности $\rho=0$ и, следовательно, плотность двумерной с. в. (X, Y) можно записать так:

$$\varphi(x, y)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a_x}{\sigma_x}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-a_y}{\sigma_y}\right)^2}=\varphi_1(x)\varphi_2(y).$$

Остальное следует из теоремы 43.2.

Т44.3. Если воспользоваться теоремами 44.1 и 43.1, то можно определить условные плотности одномерных составляющих:

$$\varphi(y\,|\,x) = \frac{}{\varphi_1(x)} = \frac{}{s\sqrt{2\pi}}\, e \qquad ,$$

где $m = a_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - a_x)$, $s = \sigma_y\sqrt{1-\rho^2}$. Отсюда следует, что $\varphi(y|x)$ — плотность некоторой случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрами m, s. Но тогда математическое ожидание и дисперсия такой случайной величины должны совпадать соответственно с m и s^2, что и завершает доказательство теоремы.

Глава 45

Законы распределения некоторых функций нормальных случайных величин

В этой главе даются определения трех основных законов распределения, активно используемых в статистических гипотезах и критериях. Напомним, что стандартным законом называется нормальный закон распределения с параметрами 0 и 1. Приведем также две известные предельные теоремы теории вероятностей.

Теорема 45.1 *(теорема Чебышева).* Пусть независимые случайные величины $X_1, X_2, ... X_n$ имеют конечные математические ожидания, равные соответственно a_1, a_2, ..., a_n, а их дисперсии ограничены одной и той же константой. Тогда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Теорема 45.2 *(теорема Ляпунова).* С ростом n при суммировании n независимых случайных чисел $X_1, X_2, ..., X_n$, математические ожидания и дисперсии которых соответственно равны $a_1, a_2, ..., a_n$ и $\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_n^2$, получается случайная величина, приближенно распределенная по нормальному закону с параметрами $a_1 + a_2 + ... + a_n$ и $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_n^2}$. При этом необходимо выполнение следующего условия: в состав сумм не должны входить слагаемые, влияние которых на рассеяние всей суммы подавляюще велико или пренебрежимо мало по сравнению с влиянием всех остальных слагаемых.

Определение

χ^2-распределением (хиквадрат распределением) с k степенями свободы называется закон распределения случайной величины, равной сумме квадратов k независимых случайных величин, каждая из которых распределена по стандартному закону.

На рис. 45.1 показаны кривые χ^2-**распределения** с различными степенями свободы.

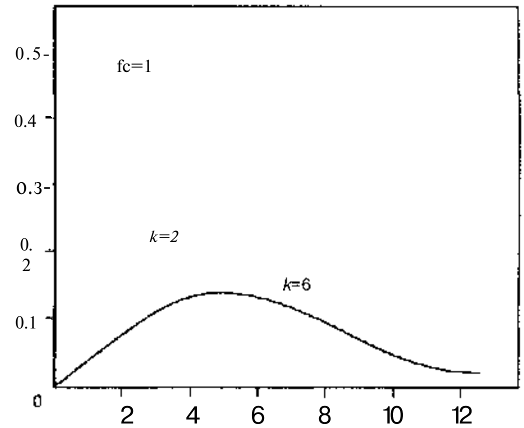


Рис.45.1. Кривые χ^2-распределения

В силу теоремы 45.2 с ростом числа степеней свободы χ^2-распределение приближается к нормальному, хотя и достаточно медленно. Если с.в. Z имеет χ^2-распределение с κ степенями свободы, то $M(Z) = k$, $D(Z) = 2\kappa$.

Определение

t-распределением (или распределением Стьюдента) с k степенями свободы называется закон распределения случайной величины $T = V : \sqrt{\frac{U}{k}}$, где V и U — независимые случайные величины, причем V распределена по стандартному закону, а с.в. U имеет χ^2-распределение с κ степенями свободы.

На рис. 45.2 показаны кривые /-распределения и стандартного закона.

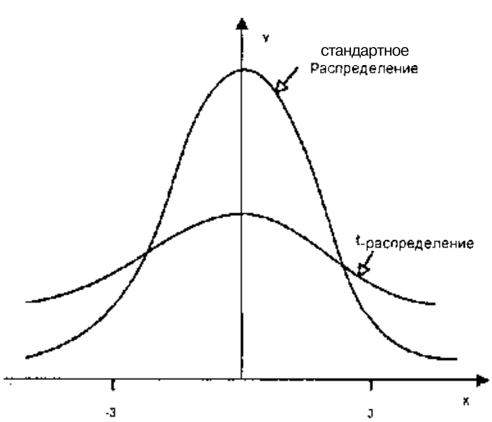


Рис.45.2. Кривые t-распределения и стандартного закона

В силу теоремы 45.1 с ростом числа степеней свободы величина U/k стремится к 1. Поэтому t-распределение с ростом κ приближается к стандартному закону. Эта сходимость достаточно быстрая, и уже при $k > 30$ t-распределение практически может считаться совпадающим со стандартным. Кроме того, если с. в. T имеет t-распределение с κ степенями свободы, то $M(T) = 0$, $D(T) = \frac{\kappa}{\kappa - 2}$.

Определение

F-распределением (или распределением Фишера-Снедекора) со степенями свободы k_1 и k_2 называется закон распределения случайной величины (V/k_1): (U/k_2), где V и U — независимые случайные величины, причем V и U имеют χ^2- распределение соответственно с fa и k_2 степенями свободы.

На рис. 45.3 показаны кривые F-распределения с различными степенями свободы. При $k_1 \to \infty$ и $k_2 \to \infty$ F-распределение приближается к нормальному.

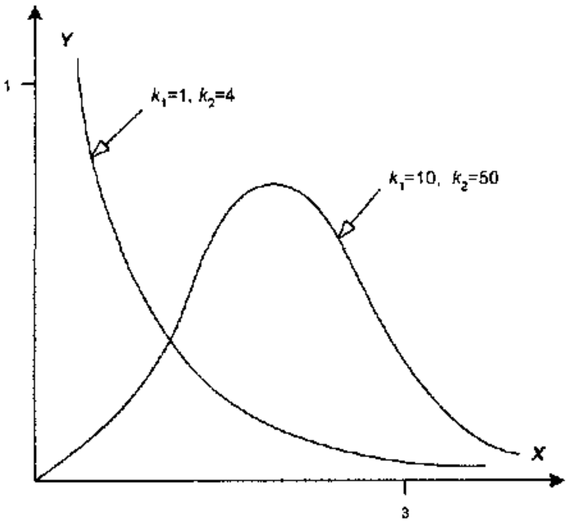


Рис.45.3. Кривые F-распределения

Компьютерный раздел

Встроенная функция `dchisq(x,k)` вычисляет в точке x плотность случайной величины, имеющей χ^2-распределение с κ степенями свободы. Встроенная функция `dt(x, к)` вычисляет в точке x плотность случайной величины, имеющей t-распределение с κ степенями свободы. Встроенная функция `dF(x, k1, k2)` вычисляет в точке x плотность случайной величины, имеющей F-распределение с kl и *к2* степенями свободы. Встроенная функция `dnorm(x, μ, σ)` вычисляет в точке *x* плотность случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрами μ и σ.

Задачи для самостоятельного решения

Т45.1. Доказать, что если с. в. Z имеет χ^2-распределение с *к* степенями свободы, то $M(Z) = к$.

Т45.2. Доказать, что если с. в. Z имеет χ^2-распределение с *к* степенями свободы, то $D(Z) = 2k$.

Общая формулировка задач К45.1 - **К45.10**

Построить на одной координатной плоскости кривые χ^2-распределения с *к]* степенями свободы, /-распределения с *к2* степенями свободы, *F*-распределения *с к]* и *k2* степенями свободы, нормального распределения с параметрами //и *σ*.

К45.1. Дано: А1 = 5, *k2* = 6, μ = 0, а = !.

К45.2. Дано: А1 = 6, *k2* = 5, μ = 0, а = 1.

К45.3. Дано: А1 = 6, *k2* = 6, и = 0, а = 2.

К45.4. Дано: А1 = 5, *k2* = 5, и = 0, ст = 3.

К45.5. Дано: *k*1 = 10. *k2* = 12, μ = 0, ст = 1.

К45.6. Дано: А1 = 12, *k2* = 10, μ = 0, σ = 2.

К45.7. Дано: *к*\ = 12, *k2* = 12, и = 0, ст = 3.

К45.8. Дано: А1 = 10, *к2* = 10, μ = 0, σ = 3.

К45.9. Дано: *k*1 = 20, *k2* = 20, μ = 0, σ = !.

К45.10. Дано: *k*1 = 19, А2 = 19, μ = 0. а = 2.

Ответы, указания, решения

Т45.1. Пусть $Z = U_1^2 + ... + U_k^2$, где U_i распределена по стандартному закону, $i = 1, ..., к$. Поскольку $M(U_i) = 0$, $D(U_i) = 1$, то

$$M(Z) = \sum_{k=1}^{k} M(U_i^2) = \sum_{i=1}^{k} M(U_i - M(U_i))^2 = \sum_{i=1}^{k} D(U_i) = k$$

Т45.2. Воспользуемся обозначениями предыдущей задачи. Поскольку с. в. U_i^2 попарно независимы, то $D(Z) = \sum D(U_i^2)$. По формуле для дисперсии функции непрерывной случайной величины имеем:

$$D(U_i^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - M(U_i^2))^2 \varphi_N(x)dx,$$

где $\varphi_N(x)$ — плотность стандартного распределения. Но $M(U_i^2) = D(U_i) = 1$. Поэтому

$$D(U_i^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 1)^2 \varphi_N(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \varphi_N(x)dx - 2\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi_N(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_N(x)dx$$

Интегралы $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 \varphi_N(x)dx$ и $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi_N(x)dx$ являются центральными моментами четвертого и второго порядка случайной величины, распределенной по стандартному закону, которые, как известно, равны 3 и 1 соответственно. Поэтому *D(U?) = 3-2 + \ = 2* и, следовательно, $D(Z) = 2k$.

К45.1-К45.10. Указание: при решении этих задач следует воспользоваться диалоговым окном **Formatting Currently Selected X-Y Plot,** описанным в *гл. 40*.

Глава 46

Точечные и интервальные оценки параметров генеральной совокупности

Теория вероятностей на основе теоретической вероятностной модели позволяет определить числовые характеристики и законы распределения случайной величины Л'. Математическая статистика в некотором смысле приближенно решает ту же задачу, но на другой основе: на базе сведений о том, какие значения в результате конечного числа наблюдений приняла случайная величинах

Рассмотрим некоторые понятия выборочного метола статистической обработки полученных в результате наблюдений данных. Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Например, если имеется партия деталей, то качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным — ее размер. Производить сплошное обследование всех объектов совокупности зачастую не представляется возможным по ряду причин. В таких ситуациях случайно отбирают из всей совокупности (называемой генеральной) ограниченный набор объектов (называемый выборкой) и подвергают его изучению. Используются два основных вида выборок: повторная и бесповторная. В случае повторной выборки каждый объект, случайно отбираемый и обследованный, возвращается в генеральную совокупность и может быть повторно отобран. В случае бесповторной выборки отобранный объект не возвращается в генеральную совокупность. Чтобы по выборке можно было судить о всей генеральной совокупности, выборка должна формироваться случайно, что достигается соблюдением равной возможности для всех объектов генеральной совокупности быть отобранными в выборку. Если объем генеральной совокупности велик, а выборка составляет лишь незначительную часть этой совокупности, то различия между повторной и бесповторной выборками стирается.

Перейдем теперь к терминологии теории вероятностей. Назовем генеральной совокупностью множество всех возможных значений исследуемой случайной величины Х Выбор значений $X\backslash, \ldots, x_n$ с. в. Л', полученный в результате *п* наблюдений над *X*, назовем выборкой объема п. Выборку $x_1, \ldots, x_n$ можно рассматривать как набор частных значений (реализаций) случайных величин Л',. ..., X_n, каждая из которых имеет тот же закон распределения, что и сама исследуемая с. в. Л'. Такой набор случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, состоящий из *п* "экземпляров" с. в. Л', будет называться случайной выборкой генеральной совокупности (в отличие от выборки $x_1 \ldots x_n$ ее конкретных индивидуальных значений). Числовые характеристики с. в. X принято называть генеральными. Например, $M(X)$ — генеральная средняя, $D(X)$ — генеральная дисперсия и т. п.

Определение

Пусть 9 — некоторый параметр закона распределения генеральной совокупности X. Точечной оценкой θ_n параметра θ называется произвольная функция $\theta_n(X_1, \ldots, X_n)$ случайной выборки $X_1, \ldots, X_n$ генеральной совокупности X. Величина $\theta_n(x_1, \ldots, x_n)$ называется выборочной оценкой параметра θ или выборочным параметром.

Определение

Оценка 0_n параметра θ называется несмещенной, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру: $M(\theta_n) = \theta$. Оценка θ_n называется состоятельной, если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру: для любого $\varepsilon > 0$ $\lim P(|\theta_n - \theta| < \varepsilon) = 1$. Несмещенная оценка θ_n называется эффективной, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра θ, вычисленных по случайным выборкам одного и того же объема.

Если оценка не является несмещенной, то она будет в среднем либо завышать значение *O*, либо занижать его. В обоих случаях это приводит к систематическим ошибкам одного знака в оценке параметра Э. Состоятельность оценки оправдывает увеличение объема случайной выборки, так как при этом все менее вероятной становится возможность значительной ошибки в оценке параметра 9. И наконец, поскольку для несмещенной оценки θ_n дисперсия равна $M(\theta_n - \theta)^2$, то эффективность оценки гарантирует минимальное рассеяние с. в. θ_n относительно параметра 0.

Теперь рассмотрим несколько конкретных практических примеров оценки параметров генеральной совокупности.

Теорема 46.1. Для повторной выборки оценка $\overline{X} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ является несмещенной и состоятельной оценкой (с дисперсией $D(X)/n$) математического ожидания $a = M(X)$ генеральной совокупности X.
Доказательство теоремы дано в задаче Т46.1.

Рассмотрим частный случай с. в. X, которая принимает только два значения — 1 или О с вероятностью p и $(1 - p)$ соответственно. Такая случайная величина называется индикаторной, поскольку с ней можно связать некоторое событие A, которое происходит, если и только если $X = 1$. В этом случае $\overline{X} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ есть частота события A и поэтому будет обозначаться через W. Число p называется генеральной долей с. в. X. Непосредственно проверяется, что $M(X) = p$, $D(X) = p(1 - p)$.

Следствие **46.1.** Пусть генеральная совокупность X является индикаторной случайной величиной. Тогда для повторной выборки оценка W является несмещенной и состоятельной оценкой (с дисперсиеи $\frac{\qquad}{n}$) генеральной доли p.

Теорема 46.2. Для повторной выборки оценка $\bar{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ является несмещенной и состоятельной оценкой дисперсии $\sigma^2 = D(X)$ генеральной совокупности X, а оценка $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}$ только состоятельной оценкой дисперсии $a^2 = D(X)$.

Теоремы 46.1 и 46.2 показывают, как по повторной выборке $x_1, \ldots, x_n$ оценить приближенно математическое ожидание и дисперсию генеральной совокупности. В связи с этим возникают следующие выборочные величины.

Определение

Выборочными средней $\bar{x}$, дисперсией s^2, исправленной дисперсией $\bar{s}^2$ называются величины

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \qquad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}, \qquad \bar{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{ns^2}{n-1}$$

Если генеральная совокупность является индикаторной с. в., то $\bar{x}$ называется выборочной долей и обозначается через w. Если генеральная совокупность совпадает с двумерной с. в. (X, Y), то случайной выборкой объема n будут пары (X_1, Y_1), ... (X_n, Y_n), где X_i и $У$, имеют то же распределение, что и X и Y соответственно, У = 1, ... n. Если теперь $\bar{x}, \bar{y}$, s_x^2, s_y^2 — выборочные средние и дисперсии с. в. X и V, то выборочным коэффициентом корреляции называется величина $r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{ns_x s_y}$.

В ряде задач требуется знать, к каким ошибкам может привести замена параметра 0 его точечной оценкой θ_n и с какой степенью надежности можно ожидать, что эти ошибки не выйдут за известные пределы. Такого рода задачи актуальны при малом числе наблюдений, когда приближенная замена 0 на 6„ может привести к значительным ошибкам.

Общая задача интервального оценивания формулируется так: на основании случайной выборки $X_1, \ldots, X_n$ определить границы 9]. и θ_n^2 интервала (θ_n^1, θ_n^2), относительно которого с заранее выбранной вероятностью у = 1 - ос можно сказать, что внутри этого интервала находится оцениваемый параметр 9: $P(\theta_n^1 < 9 < \theta_n^2) =$ у. При этом

(θ^1_n, θ^2_n) называется доверительным интервалом для параметра G с (доверительной) надежностью у, а число α — уровнем значимости.

Выбор уровня значимости а не является математической задачей, а определяется конкретными условиями задачи, Пусть, к примеру, одно предприятие выпускает электролампы, а другое — парашюты. Если доля бракованных ламп равна а = 1%. то с этим можно мириться при условии, что выбросить 1% ламп дешевле, чем перестроить технологический процесс. Если доля бракованных парашютов равна 1%, то с таким положением мириться нельзя.

Рассмотрим несколько конкретных примеров интервального оценивания.

Определение

Квантилем уровня у некоторого распределения называется такое число t_γ, при котором значение соответствующей функции распределения равно у.

Лемма **46.1.** Пусть с. в. X имеет распределение, плотность которого симметрична относительно оси Оу, и пусть $P(|X| < t) = \gamma$. Тогда t — квантиль уровня $\frac{\gamma+1}{2}$ распределения случайной величины X.

Доказательство.

$\gamma = P(|X| < t) = 1 - P(|X| \geq t) = 1 - P(X \geq t) - P(X < -t) = 1 - 2P(X \geq t)$,

так как ввиду симметричности закона распределения относительно оси Оу $P(X \geq t) = P(X \leq -t)$. Отсюда $P(|X| \geq t) = \frac{1-\gamma}{2}$ $1 - P(X < t)$ и $P(X < t) = \frac{1+\gamma}{2}$. Лемма доказана.

Ниже все выборки считаются повторными.

Лемма 46.2. Если генеральная совокупность имеет нормальное распределение с параметрами a, σ^2, то оценка $\overline{X}$ также имеет нормальное распределение с параметрами а, σ^2/n.

Доказательство. Нормальность распределения с. в. $\overline{X}$ вытекает из того факта теории вероятностей, что сумма нормально распределенных случайных величин также нормально распределена. Остальное следует из теоремы 46.1.

Теорема 46.3. Если генеральная совокупность имеет нормальное распределение с известной дисперсией σ^2, то доверительный интервал с надежностью у для математического ожидания a этой генеральной совокупности будет равен:

$$\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{\frac{1+\gamma}{2}}, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{\frac{1+\gamma}{2}}\right),$$

где $t_{\frac{1+\gamma}{2}}$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ стандартного закона.

Доказательство. Из леммы 46.2 следует, что с, в. $\frac{(\overline{X}-a)}{\sigma}\sqrt{n}$ распределена по стандартному закону, поскольку

$$M\left(\frac{\overline{X}-a}{\sigma}\sqrt{n}\right)=\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(M(\overline{X})-a)=0\,,$$

$$D\left(\frac{\overline{X}-a}{\sigma}\sqrt{n}\right)=\frac{n}{\sigma^2}D(\overline{X}-a)=\frac{n}{\sigma^2}\cdot\frac{\sigma^2}{n}=1\,.$$

Отсюда в силу леммы 46.1

$$\gamma=P\left(\left|\frac{\overline{X}-a}{\sigma}\sqrt{n}\right|<t_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)=P\left(|\overline{X}-a|<\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)=$$

$$=P\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{\frac{1+\gamma}{2}}<a<\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{\frac{1+\gamma}{2}}\right).$$

Теорема доказана.

Теорема 46.4. Если генеральная совокупность имеет нормальное распределение, то доверительный интервал с надежностью /для математического ожидания a этой генеральной совокупности равен

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n-1}}\cdot t_{\frac{1+\gamma}{2},n-1},\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n-1}}t_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}\right)$$

где $t_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}$ —квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ /-распределения с л - 1 степенями свободы.

Доказательство теоремы дано в задаче Т46.4.

Теорема 46.5. Если генеральная совокупность имеет нормальное распределение, то доверительный интервал с надежностью у для дисперсии σ^2 этой генеральной совокупности равен

$$\left(\frac{nS^2}{r_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}},\ \frac{nS^2}{r_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}}\right)$$

где $r_{\alpha,\,n-1}$ — квантиль уровня а χ^2-распределения с n - 1 степенями свободы.

Доказательство теоремы дано в задаче Т46.5.

Если предположение о нормальном распределении генеральной совокупности неверно, то для построения доверительных интервалов применяется так называемый асимптотический метод, частным случаем которого является следующее утверждение.

Теорема 46.6. При достаточно больших объемах n повторной случайной выборки доверительный интервал, с надежностью у содержащий математическое ожидание a генеральной совокупности X, равен

$$(\overline{X} - \sqrt{\frac{D(X)}{n}} \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}},\ \overline{X} + \sqrt{\frac{D(X)}{n}} \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}),$$

где $t_{\frac{1+\gamma}{2}}$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ стандартного закона.

В частности, если генеральная совокупность является индикаторной, то доверительный интервал с надежностью у содержащий генеральную долю p, равен

$$(W - \sqrt{\frac{\qquad}{n}} \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}},\ W + \sqrt{\frac{\qquad}{n}} \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}})$$

Доказательство. Поскольку оценка $\overline{X}$ представляет собой сумму n независимых одинаково распределенных случайных величин, то по теореме 45.2 при $n \to \infty$ ее можно считать распределенной по нормальному закону с параметрами $a = M(X)$, $G^2 = \sqrt{\frac{D(X)}{n}}$. Но тогда с. в. $\frac{\overline{X} - a}{\sqrt{D(X)/n}} =$ оудет распределена по стандартному закону. Отсюда в силу леммы 46.1

$$\gamma = P(\frac{\overline{X} - a}{\sqrt{D(X)}} \sqrt{n} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}) = P(\overline{X} - \sqrt{\frac{D(X)}{n}} \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}} < a < \overline{X} + \sqrt{\frac{D(X)}{n}} \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}})$$

Теорема доказана.

Поскольку p и $D(X)$ неизвестны, то в соответствующих формулах они заменяются оценками W и S^2. Отметим, что при большом объеме генеральной совокупности теорема 46.6 справедлива и для бесповторных выборок.

В заключение главы дадим еще одно определение.

Определение

Предельной ошибкой выборки называется наибольшее отклонение оценки $\overline{X}$ (или доли *W*) от генеральной средней (или доли), которое возможно с заданной доверительной надежностью.

Задачи для самостоятельного решения

Т46.1. Доказать, что если оценка θ_n параметра θ является несмещенной и $\lim D(\theta_n) = 0$, то θ_n является также состоятельной оценкой параметра Э.

Т46.2. Доказать теорему 46.1.

T46.3. Доказать несмещенность оценки $\bar{S}^2$ из теоремы 46.2.

T46.4. В теории статистики известен тот факт, что оценка $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ имеет χ^2-распределение с $n-1$ степенями свободы и не зависит от с. в. $\bar{X}$. Используя этот факт, доказать теорему 46.4.

T46.5. Доказать теорему 46.5.

Во всех задачах П46.1 – П46.20 выборки считаются повторными.

П46.1. На основании 10 опытов было определено, что в среднем для производства детали требуется 5.5 с, при этом выборочное среднее квадратическое отклонение составило 1.7 с. Время для производства детали есть нормально распределенная случайная величина. С надежностью 0.9 определить доверительный интервал, в котором лежит истинное значение среднего времени производства одной детали.

П46.2. Решить задачу П46.1 при условии, что требуется определить доверительный интервал, в котором лежит истинное значение дисперсии времени производства одной детали.

П46.3. Станок-автомат штампует валики. По выборке объема 12 средний диаметр валиков составил 10 мм, а их среднее квадратическое отклонение - 2 мм. Предполагается, что диаметры валиков распределены нормально. Определить доверительный интервал, с надежностью 0.9 содержащий математическое ожидание диаметра валика.

П46,4. Решить задачу П46.3 при условии, что требуется определить доверительный интервал, с надежностью 0.9 содержащий дисперсию диаметра валика.

П46.5. Средний диаметр 16 саженцев, выросших на опытном участке, оказался равным 45.5 мм, а среднее квадратическое отклонение — 5.6 мм. Предполагая, что диаметр саженцев имеет нормальное распределение, найти доверительный интервал с надежностью 0.9 для среднего диаметра всех саженцев на участке.

П46.6. У 15 коров средняя жирность молока оказалась равной 3.8%, а дисперсия – 2.7%. Считая жирность молока распределенной по нормальному закону, определить с надежностью 0.9 границы, в которых будет заключена средняя жирность всего стада.

П46.7. Автомат штампует детали. Контролируется длина деталей, которая распределена по нормальному закону. Для контроля случайным образом отобраны 17 деталей. В результате измерений оказалось, что их средняя длина равна 980 мм, а выборочная дисперсия длины равна 324 мм^2. Найти границы, в которых с надежностью 0.9 заключена средняя длина всей партии деталей.

П46.8. Решить задачу П46.7 при условии, что требуется найти границы, в которых с надежностью 0.9 заключена дисперсия всей партии деталей.

П46.9. Решить задачу П46.6 при условии, что требуется найти границы, в которых с надежностью 0.9 будет заключена дисперсия жирности молока всего стада.

П46.10. Известно, что емкость конденсаторов распределена по нормальному закону. По результатам **16** измерений найдено, что средняя емкость равна 20 мкф, а среднее квадратическое отклонение —4 мкф. Найти 90%-й доверительный интервал для математического ожидания емкости конденсаторов.

П46.11. Из большой партии транзисторов одного типа были случайным образом отобраны и проверены 100 штук. У 36 транзисторов коэффициент усиления оказался меньше 107. Найти 90%-й доверительный интервал для доли таких транзисторов во всей партии.

П46.12. По результатам социологического обследования при опросе 1500 респондентов рейтинг мэра составил 30%. Найти границы, в которых с надежностью 0.9 будет заключен средний рейтинг мэра (в случае опроса всех жителей страны).

П46.13. По результатам социологического обследования рейтинг премьер-министра составил 16%. Сколько респондентов надо опросить, чтобы с надежностью 0.9 гарантировать предельную ошибку социологического обследования в 1%?

П46.14. Из большого числа вкладчиков банка было отобрано 300 вкладчиков. Средний размер их вклада составил 8000 у. е., а средняя выборочная дисперсия - 50 (у. е.)^2. Найти границы, в которых с надежностью 0.9 заключена генеральная средняя вкладов.

П46.15. При осмотре 600 ящиков было обнаружено 100 поврежденных. Найти 90%-й доверительный интервал для доли поврежденных ящиков во всей партии.

П46.16. Для определения всхожести приготовленных для посева зерен произведена выборка объемом в 1000 штук. Опытным путем установили, что всхожесть зерен 80%. Определить наименьший процент всхожести зерен во всей партии, если результат необходимо гарантировать с надежностью 0.9.

П46.17. Глубина моря измеряется прибором, математическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки имеют дисперсию 400 м^2. Сколько надо сделать измерений, чтобы определить глубину с предельной ошибкой 15 м и с надежностью 0.9?

П46.18. Для определения среднего возраста студентов института предлагается провести выборочное наблюдение. Предельная ошибка выборки не должна превышать 0.5 года. Пробными выборками установлено, что дисперсия не превышает 9. Установить объем выборки, с надежностью 0.9 гарантирующий результат выборочного наблюдения.

П46.19. Вероятность изготовления первосортной детали равна 0.4. Приемщик, получивший большую партию деталей, должен выборочным путем оценить долю первосортных деталей в принимаемой партии. Каким должен быть объем выборки, чтобы с вероятностью 0.9 утверждать, что предельная ошибка выборки равна 0.02?

П46.20. Каким должен быть минимальный объем выборки для определения среднего роста группы людей, если результат нужно гарантировать с надежностью 0.9 и чтобы максимальное отклонение не превышало 1 см? Принять генеральную дисперсию равной 5 см^2.

П46.21. На основании анализа производительности труда 20 человек, выбранных из достаточно большой генеральной совокупности, было установлено, что среднее квадратическое отклонение суточной выработки составляет 15 кг в час, а выборочная средняя производительность— 620 кг в час. Предполагая, что производительность имеет нормальное распределение, найти границы, в которых с надежностью 0.9 заключены соответственно средняя суточная производительность всей генеральной совокупности и ее дисперсия.

ГТ46.22. При обследовании выработки рабочих большого завода по схеме случайной повторной выборки было отобрано 100 рабочих и по этой выборке получены следующие данные: средняя выработка равна 119.2%, среднее квадратическое отклонение равно 9.353%. Определить границы, в которых с вероятностью 0.9 заключена средняя выработка рабочих завода; определить объем выборки, при котором с вероятностью 0.9 отклонение средней выработки рабочих в выборке от средней выработки рабочих всего завода не превзойдет 1%.

П46.23. При проверке 100 деталей из большой партии обнаружено 10 бракованных деталей. Найти 90%-й доверительный интервал для доли бракованных деталей всей партии.

Справочные данные, которые могут быть использованы при решении задач из *гл. 46* и *47.*

Квантили стандартного закона в зависимости от их уровня приведены ниже:

уровень	0.9	0.95	0.975
квантиль	1.28	1.645	1.96

Квантили уровней 0.95 и 0.9 t-распределения со степенями свободы от 11 до 25 содержатся в табл. 46.1:

Таблица 46.1

Степень свободы	11	12	13	14	15	16	17	19	21	23	25
Квантиль уровня 0.95	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.7	1.7	1.7	1.7	1.7	1.7
Квантиль уровня 0.9	1.4	1.4	1.4	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3

Квантили уровня 0.95 и 0.05 χ^2-распределения со степенями свободы от 11 до 20 содержатся в табл. 46.2:

Таблица 46.2

Степень свободы	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Квантиль уровня 0.95	19.7	21	22.4	23.7	25	26.3	27.6	28.9	30.1	31.4
Квантиль уровня 0.05	4.6	5.2	5.9	6.6	7.7	8	8.7	9.4	10.1	10.9

Ответы, указания, решения

Т46.1. Известно неравенство Чебышева:

для любого $\varepsilon > 0$

$$P(|\theta_n - M(\theta_n)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\theta_n)}{\varepsilon^2}$$

Ввиду несмещенности оценки θ_n $M(\theta_n) = \theta$, откуда

$$\lim_{n\to\infty} P(|\theta_n - \theta| < \varepsilon) \geq \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{D(\theta_n)}{\varepsilon^2}\right) = 1,$$

что означает состоятельность оценки θ_n.

Т46.2. $M\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \frac{na}{n} = a$. Поскольку выборка повторная, то случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ попарно независимы. Отсюда $D(\text{———}) = \frac{1}{n^2}\sum D(X_i) = \text{———} = \text{———}$. Состоятельность оценки следует теперь из задачи Т46.1.

Т46.3. Пусть $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$. Тогда $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}((X_i - a) - (\bar{X} - a))^2 =$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 + (\bar{X} - a)^2 - \frac{2}{n}(\bar{X} - a)\sum_{i=1}^{n}(X_i - a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 - (\bar{X} - a)^2,$$

поскольку $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a = \bar{X} - a.$

Рассмотрим теперь математическое ожидание оценки S^2, учитывая, что $M(\bar{X}) = a$, $D(\bar{X}) = \frac{\sigma}{n}$ (см. задачу Т46.2):

$$M(S^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i - a)^2 - M(\bar{X} - a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i - M(X_i))^2 -$$

$$- M(\bar{X} - M(\bar{X}))^2 = \frac{n\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Так как $\bar{S}^2 = \frac{S^2 n}{n-1}$, то $M(\bar{S}^2) = \frac{n}{n-1} M(S^2) = \sigma^2$.

Т46.4. При доказательстве теоремы 46.3 было показано, что с. в. $\frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{\sigma}$ распределена по стандартному закону. Но тогда по определению случайная величина

$$\frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{\sigma} \Big/ \sqrt{\frac{nS^2}{(n-1)\sigma^2}} = \frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n-1}}{S}$$

имеет t-распределение с $n-1$ степенями свободы. Отсюда в силу леммы 46.1

$$\gamma = P\left(\left|\frac{(\bar{X}-a)\sqrt{n-1}}{S}\right| < t_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}\right) = P\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n-1}}t_{\frac{1+\gamma}{2},n-1} < a < \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n-1}}t_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}\right)$$

Т46.5. Так как оценка $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ имеет χ^2-распределение с $n-1$ степенями свободы (см. задачу Т46.4), то $\gamma = P\left(\frac{nS^2}{\sigma^2} < r_{\gamma,n-1}\right)$. Используем этот факт в следующих преобразованиях:

$$P\left(\frac{nS^2}{r_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{r_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}}\right) = P\left(\sigma^2 < \frac{nS^2}{r_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}}\right) - P\left(\sigma^2 \le \frac{nS^2}{r_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{nS^2}{\sigma^2} > r_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}\right) - P\left(\frac{nS^2}{\sigma^2} \ge r_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}\right) = \left(1-\frac{1-\gamma}{2}\right) - \left(1-\frac{1+\gamma}{2}\right) = \gamma$$

Теорема доказана.

П46.21. Поскольку объем генеральной совокупности достаточно большой (это сказано в условии), то выборку из 20 человек можно считать повторной. В силу теорем 46.4, 46.5, если генеральная совокупность имеет нормальное распределение, то доверительные интервалы с надежностью γ соответственно для ее математического ожидания и дисперсии равны:

$$\left(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n-1}}t_{\frac{1+\gamma}{2},n-1},\ \bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n-1}}t_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}\right),\quad \left(\frac{ns^2}{r_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}},\ \frac{ns^2}{r_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}}\right),$$

где n — объем повторной выборки, $\bar{x}$ и s^2 — соответственно выборочные средняя и дисперсия, $t_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ t-распределения с $n-1$ степенями свободы, $r_{\alpha,n-1}$ — квантиль уровня α χ^2-распределения с $n-1$ степенями свободы. В нашем случае $n=20$, $\bar{x}=620$, $s=15$, $t_{0.95,19}=1.73$, $r_{0.95,19}=30.1$, $r_{0.05,19}=10.1$. Поэтому искомые доверительные интервалы для генеральной средней и дисперсии соответственно равны:

(614.05, 625.95), (149.5, 445.5).

П46.22. В силу теоремы 46.6 для выборки большого объема доверительный интервал с надежностью γ для генеральной средней приближенно равен:

$$\left(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{1+\gamma}{2}},\ \bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{1+\gamma}{2}}\right),$$

где n — объем выборки, $\bar{x}$ и s — соответственно выборочные средняя и дисперсия, $t_{\frac{1+\gamma}{2}}$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ стандартного закона. В нашем случае $n = 100$. $\bar{x} = 119.2$, $t_{0.95} = 1.64$, $s = 9.353$. Поэтому искомый доверительный интервал равен (117.67, 120.73). Поскольку отклонение средней выработки рабочих в выборке от средней генеральной не должно превышать 1%, то $t_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \le 1$, откуда $n \ge (st_{\frac{1+\gamma}{2}})^2 = 235.2$, т.е. $n = 236$.

П46.23. В силу теоремы 46.6 для выборок большого объема доверительный интервал с надежностью γ для генеральной доли приближенно равен:

$$\left(w - \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}\, t_{\frac{1+\gamma}{2}},\ w + \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}\, t_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$

где n — объем выборки, w — выборочная доля, $t_{\frac{1+\gamma}{2}}$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ стандартного закона. В нашем случае $n = 100$, $w = 10/100$, $t_{0.95} = 1.64$. Поэтому искомый доверительный интервал равен (0.0508, 0.149).

Глава 47

Проверка статистических гипотез

Вначале дадим определение статистической гипотезы.

Определение

Статистической гипотезой называется любое предположение H_0 (гипотеза) о параметрах или законе распределения генеральной совокупности X. Правило, по которому гипотеза H_0 принимается или отвергается, называется статистическим критерием. Проверяемую гипотезу H_0 называют нулевой, а альтернативной называют гипотезу H_1, являющуюся логическим отрицанием нулевой гипотезы.

Общая схема построения статистических критериев следующая. Предполагается, что нулевая гипотеза H_0 верна. В рамках этого предположения по случайной выборке $X_1, ..., X_n$ определяется такая функция $\Delta_n(X_1 ... X_n)$, называемая статистикой, для которой будет известен точный или приближенный закон распределения. В соответствии с этим законом распределения по заранее выбранной малой вероятности а определяется некоторая область W_k (называемая критической), для которой $P(\Delta_n(X_1, .., X_n) \in W_k) = \alpha$. И если величина $\Delta_n(x_1, ..., x_n)$ (называемая выборочной статистикой), вычисленная при конкретной выборке $x_1, ..., x_n$, окажется вне критической области W_k, то гипотеза H_0 принимается, а если она окажется в области W_k, то гипотеза отвергается. При этом возможны 4 случая, которые представлены в табл. 47.1.

Таблица 47.1

	Принимается H_0	**Отвергается H_0**
Верна H_0	Правильное решение	Ошибка первого рода
вероятность:	$1 - a$	α
Неверна H_0	Ошибка второго рода	Правильное решение
вероятность:	β	$1 - \beta$

Определение

Вероятность а допустить ошибку первого рода называется уровнем значимости критерия. Вероятность 1 - р не допустить ошибку второго рода называется мощностью критерия.

Если пользоваться терминологией контроля качества продукции, то α — это "риск поставщика", связанный с забраковкой по результатам выборки всей партии товара, соответствующей стандарту, а β — это "риск потребителя", связанный с принятием по результатам выборки партии товара, не соответствующей стандарту. Применяя юридическую терминологию, а — это вероятность осудить невиновного, а β — вероятность оправдать виновного.

Очевидно, критическая область однозначно определяет вероятности а и β. Однако невозможно совместить одновременное уменьшение а и (3 выбором этой области, не изменяя объема выборки. Поэтому применяется следующий принцип выбора критической области: при заданном уровне значимости а мощность критерия I - (3 должна быть максимальной. Проиллюстрируем этот принцип следующим примером.

Предположим, что используется статистика Δ_n, которая в случае справедливости нулевой гипотезы H_0 распределена по нормальному закону с параметрами а, с и плотностью $\varphi_1(x)$. В качестве критической области при уровне значимости а можно взять любой интервал на оси Ох, на который опирается криволинейная трапеция, ограниченная кривой φ \(x) и имеющая площадь а процентов от всей площади под кривой $\varphi_1(x)$. Выделим три таких интервала:

- $W\ = \{a + x_1, +\infty)$ — правосторонний (область больших положительных отклонений);
- $W_2 = (-\infty, a - x_2)$ — левосторонний (область больших отрицательных отклонений);
- $W_3 = (-\infty, a - x_3) \cup (a + x_3, +\infty)$ — двусторонний (область больших отклонений по абсолютной величине).

Предположим, что с проверяемой гипотезой H_0 конкурирует альтернативная гипотеза H_1, в случае справедливости которой статистика Δ_n распределена по нормальному закону с параметрами b, σ и плотностью $\varphi_2(x)$, причем $b > a$. Тогда следует предпочесть ту область, при которой мощность критерия будет наибольшей. Решим эту задачу графически (см. рис. 47.1).

Гипотеза H_0 отвергается, если статистика Д„ попадает в выбранный критический интервал $W,, ie \{1, 2, 3\}$. Но тогда принимается гипотеза H_1, и в случае ее справедливости, вероятность 1 - β принятия правильного решения будет равна площади криволинейной трапеции, опирающейся на интервал W_i и ограниченной кривой $\varphi_2(x)$. Из рис. 47.1 видно, что среди криволинейных трапеций, ограниченных $\varphi_2(x)$ и опирающихся на W_1, W_2 и W_3, самую большую площадь имеет первая из них.

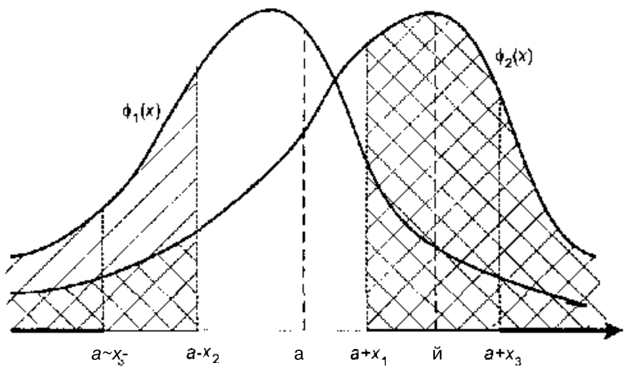


Рис.47.1. Иллюстрация принципа выбора критической области

Итак, в данном примере в зависимости от вида альтернативной гипотезы H_1 выбирается правосторонняя, левосторонняя или двусторонняя критические области:

- если H_1 = "$b > a$", то критическая область есть $(a+x_1, +\infty)$ и она определяется из соотношения $P(\Delta_n > a + x_1) = \alpha$ или $P(\Delta_n \le a + x_1) = 1 - \alpha$;
- если H_1 = "$b < a$", то критическая область есть $(-\infty, a - x_2)$ и она определяется из соотношения $P(\Delta_n < a - x_2) = \alpha$;
- если H_1 = "$b \ne a$", то критическая область есть $(-\infty, a - x_3) \cup (a + x_3, +\infty)$ и она определяется из соотношения $P(\Delta_n < a - x_3) + P(\Delta_n > a + x_3) = \alpha$.

Рассмотренный пример показывает общий принцип определения критических областей для произвольной статистики Δ_n. Пусть q_γ обозначает квантиль уровня γ распределения статистики Δ_n, а α — уровень значимости критерия. Тогда правосторонняя критическая область будет равна $(q_{1-\alpha}, +\infty)$, и нулевая гипотеза отвергается при $\Delta_n > q_{1-\alpha}$. Левосторонняя критическая область будет равна $(-\infty, q_\alpha)$, и нулевая гипотеза отвергается при $\Delta_n < q_\alpha$. Двусторонняя критическая область будет равна $(-\infty, q_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (q_{1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty)$, и нулевая гипотеза отвергается при $\Delta_n < q_{\frac{\alpha}{2}}$ или $\Delta_n > q_{1-\frac{\alpha}{2}}$. В последнем случае, если плотность статистики Δ_n симметрична относительно оси $0y$, гипотеза отвергается при $|\Delta_n| > q_{1-\frac{\alpha}{2}}$, поскольку $q_{\frac{\alpha}{2}} = -q_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Теперь рассмотрим несколько конкретных практических примеров проверки статистических гипотез. Начнем с проверки гипотезы о равенстве средних двух генеральных совокупностей X и Y, распределенных по нормальному закону соответственно с параметрами a_x, σ_x и a_y, σ_y, причем значения дисперсий σ_x^2, σ_y^2 считаются неизвестными. Пусть даны две независимые повторные случайные выборки $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_n$. В качестве нулевой гипотезы H_0 берется предположение о равенстве средних: $a_x = a_y$.

Теорема 47.1. В случае справедливости гипотезы $H_0 =$ "$a_x = a_y$" случайная величина $V = (\overline{X} - \overline{Y}) \Big/ \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}}$ распределена по стандартному закону.

В частности, если генеральные совокупности X и Y являются индикаторными случайными величинами с генеральными долями p_x и p_y, то в случае справедливости нулевой гипотезы $H_0 =$ "$p_x = p_y$" случайная величина $U = \dfrac{W_x - W_y}{\sqrt{\frac{p_x(1-p_x)}{n_1} + \frac{p_y(1-p_y)}{n_2}}}$

распределена по стандартному закону, где W_x, W_y оценки параметров p_x, p_y.

Доказательство теоремы дано в задаче Т47.1.

В силу теоремы 47.1 с. в. V и U могут быть использованы в качестве статистик для проверки нулевой гипотезы. При этом в зависимости от вида альтернативной гипотезы H_1 должны выбираться левосторонняя, правосторонняя или двусторонняя критические области (см. задачу П47.21). Если дисперсии σ_x^2 и σ_y^2 неизвестны, но равны, то применяется следующее утверждение, известное в теории статистики.

Теорема 47.2. В случае справедливости гипотезы $H_0 =$ "$a_x = a_y$" с. в.
$U = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\frac{n_1 S_x^2 + n_2 S_y^2}{n_1 + n_2 - 2}}}$ имеет t-распределение с $n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы.

Если предположение о нормальности распределения генеральных совокупностей X и Y неверно, то для проверки нулевой гипотезы применяется асимптотический метод, частным случаем которого является следующее утверждение.

Теорема 47.3. Пусть X и Y — индикаторные генеральные совокупности. При достаточно больших объемах n_1 и n_2 повторных случайных выборок, в случае справедливости нулевой гипотезы $H_0 =$ "$p_x = p_y$", статистика $\dfrac{W_x - W_y}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)p(1-p)}}$ распределена по стандартному закону, где $p = p_x = p_y$.

Доказательство теоремы дано в задаче Т47.3.

Поскольку p неизвестно, то в соответствующих формулах p заменяют смешанной выборочной долей

$$\overline{w} = \frac{x_1 + \ldots + x_{n_1} + y_1 + \ldots + y_{n_2}}{n_1 + n_2}$$ (см. задачу П47.22).

Задачи для самостоятельного решения

Т47.1. Доказать теорему 47.1.

Т47.2. Доказать, что в случае симметричности плотности с. в. X относительно оси Oy $q_\gamma = -q_{1-\gamma}$, где q_α — квантиль уровня α закона распределения с. в. X.

Т47.3. Доказать теорему 47.3.

П47.1. По выборкам объемов 14 и 9 найдены средние размеры деталей 182 мм и 185 мм, изготовленных на первом и втором автоматах соответственно. Установлено, что размер детали, изготовленной каждым автоматом, имеет нормальный закон распределения. Известны дисперсии: 5 мм^2 —для первого автомата, 7 мм^2 — для второго. Выяснить влияние на средний размер детали автомата, на котором она изготовлена, приняв за альтернативную гипотезу о различии генеральных средних (на уровне значимости 0.1).

П47.2. Решить задачу 1 при условии, что за альтернативную принята гипотеза о превалировании генеральной средней размеров деталей, изготовленных на втором станке.

П47.3. Ожидается, что добавление специальных веществ уменьшает жесткость воды, которая подчиняется нормальному закону распределения. Оценки жесткости воды до и после добавления специальных веществ но 40 и 50 пробам соответственно показали средние значения жесткости, равные 4 и 3.8 градуса. Дисперсия измерений в обоих случаях предполагается равной 0.25 град^2. Подтверждают ли эти результаты ожидаемый эффект? Уровень значимости принять равным 0.05.

П47.4. Для проверки новой технологии отобраны две группы рабочих: в первой, где применялась новая технология, выборочная средняя выработки 50 рабочих составила 85 изделий, а во второй группе выборочная средняя выработки 70 рабочих составила 78 изделий. Выработки распределены по нормальному закону. Предварительно было установлено, что дисперсии выработки в группах равны 100 и 74. Выяснить влияние новой технологии на среднюю выработку, приняв за альтернативную гипотезу эффективность применения новой технологии. Уровень значимости принять равным 0.05.

П47.5. В результате двух серий измерений с количеством измерений 25 и 50 получены соответственно средние значения исследуемой величины, имеющей нормальное распределение, равные 9.79 и 9.6. Можно ли объяснить па уровне значимости 0.1 это расхождение случайными причинами, если известно, что средние квадратические отклонения в обеих сериях измерений равны 0.3?

П47.6. В рекламе утверждается, что месячный доход по акциям A превышает доход по акциям B. В течение годичного периода средний месячный доход по акциям B составил 0.5%, а по акциям A — 0.65%, а средние квадратические отклонения составили соответственно 1.9 и 2%. Полагая распределение доходности по каждой акции нормальным, проверить утверждение, содержащееся в рекламе, па уровне значимости 0.05.

П47.7. Произведены две выборки урожая пшеницы: при своевременной уборке урожая и уборке с некоторым опозданием. В первом случае при наблюдении 8 участков выборочная средняя урожайность составила 16.2 ц/га, а среднее квадратическое отклонение — 3.2 ц/га; во втором случае при наблюдении 9 участков те же характеристики равнялись соответственно 13.9 ц/га и 2.1 ц/га. На уровне значимости 0.05 выяснить влияние своевременности уборки урожая, полагая, что урожайности различных групп участков имеют нормальные распределения с одинаковыми дисперсиями. В качестве альтернативной принять гипотезу о существенном влиянии на урожайность сроков уборки.

П47.8. Решить задачу 7 при условии, что в качестве альтернативной берется гипотеза о расхождении урожайности при различных сроках уборки.

П47.9. При измерении производительности двух агрегатов получены следующие результаты в кг вещества за час работы (табл. 47.2):

Таблица 47.2

№ замера	1	2	3	4	5
Агрегат *A*	14.1	10.1	14.7	13.7	14.0
Агрегат *B*	14	14.5	13.7	12.7	14.1

Можно ли считать, что производительность агрегатов A и B одинакова в предположении, что обе выборки получены из нормально распределенных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями? Уровень значимости принять равным 0.1.

П47.10. Содержание никотина (в мг) для двух марок сигарет характеризуется следующими данными (табл. 47.3):

Таблица 47.3

№ пробы	1	2	3	4
Марка *A*	24	26	25	22
Марка *B*	27	28	25	29

Указывают ли эти результаты на различие среднего содержания никотина в сигаретах этих марок в предположении, что обе выборки получены из нормально распределенных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями? Уровень значимости принять равным 0.1.

П47.11. Во время эпидемии гриппа изучалась эффективность прививок против этого заболевания. Получены следующие данные (табл. 47.4):

Таблица 47.4

После прививки		Без прививки	
Заболели	Не заболели	Заболели	Не заболели
4 чел.	192 чел.	34 чел.	111 чел.

Указывают ли эти результаты на эффективность прививок? Уровень значимости принять равным 0.01.

П47.12. В течение месяца завод поставил предприятию 200 корпусов, из которых 3 оказались дефектными. В следующий месяц было поставлено 850 корпусов, из которых 7 оказались дефектными. Изменилась ли доля дефектных корпусов в поставках завода? Уровень значимости принять равным 0.01.

П47.13. Исследуется два производственных процесса изготовления поршневых колец. Проверить гипотезу о равенстве процента брака в обоих процессах по следующим данным:

	Процесс	
Кольца	1	2
Годные	195	149
Бракованные	5	2

Уровень значимости принять равным 0.01.

П47.14. Вступительный экзамен проводился на двух факультетах института. На финансовом факультете из 900 абитуриентов выдержали экзамен 500 человек, а на учетно-статистическом факультете из 800 абитуриентов — 408 человек. Проверить гипотезу об отсутствии существенных различий в уровне подготовки абитуриентов двух факультетов. Уровень значимости принять равным 0.01.

П47.15. В партии из 500 деталей, изготовленных первым станком-автоматом, оказалось 60 нестандартных; из 600 деталей, изготовленных на втором станке, — 42 нестандартных. Проверить гипотезу о равенстве вероятностей изготовления нестандартных деталей обоими станками. Уровень значимости принять равным 0.01.

П47.16. Ниже приведены результаты выборочного обследования двух партий изделий:

№ партии	**Бракованные**	**Годные**
1	**8**	92
2	**13**	**287**

Можно ли считать, что доля брака в обеих партиях одна и таже? Уровень значимости принять равным 0.05.

П47.17. Предполагается, что применение новой технологии в производстве микросхем приведет к увеличению выхода [одной продукции. Результаты контроля двух партий продукции, изготовленных по старой и новой технологиям, приведены ниже:

Технология изделия	**Старая**	**Новая**
Годные	140	185
Бракованные	10	**15**

Подтверждают ли эти результаты предположение об увеличении выхода годной продукции? Уровень значимости принять равным 0.01.

П47.18. 1000 человек классифицировали по признаку дальтонизма. По приведенным ниже данным проверить, есть ли зависимость между наличием дальтонизма и полом человека:

	Мужчины	Женщины
Дальтоники	38	6
Не дальтоники	442	514

Уровень значимости принять равным 0.01.

П47.19. Два пресса штампуют детали одного наименования. Из партии деталей, изготовленных прессом, проверено 1000 деталей, из которых 25 оказались бракованными. Из 800 деталей, изготовленных вторым прессом, негодными оказались 36 деталей. Согласуются ли эти результаты с предположением о равенстве доли брака в продукции двух прессов при уровне значимости 0.1?

П47.20. Ниже приведены результаты выборочного обследования двух партий изделий:

№ партии	Число изделий	
	бракованных	годных
1	12	88
2	17	183

Можно ли считать, что доля брака в обеих партиях одна и та же? Уровень значимости принять равным 0.05.

П47.21. В следующих табл. 47.5 и 47.6 приводятся данные по расходу сырья на единицу продукции в зависимости от использования новой и старой технологий:

Таблица 47.5. *Старая технология*

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	303	307	307	307	307	308	308	308	308

Таблица 47.6. *Новая технология*

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y_i	303	303	304	304	304	304	304	304	306	306	306	306	308

13 Зак. 4223

П47.22. В следующей табл. 47.7 приводятся выборочные данные опроса студентов государственных и негосударственных вузов г. Минска о вредном влиянии курения на учебу:

Таблица 47.7

	Вредит	**Не вредит**
Государственные вузы	**60** чел.	**45** чел.
Негосударственные вузы	**69** чел.	**71** чел.

Подтверждают ли эти данные предположение о том, что отношение к курению студентов государственных и негосударственных вузов различно? Принять уровень значимости 0.1.

Ответы, указания, решения

Т47.1. В силу теоремы 46.1 с. в. $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ распределены по нормальному закону соответственно с параметрами a_x, $\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1}}$ и a_y, $\sqrt{\frac{\sigma_y^2}{n_2}}$. Поскольку случайные выборки независимы, то с. в. $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ также независимы. Следовательно, с. в. $\overline{X}-\overline{Y}$ имеет нормальный закон распределения (по свойству композиции независимых нормально распределенных случайных величин), причем

$$M(\overline{X}-\overline{Y}) = M(\overline{X}) - M(\overline{Y}) = 0, \qquad D(\overline{X}-\overline{Y}) = D(\overline{X}) + D(\overline{Y}) = \frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}.$$

Остальное очевидно, если учесть, что для индикаторных генеральных совокупностей X и Y $\overline{X} = W_x$, $\overline{Y} = W_y$, $\sigma_x^2 = p_x(1-p_x)$, $\sigma_y^2 = p_y(1-p_y)$.

Т47.2. Поскольку $P(X \le -t) = P(X \ge t)$, то $F(-q_{1-\gamma}) = P(X < -q_{1-\gamma}) = P(X > q_{1-\gamma}) = 1 - P(X < q_{1-\gamma}) = 1 - (1-\gamma) = \gamma$, откуда $q_\gamma = -q_{1-\gamma}$.

Т47.3, Поскольку оценки W_x и W_y представляют собой соответственно суммы n_1 и n_2 независимых одинаково распределенных случайных величин, то по теореме 45.2 при $n_1 \to \infty$, $n_2 \to \infty$ их можно считать распределенными по нормальному закону соответственно с параметрами $p = p_x = M(W_x)$, $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_1}}$ и $p = p_y = M(W_y)$, $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_2}}$. По свойству композиции независимых нормально распределенных случайных величин, с. в. $W_x - W_y$ распределена по нормальному закону с параметрами 0, $\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})p(1-p)}$ (см. решение задачи Т47.1). Остальное очевидно.

П47.21. Сначала определим выборочные средние:

$\bar{x} = \sum_{i=1}^{9} \frac{x_i}{9} = 307$, $\bar{y} = \sum_{i=1}^{13} \frac{y_i}{13} = 305$. Теперь определим выборочные дисперсии:

$$s_x^2 = \sum_{i=1}^{9} \frac{(x_i - 307)^2}{9} \approx 2.2, \quad s_y^2 = \sum_{i=1}^{13} \frac{(y_i - 305)^2}{13} \approx 2.1.$$

Проверяется нулевая гипотеза H_0 о равенстве генеральных средних. В качестве альтернативной берется гипотеза о преимуществе новой технологии над старой. Для проверки нулевой гипотезы используется статистика

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})\frac{S_x^2 n_1 + S_y^2 n_2}{n_1 + n_2 - 2}}},$$

которая имеет t-распределение с $n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы. В данном примере $n_1 = 9$, $n_2 = 13$, $\bar{x} = 307$, $\bar{y} = 305$, $s_x^2 = 2.2$, $s_y^2 = 2.1$. Поэтому выборочное значение статистики будет равно:

$$\frac{307-305}{\sqrt{(\frac{1}{9} + \frac{1}{13})(\frac{2.2 \cdot 9 + 2.1 \cdot 13}{20})}} \approx 3.$$

Поскольку квантиль уровня 0.95 t-распределения с 20 степенями свободы равен 1.7 и 3 > 1.7, то нулевая гипотеза отвергается и можно считать, что новая технология дает значимое уменьшение среднего расхода сырья по сравнению со старой.

П47.22. Проверяется гипотеза о равенстве генеральных долей. В качестве альтернативной берется гипотеза о различии генеральных долей. Для проверки нулевой гипотезы используется статистика:

$$\frac{W_x - W_y}{\sqrt{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})p(1-p)}},$$

которая имеет стандартное распределение. В данном примере $w_x = \frac{60}{105} \approx 0.571$, $w_y = \frac{69}{140} \approx 0.493$, $n_1 = 105$, $n_2 = 140$. При этом неизвестная величина p заменяется смешанной выборочной доли $w = \dfrac{\qquad}{105 + 140} \approx 0.527$. Итак, выборочное значение

статистики приближенно равно

$$(0.571 - 0.493) \Big/ \sqrt{0.527(1 - 0.527)\left(\frac{1}{105} + \frac{1}{140}\right)} \approx 1.21$$

Поскольку квантиль уровня $1 - \dfrac{0.1}{2} = 0.95$ стандартного распределения равен 1.645 и 1.21 < 1.645, то нулевая гипотеза принимается, т. е. полученные данные не противоречат гипотезе об одинаковом отношении студентов к курению.

Глава 48

Двумерная модель корреляционного анализа

Задача корреляционного анализа заключается в выявлении связи между случайными величинами (генеральными совокупностями) X, $У$ посредством точечной и интервальной оценки коэффициентов корреляции и проверки их значимости. При этом основными характеристиками зависимости между с. в. X и K являются регрессии $У$ по x и X по y.

Основное допущение корреляционного анализа: двумерная с. в. (X, Y) распределена по нормальному закону с параметрами a_x, a_y, σ_x, σ_y, р, где a_x, σ_x и a_y, σ_y — параметры нормальных законов распределения одномерных составляющих X и Y, р — их коэффициент корреляции (теорема 44.1). При таких допущениях, согласно теореме 44.3, регрессии имеют следующий вид:

$$M(Y|x) = a_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - a_x), \qquad M(X|y) = a_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - a_y).$$

Если в этих уравнениях параметры a_x, a_y, σ_x, σ_y, р заменить соответствующими выборочными характеристиками $\bar{x}, \bar{y}, s_x, s_y$, то получим выборочные регрессии

$$vr(x) = \bar{y} + r\frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x}), \qquad vr(y) = \bar{x} + r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y});$$

здесь r — выборочный коэффициент корреляции, s_x^2, s_y^2 — выборочные дисперсии, $\bar{x}, \bar{y}$ — выборочные средние (см. *гл. 46*),

Исходная статистическая информация может быть сгруппирована на основе интервальных рядов выборочных данных и представлена в следующем виде. Возможные области значений с. в. X и $У$ разбиты соответственно на m и n интервалов равной длины. Через a_i, b_k обозначены соответственно середины этих интервалов $i = 1, ..., m$, $k = 1, ..., n$, а через /— объем парной выборки, состоящей из пар (x_s, y_s) частных значений двумерной с. в. $(X, У)$. Через f_{ik} обозначено число всех пар (x_s, y_s) таких, что x_s содержится в i-м интервале для значений с.в. X, а y_s — в k-м интервале для значений с. в. $У$. В случае сгруппированных данных формулы для выборочных средней, дисперсии и коэффициента корреляции, определенные в *гл. 46*, будут иметь следующий вид:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} \qquad \bar{y} = \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k c_k}{l}, \qquad \sum_{i=1}^{m}\frac{r_i}{l},$$

$$s_y^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(b_k - \overline{y})^2 c_k}{l} \qquad r = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \frac{(a_i - \overline{x})(b_k - \overline{y}) f_{ik}}{l s_x s_y},$$

где $r_i = \sum^{n} f_{ik}$, $\quad c_k = \sum_{i=1}^{m} f_{ik}$, $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$.

В силу теоремы 44.2 независимость с. в. X и Y равносильна равенству нулю их коэффициента корреляции р. Напомним также, что в качестве точечной оценки коэффициента корреляции берется случайная величина

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{n S_x S_y}.$$

В теории статистики доказывается следующее утверждение.

Теорема 48.1. Если коэффициент корреляции р с. в. X и Y равен нулю (нулевая гипотеза), то статистика $\dfrac{R\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}}$ имеет t-распределение с n-2 степенями свободы.

Если в качестве альтернативной берется гипотеза $H_1 =$ " $\rho \neq 0$ ", то согласно общему принципу определения критической области, сформулированному в *гл. 47,* нулевая гипотеза отвергается, если статистика $\dfrac{|R|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}}$ превосходит квантиль $t_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-2}$ уровня $1-\dfrac{\alpha}{2}$ t-распределения с n-2 степенями свободы. Таким образом, гипотеза о равенстве нулю коэффициента корреляции (и следовательно о независимости с. в. X и Y) отвергается, если для выборочного коэффициента корреляции r верно неравенство:

$$|r|\sqrt{n-2} / \sqrt{1-r^2} > t_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-2}$$

В случае отказа от гипотезы о равенстве нулю коэффициента корреляции ρ есть смысл построить доверительный интервал для него. Однако плотность с. в. R имеет сложный вид. Поэтому воспользуемся следующим утверждением из теории статистики.

Теорема 48.2. Случайная величина $Z = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+R}{1-R}$ уже при небольших n имеет распределение, достаточно близкое к нормальному распределению с параметрами

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{2(n-1)}, \qquad \frac{1}{\sqrt{n-3}}.$$

Следствие 48.1. Доверительный интервал с надежностью γ для $M(Z)$ равен

$$\left(Z-\frac{1}{\sqrt{n-3}}t_{\frac{1+\gamma}{2}},\ Z+\frac{1}{\sqrt{n-3}}t_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) \qquad (48.1)$$

где $t_{\frac{1+\gamma}{2}}$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ стандартного закона.

Доказательство. В силу теоремы 48.2 с. в. $(Z-M(Z))\sqrt{n-3}$ имеет распределение, близкое к стандартному, так как

$$M((Z-M(Z))\sqrt{n-3})=\frac{M(Z)-M(Z)}{\sigma_z}=0\,,\qquad D(Z)=\frac{1}{\sigma_z^2}\,.$$

Отсюда по лемме 46.1

$$P(|Z-M(Z)|\sqrt{n-3}<t_{\frac{1+\gamma}{2}})=\gamma\,,\quad P(|M(Z)-Z|<\frac{1}{\sqrt{n-3}}t_{\frac{1+\gamma}{2}})=\gamma\,,$$

$$P\left(Z-\frac{t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n-3}}<M(Z)<Z+\frac{t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n-3}}\right)=\gamma\,.$$

Следствие доказано.

Поскольку $\operatorname{th}(M(Z))=\operatorname{th}(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho}+\frac{\rho}{2(n-1)})\approx\rho$, где $\operatorname{th}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ — гиперболический тангенс, то, заменив в (48.1) с. в. R ее выборочной характеристикой r, получим приближенные границы для ρ (с надежностью γ):

$$\operatorname{th}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}-\frac{1}{\sqrt{n-3}}t_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)<\rho<\operatorname{th}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}+\frac{1}{\sqrt{n-3}}t_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$

На практике часто предпосылки корреляционного анализа могут нарушаться; одна из величин X, Y оказывается величиной не случайной, или двумерная с. в. (X, Y) не имеет нормального распределения. Однако статистическая зависимость между X и Y может сохраняться. Для изучения связи между величинами X и Y в этом случае используется индекс корреляции, который будет определен ниже.

Теорема 48.3.

$$D(Y)=M(M(Y|X)-M(Y))^2+M(Y-M(Y|X))^2 \qquad (48.2)$$

Доказательство. Доказательство проведем для непрерывной с. в. (X, Y), для дискретных с. в. рассуждения аналогичны. Итак, $D(Y)=M(Y-M(Y))^2=M[(M(Y|X)-M(Y))+(Y-M(Y|X))]^2=M(M(Y|X)-M(Y))^2+M(Y-M(Y|X))^2+2M((M(Y|X)-M(Y))(Y-M(Y|X)))$.

Очевидно, теорема будет доказана, если мы покажем, что последнее слагаемое равно нулю. Для этого воспользуемся определением математического ожидания и условной плотности;

$$M((M(Y|X) - M(Y))(Y - M(Y|X))) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(M(Y|x) - M(Y))(y - M(Y \mid x))\varphi(x,y)dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(M(Y \mid x) - M(Y))\varphi_1(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty}(y - M(Y \mid x))\varphi(y \mid x)dy\right)dx .$$

А внутренний интеграл равен нулю, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y|\,x)dy - \int_{-\infty}^{\infty} M(Y|x)\varphi(y \mid x)dy = M(Y \mid x) - M(Y \mid x)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y \mid x)dy =$$

$= M(Y|x) - M(Y|x)\cdot 1 = 0$ *(см. гл. 43)*. Теорема доказана.

Таким образом, дисперсия с. в. Y разложена на две составляющие. Первое слагаемое в (48.2) измеряет влияние с. в. X на с. в. Y, поскольку характеризует разброс условного математического ожидания Y по X относительно среднего случайной величины Y. Второе слагаемое в (48.2) измеряет влияние прочих факторов на с. в. Y, поскольку характеризует разброс этой случайной величины относительно условного математического ожидания Y по X.

Определение

Величина $\rho^2_{y|x} = M(M(Y|X) - M(Y))^2 / D(Y)$ называется индексом корреляции Y по X.

Индекс корреляции X по Y определяется аналогично.

Из соотношения (48.2) следует, что $0 \le \rho^2_{y|x} \le 1$. Кроме того, при $\rho^2_{y|x} = 1$ отсутствует влияние прочих факторов, и между Y и X существует функциональная зависимость; при $\rho^2_{y|x} = 0$ корреляционная связь между Y и X отсутствует. Можно также показать, что $\rho^2 \le \rho^2_{y|x}$. Кроме того, справедливо следующее утверждение.

Теорема 48.4. Если двумерная с. в. (X, Y) распределена по нормальному закону с параметрами a_x, a_y, σ_x, σ_y, ρ, то $\rho^2 = \rho^2_{y|x} = \rho^2_{x|y}$.

Доказательство. Согласно теореме 44.3

$$M(Y|X) = a_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - a_x).$$

Отсюда $M(Y|X) - M(Y) = \rho\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - a_x)$. Следовательно

$$\rho^2_{y|x} = \frac{M\left(\rho\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - a_x)\right)^2}{\sigma_y^2} = \frac{\rho^2\sigma_y^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2}M(X - a_x)^2 = \rho^2$$

Теорема доказана.

Ввиду теоремы 48.4 расхождение между ρ^2 и $\rho^2_{y|x}$ может быть использовано для проверки предположения о нормальности распределения двумерной с. в. *(X, У)*. Однако, для определения оценки индекса корреляции необходимо знать регрессию, что при нарушении предположения о нормальности распределения с. в. *(X, У)* весьма проблематично. В подобных ситуациях, при наличии сгруппированных статистических данных, используются выборочные индексы корреляции $\eta_{y|x}$ и $\eta_{x|y}$, где

$$\eta^2_{y|x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} (ym_i - \bar{y})^2 r_i}{l s_y^2}, \quad ym_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} f_{ik} b_k}{r_i}, \; i = 1,\ldots, m,$$

$$\eta^2_{x|y} = \frac{\sum_{k=1}^{n} (xm_k - \bar{x})^2 c_k}{l s_x^2}, \quad xm_k = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_{ik} a_i}{c_k}, \; k = 1, \ldots, n$$

Линия на координатной плоскости $0xy$, соединяющая последовательно точки (x_i, ym_i), $i = 1,\ldots, m$, называется эмпирической линией регрессии *У по x*. Аналогично определяется эмпирическая линия регрессии X по y.

Компьютерный раздел

Подпанель Калькулятор (Calculator), изображенная на рис. 48.1, вызывается кнопкой панели Math. Шаблон встроенной функции извлечения квадратного корня вызывается кнопкой подпанели Калькулятор (Calculator), шаблон встроенной функции логарифма по основанию e — кнопкой . Если вначале введено алгебраическое выражение, из которого предполагается извлечь квадратный корень, то можно воспользоваться клавишей <\>, предварительно выделив слева все выражение синим курсором ввода.

Рис. 48.1. Подпанель **Калькулятор**

Встроенная функция $tanh(x)$ вычисляет гиперболический тангенс от x. Встроенная функция $qnorm(\alpha, \mu, a)$ вычисляет квантиль уровня a нормального распределения с математическим ожиданием μ и средним квадратическим отклонением a. Встроенная функция *length* (v) определяет размерность вектора v.

Если v — вектор, то запись v^2 в Mathcad означает покоординатное возведение в квадрат и не требует использования операции векторизации. Аналогично, запись $v-a$ или $v + a$, где a — скаляр, означает вычитание или сложение a с каждой координатой вектора v.

Задачи для самостоятельного решения

К48.1. Сгруппированные статистические данные, выражающие зависимость между суточной выработкой продукции X(т) и величиной основных производственных фондов Y (млн р.) для совокупности из 50 однотипных предприятий, приведены в табл. 48.1. В этой таблице первый столбец и первая строка соответственно содержат середины интервалов выборочных данных для X и Y, а остальные ячейки содержат числа f_{ik}. Требуется оценить тесноту и направление связи между случайными величинами X и K, вычислив выборочный коэффициент корреляции и проверив гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции (с уровнем значимости 0.05). В случае значимого коэффициента корреляции определить для него доверительный интервал с надежностью 0.95. Вычислить выборочные индексы корреляции и на их основе оценить выполнимость в данном случае предпосылок корреляционного анализа. Построить выборочную и эмпирическую линии регрессии.

Таблица 48.1

x \ y	9	13	17	21	25
22,5	2	1	0	0	0
27,5	3	6	4	0	0
32,5	0	3	11	7	0
37,5	0	1	2	6	2
42,5	0	0	0	1	1

К48.2. Решить задачу К48.1 при условии, что соответствующие сгруппированные статистические данные приведены в табл. 48.2.

Таблица 48.2

x \ y	9	13	17	21	25
22.5	0	1	4	2	0
27.5	4	2	0	2	0
32.5	1	5	7	1	1
37.5	12	0	0	2	0
42.5	7	3	1	0	0

К48.3. Решить задачу К48.1 при условии, что соответствующие сгруппированные статистические данные приведены в табл. 48.3.

Таблица 48.3

x \ y	9	13	17	21	25
22.5	0	5	11	0	3
27.5	0	6	2	0	0
32.5	5	0	3	11	3
37.5	4	3	0	6	1
42.5	0	0	12	10	8

К48.4. Решить задачу К48.1 при условии, что соответствующие сгруппированные статистические данные приведены в табл. 48.4.

Таблица 48.4

x \ y	9	13	17	21	25
22.5	4	1	0	0	11
27.5	0	6	4	2	0
32.5	0	7	7	4	0
37.5	2	6	11	0	10
42.5	4	6	1	0	5

К48.5. Решить задачу К48.1 при условии, что соответствующие сгруппированные статистические данные приведены в табл. 48.5.

Таблица 48.5

x \ y	9	13	17	21	25
22.5	10	1	0	2	7
27.5	0	5	6	0	9
32.5	4	0	0	8	5
37.5	1	4	7	0	5
42.5	0	3	6	7	8

К48.6. Решить задачу К48.1 при условии, что соответствующие сгруппированные статистические данные приведены в табл. 48.6.

Таблица 48.6

x \ y	9	13	17	21	25
22.5	0	4	0	12	5
27.5	1	5	4	0	10
32.5	0	5	7	0	6
37.5	2	4	0	2	0
42.5	6	0	3	5	0

К48.7. Решить задачу К48.1 при условии, что соответствующие сгруппированные статистические данные приведены в табл. 48.7.

Таблица 48.7

x \ y	9	13	17	21	25
22.5	0	0	4	7	4
27.5	3	11	10	5	0
32.5	0	7	3	2	0
37.5	5	4	3	2	1
42.5	0	5	8	0	10

К48.8. Решить задачу К48.1 при условии, что соответствующие сгруппированные статистические данные приведены в табл, 48.8.

Таблица 48.8

x \ y	9	13	17	21	25
22.5	7	0	7	2	4
27.5	11	0	6	5	2
32.5	9	4	2	11	0
37.5	5	4	3	2	7
42.5	0	0	6	4	10

К48.9. Решить задачу К48.1 при условии, что соответствующие сгруппированные статистические данные приведены в табл. 48.9.

Таблица 48.9

x y	9	13	17	21	25
22.5	0	8	0	12	5
27.5	7	9	8	2	3
32.5	0	11	6	1	1
37.5	2	10	10	2	5
42.5	5	0	4	3	6

К48.10. Решить задачу К48.1 при условии, что соответствующие сгруппированные статистические данные приведены в табл. 48.10.

Таблица 48.10

x y	9	13	17	21	25
22.5	9	10	П	12	0
27.5	6	0	6	7	3
32.5	0	7	3	1	8
37.5	9	7	4	0	4
42.5	0	3	6	4	0

К48.11. Решить задачу К48.1 при условии, что с. в. Y выражает энерговооруженность (кВт·ч) предприятий химической промышленности и с. в. X выражает их фондовооруженность (млн р.), а соответствующие сгруппированные статистические данные приведены в табл. 48.11.

Таблица 48.11

x y	2.25	6.75	11.25	15.75	20.25
0.7	4	1	0	0	0
2.1	4	2	0	0	0
3.5	2	8	1	0	0
4.9	0	1	20	4	0
6.3	0	0	3	3	3
7.7	0	0	0	1	3

К48.12. Решить задачу К48.1 при условии, что с. в. X выражает объем сбыта товара (млн р.) и с. в. Y выражает относительный уровень издержек обращения (%), а соответствующие сгруппированные статистические данные содержатся в табл. 48.12.

Ответы, указания решения

Общий алгоритм решения задач К48.1 — **К48.12** с помощью Mathcad

Ввести исходные данные: матрицу £, содержащую частоты f_{ik} попадания выборочных пар (А-., y_s) В соответствующие интервалы; векторы *аи* *b* середин этих интервалов.

Таблица 48.12

y \ *x*	5	7	9	И	13	15	17	19
3.6	0	0	0	0	0	0	2	3
4.0	0	0	0	I	1	3	2	1
4.4	0	0	1	4	2	2	0	0
4.8	0	3	1	3	3	0	0	0
5.2	0	3	2	0	0	0	0	0
5.6	2	2	2	0	0	0	0	0
6.0	3	0	1	0	0	0	0	0
6.4	3	1	0	0	0	0	0	0

Определить выборочные средние, дисперсии, коэффициент корреляции, индексы корреляции:

ORIGIN := 1 $\quad m := length(a) \quad n := length(b) \quad 1 := 1;m$

$к := 1;л$

$r_i := \sum(r) \quad c_k \cdot \sum r \quad 1 \cdot \sum r \quad x\_ : \; 1$

$$y\_ := \frac{b \cdot c}{1} \qquad s_x := \sqrt{\frac{(a - x\_)^2 \cdot r}{1}} \qquad s_y := \sqrt{\frac{(b - y\_)^2 \cdot c}{1}}$$

$$\frac{\sum^m \sum^n (a_i - x\_) \cdot (b_k - y\_) \cdot f_{ik}}{1 \cdot s_x \cdot s_y}$$

$$ym_i := \frac{(f^T)^{<i>} \cdot b}{r_i} \qquad xm_k := \frac{f^{<k>} \cdot a}{c_k}$$

$$\eta_{yx} := \sqrt{\frac{(ym - y\_)^2 \cdot r}{l \cdot s_y^2}} \qquad \eta_{xy} := \sqrt{\frac{(xm - x\_)^2 \cdot c}{l \cdot s_x^2}}$$

Определить значимость коэффициента корреляции (с уровнем значимости a) и в случае утвердительного ответа вычислить для него доверительный интервал (с надежностью y):

$$answer := if\left(\frac{|kr| \cdot \sqrt{l-2}}{\sqrt{1-kr^2}} > qt\left(1-\frac{\alpha}{2}, l-2\right), "yes", "no"\right)$$

$$z_1 := \frac{1}{2} \cdot ln\left(\frac{1+kr}{1-kr}\right) - qnorm\left(\frac{1+\gamma}{2}, 0, 1\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{l-3}}$$

$$z_2 := \frac{1}{2} \cdot ln\left(\frac{1+kr}{1-kr}\right) + qnorm\left(\frac{1+\gamma}{2}, 0, 1\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{l-3}}$$

$$int := tanh(z)$$

Задать выборочные регрессии:

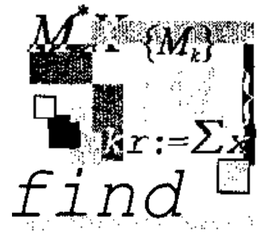
$$yr(x) := y\_ + r \cdot \frac{s_y}{s_x} \cdot (x - x\_) \qquad xr(y) := x\_ + r \cdot \frac{s_x}{s_y} \cdot (y - y\_)$$

Построить выборочную и эмпирическую линии регрессии Y по x. Для этого ввести шаблон графика. В рамке под осью абсцисс на месте метки ввести символ a_i, а в метке слева от оси ординат ввести $yr(a_i)$, ym_i. На месте меток для ввода диапазонов изменения вдоль оси $0x$ ввести $min(a)$ и $max(a)$, а на месте меток для ввода диапазонов изменения вдоль оси $0y$ ввести $min(ym)$ и $max(ym)$. Для получения необходимого изображения произвести настройку параметров рисунка. Аналогично строятся линии регрессии x по у.

К48.1. Ответы. Выборочный коэффициент корреляции равен 0.74, т. е. связь между X и Y тесная и прямая. Коэффициент корреляции значимо отличается от нуля, а его доверительный интервал равен (0.581, 0.844). Выборочные индексы корреляции равны 0.7496, 0.7424, что согласуется с предпосылками корреляционного анализа.

К48.11. Ответы. Выборочный коэффициент корреляции равен 0.872, т. е. связь между Л' и К тесная и прямая. Коэффициент корреляции значимо отличается от нуля, а его доверительный интервал равен (0.7932, 0.9215). Выборочные индексы корреляции равны 0.893, 0.8856, что согласуется с предпосылками корреляционного анализа.

К48.12. Ответы. Выборочный коэффициент корреляции равен –0.874, т. е. связь между X и Y тесная и обратная. Коэффициент корреляции значимо отличается от нуля, а его доверительный интервал равен (–0.9264, –0.7882). Выборочные индексы корреляции равны 0.9044, 0.9047 и достаточно сильно расходятся с выборочным коэффициентом корреляции.



Глава 49

Модели парной регрессии

В экономических исследованиях имеющиеся данные очень часто нельзя считать выборкой из двумерной генеральной совокупности: например, в тех случаях, когда одна из рассматриваемых переменных не является случайной. Такая односторонняя зависимость случайной зависимой величины Y от одной (парная регрессия) или нескольких (множественная регрессия) неслучайных независимых переменных рассматривается в регрессионном анализе.

Парная регрессионная модель может быть представлена в виде

$$y_x = \varphi(x) + \varepsilon_x,$$

где Y_x — зависимая случайная величина, $\varphi(x)$ — функция регрессии, x — неслучайная переменная (объясняющая переменная), ε_x — случайная величина, называемая возмущением и характеризующая отклонение с. в. Y_x от функции регрессии $\varphi(x)$.

Основные допущения регрессионного анализа: при любом x возмущение ε_x распределено по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и независящей от x дисперсией (называемой остаточной и обозначаемой σ_0^2); для любых различных x и z с. в. ε_x и ε_z независимы. Из этих допущений, в частности, следует, что

$$M(Y_x) = M(\varphi(x)) + M(\varepsilon_x) = \varphi(x), \qquad D(Y_x) = D(\varphi(x)) + D(\varepsilon_x) = \sigma_0^2.$$

Основная задача регрессионного анализа— выбор вида функции регрессии и статистический анализ ее параметров. Выбор функции регрессии производится на основании опыта предыдущих исследований, литературных источников, других соображений профессионально-теоретического характера, а также визуального наблюдения расположения точек выборки на координатной плоскости. Наиболее часто встречающиеся типы функций: полиномиальные $\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_{m-1} x^{m-1}$, линейные $\beta_0 + \beta_1 x$, гиперболические $\beta_0 + \beta_1/x$, логарифмические $\beta_0 + \beta_1 \ln(x + \beta_2)$ и т. п.

Пусть выбранная функция регрессии содержит ровно m независимых параметров $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$. Зафиксируем n значений $x_1, \ldots, x_n$ объясняющей переменной x. Тогда в качестве оценки параметров $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$ берутся такие величины $B_0, \ldots, B_{m-1}$, которые минимизируют сумму квадратов отклонений значений зависимой с. в. Y_x от соответствующих значений функции регрессии, равную

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_{x_i} - \varphi(x_i))^2 .$$

Если теперь $(x_1, y_{x_1}),\ldots,(x_n, y_{x_n})$ — выборка, состоящая из n пар наблюдений, то выборочными оценками параметров $\beta_0, \beta_1,\ldots, \beta_{m-1}$ будут числа b_0, 6,..., b_{m-1}, минимизирующие сумму квадратов

$$\sum_{i=1}^{n}(y_{x_i} - \varphi(x_i))^2 .$$

В качестве оценки функции регрессии $\varphi(x)$ берется функция $V(x)$, полученная из $\varphi(x)$ заменой параметров их оценками, а выборочная функция регрессии $v(x)$ получается из $\varphi(x)$ заменой параметров соответствующими выборочными оценками.

В качестве оценки остаточной дисперсии σ_0^2 берется случайная величина

$$S_0^2 = \sum_{i=1}^{n}(Y_{x_i} - V(x_i))^2 \Big/ (n-m),$$

а выборочная остаточная дисперсия равна

$$s_0^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_{x_i} - v(x_i))^2 \Big/ (n-m).$$

В знаменателях указано число степеней свободы $n-m$, поскольку m степеней свободы теряются при определении m параметров.

Обозначим:

$$S_y(x) = S_0^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{\sum\limits^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right), \text{ где } \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n .$$

В теории статистики известно следующее утверждение.

Теорема 49.1. Для каждого фиксированного x случайная величина

$$\frac{V(x) - \varphi(x)}{S_y(x)}$$

имеет /-распределение с $n-m$ степенями свободы.

Следствие 49.1. Доверительный интервал с надежностью /для функции регрессии $\varphi(x)$ равен

$$\left(V(x) - t_{\frac{1+\gamma}{2},\, n-m} \qquad\qquad + t_{\frac{1+\gamma}{2},\, n-m} S_y(x)\right)$$

где $t_{\frac{1+\gamma}{2},\, n-m}$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ /-распределения с n - m степенями свободы.

Доказательство см. в задаче Т49.1.

Рассмотрим частный случай линейной функции регрессии $\varphi(x) = \beta_0 + \beta_1 x$.

Теорема 49.2. Случайные величины $\frac{(B_0 - \beta_0)\sqrt{n-2}}{S_0}$, $\frac{(B_1 - \beta_1)s_x\sqrt{n-2}}{S_0}$, где $s_x^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2/(n-2)$, имеют t-распределение с $n - 2$ степенями свободы.

Следствие 49.2. Доверительные интервалы с надежностью γ для параметров β_0, β_1 равны соответственно

$$\left(B_0 - \frac{S_0}{\sqrt{n-2}}t_{\frac{1+\gamma}{2},n-2},\quad B_0 + \frac{S_0}{\sqrt{n-2}}t_{\frac{1+\gamma}{2},n-2}\right),$$

$$\left(B_1 - \frac{S_0}{s_x\sqrt{n-2}}t_{\frac{1+\gamma}{2},n-2},\quad B_1 + \frac{S_0}{s_x\sqrt{n-2}}t_{\frac{1+\gamma}{2},n-2}\right),$$

где $t_{\frac{1+\gamma}{2},n-2}$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ t-распределения с $n - 2$ степенями свободы.

Доказательство см. в задаче Т49.2.

Следствие 49.3. Если параметр β_i равен нулю (нулевая гипотеза), где $i = \{0, 1\}$, то статистика $B_i r_i$ имеет t-распределение с $n - 2$ степенями свободы; здесь $r_0 = \frac{\sqrt{n-2}}{S_0}$, $r_1 = \frac{s_x\sqrt{n-2}}{S_0}$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 49.2.

Если в качестве альтернативной гипотезы берется гипотеза H_1 = "$\beta_i \neq 0$", то, согласно общему принципу определения критической области (*см. гл. 47*) нулевая гипотеза отвергается, если статистика $|B_i|r_i$ превосходит квантиль $t_{1-\frac{\alpha}{2},n-2}$ уровня $1-\frac{\alpha}{2}$ t-распределения с $n-2$ степенями свободы. Таким образом, гипотеза о равенстве нулю параметров β_0 или β_1 линейной функции регрессии отвергается, если для выборочной оценки b_0 или b_1 этого параметра верно $\frac{|b_0|\sqrt{n-2}}{s_0} > t_{1-\frac{\alpha}{2},n-2}$ или $\frac{|b_1|s_x\sqrt{n-2}}{s_0} > t_{1-\frac{\alpha}{2},n-2}$ соответственно.

Компьютерный раздел

Встроенные функции *line, lysfit, expfit, logfit, pwrfit, sinfit* позволяют методом наименьших квадратов определить выборочные параметры линейной, логистической, экспоненциальной, логарифмической, степенной, синусоидальной функций регрессии. Выбор конкретного типа регрессионной функции определяется видом расположения выборочных точек на плоскости. Однако вид функции регрессии по имеющимся данным может быть трудно предсказуем. В этом случае целесообразней использовать встроенную функцию linfit(x, y, F). Она позволяет методом наименьших квадратов определять вектор $b^T = (b_0, b_1, \ldots, b_{m-1})$, координаты которого являются коэффициентами в представлении выборочной функции регрессии $v(z)$ в виде линейной комбинации заранее заданного набора функций $F_0(z)$, $F_1(z)$, ..., $F_{m-1}(z)$:

$$v(z) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i F_i(z) = |b^T \cdot F(z)^T|,$$

где $F(z)^T = (F_0(z), F_1(z), \ldots, F_{m-1}(z))$.

Вот один из примеров использования функции linfit(x, y, F) для заданного набора функций $F_0(z) = 1 + z^2$, $F_1(z) = z$:

$$x := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1.3 \\ 2.3 \\ 4.5 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad F(z) := \begin{pmatrix} 1 + z^2 \\ z \end{pmatrix} \qquad b := \mathrm{linfit}(x, y, F)$$

$$b = \begin{pmatrix} -0.854 \\ 5.066 \end{pmatrix} \qquad f(z) := b \cdot F(z) \qquad f(4) = 5.745$$

В данном примере выборочные (статистические) данные, содержащиеся в векторах x и y, аппроксимируются линейной комбинацией функций $1 + z^2$ и z.

Встроенная функция mean(M) определяет среднее арифметическое элементов матрицы (координат вектора) M. Встроенная функция $qt(\alpha, k)$ вычисляет квантиль уровня α t-распределения с k степенями свободы.

Задачи для самостоятельного решения

Т49.1. Доказать следствие 49.1.

Т49.2, Доказать следствие 49.2.

В задачах К49.1 -К49.10 на основе выборочных данных, содержащихся в таблицах, построить выборочные функции регрессии; определить доверительные интервалы для функции регрессии с надежностью 0.95; на уровне значимости 0.05 проверить гипотезы о равенстве нулю коэффициентов линейной функции регрессии и построить для них доверительные интервалы с надежностью 0.95. Построить соответствующие графики.

К49.1. В табл. 49.1 приведены данные о производительности труда шахтеров (т) в зависимости от мощности пласта шахты (м), характеризующие процесс добычи угля в 10 шахтах:

Таблица ***49.1***

Производительность	10	7	5	5	10	8	6	5	6	6
Мощность шахты	12	9	8.1	8.2	11	12.1	8	9.1	9.2	8.4

К49.2. Решить задачу К49.1 при условии, что статистические данные содержатся в табл. 49.2:

Таблица 49.2

Производительность	6	8	4	5	11	8	4	6	7	3
Мощность шахты	8	11	7	4	4	7.1	5	6.7	2.4	7.4

К49.3. Решить задачу К49.1 при условии, что статистические данные содержатся в табл. 49.3:

Таблица 49.3

Производительность	11	9	8	5	1	5	4	7	7	5
Мощность шахты	12	10	6	4	3	4.5	5	5.7	4.5	3

К49.4. В табл. 49.4 приведены данные о производительности труда на 14 однотипных предприятиях в зависимости от уровня автоматизации работ (%):

Таблица 49.4

Производительность	24	20	28	30	31	33	37	40	34	38	41	43	45	48
Автоматизация	30	32	36	40	41	47	54	55	56	60	61	67	69	76

К49.5. Решить задачу К49.4 при условии, что статистические данные содержатся в табл. 49.5:

Таблица 49.5

Производительность	22	23	25	31	34	35	37	42	30	38	43	44	45	49
Автоматизация	31	34	38	43	42	47	56	58	59	61	65	63	67	72

К49.6. Решить задачу К49.4 при условии, что статистические данные содержатся в табл. 49.6:

Таблица 49.6

Производительность	20	21	22	27	32	33	35	40	36	34	40	42	45	50
Автоматизация	29	30	34	40	38	45	53	56	57	61	63	58	61	68

К49.7. В табл. 49.7 содержатся статистические данные о содержании белка у (%) для некоторой культуры в зависимости от урожайности х (т):

Таблица 49.7

X	9.9	10.2	11.0	11.6	11.8	12.5	12.8	13.5	14.3	14.4
Y	10.7	10.8	12.1	12.5	12.8	12.8	12.4	11.8	10.8	10.6

К49.8. Решить задачу К49.7 при условии, что статистические данные содержатся в табл. 49.8:

Таблица 49.8

X	8.3	9.1	10.5	11.2	11.4	11.9	12.5	12.9	13.6	14.1
Y	9.1	9.5	10.1	11.2	12.2	12.5	12.1	11.3	10.2	9.2

К49.9. Решить задачу К49.7 при условии, что статистические данные содержатся в табл. 49.9:

Таблица 49.9

x	6.3	7.3	8.5	9.3	10.2	10.9	11.6	12.3	13.2	13.8
y	5.1	6.5	7.1	8.4	9.4	10.5	11.3	11.9	10.0	8.6

К49.10. В табл. 49.10 содержатся статистические данные об урожайности зерновых культур у (ц/га) в зависимости от количества осадков х (см), выпавших в вегетационный период:

Таблица 49.10

x	25	27	30	35	36	38	39	41	42	45	46	47	50	52	53
y	23	24	27	27	32	31	33	35	34	32	29	28	25	24	25

Ответы, указания, решения

Т49.1—Т49.2. Указание: воспользоваться рассуждениями, аналогичными доказательству следствия 48.1.

Общий алгоритм решения задач К49.1 — К49.10 с помощью Mathcad

Ввести исходные данные: матрицу M с двумя столбцами наблюдаемых пар значений $(x_i, y_{x_i}), = 1, \ldots,$ л; требуемые уровень значимости а для проверки статистических гипотез и уровень надежности γ для построения доверительных интервалов.

Переупорядочить элементы матрицы *м* по возрастанию элементов первого столбца: $M := csort(M, 1)$. Выделить из матрицы M вектор x значений объясняющей переменной и вектор у значений зависимой переменной: $x := M^{<0>}$ $y := M^{<1>}$.

Получить расположение точек (x_i, y_{x_i}) на координатной плоскости. Для этого надо ввести шаблон графика. В рамке под осью абсцисс на месте метки ввести символ x, а на месте метки слева от оси ординат ввести символ y. Ввести диапозоны изменения x и y: $min(x)$;$max(x)$,$min(y)$;$max(y)$. Для получения необходимого изображения на вкладке Следы (Traces) выбрать параметры

	Symbol	Line	Color	Type	Weight
trace 1	none	-	red	points	2

Далее следует воспользоваться функцией $linf(x, y, F)$, выбрав для этого набор функций 1, x, x^2, x^3, x^4, x^{-1}, $ln(|x| + 1)$. Последующей проверкой значимости параметров искомой функции регрессии можно уточнить окончательный вид выборочной функции регрессии.

Итак, следующий программный блок формирует вектор $F(z)$:

$$F(z) := \left| \begin{array}{l} for \quad i \in 0;4 \\ \qquad F_i \leftarrow z^i \\ F_5 \leftarrow z^{-1} \\ F_6 \leftarrow \ln(|z|+1) \\ F \end{array} \right.$$

Далее определить выборочную функцию регрессии:

$b := linfit(x, y, F)$ $\qquad$ $v(z) := b \cdot F(z)$

Определить доверительный интервал для функции регрессии:

$m := 1 \qquad n := length(x) \qquad s_0 := \sqrt{\dfrac{\sum_{i=0}^{n-1}(y_i - v(x_i))^2}{n-m}}$,

$$s_y(z) := s_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(z - mean(x))^2}{\sum(x - mean(x))^2}}$$

$$intl(z) := v(z) - s_y(z) \cdot qt\left(\frac{1+\gamma}{2}, n-m\right)$$

$$intr(z) := v(z) + s_y(z) \cdot qt\left(\frac{1+\gamma}{2}, n-m\right)$$

Построить графики функций $v(z)$, $intl(z)$, $intr(z)$. Можно использовать вышеприведенный график, дописав рядом с y символы $v(z)$, $intl(z)$, $intr(z)$, а рядом с x символ z. На вкладке Следы (Traces) установить следующие режимы:

	Symbol	Line	Color	Type	Weight
trace 1	none	solid	mag	lines	1
trace 2	none	solid	blue	lines	1
trace 3	none	solid	blue	lines	1

Определить значимость параметров (коэффициентов) линейной функции регрессии:

$s_x := \sqrt{\dfrac{\sum(x - mean(x))^2}{n-2}} \qquad r_0 := \dfrac{\sqrt{n-2}}{s_0} \qquad r_1 := \dfrac{s_x \cdot \sqrt{n-2}}{s_0}$

$i := 0;1$

$c := line(x, y) \qquad answer_i := \text{if}\left(|c_i \cdot r_i| > qt\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}, n-2\right), \text{"znachim"}, \text{"no"}\right).$

Обнулив незначимые выборочные параметры, определить уточненную выборочную линейную функцию регрессии:

$c_i := if(answer_i = \text{"no"}, 0, c_i) \qquad uv(z) := c_0 + c_1 \cdot z$

Для значимых выборочных параметров функции регрессии определить доверительные интервалы:

$j := 0;1 \qquad int_j := \text{if}\left(c_i = 0, 0, c_i - (-1)^j \dfrac{qt\left(\frac{1+\gamma}{2}, n-2\right)}{2}\right)$

К49.10. Выборочная функция регрессии равна:

$$v(x) = -23599 - 1759.9x + 36.6x^2 - 0.4x^3 + 0.002x^4 - \frac{118672}{x} + 15738.9ln(|x| + 1).$$

Глава 50

Линейные модели множественной регрессии

Линейная модель множественной регрессии может быть представлена в виде

$$Y_{\bar{x}} = \varphi(\bar{x}) + \varepsilon_{\bar{x}},$$

где $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{m-1}) \in R^{m-1}$, $x_1, \ldots, x_{m-1}$ — неслучайные объясняющие переменные, $Y_{\bar{x}}$ — зависимая случайная величина, $\varphi(\bar{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_{m-1} x_{m-1}$ — линейная функция регрессии, $\varepsilon_{\bar{x}}$ — случайная величина, называемая возмущением и характеризующая отклонение с. в. $Y_{\bar{x}}$ от функции регрессии. Все допущения регрессионного анализа *(см. гл. 49)* сохраняют свою силу и для этой модели.

Зафиксируем n наборов (векторов) значений объясняющих переменных: $\bar{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{i\,m-1})$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда в качестве оценок параметров $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$ берутся случайные величины $B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}$, минимизирующие сумму квадратов отклонений значений зависимой с. в. $Y_{\bar{x}}$ от соответствующих значений функции регрессии, т. е. сумму

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_{\bar{x}_i} - \varphi(\bar{x}_i))^2 \qquad (50.1)$$

Поскольку оценки $B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}$ минимизируют сумму (50.1), то они являются несмещенными оценками коэффициентов $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$ (этот факт доказывается в теории статистики).

Перейдем к матрично-векторной форме записи. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \ldots & x_{1,m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{i1} & \ldots & x_{i,m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n1} & \ldots & x_{n,m-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \ldots \\ \beta_{m-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} Y_{\bar{x}_1} \\ \ldots \\ Y_{\bar{x}_n} \end{pmatrix}, \quad \bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\bar{x}_1} \\ \ldots \\ \varepsilon_{\bar{x}_n} \end{pmatrix}$$

В этих обозначениях сумма в (50.1) равна $|\bar{Y} - A\bar{\beta}|^2$, а линейная модель множественной регрессии предстанет в виде $\bar{Y} = A\bar{\beta} + \bar{\varepsilon}$. Если теперь $(\bar{x}_1, y_{\bar{x}_1}), \ldots, (\bar{x}_n, y_{\bar{x}_n})$ —

выборка, состоящая из n наблюдений, то выборочными коэффициентами функции регрессии будут называться числа $b_0, b_1, ..., b_{m-1}$, минимизирующие величину $|\bar{y}-A\bar{b}|^2$, где $\bar{y}^{\mathrm{T}} = (y_{\bar{x}_1}, ..., y_{\bar{x}_n})$, $\bar{b}^{\mathrm{T}} = (b_0, ..., b_{m-1})$. В моделях множественной регрессии еще одним допущением является линейная независимость столбцов матрицы A. Поэтому в силу теоремы 8.1 $\bar{b} = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}\bar{y}$.

В качестве оценки функции регрессии $\varphi(\bar{x})$ берется функция $V(\bar{x})$, полученная из φ заменой коэффициентов соответствующими оценками. Выборочная функция регрессии $v(\bar{x})$ получается из $\varphi(\bar{x})$ заменой коэффициентов соответствующими выборочными коэффициентами. Оценкой остаточной дисперсии $\sigma_0^2 = D(\varepsilon_{\bar{x}})$ является с. в. $S_0^2 = \dfrac{|\bar{Y}-A\bar{B}|^2}{n-m}$, где $\bar{B}^{\mathrm{T}} = (B_0, B_1, ..., B_{m-1})$, а выборочной остаточной дисперсией является величина $s_0^2 = \dfrac{|\bar{y}-A\bar{b}|^2}{n-m}$.

Обозначим через KO_{ik} ковариацию оценок B_i и B_k: $KO_{ik} = M((B_i-\beta_i)(B_k-\beta_k))$ ввиду несмещенности оценок $M(B_i) = \beta_i$, $M(B_k) = \beta_k$. Очевидно, что $KO_{ii} = D(B_i)$.

Определение

Ковариационной матрицей рассматриваемой регрессионной модели называется квадратная матрица KO порядка m, на позиции (i, k) которой находится число KO_{ik}, $i = 0, ..., m-1$, $k = 0, ..., m-1$ (в матрице KO нумерацию строк и столбцов удобно начинать с нуля).

Очевидно, $KO = M((\bar{B}-\bar{\beta})(\bar{B}-\bar{\beta})^{\mathrm{T}})$.

Теорема 50.1. $KO = \sigma_0^2(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$.

Доказательство теоремы дано в задаче Т50.1.

Ввиду теоремы 50.1 в качестве оценки ковариационной матрицы берется случайная матрица $S_0^2(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$, а матрица $s_0^2(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$ называется выборочной ковариационной матрицей.

В теории статистики известен следующий аналог теоремы 49.2.

Теорема 50.2. Случайные величины $\dfrac{B_i-\beta_i}{S_{0i}}$, где $i = 1, ..., m-1$, $(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}_{ii}$ — $(i+1)$-й элемент главной диагонали матрицы $(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$, имеет t-распределение с $n-m$ степенями свободы.

Аналогами следствий 49.2 и 49.3 являются следствия 50.1 и 50.2.

Следствие 50.1. Доверительные интервалы с надежностью γ для параметров β_i равны соответственно

$$\left(B_i - S_0\sqrt{(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}_{ii}}\,t_{\frac{1+\gamma}{2},\,n-m},\ B_i + S_0\sqrt{(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}_{ii}}\,t_{\frac{1+\gamma}{2},\,n-m}\right),\ i = 1, ..., m-1,$$

где $t_{\frac{1+\gamma}{2}, n-m}$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ t-распределения с $n-m$ степенями свободы.

Следствие **50.2.** Если параметр β_i равен нулю (нулевая гипотеза), где $i \in \{1, 2, ..., m-1\}$, то статистика $B_i / S_0\sqrt{(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}_{ii}}$ имеет t-распределение с $n-m$ степенями свободы.

Таким образом, гипотеза о равенстве нулю параметра β_i функции регрессии отвергается (с уровнем значимости α), если для выборочного коэффициента b_i верно неравенство

$$\frac{|b_i|}{s_0\sqrt{(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}_{ii}}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-m},$$

где $i=1, ..., m-1$, $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-m}$ — квантиль уровня $1-\frac{\alpha}{2}$ t-распределения с $n-m$ степенями свободы.

Задачи для самостоятельного решения

Т50.1. Доказать, что $\overline{B} - \overline{\beta} = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}\overline{\varepsilon}$, $\overline{(B - \beta)}^{\mathrm{T}} = \overline{\varepsilon}^{\mathrm{T}}A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$.

Т50.2. Доказать теорему 50.1.

Общая формулировка задач К50.1 — К50.13

В задачах К50.1 -К50.13 на основе выборочных данных, содержащихся в таблицах, построить выборочные функции регрессии; на уровне значимости 0.05 проверить гипотезы о равенстве нулю коэффициентов функций регрессии и построить для них доверительные интервалы с надежностью 0.95.

В табл. 50.1–50.10 содержатся данные о производительности труда шахтеров (т) в зависимости от мощности пласта шахты (м) и уровня механизации работ (%), характеризующие процесс добычи угля в шахтах.

К50.1.

Таблица. 50.1

Производительность	5	10	10	7	5	6	6	5	6	8
Мощность пластов	8	11	12	9	8	8	9	9	8	12
Уровень механизации	5	8	8	5	7	8	6	4	5	7

К50.2.

Таблица. 50.2

Производительность	4	6	7	4	5	8	9	7	6	5
Мощность пластов	5	10	9	11	8	7	8	9	6	9
Уровень механизации	4	7	8	3	8	9	5	4	3	5

К50.3.

Таблица. 50.3

Производительность	6	8	9	7	9	6	7	5	8	9
Мощность пластов	7	10	11	10	9	7	9	7	8	10
Уровень механизации	6	9	10	8	6	8	7	6	5	4

К50.4.

Таблица.50.4

Производительность	7	9	10	11	8	7	6	5	4	7
Мощность пластов	10	8	7	8	9	10	9	7	8	10
Уровень механизации	7	8	9	10	9	8	9	7	6	7

К50.5.

Таблица. 50.6

Производительность	7	8	11	8	10	7	6	9	5	8
Мощность пластов	10	8	7	9	6	10	9	7	8	10
Уровень механизации	9	6	5	7	9	5	6	10	5	8

К50.6.

Таблица. 50.6

Производительность	4	7	8	7	5	6	8	5	9	10
Мощность пластов	6	8	9	10	9	7	7	11	9	10
Уровень механизации	4	6	7	7	6	8	11	8	7	10

К50.7.

Таблица. 50.7

Производительность	6	11	11	7	6	7	8	6	8	9
Мощность пластов	8	10	11	8	7	8	10	7	8	10
Уровень механизации	7	8	9	10	9	8	7	5	7	8

К50.8.

Таблица. 50.8

Производительность	3	5	7	2	5	4	3	2	5	7
Мощность пластов	7	9	10	7	8	9	6	7	8	10
Уровень механизации	4	7	7	5	7	9	7	5	6	8

К50.9.

Таблица. 50.9

Производительность	6	9	8	7	6	9	10	8	6	5
Мощность пластов	5	7	9	6	7	10	9	7	8	6
Уровень механизации	7	8	9	5	7	7	5	4	6	7

К50.10.

Таблица. 50.10

Производительность	10	8	6	7	9	6	10	8	6	11
Мощность пластов	9	10	8	9	6	5	10	9	6	7
Уровень механизации	6	10	8	fi	10	8	7	5	6	8

К50.11. В табл. 50.11 приведены данные по 25 литейным цехам о производительности (т) и браке литья (%), а также зависящей от них себестоимости одной тонны литья (руб.).

Таблица. 50.11

Производительность	14.6	13.5	21.5	17.4	44.8	111.9	20.1	28.1	22.3	25.3
Брак	4.2	6.7	5.5	7.7	1.2	2.2	8.4	1.4	4.2	0.9
Себестоимость	239	254	262	251	158	101	259	186	204	198
Производительность	56	40.2	40.6	75.8	27.6	88.4	16.6	33.4	17.0	33.1
Брак	1.3	1.8	3.3	3.4	1.1	0.1	4.1	2.3	9.3	3.3
Себестоимость	170	173	197	172	201	130	251	195	282	196
Производительность	30.1	65.2	22.6	33.4	19.7					
Брак	3.5	1.0	5.2	2.3	2.7					
Себестоимость	186	176	238	204	205					

К50.12. Данные о годовых ставках доходов по четырем акциям за 12 месяцев содержатся в табл. 50.12

Таблица. 50.12

Акция *A*	5.4	5.3	4.9	4.9	5.4	6.0	6.1	6.2	5.3	5.3	5.1	5.8
Акция *B*	6.3	6.2	6.1	5.8	5.7	5.7	5.2	5.3	5.2	5.3	5.0	4.7
Акция *C*	9.2	9.2	9.1	9.0	8.7	8.6	8.6	8.6	8.6	8.2	8.1	8.0
Акция *D*	7.1	7.2	7.4	7.6	7.4	7.3	7.2	7.4	6.9	6.7	6.8	6.4

При этом есть основания полагать, что доходы по акции D зависят от доходов по акциям A, B и C.

К50.13. В табл. 50.13 приведены данные для девяти групп семей по расходам на питание (руб.) в зависимости от душевого дохода семей (руб.) и из размера.

Таблица. 50.13

Душевой доход	628	1577	2659	3701	4796	5926	7281	9350	18807
Расходы на питание	433	616	900	1113	1305	1488	1645	1914	2411
Размер семьи	1.5	2.1	2.7	3.2	3.4	3.6	3.7	4.0	3.7

Ответы, указания, решения

T50.1. Обозначим через C матрицу $A^{\mathrm{T}}A$. По теореме 8.1 $\overline{B} = C^{-1}A^{\mathrm{T}}\overline{Y}$. Далее применяется теорема 3.1:

$$\overline{B} = C^{-1}A^{\mathrm{T}}(A\beta + \overline{\varepsilon}) = C^{-1}C\beta + C^{-1}A^{\mathrm{T}}\overline{\varepsilon} = \beta + C^{-1}A^{\mathrm{T}}\overline{\varepsilon},$$

откуда $\overline{B} - \overline{\beta} = C^{-1}A^{\mathrm{T}}\overline{\varepsilon}$. Так как $C^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A = C$ и по определению обратной матрицы $CC^{-1} = E$, то $(CC^{-1})^{\mathrm{T}} = E^{\mathrm{T}}$, $(C^{-1})^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} = E$, $(C^{-1})^{\mathrm{T}}C = E$, откуда по следствиям 6.3, 6.4 $(C^{-1})^{\mathrm{T}} = C^{-1}$. В итоге имеем:

$$(\overline{B} - \overline{\beta})^{\mathrm{T}} = (C^{-1}A^{\mathrm{T}}\overline{\varepsilon})^{\mathrm{T}} = \overline{\varepsilon}^{\mathrm{T}}A(C^{-1})^{\mathrm{T}} = \overline{\varepsilon}^{\mathrm{T}}AC^{-1}.$$

T50.2. Применим утверждение задачи T50.1:

$$KO = M((\overline{B} - \overline{\beta})(\overline{B} - \overline{\beta})^{\mathrm{T}}) = M(C^{-1}A^{\mathrm{T}}\overline{\varepsilon}\overline{\varepsilon}^{\mathrm{T}}AC^{-1}) = C^{-1}A^{\mathrm{T}}M(\overline{\varepsilon}\cdot\overline{\varepsilon}^{\mathrm{T}})AC^{-1}$$

Но $\overline{\varepsilon}\cdot\overline{\varepsilon}^{\mathrm{T}}$ — матрица порядка я, в которой на позиции (i, k) находится случайная величина $\varepsilon_{\overline{x}_i}\varepsilon_{\overline{x}_k}$. На основании допущений регрессионного анализа $M(\varepsilon_{\overline{x}_i}\varepsilon_{\overline{x}_k}) = 0$ при $i \neq k$ и $M(\varepsilon^2_{\overline{x}_i}) = M(\varepsilon_{\overline{x}_i} - M(\varepsilon_{\overline{x}_i}))^2 = D(\varepsilon_{\overline{x}_i}) = \sigma_0^2$. Следовательно, матрица $M(\varepsilon_{\overline{x}_i}\varepsilon_{\overline{x}_k})$ равна диагональной матрице σ_0^2E. В итоге имеем:

$$KO = C^{-1}A^{\mathrm{T}}\sigma_0^2EAC^{-1} = \sigma_0^2(C^{-1}A^{\mathrm{T}}AC^{-1}) = \sigma_0^2C^{-1}$$

Общий алгоритм решения задач **K50.1–K50.13** с помощью **Mathcad**

Ввести исходные данные: матрицу *Tab,* содержащую выборочные данные (i-я строка матрицы *Tab* содержит числа $\overline{y}_{\overline{x}_i}, x_{i1}, \ldots, x_{i,m-1}$); требуемые уровень значимости а для проверки статистических гипотез и уровень надежности у для построения доверительных интервалов; число k объясняющих переменных.

Сформировать матрицу *A,* предварительно выделив из *Tab* выборочные данные для каждой из переменных y, $x_1, \ldots, x_k$:

$y := Tab^{\langle 0\rangle}$ $\quad x1 := Tab^{\langle 1\rangle}$ $\quad x2 := Tab^{\langle 2\rangle}$ . . . . $xk := Tab^{\langle k\rangle}$

$n := length(y)$ $\quad i := 0; n-1$ $\quad I_i := 1$ $\quad A := augment(I, x1, \ldots, xk)$

Определить выборочные коэффициенты, остаточную дисперсию и ковариационную матрицу:

$$b := (A^{\mathrm{T}}\cdot A)^{-1}\cdot A^{\mathrm{T}}\cdot y \qquad s_0 := \sqrt{\frac{\sum(y - A\cdot b)^2}{n-m}} \qquad KO := s_0^2\cdot(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$$

Определить значимые коэффициенты функции регрессии и построить для них доверительные интервалы:

$m := k+1$ $\quad i := 1; m-1$ $\quad j := 0; 1$

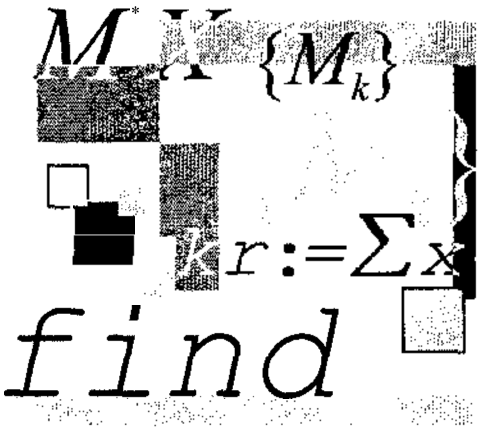
$$answer_i := if\left(\frac{b_i}{\sqrt{KO_{i,i}}} > qt\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-m\right), \text{"znachim"}, \text{"no"}\right)$$

$$int_{i,j} := if\left(answer_i = \text{"no"},\ 0,\ b_i - (-1)^j \cdot \sqrt{KO_{i,i}} \cdot qt\left(\frac{1+\gamma}{2}, n-m\right)\right)$$

К50.1. Ответы. Выборочная функция регрессии равна $-3.539+0.854x_1+0.367x_2$. Выборочная ковариационная матрица равна

$$\begin{pmatrix} 3.635 & -0.292 & -0.126 \\ -0.292 & 0.049 & -0.026 \\ -0.126 & -0.026 & 0.059 \end{pmatrix}$$

Доверительный интервал для значимого коэффициента β_1 равен (0.333, 1.375); коэффициент β_2 не значимо отличается от нуля.



Приложение

Основной инструментарий Mathcad

Эта часть является дополнением к компьютерным разделам предыдущих глав, поскольку описывает интерфейсные возможности Mathcad, способы редактирования и форматирования формул и результатов вычислений. При отборе материала для этой части авторы старались не выходить за рамки данной книги, очерченные содержанием ее компьютерных разделов.

Приложение 1

Окно редактирования и панели инструментов

Пользовательский интерфейс Mathcad создан таким образом, чтобы пользователь, имеющий элементарные навыки работы с Windows-приложениями, мог бы сразу начать работу с Mathcad. Интерфейс системы внешне напоминает интерфейс широко известного текстового редактора Word. Поэтому в приложении мы не будем останавливаться на тех элементах, которые присущи многим оболочкам Windows.

Окно редактирования

После запуска пакета Mathcad на экране появляется окно редактирования Mathcad-документа (рис. П1.1). Это окно получает название **Безымянный:k** (Untitled:k), где *k* — порядковый номер окна (вначале открывается окно с номером 1). В окне редактирования присутствует курсор ввода, который может принимать различные формы. Три основных формы курсора ввода: красный крестик — предназначен для указания на рабочем листе места ввода формул, текстов или графиков; синий уголок "клюшка" — предназначен для указания места ввода очередного символа или алгебраической операции в формульной области; красная вертикальная черточка — предназначена для указания ввода очередного символа в текстовой области. Красный курсор ввода устанавливается мышью. Для этого надо подвести ее указатель в нужное место рабочего листа и щелкнуть левой кнопкой мыши.

В окне редактирования при использовании полос прокрутки обнаруживаются тусклые горизонтальные и одна вертикальная линии. Горизонтальные линии делят рабочий лист на экранные страницы, которые нумеруются сверху вниз. Вертикальные линии учитываются только при распечатке Mathcad-документа на принтере: в этом случае между двумя последовательными горизонтальными линиями помешается две страницы, разделенные вертикальной линией, а сами страницы нумеруются слева направо.

Все записи Mathcad-документа представляются в виде блоков. Если щелкнуть левой кнопкой мыши по данным внутри блока, то он будет выделен рамкой черного цвета. Любой блок можно перемещать по документу. Для этого выделите блок щелчком левой кнопки и, перемещая мышь, добейтесь появления указателя в виде кисти руки, затем нажмите левую кнопку мыши и, не отпуская ее, переместите блок в нужное место.

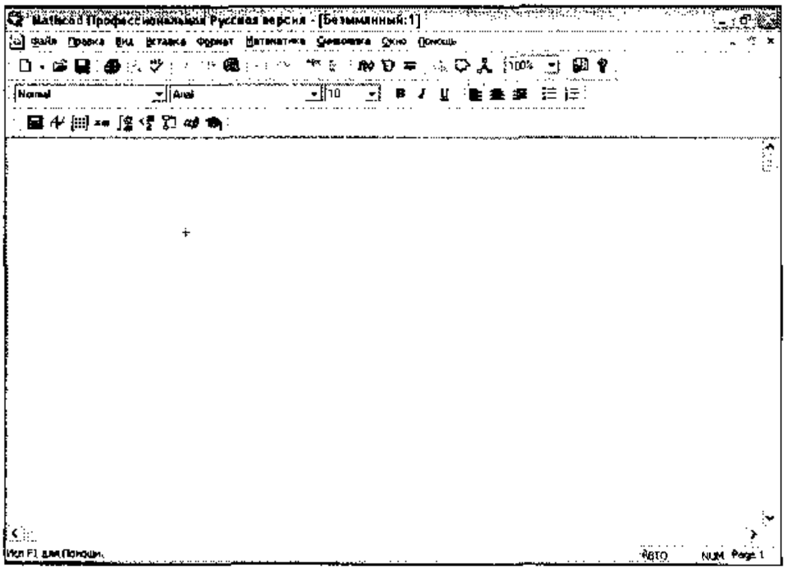


Рис. П1.1. Окно редактирования Mathcad

Панели инструментов

Панели инструментов позволяют выполнять наиболее часто используемые команды щелчком левой кнопки мыши по соответствующей кнопке-пиктограмме. Благодаря этому становится ненужным утомительный поиск в меню наиболее часто используемых команд. Mathcad 2001 имеет три панели инструментов — Стандартную (Standard), **Форматирования** (Formatting) и **Математики** (Math), изображенные на рис. П1.2.

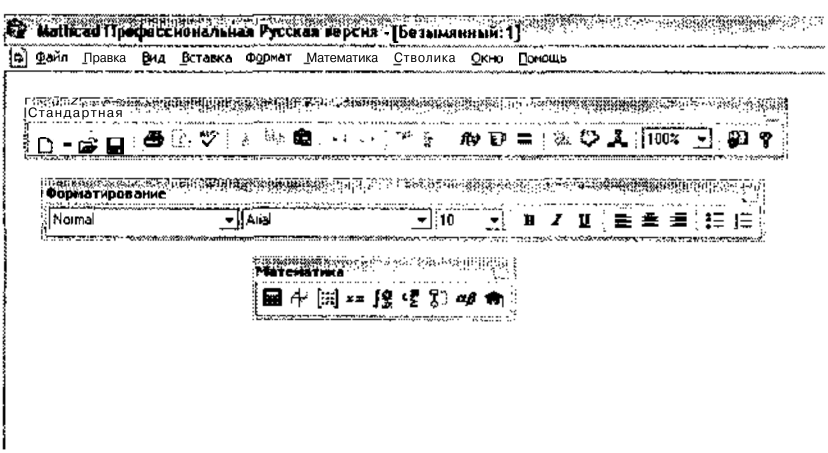


Рис. П1.2. Панели инструментов

Панели также можно расположить друг под другом сразу под строкой меню, как это показано на рис. ГЛ.]. Чтобы установить панель в нужном месте экрана, достаточно щелкнуть на ее названии и, удерживая левую кнопку мыши, переместить указатель, а вместе с ним и панель, в это место.

Панель инструментов Стандартная

Панель инструментов **Стандартная** (Standard) содержит 21 кнопку и один раскрывающийся список 100% для выбора масштаба изображения Mathcad-документа на экране.

Перечислим соответствия кнопок этой панели командам меню из *приложения 4,* в котором эти команды описаны более подробно.

— создание нового документа. Соответствует команде **Новый** (New) меню **Файл** (File) без вызова диалогового окна **Новый** (New). По этой кнопке стиль документа определяется файлом Normal.mct.

— загрузка ранее созданного документа в виде файла. Соответствует команде **Открыть** (Open) меню **Файл** (File).

H — запись текущего документа в файл под текущим именем. Соответствует команде **Сохранить** (Save) меню **Файл** (File).

— распечатка документа на принтере. Соответствует команде **Печать** (Print) меню **Файл** (File).

— предварительный просмотр документа перед печатью в том виде, в котором он будет распечатан. Соответствует команде **Просмотр печати** (Print Preview) меню **Файл** (File).

— проверка орфографии (действует только для англоязычных документов). Соответствует команде **Проверка орфографии** (Check Spelling) меню **Правка** (Edit).

— перенос выделенной части документа в буфер обмена с удалением этой части из документа. Соответствует команде **Вырезать** (Cut) меню **Правка** (Edit).

\- - копирование выделенной части документа в буфер обмена с сохранением выделенной части в документе. Соответствует команде **Копировать** (Copy) меню **Правка** (Edit).

— перенос содержимого буфера обмена в окно редактирования на место, в котором находится курсор. Соответствует команде **Вставить** (Paste) меню **Правка** (Edit).

— отмена предшествующей операции редактирования. Соответствует команде **Отменить** (Undo) меню **Правка** (Edit).

 — восстановление отмененной операции редактирования. Соответствует команде **Восстановить** (Redo) меню **Правка** (Edit).

 — выравнивание выделенных блоков по горизонтали. Соответствует команде **Привязать регионы** (Align Regions) меню **Формат** (Format).

 — выравнивание выделенных блоков по вертикали. Соответствует команде **Привязать регионы** (Align Regions) меню **Формат** (Format).

 —вставка функции из списка, появляющегося в диалоговом окне. Соответствует команде **Функция** (Function) меню **Вставка** (Insert).

 — вставка единиц измерения. Соответствует команде **Юнит** (Unit) меню **Вставка** (Insert).

 — вычисление выделенного выражения. Соответствует команде **Вычислить** (Calculate) меню **Математика** (Math).

 — вставка гиперссылок на файлы. Соответствует команде **Гиперссылка** (Hyperlink) меню **Вставка** (Insert).

 — вставка компонентов других систем. Соответствует команде Компонент (Component) меню **Вставка** (Insert).

 — Запуск системы MathConnex.

 — открытие доступа к центру ресурсов. Соответствует команде **Центр Ресурсов** (Resource Center) меню **Помощь** (Help).

 — запуск справочной базы данных. Соответствует команде **Помощь по Mathcad** (Mathcad Help) меню **Помощь** (Help).

Панель инструментов Форматирование

Панель инструментов **Форматирование** (Formatting) содержит 8 кнопок и три раскрывающихся списка. Перечислим их.

— раскрывающийся список изменения текущего стиля документа, переменных или констант. При работе со стандартным шаблоном Normal.mct и чистым рабочем листом этот список содержит только один элемент *Normal.* При выделении константы, переменной или текста синим курсором ввода список заменяется на список, аналогичный диалоговому окну команды **Вычисление** (Equation) меню **Формат** (Format). Это позволяет для выделенного синим курсором элемента использовать любой стиль с названием из этого раскрывающегося списка, не прибегая к вызову команды **Вычисление** (Equation).

Arial — раскрывающийся список шрифтов, используемых при отображении констант, переменных или текста. По умолчанию переменные, константы и текст отображаются шрифтом Times New Roman:

$\mathrm{factor} := 12 \qquad A := \mathrm{factor} + 14 \qquad A = 26$

Для изменения шрифта при отображении, например, всех переменных в документе, выделите синим уголком одну из переменных и в раскрывающемся списке выберите нужное название шрифта, например, italic:

$factor := 12 \qquad A := factor + 14 \qquad A = 26$

10 — раскрывающийся список для отображения и изменения размеров символов в пунктах при отображении констант, переменных или текста.

B — полужирное начертание символов при отображении констант, переменных и текста.

I — наклонное начертание символов при отображении констант, переменных и текста.

U — подчеркнутое начертание символов при отображении констант, переменных и текста.

 — выравнивание текста по левой границе текстового блока:

Это текстовый блок, который образуется
при наборе нескольких слов текста.
Для выравнивания выделите нужный текст и нажмите
соответствующую кнопку на панели форматирования.

 — выравнивание текста по центру текстового блока.

 — выравнивание текста по правой границе текстового блока.

 — создание ненумерованного списка в текстовых блоках.

 — создание нумерованного списка в текстовых блоках:

Это блок текста. Дальше идет нумерованный список:

1. текст 1
2. текст 2
3. текст 3

Панель инструментов Математика

Панель инструментов **Математика** (Math) содержит 9 кнопок для вызова подпанелей, часть из которых подробно описана в компьютерных разделах глав.

Кнопка вызывает подпанель Калькулятор (Calculator) (рис. П 1.3) для ввода арифметических операций и некоторых наиболее часто используемых функций.

Рис. П1.3. Подпанель Калькулятор

Кнопка вызывает подпанель **Графики** (Graph) (рис. П1.4) для построения двухмерных и трехмерных графиков.

Рис. П1.4. Подпанель Графики

Кнопка вызывает подпанель **Матрица** (Matrix) (рис. П1.5) для ввода и обработки векторов и матриц.

Рис. П1.5. Подпанель Матрица

Кнопка вызывает подпанель **Оценка** (Evaluation) (рис. П1.6) для ввода знаков присваивания и равенства, а также для задания собственных операторов различных видов.

Рис. П1.6. Подпанель Оценка

Кнопка  вызывает подпанель **Исчисление** (Calculus) (рис. П1.7) для вычисления производных, интегралов, сумм, произведений и пределов.

Рис. П1.7. Подпанель Исчисление

Кнопка  вызывает подпанель **Логические** (Boolean) (рис. П1.8) для ввода логических операторов булевой алгебры.

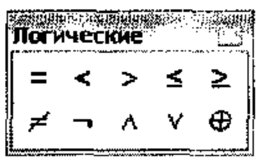


Рис. П1.8. Подпанель Логические

Кнопка  вызывает подпанель **Программирование** (Programming) (рис. П1.9) для ввода операторов программирования.

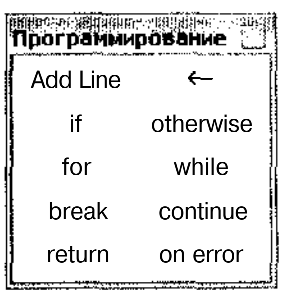


Рис. П1.9. Подпанель Программирование

Кнопка вызывает подпанель Греческие (Greek) (рис. ШЛО) для ввода греческих букв.

Рис. П1.1O. Подпанель **Греческие**

Кнопка вызывает подпанель **Символика** (Symbolic) (рис. П1.11) для символьных вычислений.

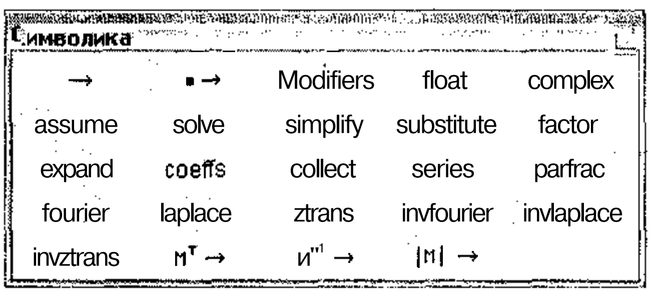


Рис. П1.11. Подпанель **Символика**

Приложение2

Константы, переменные, выражения

Формулы с константами

Константы в Mathcad могут быть действительными и комплексными числами. Действительные константы могут иметь знак "+" или "-", которые без пробела ставятся перед числом. Знак "+" можно не указывать. Дробная часть константы отделяется от целой части точкой. Если необходимо ввести константу с порядком (например $-1.2\cdot 10^{-2}$), то она формируется в виде формулы, в которой константа -1.2 умножается на 10^{-2}. Комплексная константа представляется в виде суммы (разности) действительной и мнимой частей. При этом за мнимой частью константы без какого-либо знака операции ставится символ i, который вводится непосредственно с клавиатуры (прописная буква) или с подпанели **Калькулятор** (Calculator).

В Mathcad имеется несколько зарезервированных имен констант. Это число *п,* которое вводится с подпанели **Калькулятор** (Calculator); основание натурального логарифма, которое вводится клавишей <е>; значение 0.01 для вычисления процентов, которое вводится клавишей <%>; значение компьютерной бесконечности (это число 10^{307}), которое вводится кнопкой |co | подпанели **Исчисление** (Calculus).

Рассмотрим формирование математических формул из констант.

Откройте подпанель **Калькулятор** (Calculator) и подпанель **Оценка** (Evaluation) .

Наберите формулу: *2+3=*. После нажатия клавиши <=> справа от знака = появится результат вычисления формулы — число 5. Отметим, что все символы формулы вводятся с клавиатуры или кнопками подпанели Калькулятор (Calculator).

Наберите формулу *1.25*2. 44=*. Справа от знака равенства появится результат вычисления формулы — число 3. *05.* Знак умножения, вводимый с помощью подпанели **Калькулятор** (Calculator), соответствует символу |x |.

Наберите выражение *1.5/8*, при этом на экране появится формула в привычном в математике виде; $\frac{1.5}{8}$. При наборе подобных и более сложных формул необходимо следить за синим курсором ввода в виде уголков __| или |___, окаймляющих часть формулы. Изменение окаймления осуществляется клавишей <пробел> клавиатуры. Изменение___| на j__, и наоборот, выполняется клавишей <Ins>, а продвижение синего курсора выполняется клавишами <→> и «—>. Более детально использование синего курсора ввода и правила редактирования формул будут рассмотрены в *приложение 3.* В данном случае после нажатия клавиши <пробел> формула примет вид: $\boxed{\frac{1.5}{8}}$. После нажатия клавиши <=> получится результат: *0.188.*

На подпанели **Калькулятор** (Calculator) имеются два символа операции деления — $\boxed{\div}$ и $\boxed{/}$. При использовании операции деления $\boxed{\div}$ формула не представляется в привычном виде (см. выше операцию деления с использованием символа $\boxed{/}$), а записывается в строчку, как это показано ниже:

$$(5 + 4) \div 10 = 0.9$$

При формировании формул с комплексными числами необходимо помнить, что комплексную константу надо рассматривать как формулу и поэтому нужным образом позиционировать синий курсор ввода. Пример формулы с использованием комплексных чисел приведен ниже:

$$(2 + 3i) \cdot (3 + 4i) = -6 + 17i$$

При наборе этой формулы выполнялась следующая последовательность действий:

1. Вводим первое комплексное число: $\boxed{2 + 3i}$.
2. Нажатием клавиши <пробел> окаймляем правым уголком синего курсора все комплексное число: $\boxed{2 + 3i}$.
3. Нажатием клавиши <*> вводим операцию умножения: $\boxed{(2+3i) \cdot \blacksquare}$.
4. Вводим круглые скобки для второго комплексного числа: $\boxed{(2 + 3i) \cdot (\blacksquare)}$.
5. Вводим второе комплексное число: $\boxed{(2+3i) \cdot (3+4i)}$.
6. Трехкратным нажатием клавиши <пробел> окаймляем всю формулу правым синим уголком: $\boxed{(2+3i) \cdot (3+4i)}$.
7. Нажимаем клавишу <=> для вывода результата вычислений.

При формировании формул с целыми числами результат формулы может представляться в виде действительного числа (по умолчанию) или в виде смешанной или обыкновенной дроби. Пример формулы с целыми числами приведен ниже:

$$2 \cdot \frac{17}{3} = 11.333$$

Для представления результата вычислений в виде обыкновенной дроби, двойным щелчком левой кнопки мыши на этом результате вызовите диалоговое окно **Формат Результата** (Result Format) (рис. П2.1). Перейдите на вкладку **Формат Номеров** (Number Format) и в списке **Формат** (Format) выберите **Дробь** (Fraction), отключите опцию **Смешанные номера** (Use mixed numbers). После закрытия кнопкой **OK** диалогового окна **Формат Результата** (Result Format) результат вычисления будет представлен в виде обыкновенной дроби:

$$2 \cdot \frac{17}{3} = \frac{34}{3}$$

Для представления результата вычислений в виде смешанной дроби. необходимо включить опцию **Смешанные номера** (Use mixed numbers):

$$\boxed{2\frac{17}{3} = 11\frac{1}{3}}$$

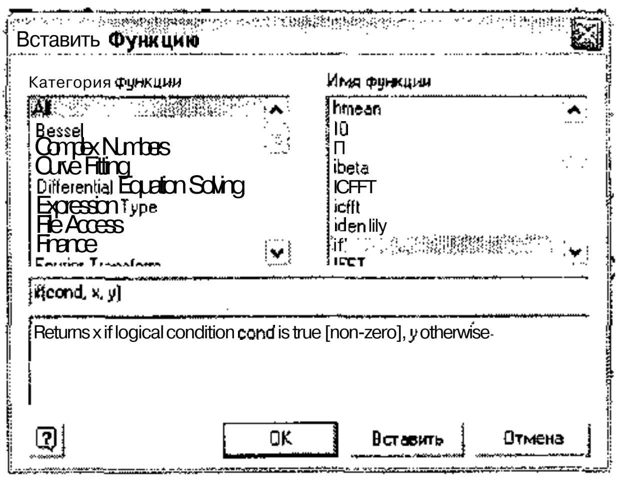


Рис. П2.1. Диалоговое окно Формат Результата

При формировании формул можно использовать математические функции подпанели **Калькулятор** (Calculator) или кнопку f(x) стандартной панели инструментов. Так, если вы щелкните мышью на **sin** подпанели **Калькулятор** (Calculator), то в документе на соответствующем месте появится шаблон $\boxed{\sin(\blacksquare)}$, на месте метки которого необходимо ввести аргумент функции. Пример формулы с использованием функций:

$$\frac{1.2 + 2 \cdot \sin(3)}{2.2 + \tan(2)} = 99.079$$

По умолчанию результат всех вычислений представляется в виде действительного числа и вычисляется с точностью до 3 знаков после запятой. Точность вычислений можно изменить. Для этого двойным щелчком левой кнопки мыши на результате вычислений вызовите диалоговое окно **Формат Результата** (Result Format) (см. рис. П2.1). Выберите закладку **Формат Номеров** (Number Format), тип формата **Главное** (General) и в поле ввода **Кол-во десят. точек** (Number of decimal places) укажите нужное число значащих цифр результата (например 6). Пример результата вычислений с точностью до 6 десятичных знаков после запятой будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{1.2 + 2 \cdot \sin(3)}{2.2 + \tan(2)} = 99.079309$$

При записи формул особое внимание надо обратить на операцию возведения функций в степень. На рабочем листе Mathcad эта операция всегда ставится за закрывающейся скобкой, ограничивающей аргумент (аргументы) функции, в отличие от общепринятого обозначения показателя степени непосредственно за именем функции. Так, формула

$$\frac{2.2 + \sin^3 3.1 + \cos 1.5^2}{4.2 + \sin^2 \dfrac{1}{2.6}}$$

в Mathcad будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{2.2 + \sin(3.1)^3 + \cos(1.5^2)}{4.2 + \sin\left(\dfrac{1}{2.6}\right)^2} = 0.362$$

Приведем последовательность действий при наборе этой формулы:

1. Вводим фрагмент числителя: $\boxed{2.2 + \sin(3.1)}$.
2. Окаймляем синим правым уголком выражение sin(3.1): $\boxed{2.2 + \sin(3.1)}$.
3. Клавишей <^> или кнопкой $\boxed{x^Y}$ подпанели **Калькулятор** (Calculator) вводим показатель степени: $\boxed{2.2 + \sin(3.1)^{■}}$, $\boxed{2.2 + \sin(3.1)^{3}}$, $\boxed{2.2 + \sin(3.1)^{3}}$.
4. Вводим оставшуюся часть числителя: $\boxed{2.2 + \sin(3.1)^3 + \cos(1.5^2)}$.
5. Окаймляем правым синим уголком все выражение числителя $\boxed{2.2 + \sin(3.1)^3 + \cos(1.5^2)}$.

6. Вводим операцию деления "/": $\frac{2.2+\sin(3.1)^3+\cos\left(1.5^2\right)}{\blacksquare}$.

7. Вводим знаменатель: $\frac{2.2+\sin(3.1)^3+\cos\left(1.5^2\right)}{4.2+\sin\left(\frac{1}{2.6}\right)^2}$.

8. Для получения результата вычислений нажимаем клавишу <=>:

$$\frac{2.2+\sin(3.1)^3+\cos\left(1.5^2\right)}{4.2+\sin\left(\frac{1}{2.6}\right)^2}=0.362$$

Переменные и формулы с переменными

Имена переменных и функций называются идентификаторами. Идентификаторы в Mathcad могут иметь практически любую длину. Они состоят из символов, каждый из которых может быть буквой (в том числе и греческой), а также цифрой. При этом первым символом должна быть буква. Допускаются и некоторые специальные символы, например, знак подчеркивания "_". Строчные и прописные буквы различаются. Идентификаторы должны быть уникальными, т. е. они не должны совпадать с именами встроенных функций и функций, определенных пользователем. В Mathcad идентификатор может содержать подстрочные символы, т. е. в нем некоторые последние символы, являющиеся составной частью этого идентификатора, могут быть набраны в виде "нижних индексов". Перед вводом подстрочных символов необходимо нажать клавишу <.>. Визуально идентификаторы с подстрочными символами почти не отличаются от индексированных элементов матриц и векторов.

Для получения численного результата необходимо всем переменным из формулы присвоить числовые значения. Присваивания бывают двух видов: локальные и глобальные. Локальное присваивание осуществляется кнопкой [:=] подпанели **Калькулятор** (Calculator) или клавишей <:>. Присвоенное значение в документе начинает действовать с момента его записи (слева-направо и сверху-вниз), поэтому необходимо следить, чтобы очередная формула была в строке правее или ниже предыдущей.

Глобальное присваивание действует в пределах всего документа, независимо от места его определения. Глобальное присваивание задается кнопкой [≡] подпанели **Оцен-**

ка (Evaluation). Ниже приведен пример цепочки формул с использованием локального (для *x)* и глобального (для *a*) присваивания:

$$x:=1 \qquad y:=x+2 \qquad z:=y\cdot x+3 \qquad z=6$$

$$x:=2 \qquad \mu:=\frac{z\cdot x}{a} \qquad \mu=4$$

$$a\equiv 3$$

В этом примере во всех формулах для переменной *a* используется ее глобальное значение 3, хотя на рабочем листе документа оно записано последним в цепочке формул. Для вычисления переменных y и z используется локальное значение переменной *x* —число 1. Для вычисления переменной μ используется локальное значение переменной *x* — число 2.

Если для одной и той же переменной в документе задано локальное и глобальное присваивание, то локальное присваивание отменяет глобальное присваивание, превратив последнее в локальное:

$$a:=2 \qquad x:=a+4$$

$$a s\ \ 4$$

$$x=6$$

$$z:=a+4 \qquad z=\&$$

Если для одной и той же переменной в документе глобальное присваивание задается несколько раз, то действует всегда самое последнее из них:

$$x:=a+4 \qquad x=11$$

$$a\equiv 4$$

$$z:=a+4 \qquad z=11$$

$$a\equiv 7$$

Конструирование формул с использованием переменных осуществляется аналогично константным выражениям. Промежуточные значения переменных задаются, как это видно из предыдущих примеров, символом локального присваивания :=, результаты вычислений определяются нажатием клавиши <=> или вводом соответствующего символа с подпанели Калькулятор (Calculator).

Поскольку идентификатор переменной всегда начинается с буквы, то при умножении константы на переменную символ умножения можно не указывать:

$$a:=2$$

$$b:=2.6a+3a^2 \qquad b=17.2$$

В качестве составных частей формулы могут использоваться интегралы, суммы и произведения, вводимые с помощью подпанели **Исчисление** (Calculus). Для этого достаточно щелкнуть левой кнопкой мыши на соответствующей кнопке, вызвав шаблон на место курсора. Далее, на месте всех меток шаблона необходимо поместить соответствующие значения или выражения. Пример формулы с использованием подпанели **Исчисление** (Calculus) приведен ниже:

$$x := 12 \qquad y := \int_1^3 \cos\left(x^2\right) dx + x^4 + \sum_{i=1}^{5} \left(x + i^2\right) \cdot (\sin(i \cdot x) + 4)$$

$$y = 2.112 \times 10^4$$

В Mathcad наиболее часто встречающиеся функции вынесены на подпанели Калькулятор (Calculator) и Исчисление (Calculus). К большинству же функций можно обратиться с помощью кнопки $\boxed{f(x)}$ стандартной панели инструментов. При этом ввод функции осуществляется с использованием диалогового окна **Вставить Функцию** (Insert Function). Диалоговое окно (рис. П2.2) содержит два списка. С помощью левого списка **Категория функции** (Function Category) осуществляется выбор раздела, к которому относится извлекаемая функция. Если есть затруднения в выборе раздела, то можно воспользоваться элементом списка АН, по которому извлекаются все стандартные функции Mathcad в алфавитном порядке. В правом списке **Имя функции** (Function Name) содержится в алфавитном порядке перечень функций выбранного раздела. Если щелчком левой кнопки мыши выбрать из этого списка какую-то функцию, то внизу диалогового окна отображаются правило обращения к этой функции (имя функции со списком аргументов) и подробное описание этой функции. В описании правила обращения к функции некоторые аргументы указываются в квадратных скобках, что указывает на их необязательное присутствие среди аргументов этой функции. Выбранная функция вставляется в документ Mathcad двойным щелчком левой кнопки мыши на соответствующем имени функции.

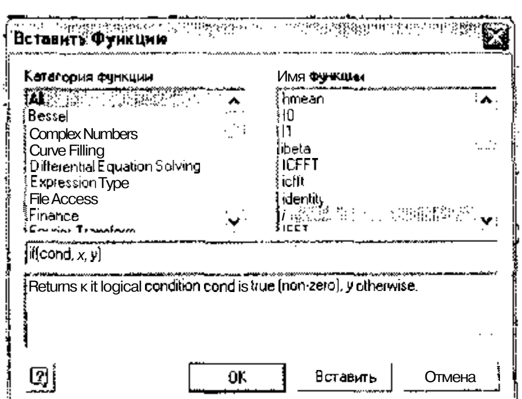


Рис. П2.2. Диалоговое окно ввода стандартных функций

Стандартные функции можно вставлять в Mathcad-документ и без использования диалогового окна **Вставить Функцию** (Insert Function). Для этого в нужном месте документа набирается имя функции со списком аргументов в круглых скобках. При этом необходимо внимательно следить за правильностью набора имени функции, в частности, за соответствием малых и больших букв в имени функции.

Собственные функции пользователя

Помимо широкого набора стандартных функций, в Mathcad возможно определение собственных функций пользователя. В простейшем случае функция может быть определена формулой пользователя. Функция определяется следующим образом:

имя_функции(аргументы):=формула,

где имя_функции — любой уникальный для данного документа идентификатор; аргументы — список аргументов функции через запятую; формула — любая формула с использованием констант, стандартных функций и функций пользователя. В Mathcad имя функции должно быть уникальным идентификатором среди всех других идентификаторов. Исключение составляет индивидуальное переопределение стиля идентификатора с использованием списка Стиль (Style) панели **Форматирование** (Formatting), когда стиль также считается индивидуальным признаком идентификатора (для имен функций это делать нежелательно). Пример цепочки формул с использованием функций пользователя приведен ниже:

$$a:=2 \quad b:=a^2+\sin(a) \quad f(x):=x^3+2x$$

$$c:=f(a)+\cos(b) \quad c=12.196$$

$$g(x,y):=f(x+y)^2+x+y$$

$$d:=a+b+f(a\cdot b)+g(0.5,a)$$

$$d=1.401\times 10^3$$

Напомним, что при формировании степени функции перед вводом показателя степени необходимо выделять правым синим уголком функцию вместе со списком аргументов в скобках, чтобы операция возведения в степень указывалась после закрывающейся скобкой аргументов функции. Так, в примере

$$f(x):=x^2+4$$

$$a:=5.5+f^2(3)$$

указано не возведение в квадрат функции $f(3)$, а произведение квадрата некой переменной f на число 3. Подобная ошибка в Mathcad обнаруживается достаточно просто, так как числовое значение для переменной f не было задано выше в документе и поэтому f^2 выделяется на рабочем листе красным цветом.

При определении собственной функции можно использовать программные модули, что будет рассмотрено ниже.

Формулы с векторами и матрицами

Работа с векторами и матрицами осуществляется по аналогии с обычными константами и переменными, т. е. вектора и матрицы можно использовать в операциях присваивания и в формулах. Вектор и матрица, как и переменная, задаются своим идентификатором. При определении имени вектора или матрицы можно использовать возможность изменения стиля написания идентификатора, так как часто вектора и матрицы удобно набирать полужирным шрифтом. В этом случае измененное по стилю имя вектора или матрицы может совпадать с другими идентификаторами, так как стиль написания идентификатора считается в Mathcad отличительным признаком. Написание идентификатора полужирным начертанием осуществляется переопределением стиля, например User 1, из списка стилей панели **Форматирование** (Formatting). Для переопределения стиля User 1 необходимо выбрать команду **Вычисление** (Equation) из меню **Формат** (Format). В появившемся диалоговом окне в раскрывающемся списке **Имя Стиля** (Style Name) выбрать User 1 и в поле **Новое имя** (New Style Name) записать задаваемое имя стиля, например Матрицы, как это показано на рис. П2.3.

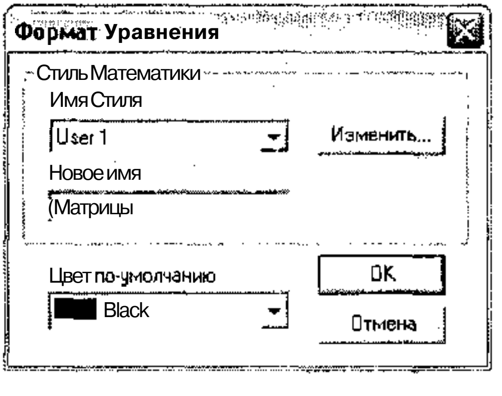


Рис. П2.3. Диалоговое окно изменения стиля идентификаторов

Для изменения стиля Матрицы на полужирное начертание нажмите кнопку **Изменить** (Modify) и в появившемся диалоговом окне установите требуемый стиль Bold и, если необходимо, новые размер и название шрифта. Закройте оба диалоговых окна, щелкнув на кнопке OK. После определения таким образом стиля Матрицы он становится доступным в раскрывающемся списке **Стиль** (Style) на панели форматирования. Для этого необходимо выделить синим уголком требуемый идентификатор матрицы и выбрать из раскрывающего списка **Стиль** (Style) строку Матрицы: выделенный идентификатор изменит свое начертание на полужирное.

Для ввода числовых значений матрицы используется кнопка подпанели **Матрица** (Matrix). Шаблон матрицы удобно также вводить с помощью комбинации клавиш <Ctrl+M>. При этом вызывается диалоговое окно **Вставить Матрицу** (Insert Matrix), в котором необходимо задать размер матрицы: число ее строк и число столбцов. После щелчка кнопкой OK в документ будет вставлен соответствующий шаблон матрицы. На месте меток шаблона необходимо ввести константы или формулы, как это показано в примере:

$$a := 2 \qquad b := 4 \qquad M := \begin{pmatrix} a+b & 1 & 2 \\ 3 & a\cdot b & 4 \\ 5 & 6 & a^2+b^2 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \\ 5 & 6 & 20 \end{pmatrix}$$

В Mathcad возможны матричные операции (матрицы и вектора при этом должны иметь соответствующие матричной операции согласованные размерности): операции сложения, вычитания и матричного умножения (выполняются с использованием соответствующих операций "+", "–", "x" подпанели Калькулятор (Calculator) или соответсвенно клавишами <+>, <->, <*>); обращение матрицы (кнопка x^{-1} подпанели **Матрица** (Matrix)); транспонирование матрицы (кнопка M^{T} подпанели **Матрица** (Matrix)); вычисление определителя квадратной матрицы (кнопка $|x|$ подпанели **Матрица** (Matrix)); вычисление суммы элементов вектора (кнопка Σv подпанели **Матрица** (Matrix)); извлечение столбца матрицы (кнопка $M^{\langle\,\rangle}$ подпанели **Матрица** (Matrix), при этом на месте метки в $M^{\langle 1\rangle}$ указывается номер извлекаемого столбца).

Примеры матричных операций:

$$m := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad n := m + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad n = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 7 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

$$k := m^{-1} + n \qquad k = \begin{pmatrix} 3.5 & 2 & 3 \\ 4 & 8.333 & 6 \\ 7 & 8 & 13.25 \end{pmatrix}$$

$$v := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad v_v = 9$$

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad z := M^{\langle 1 \rangle} \qquad z = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$a := \left(M^T\right)^{\langle 1 \rangle} \qquad a = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

При работе с векторами и матрицами необходимо помнить, что нумерация столбцов и строк в них (по умолчанию) начинается с нуля. Для задания нумерации с единицы необходимо предварительно локальным или глобальным присваиванием изменить значение системной переменной ORIGIN (набирается прописными буквами) на 1:

$$ro := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad ORIGIN := 1 \qquad ro^{\langle 1 \rangle} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Помимо операций над матрицами в Mathcad возможны операции над элементами матриц по аналогии с переменными. Элементы матрицы определяются с помощью индексированных переменных. Каждый из индексов отделяется друг от друга запятой. Ввод элемента матрицы выполняется кнопкой $\boxed{X_n}$ подпанели **Матрица** (Matrix). Индексы также удобно вводить с помощью клавиши <[>. Индексами могут быть целые константы и неотрицательные переменные:

$$i := 1 \qquad M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad ORIGIN := 1 \qquad M_{1,2\cdot i} = 2 \qquad M_{2\cdot i,3} = 6$$

При использовании в качестве индекса идентификатора i необходимо помнить, что этот идентификатор используется также для указания мнимой единицы комплексного числа, поэтому в выражениях типа `2i` не надо забывать указывать в явном виде операцию умножения (в противном случае *2i* будет восприниматься как мнимая часть комплексного числа).

Нестандартные операции над элементами матриц выполняются с использованием всех операций и функций непосредственно над элементами матриц. При этом зачастую приходится использовать так называемые ранжированные переменные — переменные с заданными пределами изменения и с заданным шагом изменения. Ранжированная переменная определяется следующим образом: вводится имя переменной и знак присваивания (можно комбинацией клавиш <Shift>+<:>), затем кнопкой $\boxed{m..n}$

подпанели **Матрица** вводится шаблон и на месте появившихся меток вводится начальное и конечное значение переменной, при этом шаг изменения переменной будет равен 1. Теперь, например, при определении матрицы в виде $m_{i,j}=i^2+j^2$ будут автоматически определены все ее элементы в пределах, установленных ранжированными переменными i и j:

$$i := 0 .. 2 \qquad j := 0 .. 2 \qquad m_{i,j} := i^2 + j^2$$

$$m_{1,1} := 0 \qquad m_{2,2} := 0$$

$$m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

При определении ранжированной переменной можно задавать любой шаг ее изменения, отличный от единицы. Для этого кнопкой m..n подпанели **Матрица** (Matrix) вводится шаблон $\boxed{i := \blacksquare .. \blacksquare}$, в котором после первой метки вводится запятая клавишей <,>: $\boxed{i := \blacksquare, \blacksquare .. \blacksquare}$. На месте первой метки нового шаблона вводится первое значение ранжированной переменной, на месте второй метки — второе значение ранжированной переменной, а на месте третьей метки — последнее значение ранжированной переменной. Пример определения ранжированной переменной с шагом изменения 0.1 приведен ниже:

$$i := 1, 1.1 .. 2$$

При частом использовании ранжированных переменных удобно определять их с помощью клавиш клавиатуры. Так, в предыдущем примере последовательность символов клавиатуры при задании ранжированной переменной будет следующей: <I><,><1><.><1><;><2>.

Заданные ранее значения ранжированных переменных можно отобразить в документе с помощью клавиши <=>; при этом значения ранжированной переменной выводятся в виде таблицы:

$i := 1 .. 3$ $\qquad$ $i =$

1
2
3

Отметим, что при большом количестве значений ранжированной переменной выводятся только первые 16 элементов, а остальные можно просмотреть с использованием полосы прокрутки, которая появляется при щелчке левой кнопкой мыши на любом значении ранжированной переменной.

Операция векторизации позволяет поэлементно оперировать векторами и матрицами одинакового размера. Эта операция производится с помощью клавиши $\boxed{\overrightarrow{f(M)}}$ подпанели **Матрица** (Matrix). Пусть, к примеру, даны векторы $\vec{a} = (2,\ 4,\ 6)$, $\vec{b} = (2,\ 8,\ 3)$, $\vec{c} = (3,\ 4,\ 5)$ и требуется определить вектор $\vec{d}$, i-я координата d_i которого будет равна $\frac{a_i}{b_i}\cdot c_i$, где a_i, b_i, c_i — соответственно i-е координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Для этого в нужном месте рабочего листа введите выражение $d := \frac{a}{b}\cdot c$ и синим курсором ввода выделите выражение, стоящее справа от знака присваивания: $\boxed{d := \frac{a}{b}\cdot c}$.

После щелчка по кнопке $\boxed{\overrightarrow{f(M)}}$ произойдет векторизация: $\boxed{d := \overrightarrow{\left(\frac{a}{b}\cdot c\right)}}$, в результате которой будет получен искомый вектор $\vec{d} = (3,\ 2,\ 10)$. Этот вектор можно получить на рабочем листе, введя идентификатор d и знак равенства, справа от которого появится искомый вектор-столбец $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Следует также отметить, что для многих встроенных функций операцию векторизации можно не указывать, поскольку эти функции применяются к элементам векторов, являющихся их аргументами. Например, $\sin(d) = \begin{pmatrix} 0.14 \\ 0.91 \\ -0.54 \end{pmatrix}$, где $0.14 = \sin(3)$, $0.91 = \sin(2)$, $-0.54 = \sin(10)$. Однако это свойство не распространяется на матрицы. Например, если $d = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то функция $\sin(d)$ не будет определена.

Пример векторизации приведен ниже:

$$w := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad z := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad c := \overrightarrow{\left(\frac{v}{z}\cdot v\right)} \quad c = \begin{pmatrix} 0.333 \\ 1 \\ 1.8 \end{pmatrix}$$

$$f(M, N) := M + N \quad u := \overrightarrow{f(v, w) + \ln(z)} \quad s := \overrightarrow{\frac{u}{v + z}} + \overrightarrow{v^2}$$

$$s = \begin{pmatrix} 2.525 \\ 5.398 \\ 10.326 \end{pmatrix} \qquad q := \overrightarrow{\frac{f(v,w) + \overrightarrow{\ln(z)}}{v+z}} \qquad q = \begin{pmatrix} 1.525 \\ 1.398 \\ 1.326 \end{pmatrix}$$

Отметим, что операция $\overrightarrow{M \cdot N}$ определяет поэлементное умножение в отличие от матричного произведения $M \cdot N$, а операция — определяет поэлементное деление.

При вычислении переменной s операция возведения в квадрат каждого элемента вектора v векторизована, хотя в данном случае этого можно было бы и не делать. Однако, если бы v был идентификатором матрицы, то аналогичную операцию поэлементного возведения в квадрат нужно было обязательно векторизовать, так как невекторизованный квадрат воспринимается Mathcad как матричное умножение:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad M^2 = \begin{pmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 66 & 81 & 96 \\ 102 & 126 & 150 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{M^2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 16 & 25 & 36 \\ 49 & 64 & 81 \end{pmatrix}$$

Это же относится и к другим целым степеням квадратной матрицы:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 468 & 576 & 684 \\ 1.062 \times 10^3 & 1.305 \times 10^3 & 1.548 \times 10^3 \\ 1.656 \times 10^3 & 2.034 \times 10^3 & 2.412 \times 10^3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{M^3} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 27 \\ 64 & 125 & 216 \\ 343 & 512 & 729 \end{pmatrix}$$

При вычислении переменной q в вышеприведенном примере векторизация используется два раза: один раз для вычисления логарифма от каждого элемента матрицы и другой раз для выполнения поэлементного деления (к сожалению, в данном примере операция деления Mathcad не взята в скобки, и возникает впечатление векторизации операции сложения).

Для исключения неоднозначного толкования векторизованных операций при чтении Mathcad-документа лучше всего выполнять векторизацию кнопкой $\boxed{\overrightarrow{f(M)}}$ для всех операций, исключая сложение и вычитание.

Операция векторизации может быть заменена посредством использования ранжированных переменных, однако у операции векторизации больше возможностей (их можно использовать в составе сложных выражений).

В Mathcad допускается использование так называемых "гнездовых" матриц, т. е. матриц, элементами которых являются также матрицы. Например, при попытке отобразить такую матрицу M в документе может возникнуть следующая картина:

$$a := (1 \quad 2 \quad 3) \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad c := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$m := (a \quad b \quad c) \qquad m = (\{1,3\} \quad \{2,1\} \quad \{2,2\})$$

Это означает, что элемент m_0 является, в свою очередь, матрицей размера 1×3, элемент m_1 — матрицей размера 2×1, а элемент m_2 — матрицей размера 2×2. Отобразить все элементы "элемента" m_2 можно, например, так:

$$m_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Гнездовые матрицы не допускают многих матричных операций, например, операцию обращения:

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad s := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad t := \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad M := (v \quad s \quad t)$$

$$M = (\{3,1\} \quad \{3,1\} \quad \{3,1\}) \qquad M^{-1} = \blacksquare$$

В этом примере обратная матрица не вычисляется, о чем свидетельствует отсутствие решения и выделенный на экране красным цветом идентификатор матрицы M. Однако операции сложения и вычитания для гнездовых матриц одинакового размера допускаются.

Обработка формул в символьном виде

Для вычислений в символьном виде, щелкнув кнопкой  панели Математика (Math), откройте подпанель **Символика** (Symbolic), как это показано на рис. П2.4.

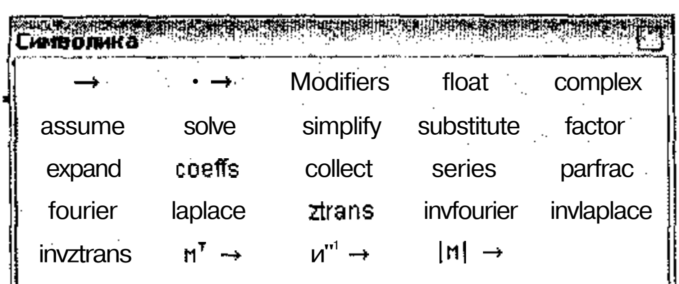


Рис. П2.4. Подпанель **Символика** для выполнения символьных операций

Простейшим примером символьных вычислений является вычисление неопределенных интегралов. Для этого с помощью кнопки $\int$ подпанели **Исчисление** (Calculus) введите требуемый неопределенный интеграл. Затем кнопкой $\rightarrow$ подпанели **Символика** (Symbolic) введите знак символьного вывода (знак $\rightarrow$ также вводится комбинацией клавиш <Ctrl>+<.>) и нажмите клавишу <Enter>. Ниже приведен пример вычисления в символьном виде неопределенного интеграла:

$$\int x\,dx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^2$$

Зачастую результат символьного вычисления, однажды уже полученный в некотором документе Mathcad, приходится неоднократно использовать в том же документе. В подобных случаях целесообразно поступать следующим образом. Пусть некоторое выражение *E,* зависящее от *n* переменных (параметров) $x1, x2, ..., xn$, необходимо вычислить в символьном виде. В нужном месте рабочего листа введите идентификатор функции *n* переменных, например, $f(x1, x2, ..., xn)$. Затем введите знак присваивания клавишей <:> и справа от него выражение *E,* выделив это выражение синим курсором. Введите знак $\rightarrow$. После нажатия клавиши <Enter> справа от знака $\rightarrow$ появится искомый символьный результат, который можно использовать в дальнейших вычислениях посредством функции $f(x1, x2, ..., xn)$. Рассмотрим пример символьного вычисления неопределенного интеграла $\int x dx$:

$$f(x) := \int x\,dx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^2 \qquad f(2) = 2 \qquad f(3) = 4.5$$

При проведении сложных расчетов приходится в документе комбинировать символьные вычисления с обычными. В этом случае возникает нежелательная для пользователя ситуация, когда в символьное выражение преждевременно подставляется присвоенное этому идентификатору значение:

$$x := 1 \qquad \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \rightarrow \exp(1 - 2\cdot\exp(-1))$$

Чтобы этого избежать, необходимо непосредственно перед символьным вычислением переопределить этот идентификатор, как это показано ниже:

$$x := 3$$

$$x := x \qquad \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \rightarrow \exp(x)\cdot[1 - \exp(-x)\cdot(1 + x)]$$

$$a := x + 1 \qquad a = 4$$

Как видно из примера, переменная x сохраняет свое значение 3. Сохраняет она и свою "способность" участвовать в дальнейших символьных вычислениях:

$$x := 3$$

$$x := x \quad \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \rightarrow \exp(x) \cdot [1 - \exp(-x) \cdot (1 + x)]$$

$$a := x + 1 \quad a = 4$$

$$(a - b)^2 \rightarrow (1 + x - b)^2$$

В этом примере вместо переменной *a* подставляется его символьное выражение $x+1$, а не числовое значение 4.

Mathcad имеет широкий набор команд для преобразования и упрощения символьных выражений. Для выполнения соответствующей команды необходимо вместо $\rightarrow$ выбрать соответствующую кнопку подпанели Символика (Symbolic).

Команда *simplify* используется для упрощения выражений. Например, пусть необходимо упростить формулу

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} - ab + \frac{b^2}{3}.$$

В нужном месте рабочего листа введите формулу, синим правым уголком выделите всю формулу и щелкните кнопкой $\boxed{\text{simplify}}$ подпанели **Символика** (Symbolic); справа от знака символьного вывода появится выражение в упрощенном виде:

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} - a \cdot b + \frac{b^2}{3} \text{ simplify} \rightarrow a^2 + \frac{4}{3} \cdot b^2$$

Команда *expand* предназначена для представления формулы в развернутом виде (то есть в некотором смысле она противоположна команде `simplify`) относительно выражения, записанного на месте метки:

$$\sin(5x) \text{ expand}, 5x \rightarrow \sin(5 \cdot x)$$

$$\sin(5x) \text{ expand}, x \rightarrow 16 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)^4 - 12 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)^2 + \sin(x)$$

$$3 - (4\cos(2a) + \cos(4a)) \text{ expand}, 2a \rightarrow 2 - 4 \cdot \cos(2 \cdot a) - 8 \cdot \cos(a)^4 + 8 \cdot \cos(a)^2$$

$$3 - (4\cos(2a) + \cos(4a)) \text{ expand}, 4a \rightarrow 7 - 8 \cdot \cos(a)^2 - \cos(4a)$$

$$3 - (4\cos(2a) + \cos(4a)) \text{ expand}, a \rightarrow 6 - 8 \cdot \cos(a)^4$$

Команда factor предназначена для разложения целых чисел или выражений на множители. Для разложения целого числа на простые множители введите целое число и выберите команду *factor:* $\boxed{364\ \mathrm{factor}, \blacksquare \rightarrow}$. Затем клавишей <BackSpace> удалите метку вместе с запятой и щелкните левой кнопкой мыши за блоком выражения. Искомое представление будет получено:

$$364\ \mathrm{factor} \rightarrow 2^2 \cdot 7 \cdot 13$$

Аналогичным образом выполняется разложение на множители выражений:

$$a^3 - 6a^2 + 9a\ \mathrm{factor} \rightarrow a \cdot (a-3)^2$$

$$a^2 - b^2\ \mathrm{factor} \rightarrow (a-b) \cdot (a+b)$$

Команда *collect* разлагает формулу по степеням переменной, указанной в этой команде на месте метки:

$$(a+b)^5\ \mathrm{collect}, a \rightarrow a^5 + 5 \cdot b \cdot a^4 + 10 \cdot b^2 \cdot a^3 + 10 \cdot b^3 \cdot a^2 + 5 \cdot b^4 \cdot a + b^5$$

$$(x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c)\ \mathrm{collect}, x \rightarrow x^3 + (-a-b-c) \cdot x^2 + [a \cdot b - (-a-b) \cdot c] \cdot x - a \cdot b \cdot c$$

$$(a+b+c)^2\ \mathrm{collect}, a \rightarrow a^2 + (2 \cdot b + 2 \cdot c) \cdot a + (b+c)^2$$

$$(a+b+c)^2\ \mathrm{collect}, b \rightarrow b^2 + (2 \cdot a + 2 \cdot c) \cdot b + (a+c)^2$$

$$(a+b+c)^2\ \mathrm{collect}, c \rightarrow c^2 + (2 \cdot a + 2 \cdot b) \cdot c + (a+b)^2$$

Команда *coeffs* используется для вычисления коэффициентов полинома относительно переменной, указанной в команде на месте метки:

$$(x-b) \cdot (x+b)\ \mathrm{coeffs}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -b^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (4x^3 + 3x^2) \cdot (x+1)\ \mathrm{coeffs}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(x-b) \cdot (x^2+2)\ \mathrm{coeffs}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \cdot b \\ 2 \\ -b \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (x+b^2) \cdot (b-1)\ \mathrm{coeffs}, b \rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ x \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Команда *solve* позволяет решить уравнение или неравенство с нулевой правой частью относительно переменной, указанной в этой команде на месте метки:

$$x^2 + a \cdot x + b \text{ solve}, x \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 - 4 \cdot b\right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{2} \cdot a - \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 - 4 \cdot b\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

$$e^x - a \text{ solve}, x \rightarrow \ln(a)$$

Команда solve позволяет также решать системы линейных и нелинейных уравнений с нулевой правой частью:

$$\begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 7 \\ 2 \cdot x - y \end{pmatrix} \text{solve}, x, y \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \cdot \sqrt{35} & \frac{2}{5} \cdot \sqrt{35} \\ \frac{-1}{5} \cdot \sqrt{35} & \frac{-2}{5} \cdot \sqrt{35} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 3 \\ x + y - z - 1 \\ x \cdot y \cdot z - 1 \end{pmatrix} \text{solve}, x, y, z \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

В Mathcad возможны также символьные операции $\boxed{M^T \rightarrow}$, $\boxed{M^{-1} \rightarrow}$ и $\boxed{|M| \rightarrow}$ над матрицей или матричными формулами:

$$M := \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} + M^T + M \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{a} + 2 \cdot a & \frac{-b}{a \cdot (a+1)} + b \\ b & \frac{1}{(a+1)} + 2 \cdot a + 2 \end{bmatrix}$$

Команда substitute используется для подстановки значений переменных в формулу с последующим вычислением этой формулы. Для этого наберите формулу, вызовите команду substitute кнопкой $\boxed{\text{substitute}}$ подпанели Символика (Symbolic), на месте метки укажите числовое значение переменной из формулы (например $x = 5$). Далее установите синий курсор так, чтобы он окаймлял все выражение:

$$\underline{a \cdot x^2 + b \cdot x + c \text{ substitute}, x = 5} \rightarrow;$$

вызовите опять команду substitute и т. д., до присваивания числовых значений всем требуемым переменным:

$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c \ \text{substitute}, x = 5 \rightarrow 25\cdot a + 5\cdot b + c$$

$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, x = 5 \\ \text{substitute}, c = 3 \end{array} \right. \rightarrow 25\cdot a + 5\cdot b + 3$$

$$a\cdot x^2 + b x + c \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, x = 5 \\ \text{substitute}, c = 4 \\ \text{substitute}, b = 11 \end{array} \right. \rightarrow 25\cdot a + 59$$

$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, x = 5 \\ \text{substitute}, c = 3 \\ \text{substitute}, b = 4 \\ \text{substitute}, a = 3 \end{array} \right. \rightarrow 98$$

Отметим, что вместо знака $\rightarrow$ в символьных вычислениях можно использовать шаблон $\boxed{\blacksquare \rightarrow}$, в котором на месте метки вводится клавишами клавиатуры соответствующая команда символьного преобразования.

Задание формул и функций с использованием программных модулей

Проведение сложных расчетов не обходится без элементов программирования с использованием программных модулей. Формирование программных модулей осуществляется в Mathcad с помощью подпанели **Программирование** (Programming), которая представлена на рис. П2.5.

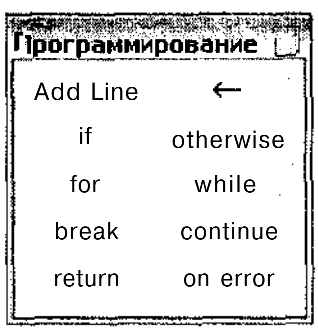


Рис. П2.5. Подпанель **Программирование**

В программном модуле может быть записана любая последовательность формул. Рассмотрим пример:

$$a:=3 \qquad \left|\begin{array}{l} x \leftarrow a+4 \\ x^2 \end{array}\right.$$

В этой цепочке формул вычисляется выражение $(a + A)^2$. Как видно из примера, программный модуль ограничивается слева вертикальной линией. Внутри программного модуля могут присутствовать внешние *(а)* и внутренние (x) переменные. В программном модуле значения внешних переменных определяются в соответствии с общими правилами операций локального и глобального присваивания (значение з для переменной *а)*. Внутренняя переменная программного модуля определяется с момента присваивания ей числового значения операцией внутреннего присваивания (кнопка [←] подпанели **Программирование** (Programming)). Если идентификаторы внутренней и внешней переменной совпадают, то в пределах программного модуля действует внутренняя переменная. Результатом вычисления программного модуля считается последняя выполняемая в модуле формула (в данном примере это x^2). Рассмотрим последовательность действий при формировании вышеприведенного модуля:

1. Переменной *а* операцией локального присваивания присваиваем значение 3.
2. Устанавливаем красный курсор ввода на место, где будет располагаться программный модуль, и кнопкой [Add Line] подпанели **Программирование** (Programming) вводим вертикальную линию:

$$a:=3 \qquad \left|\begin{array}{l} \blacksquare \\ \blacksquare \end{array}\right.$$

3. На месте первой метки задаем значение внутренней переменной x (кнопкой [←] подпанели Программирование (Programming)):

$$a:=3 \qquad \left|\begin{array}{l} x \leftarrow a+4 \\ \blacksquare \end{array}\right.$$

4. На месте второй метки вводим возвращаемое из модуля значение:

$$a:=3 \qquad \left|\begin{array}{l} x \leftarrow a+4 \\ x^2 \end{array}\right.$$

5. Клавишей <=> выводим результат вычислений программного блока:

$$a := 3 \qquad \left| \begin{array}{l} x \leftarrow a + 4 \\ x^2 \end{array} \right. = 49$$

Отметим, что в отличие от правил записи формул на рабочем листе Mathcad-документа, внутри программного модуля в одной строке можно записать только один оператор или формулу.

Очень часто программные модули используются для определения функций пользователя. Функция пользователя определяется обычным образом. В конце программного модуля должна быть указана формула, являющаяся результатом вычисления функции. Пример определения функции пользователя с использованием программного модуля приведен ниже:

$$f(x) := \left| \begin{array}{l} a \leftarrow (x + 1) \cdot 2 \\ a^2 + x \end{array} \right. \qquad f(0.5) = 9.5$$

Программные модули не имели бы смысла без использования в них операторов программирования. В Mathcad используются три оператора программирования:

if — условный оператор;

for — оператор задания цикла с фиксированным числом повторений;

while — оператор задания цикла, действующего до тех пор, пока выполняется некоторое условие.

Рассмотрим каждый из этих операторов в отдельности.

Условный оператор if предназначен для выполнения вычислений в зависимости от условия. При вызове оператора *if* появляется шаблон с двумя метками $\boxed{\blacksquare \text{ if } \blacksquare}$.

На месте правой метки вводится логическое выражение. На месте левой метки вводится или формула, или операция внутреннего присваивания для указанной переменной.

Совместно с оператором if очень часто используется оператор otherwise, который вводится непосредственно за шаблоном оператора *if*.

Примеры использования оператора *if* с оператором otherwise и без него:

$$abs(x) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow x \\ s \leftarrow -x \quad \text{if } x < 0 \\ s \end{array} \right. \qquad abs(-5) = 5 \qquad abs(5) = 5$$

$$abs(x) := \left| \begin{array}{l} -x \quad \text{if } x < 0 \\ x \quad \text{otherwise} \end{array} \right. \qquad abs(-5) = 5 \qquad abs(5) = 5$$

```
f(x) := | if x < 5
        |   | y ← 2
        |   | x ← x^2
        | otherwise
        |   | y ← 4
        |   | x ← x^3
        | x · y
```

$f(8) = 2.048 \times 10^3$ $f(3) = 18$

В первом случае в конце программного блока необходимо указать значение, которое блок возвращает в качестве ответа. Во втором случае возвращаются x или $-x$, в зависимости от условия.

Рассмотрим порядок формирования оператора // в третьем примере:

1. После знака := кнопкой [Add Line] вводим вертикальную линию:

```
f(x) := | •
        | ▪
```

2. Устанавливаем синий курсор на верхнюю метку и кнопкой [if] вводим шаблон оператора if:

```
f(x) := | ▪ if ▪
        | ▪
```

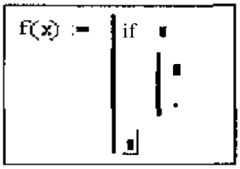
3. Устанавливаем синий курсор на первую метку;

```
f(x) := | ▪ if ▪
        | ▪
```

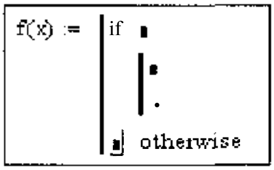
4. На месте метки кнопкой [Add Line] образуем блок для оператора if:

```
f(x) := | if •
        |    | ▪
        |    | ▪
        | ▪
```

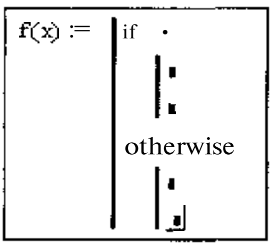
5. Устанавливаем синий курсор на последнюю метку:



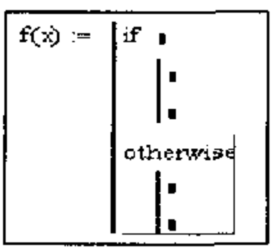
6. Кнопкой otherwise вводим оператор otherwise:



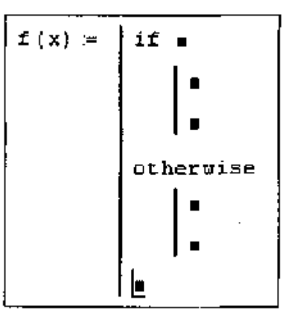
7, Кнопкой Add Line] образуем блок для оператора otherwise:



8. Окаймляем синим курсором блок оператора otherwise:



9. Кнопкой Add Line вводим новую метку:



10. На месте меток вводим соответствующие выражения.

Оператор цикла for предназначен для задания циклов с фиксированным числом повторений. Шаблон оператора *for* имеет три метки:

for • ∈ •

▪

На месте верхней левой метки вводится имя управляющей переменной; на месте верхней правой метки вводятся начальное и конечное значения управляющей переменной (можно также указать и второе значение управляющей переменной, если шаг ее изменения не равен единице); на месте нижней метки записывается выражение для выполнения. Алгоритм работы оператора цикла for следующий: управляющей переменной присваивается первое значение, вычисляется выражение, управляющей переменной присваивается второе значение, вычисляется выражение и т. д., до перебора всех значений управляющей переменной.

Примеры использования оператора цикла for приведены ниже:

```
f(x) := | s ← 0
        | for i ∈ 1 .. 5
        |     | s ← s + i
        |     | x ← x · i
        | x + s
```

f(5) = 615

```
sum(n) := | s ← 0
          | for i ∈ 1 .. n
          |   s ← s + i
```

sum(10) = 55

sum(20) = 210

```
prod(n) := | p ← 1
           | for i ∈ 1 .. n
           |   p ← p·i
           | p
```

prod(3) = 6

prod(10) = 3.629×10^6

Рассмотрим алгоритм работы цикла *for* в третьем примере. В блок в качестве аргумента функции передается переменная л. Внутри блока внутренней переменной p присваивается значение 1. Начинается выполнение цикла **for.** Переменной *i* присваивается значение 1, и при этом значении i выполняется оператор p ← $p{\cdot}i$; переменной i присваивается значение 2 и выполняется оператор p ← $p{\cdot}i$, и т. д. до достижения переменной i значения л. В конце программного модуля указана переменная, значение которой возвращается из модуля в качестве результата.

Оператор цикла while служит для организации циклов, действующих до тех пор, пока выполняется некоторое заданное условие. Приведем два примера использования цикла *while* для вычисления факториала:

$$\mathrm{Fact}(n) := \left| \begin{array}{l} f \leftarrow 1 \\ \text{while } n \ge 2 \\ \quad \left| \begin{array}{l} f \leftarrow f \cdot n \\ n \leftarrow n - 1 \end{array} \right. \\ f \end{array} \right. \qquad \mathrm{Fact}(3) = 6 \qquad \mathrm{Fact}(5) = 120$$

$$f(n) := \left| \begin{array}{l} f \leftarrow n \\ \text{while } 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} f \leftarrow f \cdot (n - 1) \\ n \leftarrow n - 1 \\ \text{return } f \text{ if } n = 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad f(3) = 6 \qquad f(5) = 120$$

Рассмотрим алгоритм работы оператора *while* в первом из приведенных примеров для $n = 5$. В блок в качестве аргумента функции передается значение л (в данном случае число 5). Внутренней переменной f присваивается значение 1. Начинается выполнение цикла *while.* Проверяется условие л $\ge$ 2 и, так как оно в данном случае истинно, выполняются операторы $f \leftarrow f \cdot n$ (для вычисления значения факториала) и л $\leftarrow$ л - 1 (для принудительного уменьшения на единицу значения переменной л). Опять проверяется условие л $\ge$ 2 и, так как оно в данном случае истинно, опять выполняются операторы $f \leftarrow f \cdot n$ и л $\leftarrow$ л - 1. Этот процесс продолжается до достижения переменной л значения 1. Функции Fact(л) присваивается последнее значение переменной *f.*

Во втором примере определен бесконечный цикл *while,* а принудительный выход из цикла осуществляется с использованием оператора return.

Оператор return используется для выхода из блока и передачи значения из любой точки программного блока. Примеры использования оператора return приведены ниже:

$$f(x) := \left| \begin{array}{ll} \text{return } 1 & \text{if } x = 0 \\ \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{otherwise} \end{array} \right. \qquad f(1) = 0.841 \qquad f(0) = 1$$

$$g(i) := \left| \begin{array}{ll} \text{return "One"} & \text{if } i = 1 \\ \text{return "Two"} & \text{if } i = 2 \\ \text{"No value!!!!"} & \text{otherwise} \end{array} \right. \qquad g(1) = \text{"One"} \qquad g(3) = \text{"No value!!!!"}$$

Приложение 3

Редактирование и форматирование формул

Текст Mathcad-документа формируется из блоков — это формулы, графики, текст. Каждый блок можно перемещать по документу. Для этого щелчком левой кнопкой мыши в области блока выделите его; блок заключается при этом в черную рамку, как например, $\boxed{1.2 + \frac{7.5}{12|}}$. Перемещением указателя мыши добейтесь появления этого указателя в виде ладони руки. Нажмите левую кнопку мыши и, удерживая ее, перетащите блок в другое место документа.

Можно также перемещать несколько блоков одновременно. Для этого их сначала нужно выделить. Существует два способа выделения областей рабочего листа. Предположим, что требуется выделить группу областей, попадающих в некоторый воображаемый прямоугольник на рабочем листе. Подведите указатель мыши к вершине этого воображаемого прямоугольника так, чтобы после щелчка левой кнопкой мыши курсор оставался красным. Не отпуская левую кнопку мыши, переместите курсор по диагонали до противоположной вершины воображаемого прямоугольника. Отпустив кнопку мыши, получим группу выделенных областей, которые будут очерчены пунктирными линиями. Того же результата можно достичь, если, удерживая клавишу <Ctrl>, щелкнуть последовательно левой кнопкой мыши на областях, которые предназначены для выделения. Группа выделенных областей ведет себя как единый блок, который можно перемещать вдоль рабочего листа при нажатой левой кнопке мыши, предварительно добившись, чтобы курсор на краю какой-либо области принял форму ладони руки.

Любой выделенный блок или блоки можно удалить из документа. Для этого необходимо воспользоваться кнопкой на стандартной панели инструментов (при удалении только одного блока, выделенного черной рамкой, необходимо следить, чтобы синий курсор ввода охватывал правым или левым уголком текст всего блока). При таком удалении выделенные блоки помещаются в буфер и их с помощью кнопки стандартной панели инструментов можно переместить в другую часть документа. Для этого надо установить красный курсор на требуемое место и нажать кнопку .

Набор, редактирование и форматирование формул осуществляется с использованием синего курсора ввода, который может принимать три состояния: левый синий уголок |___ , правый синий уголок____| и промежуточное состояние___|___. Рассмотрим перевод курсора из рабочего состояния в состояние на примере. Наберите выражение `abc := 1.2 + 5.6|`. Как видим, синий курсор ввода охватывает в данном случае правым синим уголком константу 5.6. В пределах констант и имен идентификаторов состояние курсора ввода можно изменять нажатием клавиш <←> и <→>. При этом синий курсор ввода в пределах константы или идентификатора изменяет свое состояние. В данном примере нажатие клавиши <←> передвигает вертикальную синюю линию курсора на одну позицию влево `abc := 1.2 + 5.|6`. Дальнейшее нажатие <←> переводит курсор ввода в состояние левого синего уголка `abc := 1.2 + |5.6`. Изменение состояния синего курсора ввода в пределах констант и идентификаторов используется для добавления или удаления новых символов. В состоянии левого синего уголка добавляемые символы записываются перед константой или идентификатором. Так, при охвате левым синим уголком константы 5.6 перед ней могут быть добавлены новые символы, например 123: `abc := 1.2 + 123|5.6`.

В промежуточном состоянии синего курсора ввода символы добавляются на место синей вертикальной линии: `abc := 1.2 + 12301|5.6` (в данном случае добавлены символы 01). В состоянии правого синего уголка символы добавляются в конец константы или идентификатора: `abc := 1.2 + 123015.678|`. Удаление символов из констант или идентификаторов осуществляется клавишами <Del> или <BackSpace>. При состоянии синего курсора ввода в виде правого уголка `abc := 1.2 + 123015.678|`, символ в конце константы или идентификатора удаляется клавишей <BackSpace>: `abc := 1.2 + 123015.67|`. В состоянии левого синего уголка `abc := 1.2 + |123015.6` символ в начале константы или идентификатора удаляется клавишей <Del>: `abc := 1.2 + |23015.6`. В промежуточном состоянии синего курсора ввода `abc := 1.2 + 23|015.6` символ можно удалять клавишей <BackSpace> (при этом удаляется символ слева от вертикальной синей линии `abc := 1.2 + 2|015.6`) или клавишей <Del> (при этом удаляется символ справа от вертикальной синей линии `abc := 1.2 + 2|15.6`).

Изменение и удаление индексов в индексных переменных выполняется переводом синего курсора ввода в область индекса (опять-таки, клавишами <←> и <→>). Далее все процедуры изменения индекса осуществляются по аналогии с вышеизложенным. Предположим, что необходимо изменить индекс *i* на индекс *j* в формуле $abc := d_i - (\cos(5.6) + 1.2)$. Для этого клавишей <←> переводим синий курсор ввода в область индекса $abc := d_{i|} - (\cos(5.6) + 1.2)$. Клавишей <BackSpace>

удаляем индекс с $abc := d_{\_} - (\cos(5.6) + 1.2)$; на месте метки вводим идентификатору: $abc := d_j - (\cos(5.6) + 1.2)$.

Замена идентификатора функции осуществляется так же, как и замена обычного идентификатора. Например, пусть необходимо заменить в формуле $abc := 1.2 + \sin(5.6)$ идентификатор функции *sin* на идентификатор функции *cos*. Для этого устанавливаем курсор ввода на идентификатор *sin,* например, в состоянии правого синего уголка. Удаляем символы идентификатора *sin* (клавишей <BackSpace> в данном случае): $abc := 1.2 + \_(5.6)$; набираем новый идентификатор функции *cos:* $abc := 1.2 + \cos(5.6)$. Правила изменения функций, записываемых специальными символами, будут рассмотрены ниже.

Изменение состояния синего курсора ввода с правого уголка на левый, и наоборот, осуществляется одноразовым нажатием клавиши <Ins>. Нажатие клавиши <Ins>, когда курсор находится в промежуточном состоянии, переводит курсор в состояние правого синего уголка.

Синий курсор ввода всегда можно установить в пределах константы или идентификатора в формуле. Для этого необходимо щелкнуть левой кнопкой мыши на соответствующей константе или идентификаторе. При этом синий курсор ввода устанавливается на место указателя мыши на экране.

Очень часто синий курсор ввода используется не для изменения констант или идентификаторов, а для редактирования формул, т. е. замены операций, изменения приоритета выполнения операций, удаления операций или части формулы, добавлений в формулу и т. п. Во всех этих операциях курсор ввода должен принимать состояния левого или правого уголка.

Уже при наборе формул возникает необходимость выделения части формулы для выполнения над ней какой-то операции. Изменение окаймления производится чаще всего с использованием клавиши <пробел>. Рассмотрим действие этой клавиши на примере.

Предположим, что набрана формула, а синий курсор ввода установлен на функции *cos:* $abc := 1.2 + (\cos(5.6) + 1.2) \cdot 3$. После нажатия клавиши <пробел> курсор будет окаймлять функцию *cos* вместе с ее аргументом: $abc := 1.2 + (\underline{\cos(5.6)} + 1.2) \cdot 3$. Очередное нажатие клавиши <пробел> окаймляет выражение в скобках без окаймления скобок: $abc := 1.2 + (\underline{\cos(5.6) + 1.2}) \cdot 3$ (отметим, что при правом синем уголке в данном примере произошло бы и окаймление скобок). Окаймление скобок выполняется опять нажатием клавиши <пробел>: $abc := 1.2 + \underline{(\cos(5.6) + 1.2)} \cdot 3$. В дальнейшем окаймление распространяется на ту операцию, которая логически выполняется первой (в данном случае это операция умножения): abc := 1.2 + (cos(5.6) + 1.2) · 3. Если аргументом, на который распространяется окаймление, является выражение в скобках, то окаймляется все выражение в скобках: abc := 1.2 + (cos(5.6) + 1.2) · (3 + 5). Таким способом можно добиться окаймления всей формулы: abc := 1.2 + (cos(5.6) + 1.2) · 3. Последующее нажатие клавиши <пробел> приводит курсор ввода в состояние, с которого окаймление начиналось: abc := 1.2 + (cos(5.6) + 1.2) · 3.

Если при окаймлении возникает ситуация равных условий расширения синего курсора ввода вправо или влево, то расширение производится в сторону удлинения синей горизонтальной линии. Например, при расширении синего курсора ввода из состояния 1.2 + 1.3 · 4 − 1 + 5 после нажатия клавиши <пробел> получим 1.2 + 1.3 · 4 − 1 + 5.

Изменение окаймления можно выполнять также с использованием клавиш <←> и <→>, однако в этом случае выполняется перебор части формул в последовательности справа-налево или слева-направо без учета приоритета их выполнения. При этом часть формулы будет выделяться только при появлении закрывающейся или открывающейся скобок,

Рассмотрим примеры удаления-вставки символов и добавления-изменения операций.

Для удаления константы, идентификатора или идентификатора функции установите синий курсор ввода на константу или идентификатор: 1.2 + sin(1.3 + 4) + 5; клавишами <Del> или <BackSpace> удалите соответствующие символы: 1.2 + ■(1.3 + 4) + 5. Далее клавишей <Del> удалите метку: 1.2 + (1.3 + 4) + 5.

Удаление части формулы выполняется окаймлением в состоянии левого синего уголка. Для этого выделите левым синим уголком удаляемую часть формулы: abc := 1.2 + (cos(5.6) + 1.2) · (3 + 5), нажмите клавишу <Del>: abc := 1.2 + (cos(5.6) + 1.2) · (3 + 5); подтвердите удаление очередным нажатием <Del>: abc := 1.2 + (■) · (3 + 5). Если в дальнейшем необходимо удалить в последней формуле (•), то выделите скобки левым синим уголком: abc := 1.2 + (■) · (3 + 5); нажмите два раза клавишу <Del>:

aЪc := 1.2 + ▮ · (3 + 5) . Далее удалите операцию умножения нажатием клавиши <Del>: abc := 1.2 + ▮ □ (3 + 5) ; клавишей <Del> удалите метку: abc := 1.2 + (3 + 5) .

Вставка части формулы в другое место формулы выполняется с предварительным ее выделением. После выделения части формулы, нажатием на кнопку она помешается в буфер. Например, установите синий курсор ввода на место, куда должна дублироваться часть формулы: abc:= 1.2 + (cos(5.6) + 1.2) · (3 + 5) ; кнопкой вставьте формулу из буфера в указанное место:

abc := 1.2 + (cos(5.6)+ 1.2) · (cos(5.6) + 1.2 + 5) .

Удаление и вставка части формулы может выполняться и с выделением ее с помощью мыши. Для этого установите указатель мыши на начало выделяемой части формулы, нажмите левую кнопку мыши и, не отпуская ее, протяните мышь до выделения требуемой части формулы.

Замена операции может выполняться с использованием правого или левого синих уголков. Для замены операции левым уголком установите его сразу после намеченной для изменения операции, добившись окаймления ближайшего, примыкающего к этой операции, выражения:

abc := 1.2 + (cos(5.6) + 1.2) · (cos(5.6) + 1.2 + 5) ;

нажмите клавишу <BackSpace>:

abc := 1.2 · (cos(5.6) + 1.2) - (cos(5.6) + 1.2+5) .

Затем наберите новую операцию, например, знак минус:

abc := 1.2 - (cos(5.6) + 1.2) · (cos(5.6) + 1.2 + 5) .

Для замены операции правым уголком, установите правый синий уголок перед изменяемой операцией:

abc := 1.2 + (cos(5.6) + 1.2) · (cos(5.6) + 1.2 + 5) ;

нажмите клавишу <Del>:

abc := 1.2 + (cos(5.6)+ 1.2) □ (cos(5.6) + 1.2 + 5) .

Затем наберите новую операцию, например, знак минус:

$$abc := 1.2 + (\cos(5.6) + 1.2) - (\cos(5.6) + 1.2 + 5)$$

Отдельно опишем операции удаления и вставки скобок. Удаление скобок выполняется с использованием правого и левого уголков. Установите левый синий уголок сразу после удаляемой открывающейся скобки:

$$abc := 1.2 + (\cos(5.6) + 1.2) - (3 + 5)$$;

нажмите клавишу <BackSpace>:

$$abc := 1.2 + \cos(5.6) + 1.2 - (3 + 5)$$.

При этом удаляется и соответствующая закрывающаяся скобка.

Теперь установите правый синий уголок перед удаляемой закрывающейся скобкой;

$$abc := 1.2 + (\cos(5.6) + 1.2) - (3 + 5)$$;

нажмите клавишу <Del>:

$$abc := 1.2 + \cos(5.6) + 1.2 - (3 + 5)$$.

При этом удаляется и соответствующая открывающаяся скобка.

Добавление скобок может также выполняться с помощью левого или правого синих уголков. Для добавления скобок с использованием левого синего уголка, выделите часть формулы, которая должна заключаться в скобки: $abc := 1.2 + \cos(5.6) + 1.2 - (3 + 5)$. Далее введите открывающуюся скобку: $abc := 1.2 + (\cos(5.6) + 1.2 - (3 + 5)$, Переведите курсор в состояние правого уголка: $abc := 1.2 + (\cos(5.6) + 1.2 - (3 + 5)$; наберите закрывающуюся скобку $abc := 1.2 + [(\cos(5.6) + 1.2) - (3 + 5)]$. Скобки можно вставить также с использованием кнопки ( ) подпанели **Калькулятор** (Calculator) или клавишей <'>. Для этого правым или левым синим уголком выделите часть формулы, которая должна заключаться в скобки: $abc := 1.2 + \cos(5.6) + 1.2 - (3 + 5)$. Далее введите скобки, щелкнув кнопкой ( ) подпанели **Калькулятор** (Calculator), или нажатием клавиши $abc := 1.2 + (\cos(5.6) + 1.2) - (3 + 5)$.

При добавлении в самом начале формулы операции вычитания Maihcad вместо двуместной операции вставляет одноместный знак минус перед выражением:

$$\frac{-\left(\frac{\sin(13)}{133} - 3 \cdot 15\right)}{\ln(4) + 5}$$

Избежать этого очень просто. Выделяем, например, правым синим уголком часть выражения, которая будет вторым операндом операции вычитания:

$$\frac{\sin(13) - 3 \cdot 5}{\ln(4) + 5}$$

Заключаем эту часть формулы в скобки:

$$\frac{(\sin(13) - 3 \cdot 5)}{\ln(4) + 5}$$

Окаймляем правым синим уголком всю формулу вместе со скобками, затем клавишей <Ins> переводим курсор ввода в состояние левого уголка и набираем знак умножения:

$$\frac{\blacksquare \cdot (\sin(13) - 3 \cdot 5)}{\ln(4) + 5}$$

На место образовавшейся метки вводим первый аргумент операции:

$$\frac{11 \cdot (\sin(13) - 3 \cdot 5)}{\ln(4) + 5}$$

Клавишей <Del> удаляем знак умножения:

$$\frac{11 \cdot (\sin(13) - 3 \cdot 5)}{\ln(4) + 5}$$

Набираем знак вычитания:

$$\frac{11 - (\sin(13) - 3 \cdot 5)}{\ln(4) + 5}$$

При редактировании формул иногда приходится добавлять функцию, аргументом которой является уже набранная часть формулы. Для этого выделите требуемую часть формулы и заключите ее в скобки: $abc := d_j - (\cos(5.6) + 1.2)$. Установите курсор ввода в виде левого синего уголка так, чтобы он охватывал все выражение вместе со скобками: $abc := d_j - (\cos(5.6) + 1.2)$. Наберите идентификатор требуемой функции: $abc := d_j - \tan(\cos(5.6) + 1.2)$. При вставке функции можно также пользоваться кнопками подпанели Калькулятор (Calculator) или списком функций, вызываемых командой f(x) стандартной панели. Для этого выделите левым синим уголком часть формулы, которая будет аргументом функции, и заключите эту часть формулы в скобки: $abc := d_j - (\cos(5.6) + 1.2)$. Далее, например, с подпанели Калькулятор (Calculator) введите требуемую функцию: $abc := d_j - \tan((\cos(5.6) + 1.2))$.

Аналогично добавляются в формулу и функции, которые не имеют идентификаторов. Пусть формулу $1.2 + 1.3 \cdot 4 - 1 + 3$ необходимо преобразовать для вычисления абсолютного значения ее фрагмента 1.34-1. Выделите синим левым уголком эту часть формулы: $1.2 + 1.3 \cdot 4 - 1 + 5$; заключите ее в скобки: $1.2 + (1.3 \cdot 4 - 1) + 5$. Установите синий курсор ввода в состояние левого уголка, окаймляющего скобки: $1.2 + (1.3 \cdot 4 - 1) + 5$; нажмите кнопку |x| с подпанели Калькулятор (Calculator): $1.2 + |1.3 \cdot 4 - 1| + 5$.

Добавление в формулу двуместной операции может выполняться с использованием левого и правого синих уголков. Пусть в формулу $1.2 + 7.5$ необходимо добавить операцию деления так, чтобы выделенная часть формулы (число 7.5) была вторым операндом. Окаймляем левым синим уголком второй операнд операции (в данном случае число 7.5): $1.2 + 7.5$. Вводим операцию деления: $1.2 + \frac{\blacksquare}{7.5}$.

Заполняем появившуюся метку первым операндом операции деления: $1.2 + \frac{12}{7.5}$.

Пусть теперь в формулу $1.2 + 7.5$ необходимо добавить операцию деления так, чтобы выделенная часть формулы (число 7.5) была первым операндом. Окаймляем правым синим уголком первый операнд (в данном случае число 7.5): $1.2 + 7.5$. Вводим операцию деления: $1.2 + \frac{7.5}{\blacksquare}$. Заполняем появившуюся метку вторым операндом операции деления: $1.2 + \frac{7.5}{12}$.

Рассмотрим процедуру замены **функций**, записываемых с помощью специальных знаков. Предположим, что в формуле $1.2 + \sqrt{1.3 \cdot 4 - 1} + 5$ необходимо заменить функцию квадратного корня на функцию *sin*. Для этого выделите синим левым уголком подкоренное выражение: $1.2 + \sqrt{1.3 \cdot 4 - 1} + 5$; удалите функцию квадратного корня клавишей <BackSpace>: $1.2 + 1.3 \cdot 4 - 1 + 5$. Выделите синим левым уголком выражение $1.3 \cdot 4 - 1$ и возьмите его в скобки: $1.2 + (1.3 \cdot 4 - 1) + 5$. Выделите синим левым уголком все выражение вместе со скобками: $1.2 + (1.3 \cdot 4 - 1) + 5$. На подпанели Калькулятор (Calculator) нажмите кнопку sin: $1.2 + \sin((1.3 \cdot 4 - 1)) + 5$.

Замена функции |x| вычисления абсолютного значения выполняется аналогичным образом с предварительным удалением левой вертикальной линии в обозначении этой функции.

Обратная процедура замены функции, заданной идентификатором, на функцию, записанную специальным символом, выполняется с предварительным удалением функции, заданной идентификатором. Пусть необходимо в формуле $1.2 + \sin(1.3 \cdot 4 - 1) + 5$ заменить функцию *sin* на функцию вычисления абсолютного значения. Устанавливаем **синий** курсор ввода, окаймляя идентификатор *sin*, и удаляем его: $1.2 + \blacksquare(1.3 \cdot 4 - 1) + 5$. Клавишей <Del> удаляем метку: $1.2 + (1.3 \cdot 4 - 1) + 5$. Окаймляем вместе со скобками левым синим уголком часть формулы: $1.2 + (1.3 \cdot 4 - 1) + 5$. С подпанели Калькулятор

(Calculator) вводим функцию $|x|$ вычисления абсолютного значения: $1.2 \to |1.3 \cdot 4 - i| + 5$

Рассмотрим пример замены функций с подпанели **Исчисление** (Calculus). Так, при замене в формуле $\int_1^2 x + x^2\,dx + 5.2 = 9.033$ определенного интеграла на функцию *sin* от подынтегрального выражения, необходимо сделать следующее. Скопируйте кнопкой в буфер подынтегральное выражение $x+x^2$. Удалите весь интеграл $\int_1^2 x + x^2\,dx + 5.2 = \blacksquare$ клавишей <Del>: $\blacksquare + 5.2 = \blacksquare$. Вставьте на место метки кнопкой подынтегральное выражение из буфера: $x + x^2 + 5.2 = \blacksquare$. Заключите это выражение в скобки нажатием кнопки $()$ подпанели **Калькулятор** (Calculator): $(x + x^2) + 5.2 = \blacksquare$. Расширьте синий уголок нажатием клавиши <пробел>. Нажмите кнопку $\sin$ подпанели Калькулятор (Calculator): $\sin((x + x^2)) + 5.2 = \blacksquare$.

Приложение 4

Команды меню

Строка меню пакета Mathcad содержит 9 пунктов: **Файл (File) Правка** (Edit) **Вид** (View), **Вставка** (Insert), **Формат** (Format), **Математика** (Math), **Символика** (Symbolics), **Окно** (Window), **Помощь (Help),** каждый из которых после щелчка на нем левой кнопки мыши вызывает выпадающее меню.

Пункт меню Файл

Выпадающее меню **Файл** (File) изображено на рис. П4.1.

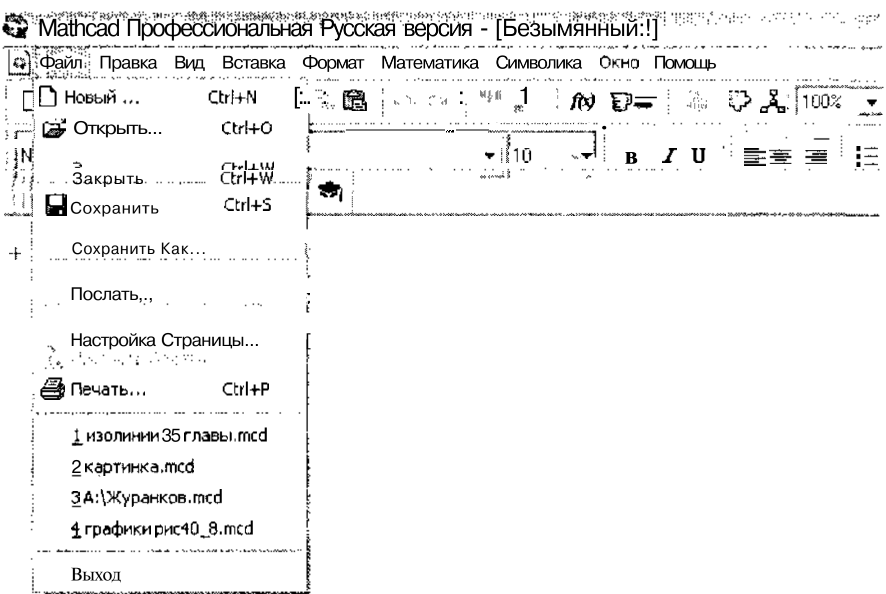


Рис. П4.1. Выпадающее меню **Файл**

Команда **Новый** (New) вызывает диалоговое окно **Новый** (New) (рис. П4.2). Если в списке **Шаблоны** рабочего листа этого диалогового окна выбрать пункт **Чистый**

Рабочий Лист (Blank Worksheet), то после щелчка кнопкой **ОК** появится окно редактирования для нового Mathcad-документа под названием **Безымянный:к** (Untitled:k) с новым порядковым номером *к*. Если воспользоваться кнопкой **Обзор** (Browse), то в папке *template* пакета Mathcad можно отыскать папки с заготовленными или собственными файлами стилей с расширением .mct и воспользоваться нужным файлом стилей. В списке **Шаблоны рабочего листа** (Worksheet Templates) диалогового окна **Новый** (New) отображаются только имена файлов-шаблонов непосредственно из папки *template* пакета Mathcad. Можно создать собственный стиль документа Mathcad (создание стиля написания констант, переменных и текста рассмотрено *в разделе "Формулы с использованием векторов и матриц" приложения 2),* очистить лист документа и сохранить созданный шаблон в файле с расширением .mct. Для этого необходимо выбрать команду **Сохранить как** (Save as) и в появившемся диалоговом окне из раскрывающегося списка **Save** as **type** выбрать **Mathcad Template** и сохранить под своим именем в папке *template* пакета Mathcad файл шаблона.

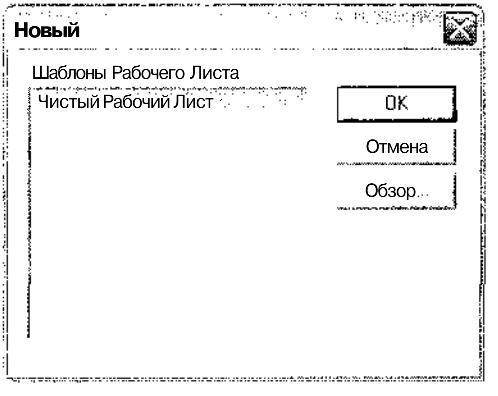


Рис. П4.2. Диалоговое окно **Новый**

Команда **Открыть** (Open) вызывает стандартное для всех Windows-приложений диалоговое окно **Открыть** (Open) (рис. П4.3). Для вызова одного из открывавшихся недавно документов, названия которых размешаются над командой **Выход** (Exit) меню Файл (File), достаточно щелкнуть левой кнопкой мыши по строке, содержащей название этого документа.

Команда **Сохранить** (Save) позволяет записывать файл на диск под его текущим именем со всеми изменениями, внесенными во время редактирования. При этом первоначальный вид документа будет утрачен. Команду **Save** следует периодически выполнять при подготовке сложных Mathcad-документов, поскольку это позволяет сохранить результаты работы, например, при "зависании" компьютера.

Команда **Сохранить как** (Save as) вызывает диалоговое окно для сохранения данного Mathcad-документа на диске под выбранным именем и в нужной папке. Например, рис. П4.4 означает, что документ под названием "Двумерная модель" будет сохранен в папке "MathCad+++++".

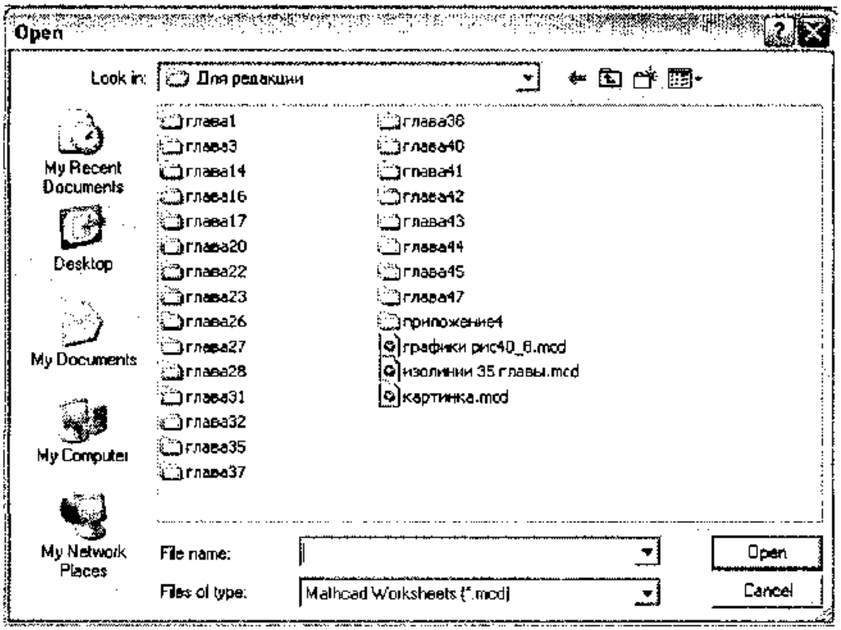


Рис. П4.3. Диалоговое окно Open

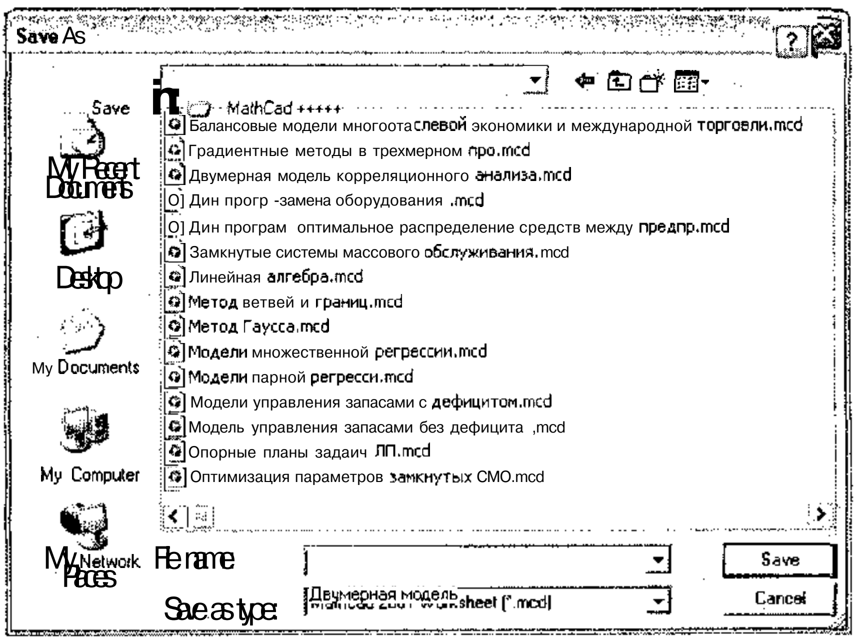


Рис. П4.4. Диалоговое окно Save As

Пункт меню Правка

Выпадающее меню **Правка** (Edit) изображено на рис. П4.5.

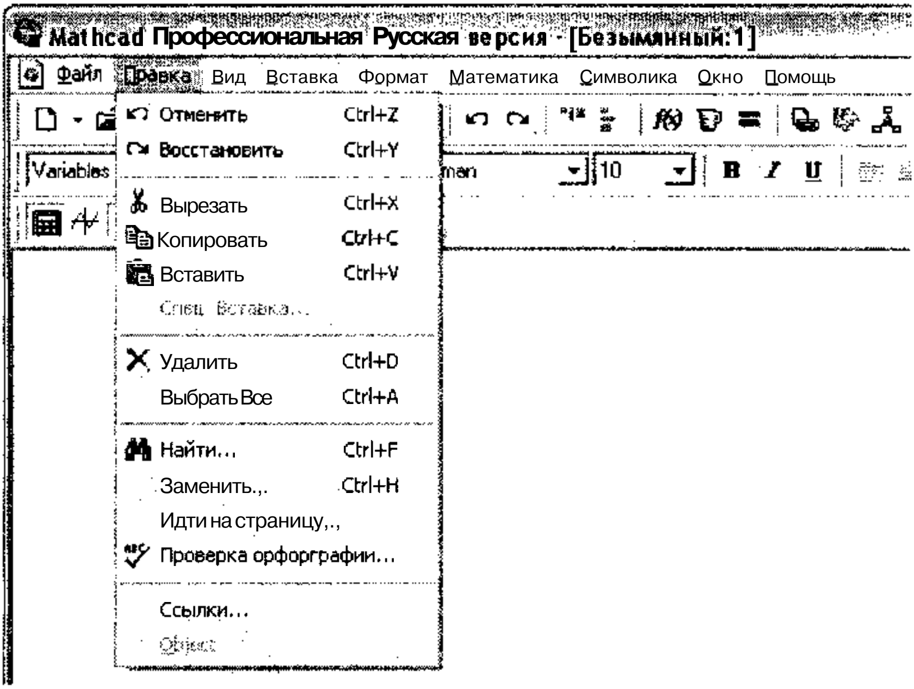


Рис. П4.5. Выпадающее меню Правка

Команда **Отменить** (Undo) (или комбинация клавиш <Ctrl>+<z>) отменяет последнюю операцию редактирования. Команда **Восстановить** (Redo) (или комбинация клавиш <Ctrl>+<Y>) восстанавливает только что отмененную операцию редактирования. Пусть, к примеру, в числе 12 на рабочем листе удаляется цифра 2 и затем применяются последовательно команды Отменить (Undo) и **Восстановить** (Redo). Тогда последовательность этих действий вызовет следующие превращения:

$$12 \rightarrow 1 \xrightarrow{\text{Undo}} 12 \xrightarrow{\text{Redo}} 1$$

Под областью рабочего листа подразумевается та часть Mathcad-документа (текст, формула, график, программа), которая образовалась на рабочем листе с момента ее редактирования (то есть с момента превращения красного курсора в синий) до момента завершения ее редактирования.

Команда **Вырезать** (Cut) или клавиша <F3> переносят выделенные области на рабочем листе в буфер обмена, исключая их из редактируемого документа.

Команда **Копировать** (Copy) копирует выделенные области на рабочем листе в буфер обмена, сохраняя их в документе.

Команда Удалить (Delete) удаляет выделенные области без помещения их в буфер обмена.

Существует два способа выделения областей рабочего листа. Предположим, что требуется выделить группу областей, попадающих в некоторый воображаемый прямоугольник на рабочем листе. Подведите указатель мыши к вершине этого воображаемого прямоугольника так, чтобы после щелчка левой кнопкой мыши курсор оставался красным. Не отпуская левую кнопку мыши, переместите курсор по диагонали до противоположной вершины воображаемого прямоугольника. Отпустив кнопку мыши, получим группу выделенных областей, которые будут очерчены пунктирными линиями, Того же результата можно достичь, если, удерживая клавишу <Ctr|>, щелкнуть последовательно левой кнопкой мыши по областям, которые предназначены для выделения. Группа выделенных областей ведет себя как единый блок, который можно перемещать вдоль рабочего листа при нажатой левой кнопке мыши, предварительно добившись, чтобы курсор на краю какой-либо области принял форму ладони руки. Естественно, что команды **Вырезать** (Cut), **Копировать** (Copy), Удалить (Delete) применяются ко всем областям выделенного блока.

Команда **Вставить** (Paste) или клавиша <F4> вставляют содержимое буфера обмена на рабочий лист, где находится красный курсор (содержимое буфера сохраняется).

Команда **Идти на страницу** (Go to Page) вызывает диалоговое окно (рис. П4.6), в соответствующем поле которого указывается номер нужной страницы рабочего листа. После щелчка кнопкой **OK** верхняя граница искомой страницы (тусклая горизонтальная линия) совпадает с верхним краем окна редактирования.

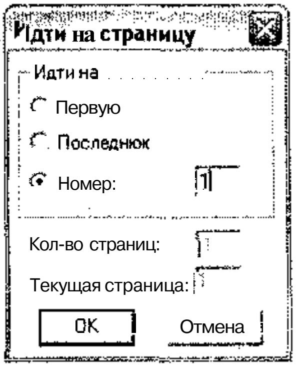


Рис. П4.6. Диалоговое окно **Идти на страницу**

Команда **Найти** (Find) вызывает диалоговое окно **Найти** (Find) для поиска некоторого выражения в документе. Искомое выражение вводится в поле **Что найти** (Find What). Окно **Найти** (Find) содержит 4 опции. Если отмечена опция **Точное совпадение** (Match whole word only), то будет производиться поиск именно того выражения, которое введено в поле **Что найти** (Find What). Если же отмечена опция

Учесть регистр (Match case), то поиск будет производиться с учетом регистра, т. е. с учетом различия малых и больших букв. Опции **Найти в тексте** (Find in Text Regions) и **Найти в математике** (Find in Math Regions) дают возможность определить тип областей — текстовых или формульных, которые будут просматриваться при поиске. Кнопка **Дальше** (Find Next) осуществляет переходы от текущего места к месту рабочего листа, где содержится искомое выражение.

Пусть, к примеру, на рабочем листе имеются следующие выражения

$$\boxed{a := 12}$$

Ъ:=*2* • 3

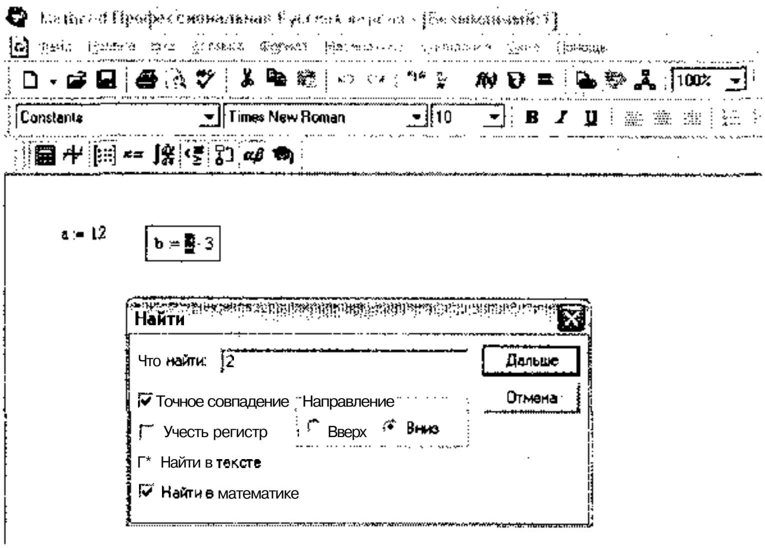


Рис. П4.7. Поиск при отмеченной опции **Точное совпадение**

Рис. П4.7 демонстрирует результаты поиска после щелчка кнопкой **Дальше** (Find Next) в случае выбора опции **Точное совпадение** (Match whole word only). Как видно из рис. П4.7, найдено число 2 в формульной области b:=2 • 3 и пропущена цифра 2 в числе 12, Следующий рис. П4.8 демонстрирует результаты поиска после щелчка кнопкой Дальше (Find Next) в случае отмены опции **Точное совпадение** (Match whole word only). Как видно из рис. П4.8, найдено число 12, в котором цифра 2 встречается как "фрагмент". При следующем щелчке кнопкой **Дальше** (Find Next) будет отмечено число 2 в выражении b:=2 • 3, как и в первом случае.

Команда **Заменить** (Replace) вызывает диалоговое окно **Замена** (Replace), аналогичное окну **Найти** (Find), только с двумя дополнительными кнопками **Заменить** (Replace) и **Заменить все** (Replace All) и дополнительным полем **Заменить на** (Replace with) для ввода выражения, которое должно заменить выражение, введенное в поле **Что найти** (Find What). Действие этих окон аналогично. Отличие только в том, что после щелчка кнопкой **Заменить** (Replace), найденное в документе выражение сразу же заменяется новым, указанным в поле **Заменить на** (Replace with), после чего осуществляется переход к следующему месту в документе, содержащему искомое выражение. Результат одного щелчка кнопкой **Заменить** (Replace) (после вызова окна **Заменить** (Replace)) показан на рис. П4.9.

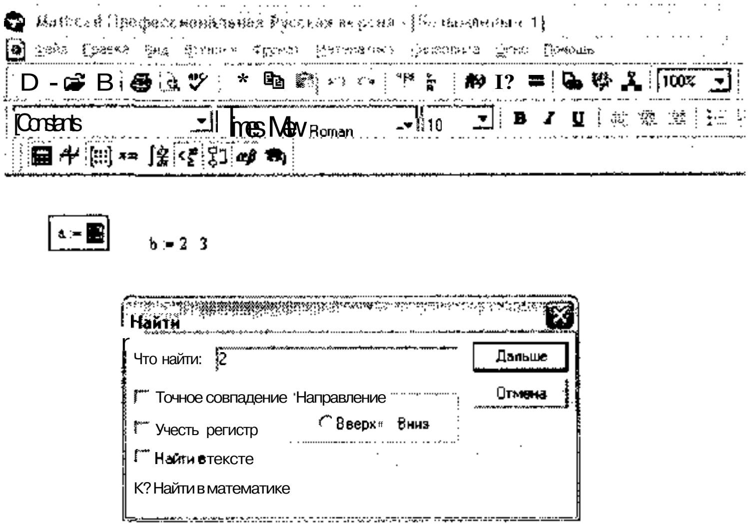


Рис. П4.8. Поиск при отмененной опции **Точное совпадение**

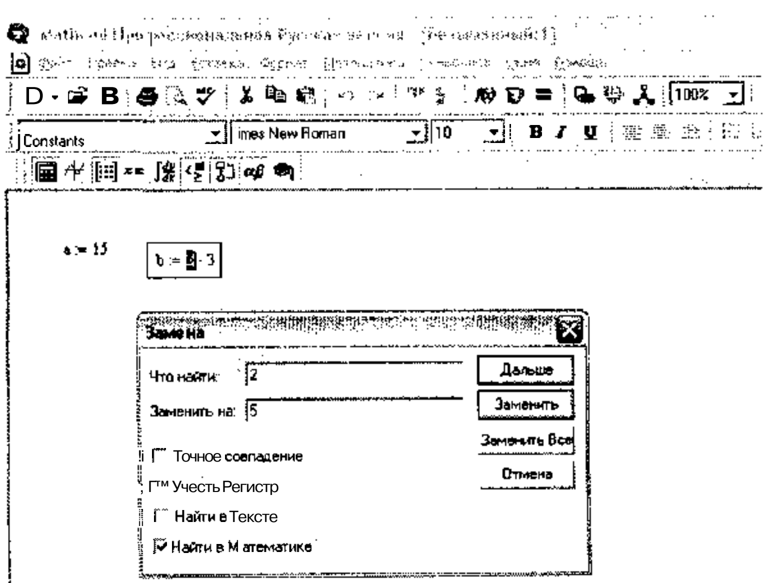


Рис. П4.9. Пример замены фрагментов текста

Пункт меню Вид

Выпадающее меню **Вид** (View) имеет вид, показанный на рис. П4.10.

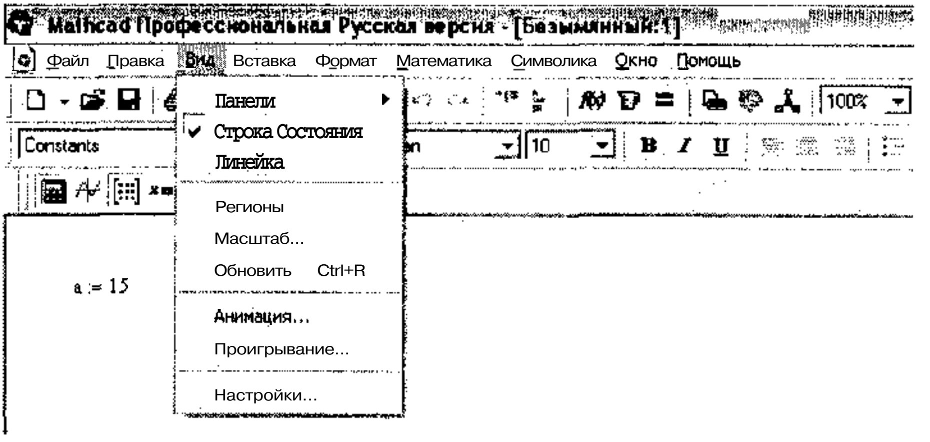


Рис. П4.10. Выпадающее меню Вид

Команда **Панели** (Toolbars) вызывает всплывающее меню (рис. П4.11), содержащее три опции для управления выводом панелей инструментов: опция **Стандартная** (Standard) регулирует вывод стандартной панели, опция **Форматирование** (Formatting)— панели форматирования, опция Математика (Math)— панели математики (последняя панель содержит кнопки для вывода подпанелей, перечисленных в этом меню ниже опции Математика (Math)).

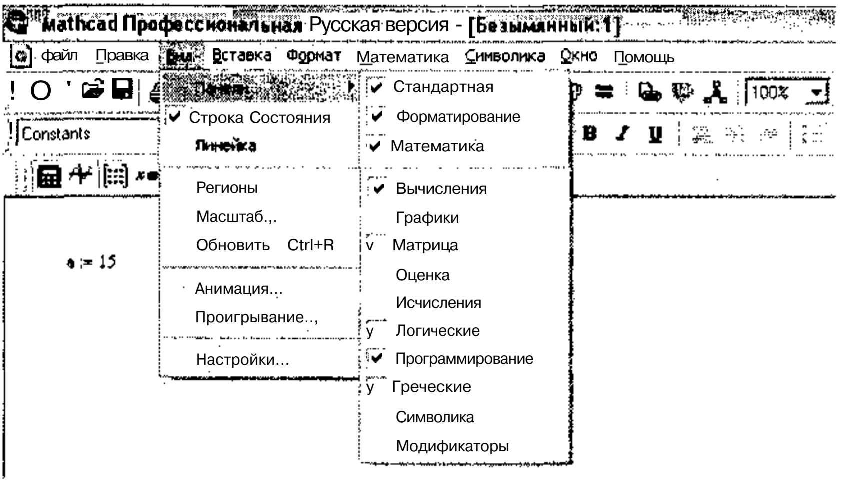


Рис. П4.11. Всплывающее меню Панели

Опция **Строка состояния** (Status Bar) меню **Вид** (View) используется для установок статусной строки в нижней части главного окна.

Команда **Регионы** (Regions) управляет выделением всех областей на рабочем листе: сами области будут отмечены белым цветом, а промежутки между ними — серым (рис. П4.12).

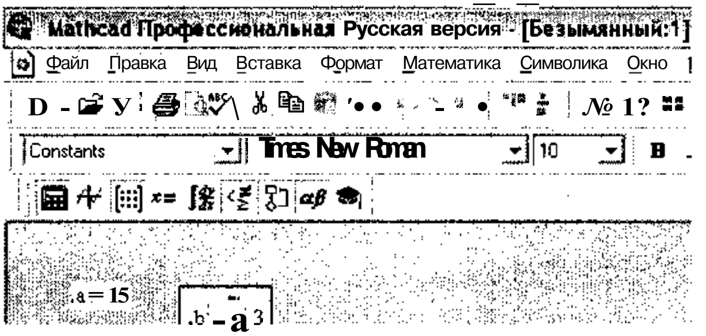


Рис. П4.12. Действие команды **Регионы**

Команда **Обновить** (Refresh) позволяет устранять нежелательные следы, которые могут оставаться на экране при манипуляциях с областями (например, при изменении их размеров, перемещении в окне редактирования и т. д.). При этом сами области остаются нетронутыми.

Пункт меню Вставка

Выпадающее меню **Вставка** (Insert) содержит команду **График** (Graph), вызывающую всплывающее меню (оба меню показаны на рис. П4.13) для вызова шаблонов различных типов графиков. Шаблон графика в прямоугольных координатах был описан в *гл. 40* — ему соответствует команда **Х-У график** (X-Y **Plot)** всплывающего меню.

Шаблон трехмерного графика был описан в *гл. 35* — ему соответствует команда **График Поверхности** (Surface Plot) всплывающего меню. Рассмотрим более подробно форматирование трехмерных графиков. Для вызова диалогового окна форматирования поверхностей необходимо два раза щелкнуть левой кнопкой мыши в поле графика. Диалоговое окно **3-D Plot Format** (Формат трехмерного графика) форматирования поверхностей содержит 9 вкладок.

Вкладка Axes, изображенная на рис. П4.14, содержит три вкладки для установки опций соответственно по каждой координате.

Группа **Grids** устанавливает линии сетки по соответствующей координате. Опция **Draw Lines** задает линии сетки. При включенной опции **Draw Lines** становятся активными: поле **Line Color** — для установки цвета линий сетки; поле **Line Weight** — для установки толщины линий сетки. Опция **Draw Ticks** устанавливает метки на оси. Цвет меток определяется полем **Axis Color** группы Axis **Format.** Опция **Auto Grid** устанавливает автоматический выбор количества линий сетки. При отключенной опции **Auto Grid** становится активным поле **Number** для ручной установки числа линий сетки.

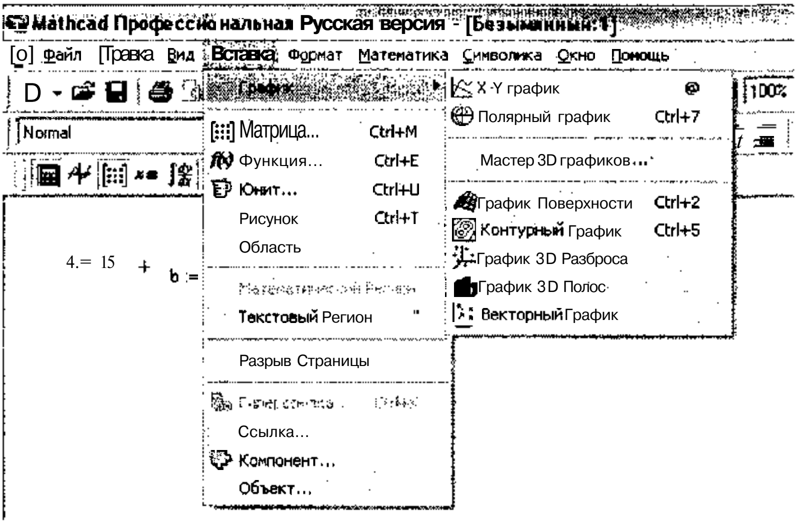


Рис. П4.13. Выпадающее меню Вставка

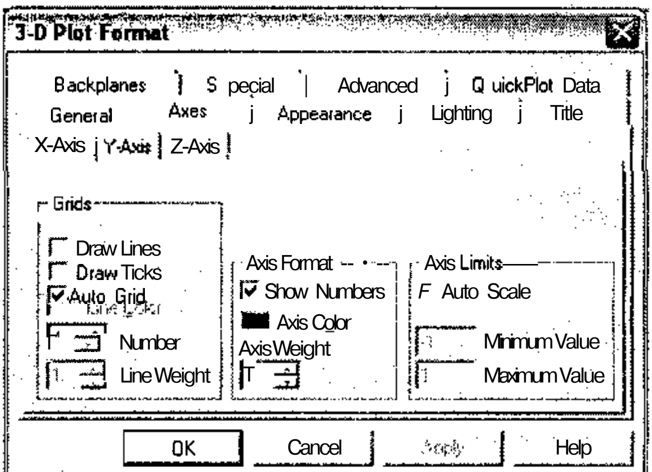


Рис. П4.14. Вкладка Axes диалогового окна 3-D Plot Format

Группа Axis Format (Формат оси) формирует вид соответствующей оси. Опция Show Numbers отображает нумерацию линий сетки вдоль оси. Поле Axis Color устанавливает цвет оси. Поле Axis Weight устанавливает толщину линии оси.

Группа Axis Limits устанавливает диапазоны отображения осей на графике. Опция Auto Scale устанавливает автоматический выбор этого диапазона. При отключенной опции Auto Scale открываются поля Minimum Value и Maximum Value для задания границ диапазона отображения оси на графике. Этот диапазон не идентичен диапазону, в котором строится поверхность. Установка диапазона, в котором строится поверхность, производится на вкладке **QuickPlot** Data (Параметры графика).

Вкладка General, изображенная на рис. П4.15, содержит опции внешнего вида поверхности, расположения координат и их общего вида.

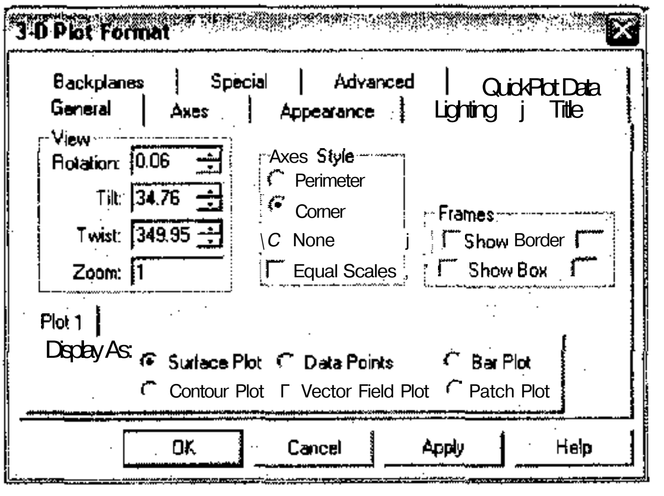


Рис. П4.15. Вкладка General диалогового окна 3-D Plot Format

Группа View определяет углы поворота поверхности относительно каждой из осей: поле Rotation — относительно оси *X*, поле Tilt — наклон относительно оси *У*, поле Twist — относительно оси *Z*; поле Zoom определяет масштаб изображения.

Группа Axes Style определяет расположение осей. Если выбрана опция Corner (Угол), то устанавливается стандартное расположение осей. Если выбрана опция Perimeter, то устанавливается расположение осей по периметру. Опция None отключает показ осей на графике.

Группа Frames содержит две опции, Опция Show Border устанавливает рамку вокруг графика. Опция Show Box выделяет область построения поверхности в виде куба.

В одних и тех же координатах (с помощью одного шаблона) может быть построено несколько поверхностей. Группы **Plot** *i* соответствуют этим поверхностям. Вкладка Plot 1 соответствует первой поверхности. В ней задается тип изображаемой поверхности. Если выбрана опция Surface Plot, то строится обычная поверхность. Если выбрана опция Contour Plot, то строятся в плоскости *X-Y* линии уровня поверхности, причем в этом режиме на каждой линии уровня можно вывести ее числовое значение установкой опции Numbered (Нумерация) вкладки Special. Если выбрана опция Data Points, то поверхность представляется в виде набора точек.

Вкладка QuickPlot Data, изображенная на рис. П4.16, устанавливает систему координат и диапазоны значений по осям, на которых строится поверхность.

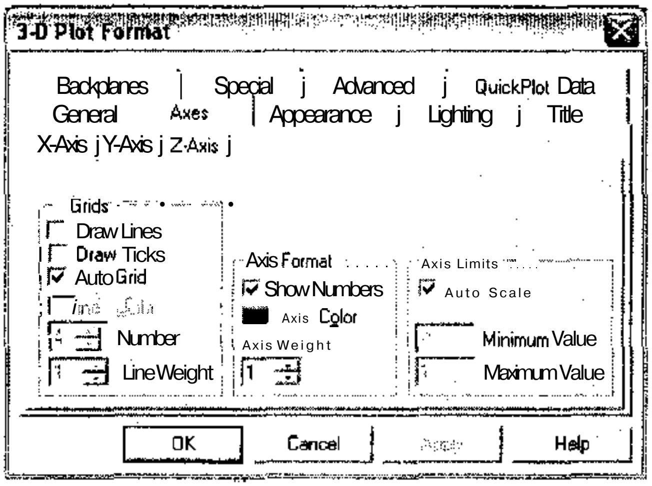


Рис. П4.16. Вкладка **QuickPlot Data** диалогового окна **3-D Plot Format**

Группа Range 1 устанавливает диапазон по оси *X*. Группа Range *2* устанавливает диапазон по оси *Y*. Поле #of Grids (№ сеток) определяет дискретность при представлении поверхности: чем больше это число, тем плавнее будет поверхность.

Группа Coordinate System устанавливает тип системы координат. Опция Cartesian определяет декартову систему координат.

Вкладка Title, изображенная на рис. П4.17, задает название графика. Если выбрана опция Above, то название появится над графиком; если выбрана опция Below, то название появится под графиком. Опция Hide (Спрятать) отключает вывод названия фафика.

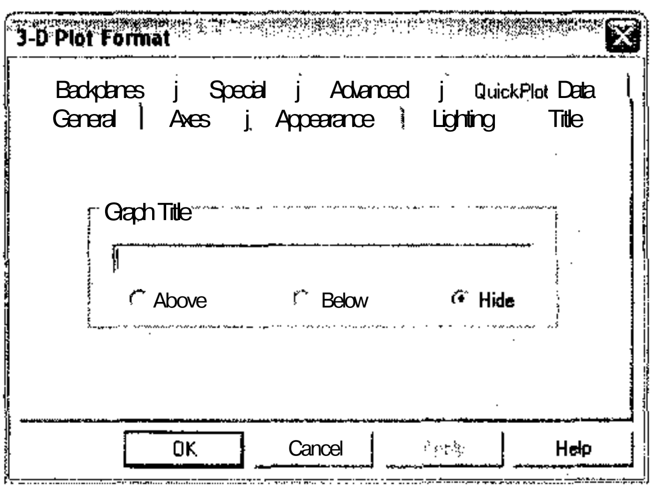


Рис. П4.17. Вкладка **Title** диалогового окна **3-D Plot Format**

Вкладка Lighting, изображенная на рис. П4.18, устанавливает эффект подсветки поверхности от одного или нескольких источников. Для включения эффекта подсветки необходимо установить опцию Enable Lighting в группе Lighting. В этой же группе из раскрывающегося списка Lighting Scheme выбираются различные схемы подсветки в случае, если включена опция Infinite Light Source (Бесконечно удаленный источник) во вкладке Light *i*.

Подсветка может быть от нескольких источников. Для включения источника подсветки на соответствующей кладке Light *i* выберите опцию On. При включенной опции Infinite Light Source подсветка осуществляется от бесконечно удаленного источника, а при отключенной опции Infinite Light Source — от точечного источника, координаты которого указываются соответственно в полях X, Y, Z.

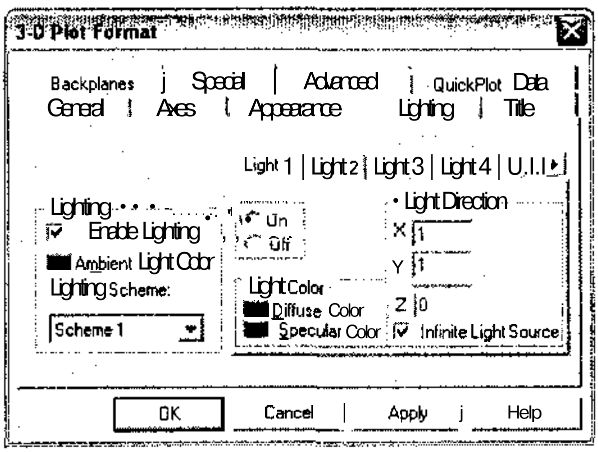


Рис. П4.18. Вкладка **Lighting** диалогового окна **3-D Plot Format**

Вкладка Advanced, изображенная на рис. П4.19, содержит 4 группы опций.

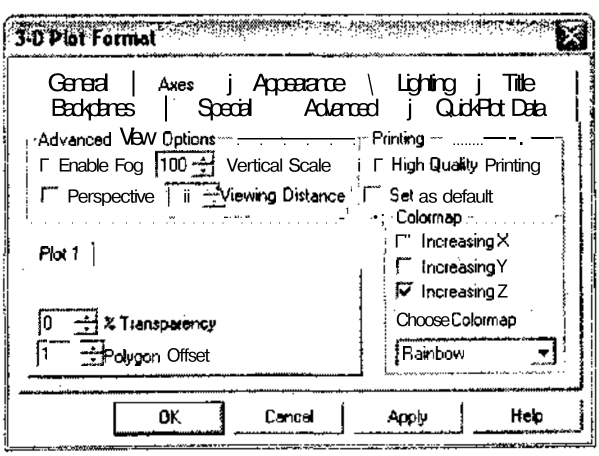


Рис. П4.19. Вкладка **Advanced** диалогового окна **3-D Plot Format**

Группа Advanced View Options содержит две опции. Опция Perspective (Перспектива) создает эффект "перспективы" поверхности, что определяется числом от 1 до 100, вводимым в поле Viewing Distance (Дистанция обзора). Опция Enable For определяет "затуманенность" поверхности. В поле Vertical Scale (Вертикальная шкала) указывается масштаб вдоль оси Z.

В группе Colormap (Цветовая карта) в раскрывающемся списке Choose Colormap (Выбирать цветовую гамму) выбирается цветовая гамма при построении поверхности.

В группе Plot *i* в поле %Transparency определяется контрастность изображения (число 0 — самое контрастное, число 100 — белый фон), поле Poligon Offset (Выделение ячеек) — эффект ячеистости изображения в пределах ортогональной сетки (0 — ячейки слабо выделены, 10 — ячейки сильно выделены).

Вкладка Appearance, изображенная на рис. П4.20, содержит для каждой поверхности Plot *i* три группы опций. Группа Fill Options (Заполнить опции) определяет характер раскраски изображения. Если выбрана опция Fill Surface (Заполнить поверхность), то поверхность раскрашивается с плавным переходом от одной линии уровня к другой. Если выбрана опция Fill Contours, то поверхность раскрашивается с резкими границами переходов, определяемыми линиями уровня. Если выбрана опция No Fill, то поверхность не раскрашивается вообще, а выводится только набором ортогональных линий. При выбранной опции Fill Surface становятся активными опции подгруппы Color Options. Если выбрана опция Colormap, то поверхность раскрашивается по цветовой схеме с учетом опций во вкладке Lighting (Освещение). Если выбрана опция Solid Color (Непрерывый цвет), то поверхность раскрашивается указанным в поле слева цветом без учета опций во вкладке Lighting.

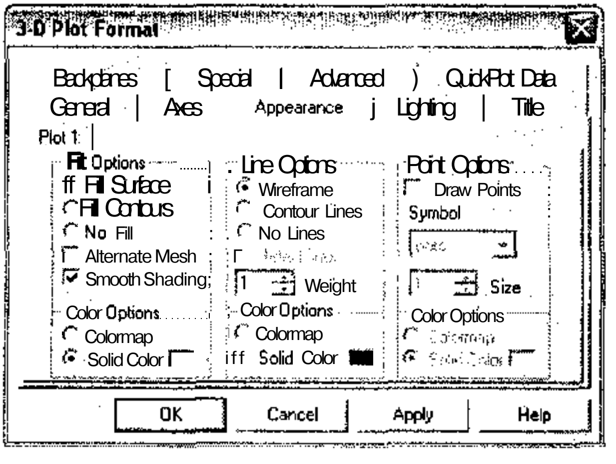


Рис. П4.20. Вкладка Appearance диалогового окна 3-D Plot Format

В группе Line Options можно выбрать одну из трех опций. Опция Wireframe (Сетка) выводит ортогональные линии поверхности. При этом в поле Weight задается толщина линий. Подгруппа Color Options определяет характер раскраски ортогональных линий. Опция Contour Lines вместо ортогональных линий выводит линии уровня. Толщина линий определяется полем Weight, а раскраска — подгруппой Color Options. Опция No Lines не выводит ни ортогональных линий, ни линий уровня.

Группа Point Options содержит только одну опцию Draw Points, при включении которой становятся доступными и все остальные опции группы. Опция Draw Points в узлах ортогональной сетки ставит метки независимо от того, какая опция выбрана в группе Line Options.

Вкладка Backplanes (Задние планы), изображенная на рис. П4.21, содержит группы опций для каждой из координатных плоскостей. Группы Grids и Sub-Grids дублируют соответствующие опции установки линий сетки на вкладке Axes. Опция Fill Backplane раскрашивает координатную плоскость указанным в поле Color цветом. Опция Backplane Border ограничивает рамкой координатную поверхность.

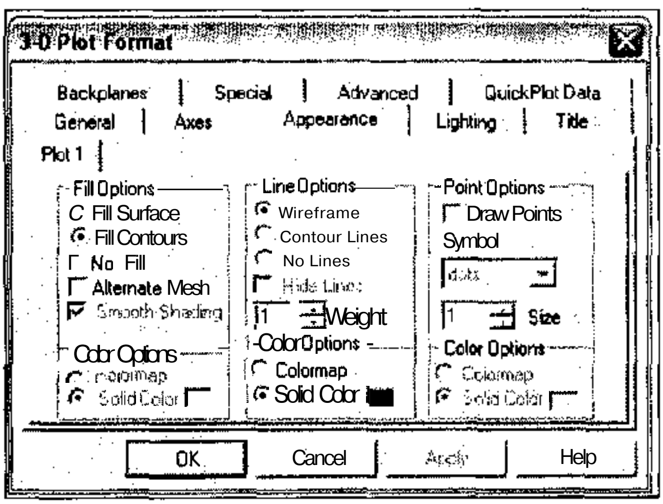


Рис. П4.21. Вкладка **Backplanes** диалогового окна **3-D Plot Format**

Вкладка Special, изображенная на рис. П4.22, содержит группу опций Contour Options для формирования поверхности без учета ортогональных линий. Действие каждой опции этой группы распространяется на каждую из координат, устанавливаемую в раскрывающемся списке внизу всей группы. Если установлена опция Fill, то поверхность отображается в заданной цветовой гамме. Эта опция дублирует опцию Fill Surface вкладки Appearance. Если установлена опция Draw Lines, то на поверхности выводятся линии уровня относительно выбранной координаты. Число линий уровня определяется опцией Auto Contour (АвтоКонтур): если эта опция установлена, то число линий уровня определяется автоматически; если она отключена, то это число задается в поле Number (Число).

Команда **Матрица** (Matrix) вызывает диалоговое окно для ввода векторов и матриц. Это окно было описано в *гл. 3*.

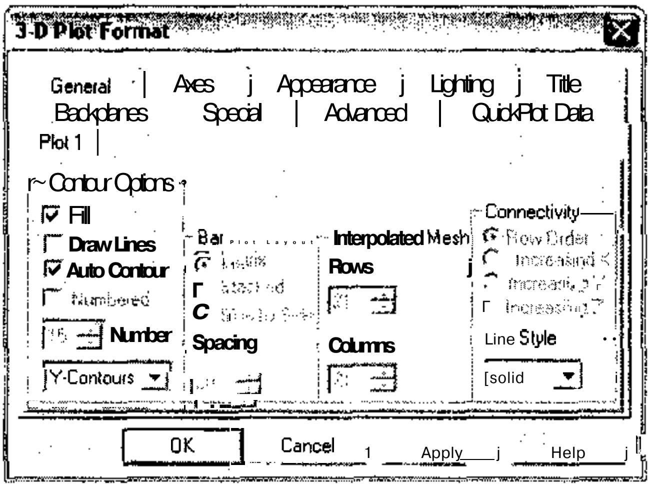


Рис. П4.22. Вкладка Special диалогового окна 3-D Plot Format

Команда **Функция** (Function) вызывает диалоговое окно **Вставить Функцию** (Insert Function) для ввода шаблона встроенных функций. Это окно состоит из двух списков: левый— **Категория функции** (Function Category)— содержит список категорий (классов), на которые разбиты функции, правый— **Имя функции** (Function Name) — содержит список имен самих функций. Щелчок левой кнопки мыши соответствующей категории в левом списке, например Solving, автоматически вызывает в правом списке перечень имен всех функций этой категории. Последующий щелчок левой кнопкой мыши на одном из этих имен, например find, вызывает описание основных характеристик этой функции в нижней части окна **Вставить Функцию** (Insert Function) (рис. П4.23). Если после выделения в правом списке нужной функции щелкнуть кнопкой **Вставить** (Insert), то на месте курсора ввода на рабочем листе появится шаблон этой функции, как это показано на рис.П4.23. При этом само окно **Вставить Функцию** (Insert Function) останется в неактивном состоянии на экране. Щелчок кнопкой **OK** также вызывает шаблон функции, однако окно при этом исчезает.

Команда **Юнит** (Unit) вызывает диалоговое окно **Вставить Единицу** (Insert Unit) для ввода единиц измерения, изображенное на рис. П4.24. Это окно содержит два списка: верхний — **Измерение** (Dimension) — содержит перечень типов единиц измерения; нижний — **Единица** (Unit) — списки самих единиц измерения. В поле **Система** (System) указана система единиц измерения (по умолчанию SI), которую можно выбрать с помощью меню **Математика** (Math) *(см. ниже)*. Щелчок левой кнопкой мыши по соответствующему типу единиц измерения в списке **Измере-**

ние (Dimension), например Length, автоматически вызывает в списке **Единица** (Unit) перечень единиц измерения этого вида. Если выделить в этом окне щелчком левой кнопки мыши одну из единиц списка, например, Inches, и затем щелкнуть кнопкой **Вставить** (Insert) диалогового окна, то на месте курсора на рабочем листе появится сокращение выделенной единицы измерения. Пусть, к примеру, необходимо вычислить объем комнаты, длина которой равна 5 метров, ширина равна 6 футов, а высота равна 150 дюймов. Введите в нужном месте рабочего листа число 5, затем клавишей <*> знак умножения. Вызовите окно **Вставить Единицу** (Insert Unit) и в его списке **Измерение** (Dimension) выделите щелчком мыши строку с названием Length, а затем в списке **Единица** (Unit) — строку с названием Meters. Щелкните кнопкой **Вставить** (Insert). Опять введите знак умножения, число 6, знак умножения, выделите строку Length в списке **Измерение** (Dimension), а в списке Единица (Unit) — строку Feet. Щелкните кнопкой Вставить (Insert). Затем введите знак умножения, число 150. знак умножения, опять выделите последовательно строки с названиями Length и Inches, щелкните кнопкой **Вставить** (Insert). Нажав клавишу <=>, получите объем комнаты в кубических метрах, как это и показано на рис. П4.24.

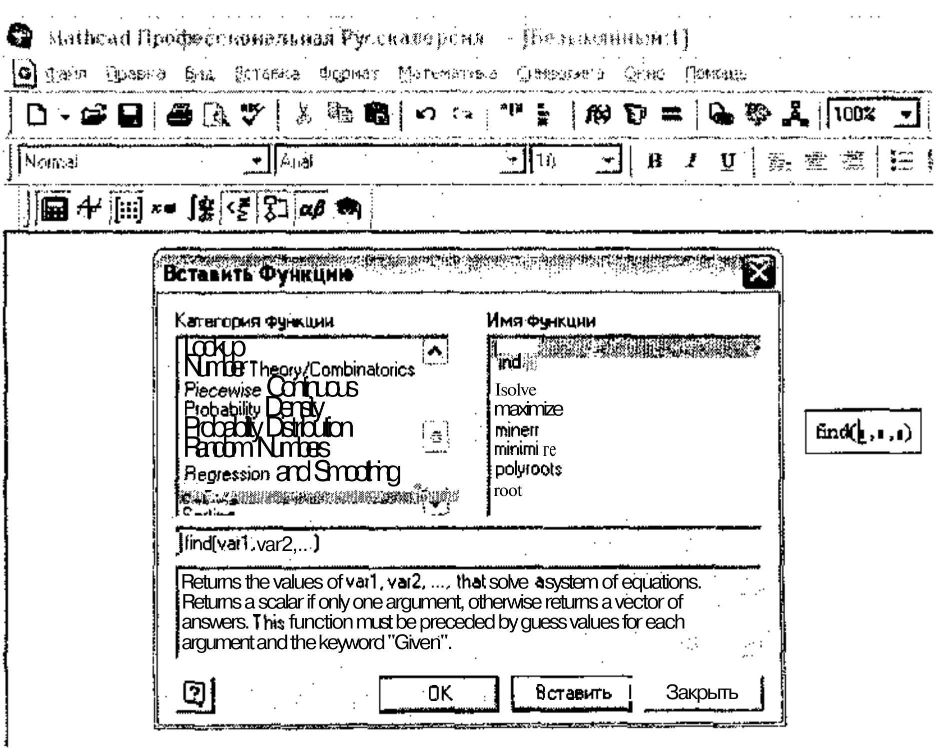


Рис. П4.23. Диалоговое окно **Вставить Функцию**

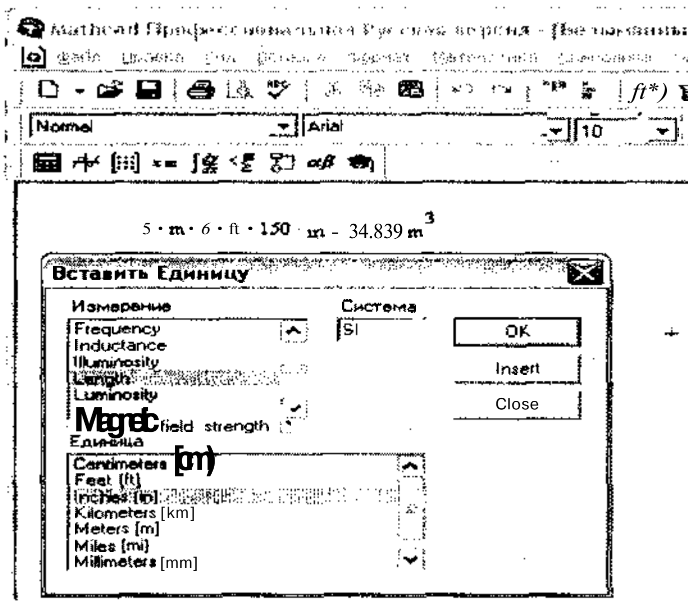


Рис. П4.24. Ввод единиц измерения командой **Юнит**

Команда **Разрыв Страницы** (Page Break) обеспечивает вставку горизонтальной линии для разрыва страницы рабочего листа на месте красного курсора. Этой командой можно добиться того, чтобы графики или области не разрывались на части разными страницами. Результат применения команды **Разрыв Страницы** (Page Break) можно аннулировать, если выделить линию разрыва (например, не отпуская левой кнопки мыши, "протащить" красный курсор сверху вниз, пересекая эту линию) и затем нажать клавишу <F3>.

Команда **Компонент** (Component) вызывает диалоговое окно **Component Wizard** (рис. П4.25) для выбора и ввода компонент других систем.

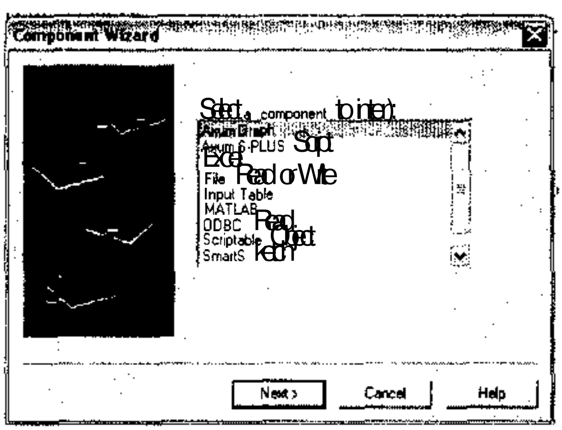


Рис. П4.25. Диалоговое окно команды **Компонент**

Это диалоговое окно содержит список **Select a component to insert.** Выделив, например, щелчком левой кнопки мыши строку Input Table и щелкнув кнопкой **Finish,** получим на рабочем листе шаблон для ввода таблиц, как это показано на рис. П4.26.

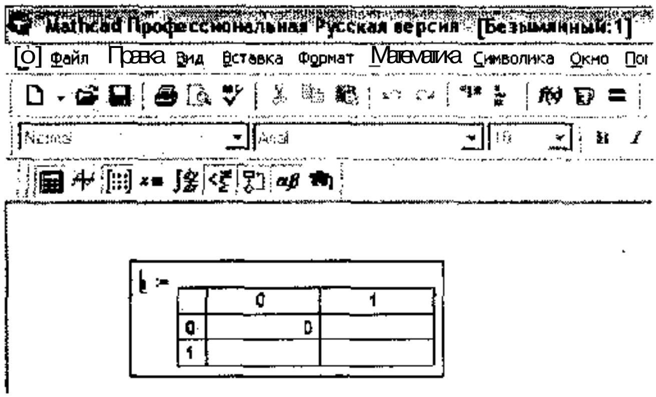


Рис. П4.26. Шаблон для ввода таблицы

Пункт меню Формат

Выпадающее меню **Формат** (Format) имеет вид, показанный на рис. П4.27.

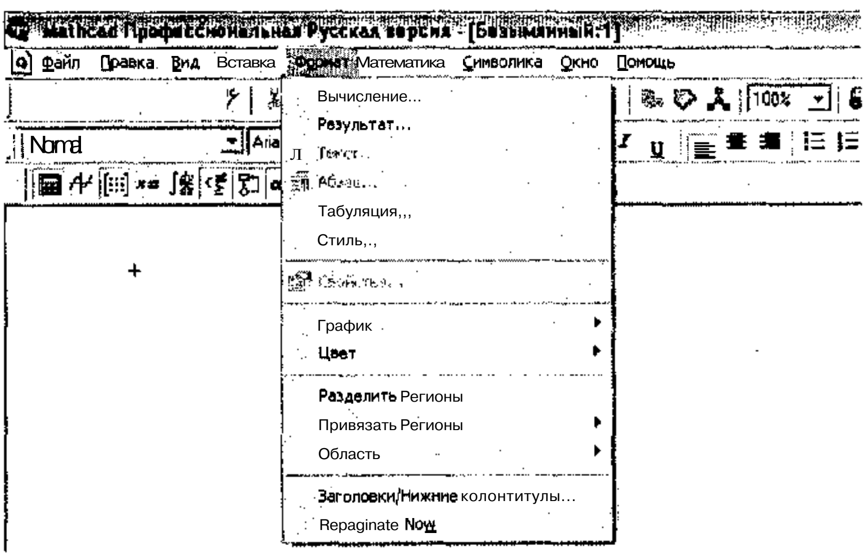


Рис. П4.27. Выпадающее меню **Формат**

Команда **Вычисление** (Equation) вызывает диалоговое окно **Формат Уравнения** (Equation Format) для формирования стиля констант, переменных, текста. Это окно содержит раскрывающийся список **Имя стиля** (Math Style) со строками Variables, Constant, User1, . . ., User7. Выбор строки Variables или Constant позволяет изменить стиль всех переменных или констант в Mathcad-документе. Выбор строки User i позволяет изменить стиль только той переменной или константы, которая выделена синим курсором на рабочем листе. Изменение стиля производится с помощью соответствующих окон диалогового окна, вызываемого кнопкой **Изменить** (Modify). Эти окна содержат шрифты, варианты их начертания, размера кегля и т. д. Пусть, например, необходимо изменить размер имен переменных а и Ь в выражениях a:=25 b:=34·a. После щелчка кнопкой **Изменить** (Modify) диалогового окна **Формат Уравнения** (Equation Format) появится диалоговое окно **Variables,** как это показано на рис. П4.28. Выбрав размер 14 в соответствующем раскрывающемся списке и закрыв все окна, получим на рабочем листе следующий вид:

$a := 25 \quad b := 34 \cdot a$

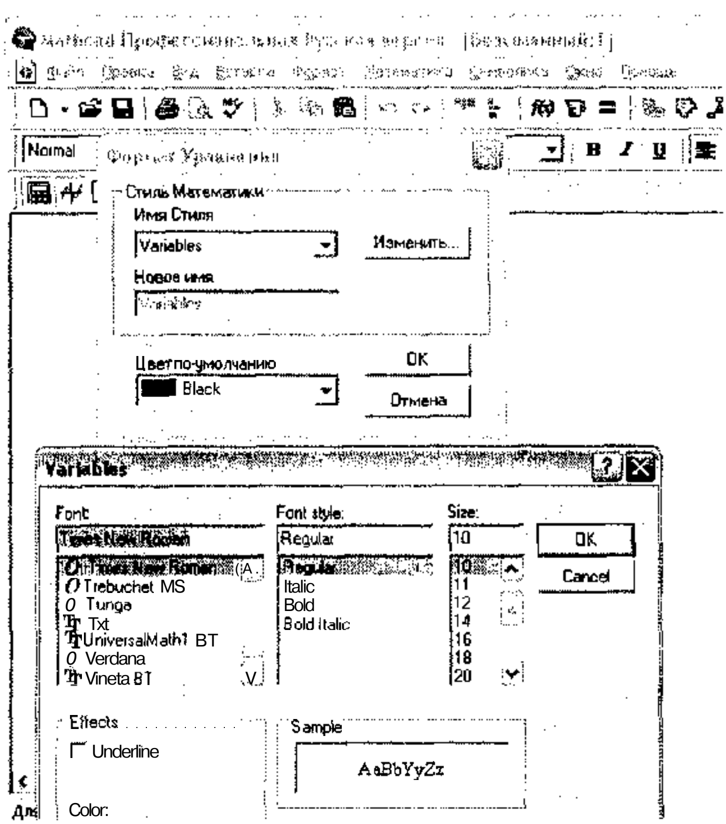


Рис. П4.28. Диалоговые окна для изменения стиля переменной

Команда Результат (Result) вызывает диалоговое окно **Формат Результата** (Result Format) (рис. П4.29) для форматирования результатов вычислений в Mathcad-документе.

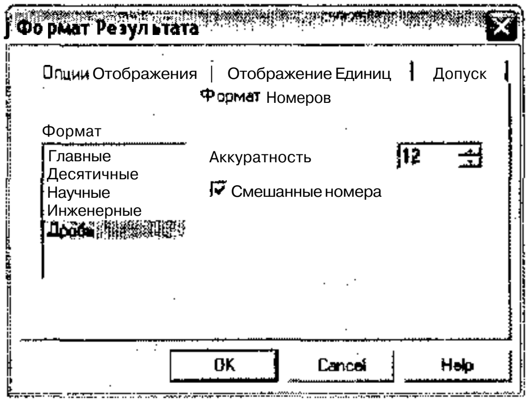


Рис. П4.29. Диалоговое окно команды **Результат**

Вкладка **Формат Номеров** (Number Format) позволяет задать формат численных результатов вычислений. Например, выбор (щелчком левой кнопки мыши) формата **Дробь** (Fraction) в списке **Формат** (Format) и установка опции **Смешанные номера** (Use mixed numbers) задают результаты вычислений в виде смешанных дробей. Так, если при таких установках после закрытия окна **Формат Результата** (Result Format) выделить синим курсором выражение $2 \cdot \frac{7}{3}$, то после нажатия клавиши <=> справа от знака равенства получится число $4\frac{2}{3}$.

Выбор формата **Главные** (General) открывает поле **Кол-во десят.точек** (Number of decimal places) (рис. П4.30) для задания количества отображаемых знаков после запятой, Целое число k, заданное в поле **Экспоненциальный порог** (Exponential threshold) , указывает, что числа x, для которых верно $|x| \geq 10^{k}$ или $|x| \leq 10^{k}$, представляются в экспоненциальной форме.

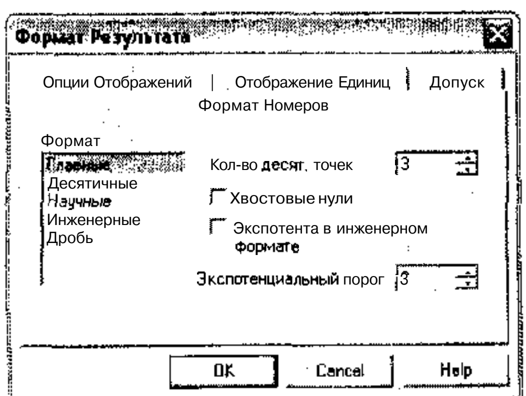


Рис. П4.30. Опции формата **Главные**

Вкладка **Опции отображения** (Display Options) содержит раскрывающийся список **Стиль матрицы** (Matrix display style) для выбора стиля результатов матричных вычислений. Пусть, к примеру, фрагмент рабочего листа выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

Выберем в списке **Стиль матрицы** (Matrix display style) стиль Table, как это показано на рис. П4.31.

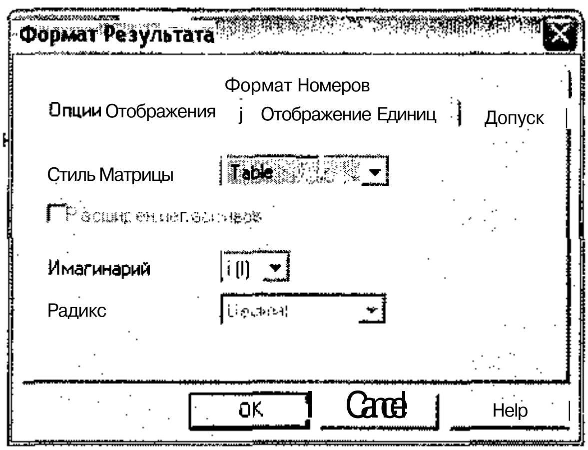


Рис. П4.31. Выбор стиля Table матрицы

Тогда после закрытия диалогового окна рабочий лист будет выглядеть уже так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot 2 =$$

	0	1	2
0	2	4	6
1	3	10	12
2	14	16	13

В Mathcad допускается использование так называемых "гнездовых" матриц, т. е. матриц, элементами которых являются также матрицы. Например, при попытке отобразить такую матрицу M в документе может возникнуть следующая картина:

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad b := (4\ 5) \qquad M_0 := a \qquad M_1 := a \qquad M_2 := b \qquad M = \begin{pmatrix} \{3,2\} \\ \{3,2\} \\ \{1,2\} \end{pmatrix}$$

Это означает, что элементы M_0 И M_1 матрицы M являются в свою очередь матрицами размера 3x2, а элемент M_2 — матрицей размера 1x2. Отобразить все элементы "элемента" M_2 можно, например, так:

$$i := 0..1 \qquad \left(M_1\right)_{2,i} = \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix}}$$

Однако для отображения в Mathcad-документе всех элементов гнездовых матриц, надо воспользоваться вкладкой **Опции отображения** (Display Options), отметив опцию **Расширение массивов** (Expand nested arrays) (рис. П4.32). Пусть, например, фрагмент рабочего листа выглядит так:

$$a := (1 \quad 2 \quad 3) \qquad b := (4 \quad 5 \quad 6)$$

$$c_0 := a \qquad c_1 := b \qquad c = \begin{pmatrix} \{1,3\} \\ \{1/3\} \end{pmatrix}$$

Здесь матрица c состоит из двух элементов a и b, которые в свою очередь являются матрицами размера $1{\times}3$. Если отметить опцию **Расширение массивов** (Expand nested arrays) на вкладке **Опции отображения** (Display Options) и закрыть окно **Формат Результата** (Result Format), то рабочий лист будет уже выглядеть по-другому:

$$a := (1 \quad 2 \quad 3) \qquad b := (4 \quad 5 \quad 6)$$

$$c_0 := a \qquad c_1 := b \qquad c = \begin{bmatrix} (1 & 2 & 3) \\ (4 & 5 & 6) \end{bmatrix}$$

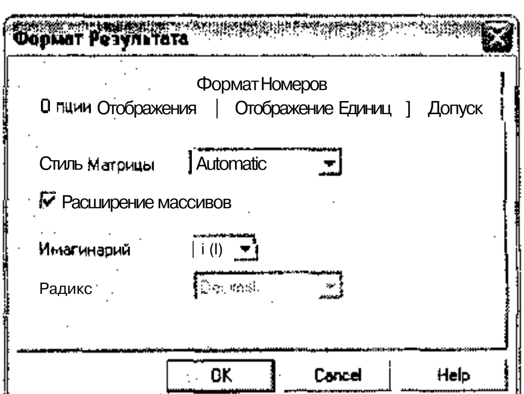


Рис. П4.32. Установка опции Расширение массивов для отображения гнездовых матриц

Вкладка **Допуск** (Tolerance) содержит поле **Нулевой порог** (Zero threshold) для установки нулевого порога (рис. П4.33). Целое число *k*, заданное в этом поле, указывает, что численный результат, не превосходящий по модулю 10^{-k}, будет считаться равным нулю.

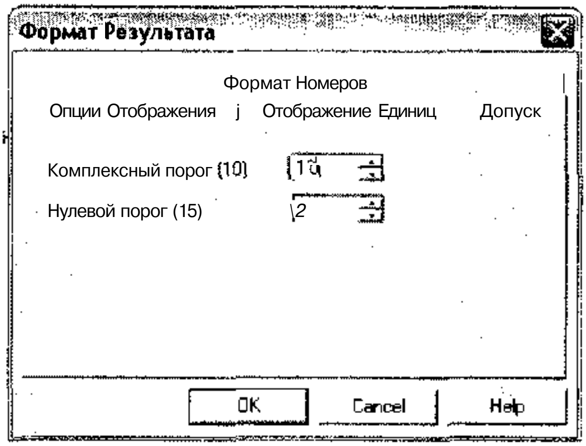


Рис. П4.33. Установка нулевого порога

Окно **Формат Результата** (Result Format) можно вызвать двойным щелчком левой кнопки мыши на произвольном численном результате на рабочем листе. Возможно также форматирование только одного конкретного результата вычислений, если предварительно выделить этот результат синим курсором и воспользоваться вкладками окна **Формат Результата** (Result Format). В этом случае использование вкладок этого окна приведет только к индивидуальному форматированию данного конкретного результата вычислений. При этом другие результаты вычислений сохранят свой прежний формат. Важно отметить, что последующие изменения форматов других результатов вычислений того же самого Mathcad-документа не затронут уже проведенного индивидуального форматирования.

Если на рабочем листе выделены области (пунктирными прямоугольниками), то можно воспользоваться командами **Разделить Регионы** (Separate Regions) и **Привязать Регионы** (Align Regions). Первая из них разделяет перекрывающиеся области; вторая — вызывает выпадающее меню (рис. П4.34) для выравнивания областей по вертикали или горизонтали соответственно.

Команды Текст (Text) и **Абзац** (Paragraph) служат для форматирования текстов. Эти команды доступны, если на рабочем листе выделена некоторая текстовая область. Вызвать шаблон текстовой области можно, например, клавишей <">, при этом на месте красного курсора появится шаблон текстовой области с текстовым курсором в виде красной вертикальной черты,

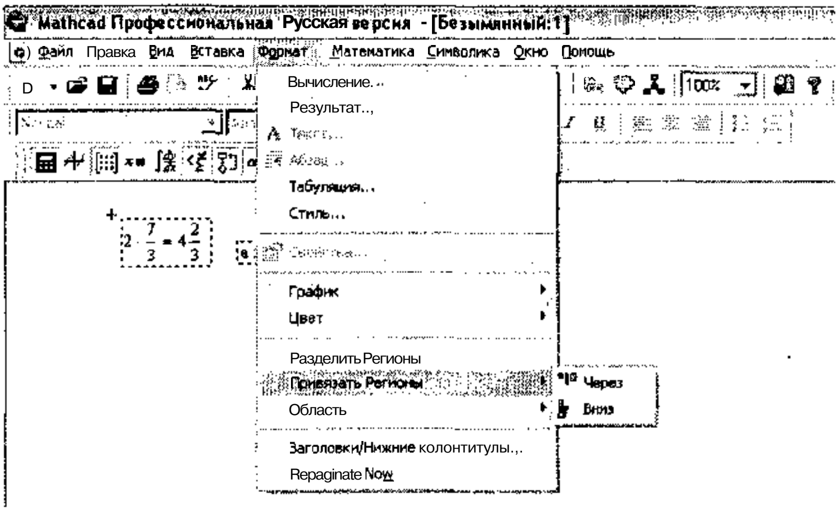


Рис. П4.34. Выпадающее меню **Привязать Регионы**

Пункт меню Математика

Выпадающее меню Математика (Math) имеет вид, показанный на рис. П4.35.

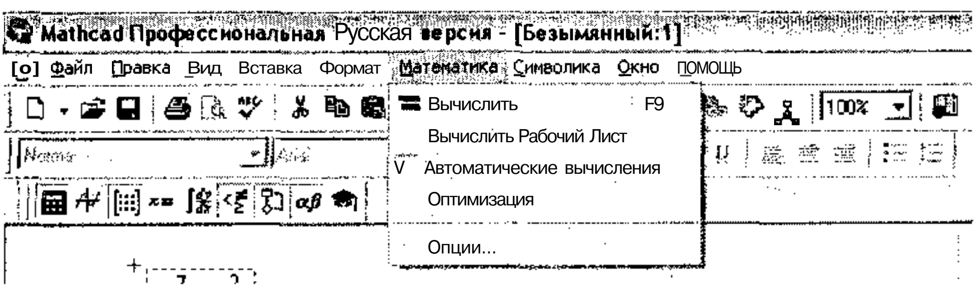


Рис. П4.35. Пункт меню **Математика**

Первые три команды этого меню определяют два типа режима вычислений: ручной и автоматический. В автоматическом режиме результаты всех вычислений, а также графики, обновляются каждый раз, когда изменения вносятся в формульные области. О том, что включен именно этот режим, свидетельствует флажок слева от команды **Автоматические вычисления** (Automatic Calculation), а также сообщение Auto в правой части строки состояния. При отключении автоматического режима пользователь должен самостоятельно инициировать обновление вычислений. Команда **Вычислить Рабочий Лист** (Calculate Worksheet) позволяет это делать каждый раз для всего Mathcad-документа. Команда **Вычислить** (Calculate) (или клавиша <F9>) производит перерасчет только до видимого участка рабочего листа включительно.

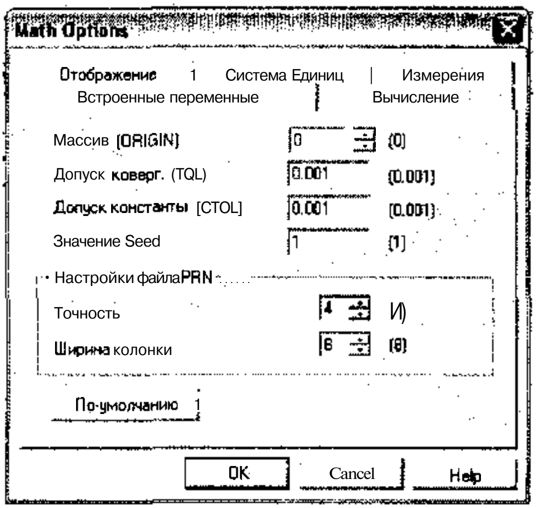


Рис. П4.36. Диалоговое окно команды Опции

Команда **Опции** (Options) вызывает диалоговое окно **Math Options** (рис. П4.36). Вкладка **Встроенные переменные** (Build-in Variables) служит для установки значений системных переменных. Действие этих установок распространяется на весь Mathcad-документ. В поле **Массив** (ORIGIN) (Array Origin) устанавливается значение переменной ORIGIN (она описана в *гл. 3)*. В поле **Значение Seed** (Seed value for random numbers) задается начальная величина для встроенной функции rnd(x), генерирующей последовательности случайных чисел из промежутка [0,*x*]. В полях **Допуск конверг.** (Convergence Tolerance) и **Допуск константы** (Constraint Tolerance) устанавливаются значения системных переменных TOL и CTOL. Переменная TOL контролирует точность в реализованных в Mathcad алгоритмах вычисления интегралов, производных, корней уравнений и оптимальных значений функций. Если значение TOL мало, то точность вычислений возрастает при параллельном увеличении времени вычислений, и наоборот. При неоправданно малых значениях TOL ВОЗМОЖНО появление сообщения "решение не найдено", поскольку достаточно хорошее приближение, найденное алгоритмом, будет "пропущено" из-за слишком строгого критерия по точности, заложенного в значении TOL. Переменная CTOL контролирует, насколько точно решение, найденное в блоке решений (такой блок должен начинаться ключевым словом *Given* и должен содержать ограничения в виде равенств или неравенств, а также одну из функций minimize, maximize, find, minerr) удовлетворяет ограничениям, содержащимся в этом блоке. Например, пусть блок содержит ограничение $x < 5$. Тогда любое значение x, которое не превосходит 5 + CTOL, будет считаться удовлетворяющим этому ограничению. Как и в случае переменной TOL, малое значение переменной CTOL увеличивает как точность вычислений, так и время вычислений.

Вкладка Измерения (Unit Systems) содержит переключатели для выбора системы единиц измерения по умолчанию.

Вкладка Отображение (Display) (рис. П4.37) позволяет видоизменить знаки различных операций в математических выражениях.

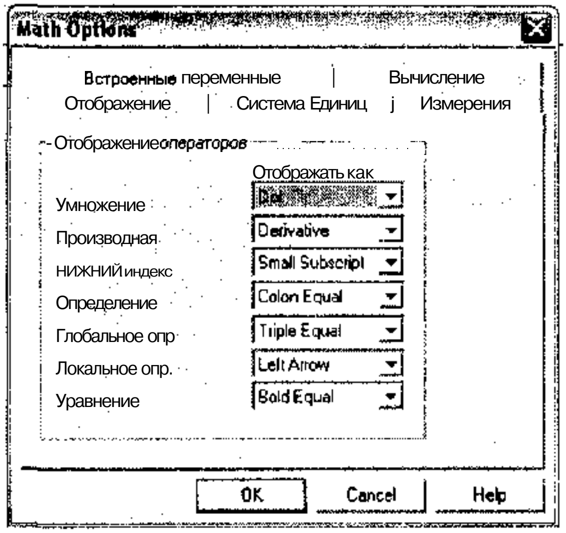


Рис. П4.37. Вкладка **Отображение** для видоизменения знаков операций

Пункты меню Символика, Окно, Помощь

Выпадающее меню **Символика** (Symbolics) (рис. П4.38) содержит команды управления символьными вычислениями. Все те команды этого меню, которые использовались в компьютерных разделах, дублируются соответствующими кнопками подпанели **Символика** (Symbolic) панели Математика (Math). Действия этих кнопок описано в *гл. 37* и *приложении 2.*

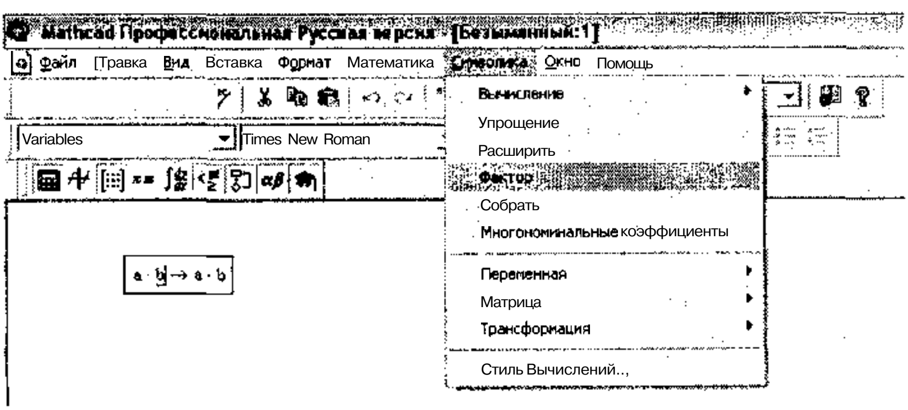


Рис. П4.38. Пункт меню **Символика**

Выпадающее меню **Окно** (Windows) (рис. П4.39) содержит команды выбора способа взаимного расположения окон редактирования различных Mathcad-документов: **Кас-**

кад (Cascade)— располагает открытые окна в виде каскада; **Горизонтальная Мозаика** (Tile Horizontal)— располагает окна одно под другим; **Вертикальная Мозаика** (Tile Vertical) — располагает окна рядом слева направо.

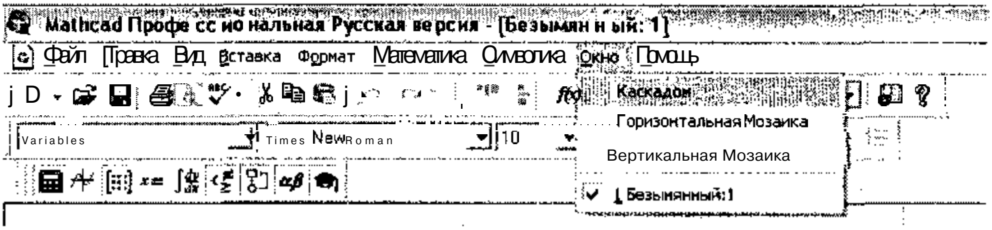


Рис. П4.39. Пункт меню **Окно**

Выпадающее меню **Помощь** (Help) (рис. П4.40) содержит команды для вызова справочных средств Mathcad.

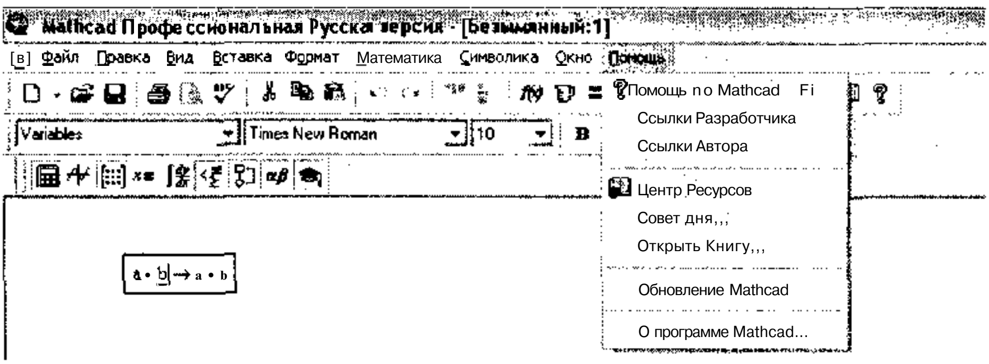


Рис. П4.40. Пункт меню **Помощь**

Команда **Центр Ресурсов** (Recource Center) вызывает диалоговое окно (рис. П4.41) для использования набора ресурсов по Mathcad. Этот набор представляет собой базу данных, объединяющую электронные книги, обучающую систему, простые примеры-шпаргалки, средства общения с разработчиками системы в Интернете.

Команда **Помощь по Mathcad** (Mathcad Help) вызывает диалоговое окно справочной системы Mathcad.

Команда **Совет дня** (Tip of the Day) открывает диалоговое окно для доступа к набору полезных советов, необходимых по использованию Mathcad.

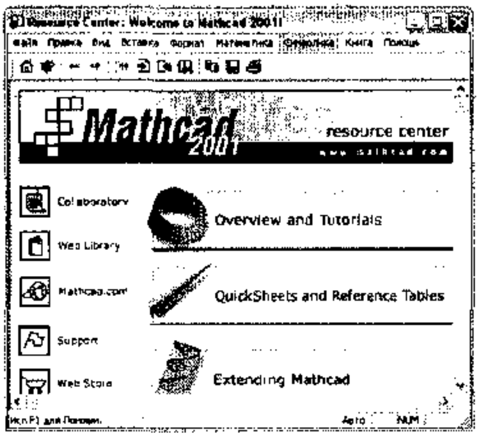


Рис. П4.41. Диалоговое окно центра ресурсов.

Предметный указатель

Р

С

Т

Ф

Ц

Э