Российская программа экономических исследований
Серия "Научные доклады"

Анализ краткосрочных равновесий на рынке жилья с приложением к разработке жилищной политики

А.Б. Хуторецкий

Научный доклад № 2К/05

Проект (№ 98-278) реализован при поддержке
Российской программы экономических исследований

Доклад публикуется в рамках направления:
Предприятия и рынки товаров

Классификация JEL: D51, H42, H53, R21, R38

ХУТОРЕЦКИЙ А.Б. Анализ краткосрочных равновесий на рынке жилья с приложением к разработке жилищной политики. — М.: РПЭИ, 2001 — 68 с.

Представлен теоретический анализ поведения локального рынка жилья в краткосрочном периоде, в течение которого множество агентов рынка, множество жилищ и предпочтения агентов неизменны. Основная модель рассматривает рынок как экономику обмена с квазилинейными функциями полезности агентов рынка, охватывает секторы жилищ для владения и жилищ для аренды, учитывает неделимость жилищ. Изучены вальрасовы равновесия для этой модели (полное описание, эффективность, сравнительная статика) и равновесия относительно схем рационирования (существование, единственность, эффективность). Сформулирован гипотетический рыночный механизм, обеспечивающий переход к вальрасову равновесию из любого исходного состояния. Указаны возможные направления и описана методика применения результатов для выбора регулирующих воздействий на рынок жилья.

Ключевые слова: Россия, рынок жилья, неделимость, равновесие, схема рационирования, рыночный механизм, регулирование, линейное программирование.

Благодарности. Автор благодарен экспертам РПЭИ М. Алексееву, Е.В. Серовой, М. Шафферу и особенно Р.М. Энтову, Р. Эриксону за плодотворные рекомендации и помощь в уточнении экономических предпосылок модели. Автор признателен Р. Арно, В.П. Бусыгину, К.П. Глущенко, Г. Гутину, Е.Б. Кибалову, Н.Б. Косаревой, О.С. Пчелинцеву, Ф. Тальману, В.П. Федорову за советы и полезные обсуждения, а также Институту "Открытое общество" за поддержку на начальном этапе работы.

Александр Борисович Хуторецкий

Институт экономики и организации промышленного производства,
Сибирское отделение РАН

630090 Новосибирск, просп. академика Лаврентьева, 17

Тел.: (3832) 34 13 50, (3832) 30 25 48.

Факс: (3832) 30 25 80

E-mail: hab@dus.nsc.ru

СОДЕРЖАНИЕ

ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ И ВЫВОДЫ

Работа посвящена теоретическому анализу поведения локального рынка жилья в краткосрочном периоде, в течение которого множество агентов рынка, множество жилищ и предпочтения агентов неизменны.

В разделе 1 дано описание модели, которая представляет рынок как экономику обмена с участием денег и учитывает неделимость жилищ. Модель охватывает секторы жилищ для владения и жилищ для аренды при неизменном распределении жилищ между секторами. Предполагается, что функции полезности агентов рынка квазилинейны. Это ограничивает общность модели, но позволяет вычислять равновесия для любой рыночной ситуации.

Вальрасовы равновесия для рассматриваемой модели представлены посредством решений и двойственных оценок некоторой задачи линейного программирования (раздел 2.1). Доказано, что ядро рынка совпадает с множеством равновесных распределений и строго вложено во множество максимальных по Парето распределений, таким образом, вальрасовы равновесия — это желательные (эффективные) состояния рынка.

Многочисленность равновесий в исследуемой модели — это скорее правило, чем исключение. Можно ли предполагать, что рынок обязательно придет к равновесию из любой исходной ситуации? Каким образом рынок "выберет" конкретное равновесие? Для ответа на эти вопросы построено некоторое семейство схем рационирования спроса и предложения, которые, предположительно, действуют на рынке жилья, порождая ощущаемые агентами рынка (при фиксированных ценах) ограничения спроса и/или предложения. Конкретная схема рационирования определена порядком, в котором потребители выходят на рынок, и порядком, в котором каждый потребитель "просматривает" доступные жилища. Каждая схема порождает единственное и эффективное невальрасово равновесие (раздел 2.2).

В разделе 3 сформулирован гипотетический, но правдоподобный рыночный механизм, обеспечивающий переход к вальрасову равновесию через конечную последовательность невальрасовых равновесий относительно схемы рационирования. Таким образом, действующая на рынке схема рационирования определяет результирующее равновесие.

Для выделения существенно различных равновесий среди всех вальрасовых равновесий, возможных в данной ситуации, в разделе 4 введены классификации жилищ и агентов рынка по типам и группам соответственно и определены "стандартные" равновесия. В стандартном равновесии цены однотипных жилищ равны, потребители одной группы, исходно занимающие однотипные жилища, получают одинаковые полезности и никакой потребитель не меняет свое жилище на однотипное. Доказано, что стандартные равновесия существуют и могут быть описаны в терминах решений и двойственных оценок некоторой задачи линейного программирования.

В разделе 5 выполнен частичный анализ сравнительной статики для исследуемой модели, а именно проанализированы последствия появления дополнительного (свободного) жилища. Указан способ определения точных границ для равновесной цены этого жилища. В предположении, что равновесие нарушается появлением нового жилища, вследствие чего возникает новое равновесие, получены следующие результаты.

Компоненты любой равновесной системы цен для новой ситуации могут быть "усечены" до уровня, установленного исходным равновесием. Если новое равновесие порождено упомянутым выше рыночным механизмом, то в нем может быть реализована только одна (уравновешивающая) цепь перемещений агентов, завершающаяся в новом жилище. Цены в таком равновесии не выше, чем в исходном, а жилища в уравновешивающей цепи дешевеют тем сильнее, чем ближе они к концу цепи. Множество всех уравновешивающих цепей совпадает с множеством всех путей максимального веса в некотором графе. Предложен способ построения максимальных и минимальных цен равновесия для каждой уравновешивающей цепи. Цена нового жилища во всех таких системах цен постоянна. На примере показано, что появление дополнительного жилища может изменить равновесие, сохраняя цены и значения функций полезности потребителей.

Некоторые способы регулирования рынка жилья для уменьшения числа домохозяйств, занимающих социально неприемлемые жилища, рассмотрены в разделе 6. Финансирование жилищного строительства изменяет число свободных жилищ (регулирование рынка со стороны предложения). Субсидирование агентов рынка изменяет отправные цены (регулирование со стороны спроса). Предложены некоторые подходы к определению нуждающихся в поддержке групп потребителей, выбору типов жилищ при формировании программы жилищного строительства и обоснованию размеров жилищных субсидий.

Построена модель выбора целесообразной программы жилищного строительства, которая позволяет рационально распределять бюджет программы между типами жилищ и вычислять одно из возможных результирующих равновесий. Представлена также модель выбора целесообразной программы субсидирования, которая позволяет рационально распределять бюджет программы между потребителями и вычислять одно из возможных результирующих равновесий. Указанные модели применимы и к разработке прибыльных жилищных программ, доходы от которых могут участвовать в покрытии затрат на регулирование рынка жилья.

По техническим причинам доказательства всех результатов не включены в данную публикацию; их можно найти в электронной версии работы на сайте РПЭИ (www.eerc.ru) или получить от автора.

1. МОДЕЛЬ РЫНКА ЖИЛЬЯ

Объект исследования — локальный (например, городской) рынок жилья в краткосрочном периоде, в течение которого ни новые домохозяйства, ни новые жилища не появляются и предпочтения агентов рынка не изменяются. Описанная ниже модель представляет рынок как экономику обмена с участием денег и учитывает неделимость жилищ. Применительно к рынку жилья она детализирует модель, описанную в статье (Quinzii, 1984). Близкие модели изучались авторами работ (Gale, 1960, Chapter 2, § 6; Shapley, Shubic, 1972; Shapley, Scarf, 1974; Roth, Postlewaite, 1977; Kaneko, 1983; Demange, Gale, 1985).

1.1. Основные понятия и предположения

Для всех вышеупомянутых моделей выполнено следующее условие, которое мы приводим в формулировке (Quinzii, 1984, с. 41).

Предположение 1. Каждый агент может использовать на рассматриваемом рынке не более, чем единицу неделимого товара.

В статье (Bevia, Quinzii, Silva, 1999) дан обзор работ, посвященных ослаблению этого условия. Наша модель удовлетворяет Предположению 1.

Авторы работ (Roth, Postlewaite, 1977; Demange, Gale, 1985) рассматривают абстрактные неделимые товары. В работах (Gale, 1960; Shapley, Shubic, 1972) подразумеваются жилища для продажи, в статье (Kaneko, 1983) изучается рынок арендных жилищ. Сходство перечисленных моделей указывает на возможность построения модели, охватывающей оба сектора рынка жилья. Описанная ниже модель обладает этим свойством. Она, однако, не отражает выбор типа собственности на жилища. Мы делаем следующее предположение.

Предположение 2. Для каждого жилища внемодельно определен тип собственности: это либо "жилище для владения" (занято владельцем и/или предназначено для продажи), либо "жилище для аренды" (владелец сдал или хочет сдать его в аренду). Тип собственности на жилище постоянен в течение рассматриваемого периода.

Таким образом, мы выделяем на рынке жилья только два сектора. В большинстве стран (и, конечно, в России) существует еще сектор муниципального, относительно дешевого арендного жилья с ограниченным доступом (социальная аренда). Включение этого сектора рынка в модель мы обсудим в разделе 6.

Из Предположения 2, в частности, следует, что в течение рассматриваемого периода жилец-собственник может продать свое жилище, но не может сдать его в аренду, а жилище, арендованное в начале периода, должно быть арендовано или свободно в конце периода. Мы будем использовать этот период как единицу времени и называть его "*годом*".

Товарами являются жилища (все различные и неделимые) и деньги. Пусть I — множество всех жилищ; $I = I_1 \cup I_2 \cup \{0\}$, где I_1 и I_2 — множества жилищ для владения и жилищ для аренды соответственно, а нуль символизирует *фиктивное* жилище. Жилище i ($i \neq 0$) принадлежит агенту $g(i)$. Агент g владеет жилищем $d(g)$ и занимает жилище $\delta(g)$ в начале периода. При этом $d(g) = 0$ (соответственно, $\delta(g) = 0$), если агент g не владеет никаким жилищем (соответственно, не занимает никакого жилища) на рассматриваемом рынке.

Теперь Предположение 1 можно сформулировать следующим образом.

Предположение 1'. Значения $d(g)$ и $\delta(g)$ однозначно определены; если $\delta(g) = \delta(h) = i$ и $g \neq h$, то $i = 0$; если $d(g) \neq 0$ и $\delta(g) \neq 0$, то $d(g) = \delta(g)$.

Последнее условие означает, что владелец нефиктивного жилища живет либо в этом жилище, либо вне рассматриваемого локального рынка.

Определение. Назовем агента g *поставщиком*, если $\delta(g) = 0$ и $d(g) \neq 0$, и *потребителем* в противном случае.

Обозначим символом G множество всех *агентов рынка*, $G = G_1 \cup G_2$, где G_1 и G_2 — множества всех потребителей и всех поставщиков соответственно. Поставщик владеет жилищем на рассматриваемом рынке, но предпочитает жить вне этого рынка. Полагая предпочтения агентов рынка неизменными, будем считать, что каждый поставщик не собирается приобретать или арендовать жилище на рассматриваемом рынке в течение года и хочет продать или сдать в аренду принадлежащее ему жилище.

Сформулируем некоторые очевидные следствия из Предположения 1'. Жилище $d(g)$ для $g \in G_2$ не занято, если $d(g) \in I_1$, и это жилище может быть арендовано потребителем, если $d(g) \in I_2$. Потребитель живет в собственном или арендованном жилище либо занимает фиктивное жилище. Потребитель может владеть только тем жилищем, в котором он живет; если $g \in G_1$, то $d(g) \in I_1 \cup \{0\}$. Поставщики "позволяют" ввести в модель арендные и вновь построенные жилища без нарушения Предположения 1'.

Множество *потребительских наборов* агента g есть $Z_g = R \times J_g$, где $J_g = I$ для $g \in G_1$ и $J_g = \{0, d(g)\}$ для $g \in G_2$. Для $z = (y, i) \in Z_g$ положим $y(z) = y$ и $j(z) = i$.

Выбирая (y, i), агент определяет денежный эквивалент y спроса на ежегодное потребление, не связанное с рассматриваемым рынком (*нежилищное потребление*). Кроме того, выбирая (y, i), потребитель g определяет спрос на покупку или аренду жилища i (если $i = d(g)$, то агент "покупает" $d(g)$ у себя) и предложение $d(g)$ для продажи, если $d(g) \notin \{i, 0\}$. Для поставщика g выбор (y, i) означает нулевое предложение (уход с рынка), если $i = d(g)$, и предложение $d(g)$ для продажи или аренды (в зависимости от типа собственности), если $i = 0$.

Предположение 3. Каждое жилище порождает равномерный и бесконечный во времени поток услуг (неамортизирующаяся стационарная недвижимость с бесконечным сроком службы). Каждый агент имеет равномерный и бесконечный во времени поток доходов вне рассматриваемого рынка. Все агенты имеют равный доступ к совершенным рынкам капитала; процент по вкладу равен проценту по ссуде, их общее значение ρ одинаково для всех агентов; все агенты имеют один и тот же дисконтирующий (годовой) множитель $(1 + \rho)^{-1}$.

Пусть $P = \{p \in R_+^{|I|} \mid p_0 = 0\}$ — множество всех возможных систем цен.

Зафиксируем некоторую систему цен $p \in P$. Будем считать, что компоненты вектора p согласованы с типами собственности на жилища, а именно p_i — это стоимость жилища i при $i \in I_1$ и годовая цена аренды этого жилища при $i \in I_2$.

Определение. Каждому $p \in P$ сопоставим вектор $c(p) = (c(p_i) \mid i \in I)$ *соизмеримых цен*, такой что $c(p_i) = \rho\, p_i$, если $i \in I_1$, иначе $c(p_i) = p_i$.

Из Предположения 3 следует, что $c(p_i)$ — это цена услуг, порожденных жилищем i в течение года. Если агент g сдаст в аренду жилище $d(g)$, то он получит годовой доход $c(p_{d(g)})$; если он продаст это жилище, то получит капитал $p_{d(g)}$, эквивалентный годовому доходу $c(p_{d(g)})$. В любом случае в рассматриваемом периоде доход агента возрастет на $c(p_{d(g)})$.

Обозначим через q^1_{gi} и q^2_{gi} соответственно *единовременные* и *текущие* (ежегодные) *фиксированные затраты*, связанные с выбором жилища $i \in J_g$ агентом g. "Потоковый эквивалент" фиксированных затрат обозначим через q_{gi}, $q_{gi} = q^2_{gi} + \rho\, q^1_{gi}$. В соответствии с Предположением 3 ежегодный доход агента g уменьшится на $c(p_i) + q_{gi}$ в результате покупки или аренды жилища $i \neq d(g)$.

Цены жилищ определяют платежи между агентами рынка, а фиксированные затраты — платежи агентов рынка некоторому агрегированному *внешнему агенту* (лицам и организациям вне рассматриваемого рынка: посредникам, государственным учреждениям и т.д.). Фактически, выбирая потребительский набор, агент рынка предъявляет спрос на услуги внешнего агента, и цена этих услуг известна. Фиксированные затраты, конечно, включают трансакционные расходы. Можно также учесть денежную оценку неденежных затрат (например, времени и усилий, потраченных на поиск нового жилища, дискомфорта при ремонте и переезде и т.д.). Для владельца нефиктивного жилища выбор этого жилища тоже связан с затратами (налоги, обслуживание и т.д.).

Естественно предположить, что единовременные затраты отсутствуют, если агент не меняет место жительства: $q^1_{gi} = 0$, если $i = \delta(g) \neq 0$. Если жилище i не удовлетворяет потребителя g в некоторых аспектах (например, слишком удалено от места его работы), то компенсирующие затраты могут быть включены в q^2_{gi}. Таким образом, стоимость жилища для потребителя — это сумма фиксированных затрат, связанных с внешними для рассматриваемого рынка факторами, и цены, определяемой рыночной конкуренцией.

Фиктивное жилище для данного агента является некоторой жилой единицей (заданной расположением, размером и т.д.) вне рассматриваемого локального рынка. Такое жилище агент желал бы занять, если он не выберет никакого нефиктивного жилища на рассматриваемом рынке. Для потребителя g величины q^1_{g0} и q^2_{g0} отражают его ожидаемые затраты в случае удовлетворения жилищных потребностей вне рассматриваемого рынка. (Эти затраты определяются ценами на жилища вне рынка, которые, естественно, предполагаются устойчивыми). Для поставщика g нулевым является жилище, которое он занимает вне рассматриваемого рынка. Таким образом, его единовременные затраты, связанные с проживанием в этом жилище, равны нулю, а текущие затраты не зависят от его выбора ($d(g)$ или нуль). Поэтому, предполагая, что покупатель (арендатор) несет все текущие затраты в случае продажи (аренды) жилища $d(g)$, можно считать, что $q_{g0} = 0$ для $g \in G_2$.

Положим $\psi_{gd(g)} = b \geq 0$, если поставщик g хочет сдать $d(g)$ в аренду не менее, чем за b денежных единиц в год, и $\psi_{gd(g)} = \rho b \geq 0$, если он хочет продать $d(g)$ не менее, чем за b денежных единиц. Пусть $\psi_{g0} = 0$.

Определение. *Отправная цена* b_{gi} поставщика g на жилище $i \in J_g$ равна $\psi_{gi} + q_{gi}$.

Понятно, что $b_{g0} = 0$. Определение $b_{gd(g)}$ для $g \in G_2$ можно обосновать следующим образом. Для поставщика g продажа (сдача в аренду) жилища $d(g)$ и уход с рынка (выбор $d(g)$) равноценны, если $c(p_{d(g)}) = \psi_{gd(g)}$. В этом случае, выбирая жилище $d(g)$, он отказывается от годового дохода $\psi_{gd(g)}$ и несет ежегодные фиксированные затраты $q_{gd(g)}$. Поэтому $b_{gd(g)}$ — это наибольший годовой доход, которым агент готов пожертвовать ради выбора $d(g)$.

Определение. *Функция полезности* агента g имеет вид

$$u_g(z) = y(z) + e_{gj(z)}, \quad z \in Z_g.$$

Если $g \in G_1$, то e_{gi} есть некоторая денежная оценка полезности для потребителя g услуг, порожденных жилищем i в течение года; если $g \in G_2$, то $e_{gi} = b_{gi}$ для $i \in J_g$.

Пусть $Z = \times_{g \in G} Z_g$. Элементы множества Z назовем *распределениями*. Для $z \in Z$ положим $y(z, g) = y(z_g)$, $j(z, g) = j(z_g)$, $u_g(z) = u_g(z_g)$. Каждому $z \in Z$ сопоставим *размещение* (распределение жилищ) $\zeta(z) = (j(z, g) \mid g \in G)$.

Цель следующего раздела — описать бюджетные ограничения агентов и уточнить, следуя идее Эриксона, интерпретацию величин e_{gi} для $g \in G_1$.

1.2. Отправные цены

Пусть w_g — *полный годовой доход* агента g вне рассматриваемого рынка. Агент g выбирает (y, i) при ценах p, решая задачу оптимизации

$$\max\{y+e_{gi} \mid (y, i) \in Z_g\} \quad \text{при условии } y + c(p_i) + q_{gi} - c(p_{d(g)}) \leq w_g.$$

Для $p \in P$, $g \in G$ и $i \in J_g$ положим $\beta_{gi}(p) = c(p_i) + q_{gi} - c(p_{d(g)}) - q_{gd(g)}$. Допустим, что агент g выбрал жилище $i \in J_g$ при ценах p. Обозначим максимальные возможные значения его нежилищного потребления и функции полезности через $y_{gi}(p)$ и $v_{gi}(p)$ соответственно. Ясно, что $y_{gi}(p) = w_g - \beta_{gi}(p) - q_{gd(g)}$, и поэтому

$$v_{gi}(p) = y_{gi}(p) + e_{gi} = w_g + e_{gi} + c(p_{d(g)}) - c(p_i) - q_{gi}. \tag{1}$$

Заметим, что $\beta_{gd(g)}(p) = 0$, $y_{gd(g)}(p) = w_g - q_{gd(g)}$ и $v_{gd(g)}(p) = w_g - q_{gd(g)} + e_{gd(g)}$ при любом p.

Поставщик g получит полезность $w_g + \psi_{gd(g)}$, если он выберет $d(g)$, или полезность $w_g + c(p_{d(g)})$, если он выберет нуль. Поставщик выберет нуль (предложит $d(g)$ для продажи или аренды), если $c(p_{d(g)}) + q_{gd(g)} > b_{gd(g)}$ (т.е. прирост годового дохода и экономия фиксированных затрат в сумме превысят отправную цену), и покинет рынок, если $\psi_{gd(g)} > c(p_{d(g)})$.

Рассмотрим теперь поведение потребителя.

Определение. Обозначим через y_g^0 *минимальное приемлемое* для потребителя g *годовое нежилищное потребление*, $0 \le y_g^0 \le w_g$.

Предположим, что выполнено условие

$$e_{gi} - e_{gd(g)} \le w_g - y_g^0 - q_{gd(g)} \quad \text{для } i \in I,\ g \in G_1. \tag{2}$$

Потребитель g должен заплатить $q_{gd(g)}$ в течение года за владение жилищем $d(g)$, и он не может выделить на жилищное потребление больше, чем $w_g - y_g^0$ в год. Прирост жилищной полезности в случае выбора i по сравнению с выбором $d(g)$ не может превышать прирост соответствующих расходов. Отсюда следует соотношение (2) при $i \ne d(g)$.

Предположим, что $i = d(g)$, тогда условие (2) принимает вид

$$w_g - y_g^0 - q_{gd(g)} \ge 0. \tag{3}$$

В случае $d(g) = 0$ условие (3) требует, чтобы сумма ожидаемых затрат агента g на удовлетворение жилищных потребностей вне рассматриваемого рынка и на нежилищное потребление была не больше его годового дохода. Если условие (3) не выполнено при $d(g) \ne 0$, то потребитель владеет слишком дорогим для него жилищем (и живет в нем в начале периода). Если потребитель останется в жилище

$d(g)$, то он не сможет выплачивать $q_{gd(g)}$ полностью и сведет фиксированные платежи к приемлемому уровню *de facto*. В конечном счете, агент утратит право собственности на это жилище, после чего $d(g)$ станет равным нулю.

Иначе говоря, мы предполагаем, что все неплатежеспособные владельцы уже утратили права собственности до начала периода. Таким образом, соотношение (2) — это условие согласованности параметров модели.

Пусть Δb_{gi} для $(g, i) \in G_1 \times I$ — наибольшее значение $\beta_{gi}(p)$ по $p \in P$ при условиях

$$v_{gi}(p) \geq v_{gd(g)}(p), \tag{4}$$

$$y_{gi}(p) \geq y_g^0. \tag{5}$$

Величина $\beta_{gi}(p) = (c(p_i)+q_{gi}) - (c(p_{d(g)})+q_{gd(g)})$ есть прирост годовых расходов агента g при выборе i по сравнению с выбором $d(g)$. Поэтому Δb_{gi} — это максимальные дополнительные годовые затраты, на которые агент согласен пойти ради жилища i. (Если $\Delta b_{gi} < 0$, то агент согласится на выбор i при условии увеличения его нежилищного потребления вследствие этого выбора, по меньшей мере, на $|\Delta b_{gi}|$ в год.)

Таким образом, Δb_{gi} можно интерпретировать как разность между отправными ценами агента g на жилища i и $d(g)$. Чем больше эта разность, тем больше полезность жилища i для агента g. Кроме того, увеличивая отправную (запрашиваемую) цену на $d(g)$ и предполагая наличие спроса на $d(g)$ при такой цене, агент может увеличивать свои отправные (предлагаемые) цены на другие жилища.

Определение. *Отправные цены* b_{gi} $(i \in I)$ потребителя g являются компонентами решения системы уравнений

$$b_{g0} = q_{g0}, \quad b_{gi} - b_{gd(g)} = \Delta b_{gi} \quad \text{для } i \neq d(g). \tag{6}$$

Отправная цена b_{gi} — это максимальные годовые затраты, приемлемые для агента g в связи с выбором i. В частности, $b_{g0} - b_{gd(g)} = \Delta b_{g0} = \beta_{g0}(p)$ для некоторого $p \in P$, откуда $b_{gd(g)} = c(p_{d(g)}) + q_{gd(g)}$. Таким образом, $b_{gd(g)}$ включает в себя упущенную прибыль (минимальную соизмеримую цену, на которую агент согласился бы при продаже $d(g)$) и фиксированные затраты. Заметим, что b_{gi} есть отправная цена агента g на годовой поток услуг от жилища i. Если $i \in I_1$, то "истинная" отправная (предлагаемая) цена равна $b_{gi}\, \rho^{-1}$.

Теорема 1. Если $g \in G_1$, то $b_{gi} = e_{gi} - e_{g0} + q_{g0}$ для всех i.

По Теореме 1 отправные цены существуют и разность $b_{gi} - e_{gi}$ не зависит от i. Поэтому, заменяя все e_{gi} на b_{gi} в функции полезности u_g, получим эквивалентную функцию полезности. В дальнейшем будем считать, что $u_g(y, i) = y + b_{gi}$ для всех g. Заметим что истинность условия (2) сохраняется после замены всех e_{gk} на b_{gk}, так как $e_{gi} - e_{gj} = b_{gi} - b_{gj}$ для всех i и j по Теореме 1.

В работе (Kaneko, 1976) установлено необходимое и достаточное условие представимости индивидуального отношения предпочтения квазилинейной функцией полезности. Теорема 1 показывает, что при естественном условии (2) отправные цены агента на жилища можно использовать в квазилинейной функции полезности как меру жилищной полезности.

Замечание. Если $e_{gi} - e_{g0} \geq 0$ (при фиксированном уровне нежилищного потребления жилище i для агента g не хуже, чем фиктивное жилище), то $b_{gi} \geq q_{g0} \geq 0$.

Наша конечная цель — указать подходы к регулированию рынка жилья. Результаты регулирования проявляются в равновесии, что определяет тему следующего раздела.

2. РАВНОВЕСИЯ

2.1. Вальрасовы равновесия

Опишем все вальрасовы равновесия для рассматриваемой модели с помощью простой задачи линейного программирования и изучим некоторые их свойства. Существование вальрасова равновесия для более общей модели доказано в работе (Gale, 1984). В частных случаях авторы работ (Gale, 1960; Kaneko, 1983) нашли полные описания равновесий, позволяющие вычислять равновесие для любой исходной ситуации. Теорема 2 усиливает первый из этих результатов и независима от второго, который получен в предположении, что все агенты рынка имеют на множестве жилищ идентичные предпочтения общего вида.

Определение. Распределение *z допустимо*, если

$$\textstyle\sum_g y(z, g) + \sum_g q_{gj(z,g)} = \sum_g w_g, \tag{7}$$

$$\text{из } \ g \neq h \text{ и } j(z, g) = j(z, h) = i \ \text{ следует } \ i = 0. \tag{8}$$

Равенство (7) описывает очистку рынка по деньгам (сумма внутренних платежей равна нулю). Условие (8) означает, что спрос на каждое жилище не превышает предложение (предложение фиктивных жилищ не ограничено). Пусть FD — множество всех допустимых распределений.

Определение. *Вальрасово равновесие* — это набор $(z,\ p)\in \mathrm{FD}\times P$, для которого выполнены условия

$$u_g(z) = \max\{u_g(z^1)\,|\,z^1 = (y,\ i)\in Z_g,\ y + c(p_i) + q_{gi} - c(p_{d(g)}) \le w_g\},\ g\in G, \quad (9)$$

$$\text{если } i\notin \{j(z,\ g)\,|\,g\in G\},\ \text{ то } \ p_i = 0. \quad (10)$$

Согласно (9) каждый агент в равновесии получает максимум полезности при бюджетном ограничении, соотношение (10) — условие очистки рынка по жилищам.

Величину $\psi_{gi} = b_{gi} - q_{gi}$ назовем *чистой полезностью* жилища i для агента g. Лемма 1 дает удобный критерий для проверки условия (9) (в работе (Bevia, Quinzii, Silva, 1999) применен аналогичный критерий), а Лемма 2 описывает некоторые свойства равновесий.

Лемма 1. Условие (9) эквивалентно условию

$$\psi_{gj(z,g)} - \psi_{gi} \ge c(p_{j(z,g)}) - c(p_i) \quad \text{для всех } g \text{ и } i\in J_g.$$

Лемма 2. Пусть $(z,\ p)$ — равновесие и $\pi = c(p)$. (a) Для всех g справедливо равенство $u_g(z) = w_g + \psi_{gj(z,g)} + \pi_{d(g)} - \pi_{j(z,g)}$; если $g\in G_2$, то $u_g(z) = w_g + \max\{\psi_{gd(g)},\ \pi_{d(g)}\}$. (b) Если $g\in G_1$, то $y(z,\ g) \ge y_g^0$. (c) Если $g\in G_2$, то $\pi_{d(g)} \ge \psi_{gd(g)}$ при $d(g)\in \{j(z,\ h)\,|\,h\in G_1\}$, иначе $\psi_{gd(g)} \ge \pi_{d(g)}$.

Из утверждения (b) Леммы 2 следует, что в равновесии потребители платежеспособны. Кроме того, из Леммы 5 и Теоремы 3 (см. ниже) следует $u_g(z) \ge w_g + \psi_{gd(g)}$ для всех g.

Для $\pi\in P$ положим $r(\pi) = (r(\pi_i)\,|\,i\in I)$, где $r(\pi_i) = \pi_i\,\rho^{-1}$, если $i\in I_1$, и $r(\pi_i) = \pi_i$ иначе (восстановление "истинных" цен).

Если на жилище i, принадлежащее поставщику g, нет спроса в равновесии, то его соизмеримую цену можно считать равной ψ_{gi}, потому что владелец согласен "платить" столько. Лемма 3 формализует это рассуждение.

Лемма 3. Пусть $p\in P$, $\pi = c(p)$ и векторы π^1, p^1 определены следующим образом: если $g(i)\in G_2$, то $\pi_i^1 = \max\{\pi_i,\ \psi_{g(i)i}\}$, иначе $\pi_i^1 = \pi_i$; $p_i^1 = r(\pi_i^1)$ для всех $i\in I$. Если $(z,\ p)$ — равновесие, то $(z,\ p^1)$ — тоже равновесие.

Установим соответствие между равновесиями и наборами (x, α, π), где x — базисное оптимальное решение некоторой задачи линейного программирования, а (α, π) — оптимальное решение двойственной задачи. Пусть S_0 — достаточно большое натуральное число. Сформулируем задачу линейного программирования T с вектором переменных $x = (x_{gi} \mid g \in G, i \in J_g)$:

$$\max \textstyle\sum_{g,i} \psi_{gi} x_{gi} \quad \text{при условиях} \tag{11}$$

$$\textstyle\sum_i x_{gi} = 1, \quad g \in G, \tag{12}$$

$$\textstyle\sum_g x_{gi} \le 1, \quad i \in I \setminus \{0\}, \tag{13}$$

$$\textstyle\sum_g x_{g0} \le S_0, \tag{14}$$

$$x \ge 0. \tag{15}$$

Двойственная к T задача T* имеет вид

$$\min \left(\textstyle\sum_g \alpha_g + \sum_i \pi_i\right) \quad \text{при условиях} \tag{16}$$

$$\pi \ge 0, \ \alpha_g + \pi_i \ge \psi_{gi} \quad \text{для } g \in G, \ i \in J_g, \tag{17}$$

где $\alpha = (\alpha_g \mid g \in G)$ и $\pi = (\pi_i \mid i \in I)$ — векторы двойственных переменных, соответствующих ограничениям задачи T.

Задача T — задача транспортного типа, поэтому все ее базисные допустимые решения целочисленные. Если ψ_{gi} — целые, то и все базисные допустимые решения задачи T* целочисленные (Papadimitriou, Steiglitz, 1982, Section 13.2). Поэтому переменные и ограничения задачи T можно интерпретировать следующим образом: если агент g выбирает жилище i, то $x_{gi} = 1$, иначе $x_{gi} = 0$; каждый агент выбирает ровно одно жилище (возможно, фиктивное); каждое жилище может быть выбрано не более, чем одним агентом; число фиктивных жилищ не ограничено.

Лемма 4 устанавливает некоторые свойства двойственных оценок, в частности обосновывает отсутствие слагаемого $S_0 \pi_0$ в целевой функции (16).

Лемма 4. Если (α, π) — оптимальное решение задачи T*, то $\alpha \ge 0$ и $\pi \in P$.

Для $z \in Z$ и $p \in P$ положим $x(z) = (x_{gi}(z) \mid g \in G, i \in J_g)$, где $x_{gi}(z) = 1$, если $i = j(z, g)$, и $x_{gi}(z) = 0$ иначе. Будем считать также, что $\alpha(z, p) = (\alpha_g(z, p) \mid g \in G)$, где $\alpha_g(z, p) = u_g(z) - (w_g + c(p_{d(g)}))$.

Пусть FS — множество всех целочисленных допустимых решений задачи T (очевидно, что FS $\neq \varnothing$). Для любого $x \in$ FS определим $k(x, g)$, $g \in G$, следующим образом: $k(x, g) = i$, если $x_{gi} = 1$ (это определение корректно, так как каждый вектор $x \in \mathrm{FS}$ имеет единственную ненулевую компоненту $x_{gi} = 1$ для любого $g \in G$). Для $x \in \mathrm{FS}$ и $\pi \in P$ положим $y_g(x, \pi) = w_g + \pi_{d(g)} - \pi_{k(x,g)} - q_{gk(x,g)}$, $z_g(x, \pi) = (y_g(x,\pi), k(x,g))$, $z(x, \pi) = (z_g(x, \pi) | g \in G)$.

Теорема 2. Если (z, p) — равновесие, то $x(z)$ — базисное оптимальное решение T и $(\alpha(z,p), c(p))$ — оптимальное решение T*. Если x — базисное оптимальное решение T и (α, π) — оптимальное решение T*, то $(z(x,\pi), r(\pi))$ — равновесие.

Теорема 2 доказывает соответствие между равновесиями и оптимальными решениями задач T и T*. Она дает точную формулировку результата, обсужденного (без ссылки) для более общей модели в работе (Bevia, Quinzii, Silva, 1999, с. 3, 4), добавляя к нему удобное описание всех равновесий и эффективный способ вычисления равновесия для любой рыночной ситуации.

Определения $\alpha(z, p)$ и $c(p)$ подсказывают интерпретацию двойственных оценок в задаче T: $\alpha_g(z, p)$ — полезность, полученная агентом g в равновесии без его исходного дохода и дохода от продажи или аренды принадлежащего ему жилища; π_i — соизмеримая цена жилища i. Из Теоремы 2 следует, что каждая равновесная система цен уравновешивает любое равновесное распределение жилищ; это верно и в более общей модели (Bevia, Quinzii, Silva, 1999, Preposition 2.1).

Если потребитель g купил (арендовал) новое жилище, не продав старое ($d(g) \neq 0$), то в равновесии он владеет "лишним" жилищем с нулевой ценой. Это — цена $d(g)$ как недвижимости, потому что $d(g) \in I_1$. Но мы использовали в рассуждениях потоковые эквиваленты всех денежных величин, поэтому из Предположения 3 следует, что на аренду этого жилища по положительной цене тоже не было бы спроса. Будем считать, что такое жилище "уходит" с рынка: владелец реконструирует его, или сносит, или забрасывает.

Если (z, p) — равновесие для некоторого p, то z назовем *равновесным распределением*. Пусть E — множество всех равновесных распределений. Обозначим через f_0 оптимальное значение целевой функции в задаче T и положим $F_0 = \sum_g w_g + f_0$.

Следствие 1. Если $z \in \mathrm{FD}$, то $\sum_{g \in G} u_g(z) = \sum_g w_g + \sum_{g,i} \psi_{gi} x_{gi}(z)$; в частности, если $z \in E$, то $\sum_{g \in G} u_g(z) = F_0$.

По Следствию 1 все равновесия сохраняют сумму функций полезности агентов. Следствие 2 дает достаточное условие равновесия.

Следствие 2. Если $z \in \mathrm{FD}$, $x(z)$ — базисное оптимальное решение задачи T и существует оптимальное решение (α, π) задачи T*, такое что $u_g(z) = \alpha_g + w_g + \pi_{d(g)}$ для всех $g \in G$, то $(z, r(\pi))$ — равновесие.

Оставшаяся часть раздела посвящена анализу эффективности равновесных распределений (Теорема 3).

Произвольное множество Q, такое что $\varnothing \neq Q \subseteq G$, назовем *коалицией*. Для любой коалиции Q положим $D(Q) = \{d(g) | g \in Q\} \cup \{0\}$ и $Z(Q) = \times_{g \in Q} Z_g$.

Определение. Распределение $z \in Z(Q)$ *допустимо для коалиции* Q, если: $\{j(z, g) \mid g \in Q\} \subseteq D(Q)$ (участники коалиции выбирают жилища только в $D(Q)$); из $\{g, h\} \subseteq Q$, $g \neq h$, и $j(z, g) = j(z, h) = i$ следует $i = 0$; $\sum_{g \in Q} y(z, g) + \sum_{g \in Q} q_{gj(z,g)} = \sum_{g \in Q} w_g$ (агенты из Q не платят агентам из $G \backslash Q$ и не получают платежей от них).

Пусть $\mathrm{FD}(Q)$ — множество всех распределений, допустимых для коалиции Q. Если $z \in \mathrm{FD}$, $z^1 \in \mathrm{FD}(Q)$ и $u_g(z) < u_g(z^1)$ для всех $g \in Q$, то говорят, что коалиция Q *блокирует* z посредством z^1. Множество C всех распределений из FD, не блокируемых никакой коалицией, является *ядром* рынка.

Распределение $z \in \mathrm{FD}$ *максимально по Парето*, если в FD нет распределения z^1, такого что $u_g(z) \leq u_g(z^1)$ для всех $g \in G$ и $u_g(z) < u_g(z^1)$ для какого-то g. Пусть PM — множество всех максимальных по Парето распределений.

Для доказательства Теоремы 3 воспользуемся Леммами 5 и 6, имеющими и самостоятельное значение.

Лемма 5. Если $z \in C$, то $\sum_{g \in G} u_g(z) = F_0$ и $u_g(z) \geq w_g + \psi_{gd(g)}$ для всех $g \in G$.

Лемма 6. Пусть $z \in C$, $x = (x_{gi} \mid g \in G, i \in J_g)$ и $c_{gi} = \psi_{gi} - u_g(z) + w_g$ для всех $g \in G$, $i \in J_g$. Тогда ограничена следующая задача:

$$\max \textstyle\sum_{g,i} x_{gi} c_{gi} \quad \text{при условиях} \tag{18}$$

$$x \geq 0, \ \textstyle\sum_g x_{gi} - \sum_j x_{g(i)j} \leq 0 \quad \text{для } i \neq 0. \tag{19}$$

Теорема 3. $E = C \subseteq \mathrm{PM}$. Если $|G| \geq 2$, то $E \subset \mathrm{PM}$.

Равенство $E = C$ означает, что каждое распределение, принадлежащее ядру, может быть децентрализовано посредством цен. В статье (Quinzii, 1984) доказано, что при монотонных и непрерывных относительно денег функциях полезности $E = C$, если выполнены некоторые условия A.1, A.2 и A.3. В нашей модели A.1 следует из квазилинейности функций полезности, А.2 вытекает из (2), а (А.3) эквивалентно $e_{gi} - e_{g0} \geq 0$ для всех $i \in I$ (см. Замечание к Теореме 1). Мы не используем условие (2) в доказательстве Теоремы 3. Таким образом, при квазилинейных функциях полезности E и C совпадают без дополнительных условий.

Изучая модель рынка (обозначим ее SV), описывающую распределение неделимых товаров и некоторой суммы денег при слабых ограничениях на предпочтения агентов, автор работы (Svensson, 1983) вводит метрику $d((x, i), (y, j)) = |x - y| + |i - j|$. Отношения предпочтения, порожденные функциями u_g, непрерывны и локально не насыщенны относительно этой метрики, откуда следует соотношение $E \subseteq$ PM (Mas-Collel, Whinston, Green, 1995, Proposition 16.C.1). Доказывая Теорему 3, мы приводим простое прямое доказательство этого соотношения.

В работе (Svensson, 1983) показано, что в модели SV распределение $z \in$ PM равновесное, если оно удовлетворяет некоторому нетривиальному условию, которое для нашей модели имеет вид

$$u_g(z) > w_g + \psi_{gj(z,g)} \quad \text{для всех } g. \tag{20}$$

Если (z, p) — равновесие и $g \in G_1$, то $u_g(z) = w_g - c(p_{j(z,g)}) + c(p_{d(g)}) + \psi_{gj(z,g)}$ (Лемма 2). Тогда из (20) следует, что $c(p_{d(g)}) > c(p_{j(z,g)})$: каждый потребитель выбирает в равновесии жилище, более дешевое, чем то, которое он занимал в начале периода. Последнее утверждение легко опровергнуть (например, в случае $d(g) = 0$). Следовательно, наша модель существенно отличается от модели SV.

2.2. Равновесия относительно схем рационирования

Из Теоремы 3 следует, что вальрасовы равновесия — желательные (эффективные) состояния рынка. Но можно ли утверждать, что рынок обязательно приходит к равновесию из любой исходной ситуации? Неединственность равновесия в рассматриваемой модели — скорее правило, чем исключение. Как рынок "выбирает" одно из возможных равновесий? Какое поведение агентов рынка обеспечивает переход к равновесию?

Для ответа на эти вопросы опишем семейство схем рационирования, которые, предположительно, имманентны рынку жилья в краткосрочном периоде, и изучим равновесия относительно этих схем (при фиксированных ценах). В общем случае схема рационирования — это присущий конкретному рынку механизм ("часть институциональной структуры экономики" согласно (Schwödiauer, 1978, c. XXXIII)), "распределяющий" между агентами рынка дефицит спроса и/или предложения, если при текущих ценах такой дефицит существует.

Авторы работ (Benassy, 1975; Drèze, 1975; Younès, 1975; Grandmont, Laroque, Younès, 1978; Laroque, Polemarchakis, 1978) определили равновесия относительно рыночного сигнала и схем рационирования. Мы применяем эти определения в формулировке, которая дана в работе (Grandmont, 1993), с небольшой модификацией: текущая цена продажи или аренды жилища может быть равна нулю, и спрос агента g на нуль и $d(g)$ не может быть ограничен.

Распределения жилищ при фиксированных ценах впервые анализировались, по-видимому, в статье (Herbert, Stevens, 1960). Идеи этой статьи применены в работе (Gustafsson *et al.*, 1980, с. 85–90) для описания распределений жилищ на рынке арендного жилья, максимизирующих (при данных ценах) "потребительский излишек". Проблема сведена к задаче линейного программирования, близкой к задаче T (раздел 2.1).

В статье (Wiesmeth, 1985) изучались "равновесия при фиксированных ценах" в предположении, что для каждого домохозяйства указано множество приемлемых жилищ, не различимых по полезности. В работе (Khutoretsky, 1999) построена и сведена к задаче линейного программирования модель, обобщающая модели, которые рассматривали авторы работ (Gustafsson *et al.*, 1980; Wiesmeth, 1985). Равновесия при фиксированных ценах, которые изучались в работах (Wiesmeth, 1985; Khutoretsky, 1999), суть равновесия относительно некоторых (не сформулированных в явном виде) схем рационирования.

В этом разделе мы будем иметь дело с неизменным вектором $p \in P$ *фиксированных цен* на жилища с учетом типа собственности (т.е. p_i есть стоимость жилища i при $i \in I_1$ и годовая цена аренды этого жилища при $i \in I_2$).

Определение. Пусть I^+ — совокупность множеств $I^+(g)$ для $g \in G$, удовлетворяющих условию $\{0, d(g)\} \subseteq I^+(g) \subseteq J_g$ для всех g, s^- — набор чисел $s^-(g)$ для $g \in G$, таких что $s^-(g) \in \{-1, 0\}$ и $s^-(g) = -1$ при $d(g) = 0$. Тогда набор $\sigma = (p, I^+, s^-)$ назовем *рыночным сигналом*.

Сигнал описывает ощущаемые агентами рынка ограничения спроса и предложения. $I^+(g)$ — множество жилищ, в отношении которых спрос агента g не ограничен. По определению спрос агента на деньги, фиктивное жилище и принадлежащее ему жилище не может быть ограничен. Отсюда следует, что поставщики не ограничены в спросе: $I^+(g) = J_g$ для $g \in G_2$. Если агент g не ограничен в предложении жилища $d(g)$, то $s^-(g) = -1$; в противном случае $s^-(g) = 0$. Предложение фиктивных жилищ не ограничено.

До сих пор мы считали, что агент, владеющий нефиктивным жилищем, предлагает его для продажи (или аренды), если выбирает другое жилище (раздел 1.1). Теперь изменим это соглашение следующим образом.

Предположение 4. Агент g, выбирая жилище, отличное от $d(g)$, предлагает $d(g)$ для продажи или аренды, если и только если $s^-(g) = -1$ (агент не ограничен в предложении) и $d(g) \neq 0$.

Вектор $\zeta \in \times_{g \in G} J_g$ назовем *размещением*, если он удовлетворяет условию (8): из $g \neq h$ и $\zeta_g = \zeta_h = i$ следует $i = 0$; ζ_g — это жилище, занятое агентом g в размещении ζ. Пусть DA — множество всех размещений.

Из Предположения (4) следует, что цены, выбор жилища и ограничение $s^-(g)$ однозначно определяют максимальное возможное нежилищное потребление агента g при бюджетном ограничении. Поэтому при фиксированных ценах можно описывать спрос только размещением и считать выполненными бюджетные ограничения и условие (7).

В этом разделе при фиксированных ценах мы будем рассматривать функции полезности общего вида: $w_g(i)$ для $g \in G$, $i \in J_g$.

Определение. Размещение ζ *допустимо при сигнале* σ, если $\zeta_g \in I^+(g)$ для всех g (выбор жилища согласован с ограничениями спроса).

Обозначим через DA(σ) множество всех допустимых при сигнале σ размещений. Величину $U_g(\sigma) = \max\{w_g(i) | i \in I^+(g)\}$ назовем *ограниченным оптимумом* агента g.

Определения. Ограничение спроса на $i \in J_g \setminus I^+(g)$ *существенно* для агента $g \in G_1$, если $w_g(i) > U_g(\sigma)$. Сигнал $(p,\ I^+,\ s^-)$ *упорядочен*, если для любого g либо $s^-(g) = -1$, либо ограничение спроса на $d(g)$ не существенно ни для какого агента (только одна сторона рынка может быть рационирована).

Торговым предложением агента g будем называть любое множество $\Theta_g \subseteq J_g \setminus \{0,\ d(g)\}$. Торговое предложение можно интерпретировать как список желательных для агента g жилищ, отличных от нуля и $d(g)$. Если $d(g) \neq 0$ и $s^-(g) = -1$, то в соответствии с Предположением 4, выбирая $i \in \Theta_g$, агент g предложит $d(g)$ для продажи или аренды. Ясно, что $\Theta_g = \varnothing$ для $g \in G_2$.

Определение. *Схема рационирования* ρ — это правило, которое для любого набора $\Theta = (\Theta_g \mid g \in G)$ торговых предложений определяет ограничения

$$I^+(\rho, \Theta) = (I^+(\rho, \Theta, g) \mid g \in G), \quad s^-(\rho, \Theta) = (s^-(\rho, \Theta, g) \mid g \in G),$$

так что $\sigma(\rho, \Theta) = (p, I^+(\rho, \Theta), s^-(\rho, \Theta))$ есть упорядоченный сигнал и для любого $g \in G$ выполнены следующие условия:

множество $\Theta_g \cap I^+(\rho, \Theta, g)$ содержит не более одного элемента, (21)

если $i \in \Theta_g \cap I^+(\rho, \Theta, g)$, то $s^-(\rho, \Theta, g(i)) = -1$, (22)

$\Theta_g \cap I^+(\rho, \Theta, g) \cap \Theta_h \cap I^+(\rho, \Theta, h) = \varnothing$ при $h \neq g$. (23)

Схема рационирования "устраняет конфликты" торговых предложений: условия (21)–(23) обеспечивают баланс спроса и предложения в равновесии относительно схемы рационирования (см. ниже).

Перейдем к описанию семейства $\mathfrak{R}$ схем рационирования. Можно предположить, что подобные схемы реально действуют на рынке жилья в краткосрочном периоде.

Пусть $n(g)$, $g \in G_1$, — *нумерация потребителей*, а $n_g(i)$ для каждого $g \in G$ — *нумерация жилищ* $i \in J_g$ по невозрастанию величин $w_g(i)$. Нумерация $n(g)$ задает порядок, в котором потребители выходят на рынок, а нумерация $n_g(i)$ определяет порядок, в котором агент g "просматривает" жилища. (Естественно предположить, что чем лучше жилище, тем раньше агент его осматривает; нумерация $n_g(i)$ нужна, чтобы упорядочить равноценные жилища.)

Определение. $t(g, A) = \operatorname{argmin}\{n_g(i) \mid i \in A\}$ для $g \in G$, $A \subseteq J_g$.

Ясно, что $w_g(t(g, A)) = \max\{w_g(i) \mid i \in A\}$.

Нумерации $n(g)$ и $n_g(i)$ задают конкретную схему $\rho \in \mathfrak{R}$. Ограничения, порождаемые этой схемой (см. ниже) для произвольного набора торговых предложений Θ, не зависят от Θ: $I^+(\rho, \Theta) = I^+(\rho)$, $s^-(\rho, \Theta) = s^-(\rho)$.

Алгоритм построения $I^+(\rho)$ и $s^-(\rho)$ — назовем его *ρ-алгоритмом* — работает по шагам. На подготовительном шаге 0 для $g \in G_2$ полагаем $I^+(\rho, g) = \{0, d(g)\}$ (в соответствии с определением сигнала) и $t(g) = t(g, J_g)$. Иначе говоря, каждый поставщик решает, предлагать ли принадлежащее ему жилище для продажи (или аренды) при данных ценах. Определим также множество жилищ, доступных потребителям на шаге 1: $D^1 = (I \setminus \{t(g) \mid g \in G_2\}) \cup \{0\}$ (поставщик g не ограничен в выборе жилища; если он выбрал $d(g)$, то для потребителей это жилище недоступно).

Если $\delta(h) \notin D^1$ для $h \in G_1$, то положим $\delta(h) = 0$ (потребитель h в начале периода занимает жилище, принадлежащее поставщику g, $\delta(h) = d(g)$; следовательно, потребитель h арендует $d(g)$; выбирая $d(g)$, поставщик не продлевает аренду, и потребитель становится бездомным). Определим множества активных потребителей и свободных жилищ для шага 1: $A^1 = G_1$ и $F^1 = (D^1 \setminus \{\delta(g) \mid g \in G_1\}) \cup \{0\}$; $I^+(\rho, g, 0) = \{0, d(g)\}$ для $g \in G_1$ — подмножество множества $I^+(\rho, g)$, построенное до шага 1.

Пусть перед шагом k множества D^k, A^k, F^k и $I^+(\rho, g, k-1)$ определены и выполнено *начальное условие* $D^k = F^k \cup \{\delta(g) \mid g \in A^k\}$. Это условие требует, чтобы на шаге k потребителям были доступны свободные жилища и жилища, занятые активными потребителями. Начальное условие выполнено на шаге 1 и алгоритм обеспечивает его на следующих шагах.

Определение. Последовательность $\langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ элементов из A^k *допустима* на шаге k, если $t(g_n, D^k) \in F^k \cup \{\delta(g_1)\}$ и $t(g_s, D^k) = \delta(g_{s+1})$ при $1 \le s < n$.

Допустимая последовательность описывает либо *цикл*, либо *цепь* осуществимых перемещений, приемлемых для потребителей (см. рисунок).

На шаге k алгоритм ρ вычисляет значения $t(g, D^k)$ для $g \in A^k$ в порядке возрастания номеров $n(g)$. Легко видеть, что при $D^k \ne \varnothing$ допустимые последовательности существуют. Пусть $\langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ — первая такая последовательность, возникшая на шаге k. Положим

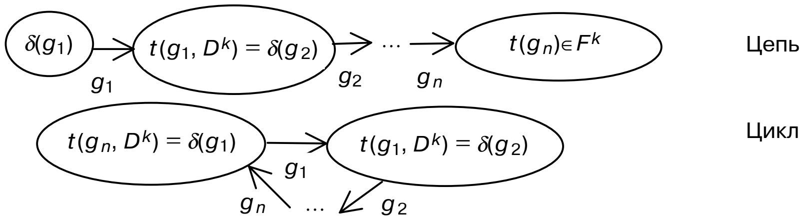
$$t(g_s) = t(g_s, D^k) \quad \text{и} \quad I^+(\rho, g_s, k) = I^+(\rho, g_s, k-1) \cup \{t(g_s)\}, \quad 1 \le s \le n.$$

Теперь агент g_s не ограничен в спросе на жилище $t(g_s)$. Введем следующие определения: $D^{k+1} = \{0\} \cup (D^k \setminus \{t(g_i) \mid 1 \le i \le n\})$; если $t(g_n) = \delta(g_1)$, то $F^{k+1} = F^k$, иначе $F^{k+1} = (F^k \setminus \{t(g_n)\}) \cup \{0, \delta(g_1)\}$; $A^{k+1} = A^k \setminus \{g_i \mid 1 \le i \le n\}$. Шаг k завершен, переходим к шагу $k+1$.

Понятно, что ρ-алгоритм закончит работу на шаге r, таком что $D^{r+1} = \varnothing$, и после этого шага жилище $t(g)$ определено для всех $g \in G_1$. Положим $I^+(\rho, g) = I^+(\rho, g, r)$ для $g \in G_1$. Пусть $s^-(\rho, g) = 0$, если $d(g) \notin \{0\} \cup \{t(g) \mid g \in G\}$, и $s^-(\rho, g) = -1$ в остальных случаях.

Теперь определены $I^+(\rho) = (I^+(\rho, g) \mid g \in G)$, $s^-(\rho) = (s^-(\rho, g) \mid g \in G)$. Следовательно, $\sigma(\rho) = (\rho, I^+(\rho), s^-(\rho))$ — *сигнал*, *порожденный схемой* ρ; при этом $\zeta(\rho) = (t(g) \mid g \in G)$ — *размещение*, *порожденное схемой* ρ.

Лемма 7 доказывает, что ρ — действительно схема рационирования.



Последовательности, допустимые на шаге k

Лемма 7. Сигнал $\sigma(\rho)$ упорядочен и условия (21)–(23) выполнены для любого набора торговых предложений $\Theta = (\Theta_g | g \in G)$.

Схемы из семейства $\mathfrak{R}$ объединяют достоинства "очереди" и алгоритма Гейла (top-trading cycle algorithm). Алгоритму Гейла (см. (Shapley, Scarf, 1974)) соответствуют схемы рационирования, которые в частных случаях порождают множество всех вальрасовых равновесий (Roth, Postlewaite, 1977). Идея объединения "очереди" и алгоритма Гейла возникла благодаря работе (Abdulkadiroglu, Sonmez, 1998), в которой эти схемы рационирования изучены в предположении строгих предпочтений агентов. Схемы семейства $\mathfrak{R}$ не требуют этого предположения.

Определение. *Эффективный спрос* (Grandmont, 1993, с. 908) агента g при сигнале σ — это торговое предложение Θ_g, которое включает все $i \in J_g \setminus \{d(g), 0\}$, такие что $w_g(i) > w_g(j)$ для всех $j \in I^+(\sigma, g) \setminus \{i\}$.

Другими словами, эффективный спрос включает каждое жилище $i \in J_g \setminus \{d(g), 0\}$, которое является единственным лучшим выбором агента g при указанных сигналом ограничениях спроса на жилища, отличные от i, но без учета ограничения спроса на i.

Определение. *Равновесие относительно схемы рационирования* ρ — это вектор $\zeta \in \mathrm{DA}(\sigma(\rho))$, для которого существует набор $\Theta = (\Theta_g | g \in G)$ эффективных спросов при сигнале $\sigma(\rho)$, такой что

$$w_g(\zeta_g) = U_g(\sigma(\rho)) \quad \text{для всех } g, \tag{24}$$

$$\zeta_g \in \Theta_g \cup \{d(g), 0\} \quad \text{для всех } g, \tag{25}$$

$$\text{если } s^-(\rho, \Theta, g(i)) = 0, \text{ то } i \notin \{\zeta_g | g \neq g(i)\}, \tag{26}$$

$$\text{если } i \notin \{\zeta_g | g \in G\} \cup \{0\}, \text{ то } s^-(\rho, \Theta, g(i)) = 0. \tag{27}$$

Условия (26) и (27) совместно с Предположением 4 обеспечивают очистку рынка при фиксированных ценах.

Теорема 4. $\zeta(\rho)$ есть равновесие относительно схемы $\rho \in \mathfrak{R}$.

Равновесие относительно любой схемы $\rho \in \mathfrak{R}$ существует по Теореме 4; Теорема 5 доказывает единственность этого равновесия при условии, что для всех $g \in G$

$$n_g(i) \geq n_g(d(g)), \quad \text{если } d(g) \neq 0 \text{ и } w_g(i) = w_g(d(g)). \tag{28}$$

Условие (28) означает, что агент рассматривает принадлежащее ему жилище раньше, чем другие равноценные. Если считать, что $t(g, A)$ описывает выбор жилища из множества A, то (28) можно трактовать как условие добровольности выбора: агент g не должен покидать $d(g) \neq 0$ ради i, не получая выгоды (даже если такое перемещение безразлично для g и выгодно для какого-то другого агента).

Теорема 5. Если условие (28) верно, то $\zeta(\rho)$ — единственное равновесие относительно схемы $\rho \in \mathfrak{R}$.

Заметим, что в равновесии относительно схемы ρ потребитель g может покинуть принадлежащее ему жилище с ненулевой ценой, оставаясь его владельцем (если $t(g) \neq d(g)$, $p_{d(g)} \neq 0$ и $s^{-}(g) = -1$), что невозможно в вальрасовом равновесии.

Докажем эффективность равновесий относительно схем семейства $\mathfrak{R}$. Пусть $E(\mathfrak{R}) = \{\zeta(\rho) \,|\, \rho \in \mathfrak{R}\}$ — множество всех равновесий относительно таких схем. Для $\zeta \in \mathrm{DA}$ положим $F(\zeta) = (I \setminus \{\zeta_g | g \in G\}) \cup \{0\}$ — множество всех жилищ, свободных в размещении ζ.

Определение. Пусть ξ и ζ — размещения из DA; размещение ξ *слабо доминирует* ζ ($\zeta \prec \xi$), если существует последовательность различных элементов из G_1 (*улучшающая последовательность*) $\lambda = \langle g(1), \ldots, g(n) \rangle$, такая что

$$\text{либо } \xi_{g(s)} = \delta(g(s+1)) \neq 0, \ \text{ либо } \xi_{g(s)} = \zeta_{g(s+1)} \neq 0 \ \text{ при } 1 \leq s < n, \tag{29}$$

$$\xi_{g(n)} \in \{\delta(g(1)),\ \zeta_{g(1)}\} \cup F(\zeta), \ \text{ а если } \xi_{g(n)} \in F(\zeta), \ \text{ то } \ n = 1, \tag{30}$$

$$\text{если } \xi_{g(s)} \neq \zeta_{g(s)}, \ \text{ то } w_{g(s)}(\xi_{g(s)}) > w_{g(s)}(\zeta_{g(s)}) \ \text{ при } 1 \leq s \leq n, \tag{31}$$

$$w_{g(s)}(\xi_{g(s)}) > w_{g(s)}(\zeta_{g(s)}) \ \text{ хотя бы для одного } s. \tag{32}$$

Будем говорить, что размещение $\zeta \in \mathrm{DA}$ лежит в *ядре при фиксированных ценах p* (fix-price core) и писать $\zeta \in \mathrm{FPC}$, если никакое размещение не доминирует ζ и $w_g(\zeta_g) = \max\{w_g(i) \,|\, i \in J_g\}$ для $g \in G_2$.

Другими словами, размещение ζ лежит в ядре, если поставщики не ограничены в выборе и нет такой коалиции потребителей, некоторые члены которой могут улучшить свое положение, не изменяя указанный размещением ζ выбор остальных членов коалиции и выбирая только жилища, свободные в размещении ζ или занятые членами коалиции либо в исходном размещении, либо в размещении ζ.

Теорема 6. FPC = $E(\mathfrak{R})$.

Заметим, что в теоремах 4 и 6 не использовано условие (28). Однако для единственности равновесия (Теорема 5) необходимо правило, однозначно определяющее выбор агента g при $w_g(d(g)) = w_g(0) = U_g(\sigma(\rho))$. Условие (28) является одним из вариантов такого правила.

3. МЕХАНИЗМ УРАВНОВЕШИВАНИЯ РЫНКА

"Теория процессов уравновешивания рынка в ее современном состоянии не имеет большого значения как описание реальности" (Elzen, 1993, с. 5). Однако описанный ниже рыночный механизм достаточно правдоподобен. Изменяя цены и размещение, он приводит рынок к вальрасову равновесию через конечную последовательность равновесий из множества $E(\mathfrak{R})$ (раздел 2.2). Таким образом, конкурентное равновесие возникает естественным образом в результате рациональной активности агентов рынка, как "незапланированный результат индивидуальных действий" (Hayek, 1955, с. 39).

Существование такого механизма особенно важно в случае множественности равновесий и дает теоретическую основу для анализа сравнительной статики и выбора жилищной политики (Elzen, 1993, с. 4).

Предположим, что при фиксированных ценах агенты рынка выбирают жилища, подчиняясь схеме рационирования из семейства $\mathfrak{R}$, и приходят к равновесию относительно этой схемы. В процессе поиска жилища и в равновесии относительно схемы рационирования агент может обнаружить существенные ограничения спроса и/или предложения. На такие ограничения он реагирует изменением цены принадлежащего ему жилища.

Для упрощения рассуждений будем считать, что каждое изменение цен начинает новый *этап* "работы" механизма. При естественных предположениях процедура конечна. Стабилизация цен означает отсутствие ограничений и, следовательно, вальрасово равновесие относительно рыночной ситуации последнего этапа. Таким образом, вальрасовы равновесия — не только желательные (эффективные), но и естественные состояния рассматриваемого рынка.

EQ-*процедуру*, описывающую "работу" механизма, можно считать обобщением "стек-алгоритма" (MacRae, 1982), который, в частности, предполагает, что в начальный момент все жилища свободны и цены равны нулю. EQ-процедура состоит из этапов, а этапы состоят из *шагов*. В начале этапа s известен вектор *соизмеримых текущих цен* $\pi^s \in P$ и, следовательно, *вектор текущих цен* $p^s = r(\pi^s)$; π^1 — это вектор цен в начале периода, π^s для $s > 1$ определяется в конце этапа $s-1$. В течение этапа цены постоянны и на каждом шаге могут быть реализованы некоторые сделки по текущим ценам.

Обозначим через $G_2(s)$ множество поставщиков на этапе s. Понятно, что $G_2(1) = G_2$ и $G_2(s+1)$ — результат исключения из множества $G_2(s)$ тех поставщиков, которые на шаге s продали принадлежащие им жилища. Теперь можно определить множество $G(s)$ всех агентов рынка на этапе s: $G(s) = G_1 \cup G_2(s)$.

Пусть агент g в начале этапа s занимает жилище $\delta(s, g)$ и владеет жилищем $d(s, g)$. Если $g \in G_2(s)$, то $d(s, g) = d(g)$. Предположение 1' обобщим следующим образом.

Предположение 5. Если $g \in G_1$ и $d(s, g) \neq \delta(s, g)$, то $d(s, g) = 0$.

Для обоснования Предположения 5 вспомним, что в вальрасовом равновесии потребитель может владеть нефиктивным жилищем, в котором не живет, только если цена этого жилища равна нулю (раздел 2.1). Иначе говоря, потребитель живет в принадлежащем ему жилище, пока не продаст его или не убедится, что продать его невозможно. В последнем случае, выбирая новое жилище и сохраняя собственность, потребитель будет нести связанные с ней текущие фиксированные затраты без всякой выгоды; поэтому он отказывается от принадлежащего ему жилища с нулевой текущей ценой.

Предположение 6. Каждый этап длится "год" и изменения годовых доходов агентов связаны только с их действиями на рынке жилья в предшествующем "году".

Фиксированные затраты потребителя, связанные с выбором жилища, могут зависеть от того, какое жилище он занимает, а отправная цена может зависеть от предшествующих действий агента на рынке жилья. До сих пор эти зависимости были для нас несущественны, теперь мы их учтем.

Будем использовать следующие обозначения для $g \in G(s)$: $b_{gi}(s)$ для $i \in J_g$ — отправные цены агента g на этапе s, $b_{gi}(1) = b_{gi}$; $q_{gi}(j) = q^2_{gi}(j) + \rho\, q^1_{gi}(j)$ — "потоковый эквивалент" фиксированных затрат агента g, связанных с выбором жилища i, если он занимает жилище j; $q(g, i, s) = q_{gi}(\delta(s, g))$; $\psi_{gi}(s) = b_{gi}(s) - q(g, i, s)$; $w_g(s)$ —

бюджетное ограничение агента g на этапе s, $w_g(1) = w_g$. Примем следующее естественное предположение.

Предположение 7. Если $g \in G_2(s)$, то $b_{gi}(s) = b_{gi}$, $q(g, i, s) = q_{gi}$ и $w_g(s) = w_g$; если $g \in G_1$, то $q^2_{gi}(j) = q^2_{gi}$ и $q_{g0}(j) = q_{g0}$; $q^1_{gi}(i) = 0$ при $i \neq 0$ для всех g.

Предположение 7 означает, что отправные цены, фиксированные затраты и годовые доходы поставщиков не зависят от s, текущие фиксированные затраты потребителя, связанные с выбором i, и его минимальные затраты на удовлетворение жилищных потребностей вне рассматриваемого рынка не зависят от того, какое жилище он занимает. Единовременные фиксированные затраты отсутствуют, если агент не меняет жилище. Последнее условие аналогично соглашению, принятому в разделе 1.1 ($q^1_{gi} = 0$, если $i = \delta(g) \neq 0$).

Пусть $g \in G_1$, $i = \delta(s, g)$, $j = \delta(s+1, g)$. В соответствии с Предположением 6, $w_g(s+1) = w_g(s)$, если $i = j$, $w_g(s+1) = w_g(s) + \pi^s_{d(s,g)} - \pi^s_j - \rho\, q^1_{gj}(i)$, если $i \neq j \in I_1$, $w_g(s+1) = w_g(s) + \pi^s_{d(s,g)} - \rho\, q^1_{gj}(i)$, если $i \neq j$ и $j \notin I_1$.

На этапе s агент g имеет функцию полезности $u_{gs}(y, i) = y + b_{gi}(s)$, где y — нежилищное потребление в году s, и (при ценах p) бюджетное ограничение $y + c(p_i) + q(g, i, s) - c(p_{d(s,g)}) \leq w_g(s)$. Следовательно, если агент g выбрал i на этапе s при ценах p, то $y_{gi}(s, p) = w_g(s) + c(p_{d(s,g)}) - c(p_i) - q(g, i, s)$ — его наибольшее возможное нежилищное потребление и $v_{gi}(s, p) = y_{gi}(s, p) + b_{gi}(s)$ — наибольшее возможное значение его функции полезности. Поэтому можно считать, что на этапе s при текущих ценах p^s агент g оценивает жилище $i \in J_g$ по критерию

$$u(i, g, s) = \psi_{gi}(s) + \pi^s_{d(s,g)} - \pi^s_i, \tag{33}$$

который отличается от $v_{gi}(s, p^s)$ на константу $w_g(s)$.

Для поставщика g имеем $J_g = \{0, d(g)\}$. Из Предположения 7 следует, что по критерию (33) он выберет нуль (предложит $d(g)$ для продажи или аренды), если $\pi^s_{d(g)} > \psi_{gi}$, и выберет $d(g)$ (уйдет с рынка), если $\psi_{gi} > \pi^s_{d(g)}$.

Аналогично обозначениям, использованным при описании схем рационирования (раздел 2.2), пусть $n_g(s, i)$ для $g \in G$ — *нумерация жилищ* из J_g по неубыванию $u(i, g, s)$, $t_s(g, A) = \operatorname{argmin}\{n_g(s, i) \mid i \in A\}$ для

$g \in G(s)$ и $A \subseteq J_g$, $n(g)$ — *нумерация агентов рынка*. Как и в схемах из $\mathfrak{R}$, нумерация $n(g)$ определяет порядок, в котором агенты выходят на рынок, а $n_g(s, i)$ — порядок, в котором агент g просматривает жилища на этапе s.

Будем предполагать, что нумерация $n_g(s, i)$ одинаково упорядочивает любые два жилища j и k на каждом этапе s, таком что $u(j, g, s) = u(k, g, s)$. (От этого предположения легко избавиться; комментарий в конце раздела.) Условие (28) модифицируем следующим образом:

$$\text{если } g \in G_1 \text{ и } u(i, g, s) = u(\delta(s,g), g, s), \text{ то } n_g(s, i) \geq n_g(s, \delta(s,g)) \quad (34)$$

(потребитель осматривает жилище, в котором живет, раньше, чем равноценные жилища).

Если $g(i) \in G_2$ и $\pi_i^s < \psi_{g(i)i}$, то поставщик $g(i)$ не предложит i для продажи или аренды на этапе s (выберет i). Поэтому мы введем вектор *минимальных соизмеримых цен* $\pi^0 = (\pi_i^0 \mid i \in I)$ следующим образом: если $g(i) \in G_2$, то $\pi_i^0 = \psi_{g(i)i}$, иначе $\pi_i^0 = 0$. Для $s = 1$ предположим, что

$$\pi_i^s \geq \pi_i^0, \quad \text{если } g(i) \in G_2(s) \text{ и } i \in \{\delta(s, g) \mid g \in G_1\} \quad (35)$$

(если жилище, принадлежащее поставщику, арендовано в начале этапа 1, то его текущая цена не меньше минимальной, иначе владелец не сдал бы его в аренду). Процедура обеспечит выполнение условия (35) на последующих этапах.

При $k > 1$ на шаге k–1 этапа s определяются множества A_s^k (потребителей, не выбравших жилище $\delta(s+1, g)$ до шага k), D_s^k (жилищ, которые являются объектами выбора на шаге k) и F_s^k (жилищ, свободных на шаге k). Перед шагом 1 этапа s определяем $A_s^1 = G_1$, $D_s^1 = \{i \in I \mid \pi_i^s \geq \pi_i^0\}$, $F_s^1 = \{0\} \cup (D_s^1 \setminus \{\delta(s, g) \mid g \in G_1\})$. Из (35) следует, что $\delta(s, g) \in D_s^1$ для $g \in G_1$.

На шаге k этапа s каждый агент $g \in A_s^k$ выбирает жилище $t_{sk}(g) \in D_s^k$. Предположим, что потребитель g помнит свой последний выбор $L(g)$ (на каждом шаге k полагаем $L(g) = t_{sk}(g)$) и повторяет его, пока этот выбор остается лучшим из возможных. Правило выбора (наилучшего из доступных жилищ с учетом нумерации $n_g(s, i)$ и с *инерцией*) таково: если $s > 1$ и $L(g)$ максимизирует $u(i, g, s)$ на D_s^k, то $t_{sk}(g) = L(g)$;

иначе $t_{sk}(g) = t_s(g, D_s^k)$. Из (34) следует, что $t_{sk}(g) = \delta(s, g)$, если $t_{sk}(g) \neq L(g)$ и $\delta(s, g)$ максимизирует $u(i, g, s)$ на D_s^k.

Для последовательности $\lambda = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$, где $g_i \in G_1$ для всех i, будем использовать следующую терминологию. Последовательность имеет *приоритет* $\max\{n(g_j) \mid 1 \leq j \leq n\}$. Она *допустима* на шаге k этапа s, если $g_j \in A_s^k$ при $1 \leq j \leq n$, $t_{sk}(g_j) = \delta(s, g_{j+1})$ при $1 \leq j < n$ и $t_{sk}(g_n) \in F_s^k \cup \{\delta(s, g_1)\}$. Допустимая последовательность *максимальна*, если она не является собственной подпоследовательностью другой допустимой последовательности. Допустимая последовательность *корректна*, если для $i = \delta(s, g_1)$ либо $t_{sk}(g_n) = i$, либо $\pi_i^s = \pi_i^0$ и $u(i, g_1, s) < u(t_{sk}(g_1), g_1, s)$.

Допустимая последовательность описывает перемещения потребителей, осуществимые на шаге k этапа s; это *цикл* при $t_{sk}(g_n) = \delta(s, g_1)$ и *цепь* при $t_{sk}(g_n) \in F_s^k$. Определение корректной последовательности требует, прежде всего, чтобы при реализации сделок, соответствующих этой последовательности, каждый агент получил именно ту полезность, на которую рассчитывал. Если λ — цепь, то для владельца жилища $i = \delta(s, g_1)$ это верно только при $\pi_i^s = \pi_i^0$. Кроме того, первый участник цепи должен улучшить свое положение (иначе ему незачем входить в последовательность).

Легко видеть, что допустимые последовательности существуют, если $A_s^k \neq \varnothing$. Чем меньше приоритет последовательности, тем раньше она возникнет, если агенты осуществляют свой выбор в порядке возрастания номеров $n(g)$.

Механизм "работает" следующим образом. Корректные последовательности реализуются (сделки происходят по текущим ценам). Если корректных последовательностей нет, но есть допустимые (и, следовательно, максимальные допустимые), то в каждой максимальной допустимой цепи либо первое жилище наилучшее для живущего в нем агента, либо цена этого жилища больше минимальной и его владелец ограничен в предложении. В первом случае агент g_1 выбирает $\delta(s, g_1)$; во втором случае владелец жилища $\delta(s, g_1)$ снижает его цену.

Если допустимых последовательностей нет, то каждый потребитель вошел в одну из корректных последовательностей и построено равновесие из $E(\mathfrak{R})$ при текущих ценах. При этом некоторые поставщики будут, возможно, ограничены в предложении и снизят цены. Если же ни один агент не ощущает ограничений, то рынок находится в вальрасовом равновесии. Сделаем следующее необременительное предположение.

Предположение 8. Числа e_{gi}, $q^1_{gi}(j)$, q^2_g, w_g, y^0_g и p^1_i целые для всех i, j, g; ρ — рациональное число.

Пусть N — знаменатель рационального числа ρ; положим $\delta = N^{-1}$. Из Предположения 8 следует, что числа π^1_i и $\rho\ q^1_{gi}(j)$ рациональные. Тогда рациональными являются и числа $q_{gi}(j)$, ψ_{gi}, π^0_i. Легко видеть, что все они кратны δ.

Теперь опишем EQ-процедуру формально. Предположим, что

$$D^k_s = F^k_s \cup \{\delta(s, g) \mid g \in A^k_s\}, \tag{36}$$

т.е. на шаге k потребитель может выбрать жилище либо свободное, либо занятое агентом g, еще не определившим $\delta(s+1, g)$. Это условие выполнено на шаге 1 этапа 1 и EQ-процедура обеспечивает его на последующих шагах и этапах. На шаге k этапа s либо возникает корректная последовательность, либо изменяется цена какого-то жилища. Перед шагом 1 этапа s необходимо определить множества A^1_s, D^1_s и F^1_s, как указано выше. Рассмотрим ситуации, возможные на шаге k этапа s.

(1) Существуют корректные последовательности. Выберем из них последовательность $\langle g_1, \ldots, g_n\rangle$ с наименьшим приоритетом. Будем считать, что соответствующие ей сделки (потребитель g_j перемещается из $\delta(s, g_j)$ в $t_{sk}(g_j)$, $1 \le j \le n$) осуществились по текущим ценам. Положим

$$\delta(s+1, g_j) = t_{sk}(g_j),\ 1 \le j \le n;$$

$$D^{k+1}_s = (D^k_s \setminus \{t_{sk}(g_j) \mid 1 \le j \le n\}) \cup \{0\};$$

$$A^{k+1}_s = A^k_s \setminus \{g_j \mid 1 \le j \le n\};$$

если $t_{sk}(g_n) = \delta(s, g_1)$, то $F^{k+1}_s = F^k_s$,

иначе $F^{k+1}_s = (F^k_s \setminus \{t_{sk}(g_n)\}) \cup \{0, \delta(s, g_1)\}$.

Переходим к шагу $k+1$ этапа s.

(2) Случай (1) не выполнен, и существуют допустимые последовательности. Выберем максимальную допустимую последовательность с наименьшим приоритетом $\lambda = \langle g_1, \ldots, g_n\rangle$. Из определений следует,

что $t_{sk}(g_n) \neq \delta(s,\ g_1)$ и $\delta(s,\ g_1) \notin \{t_{sk}(g) \mid g \in A_s^k\}$ (первый участник цепи занимает жилище, на которое нет спроса). Положим $j = \delta(s,\ g_1)$. Возможны следующие ситуации.

(2a) $\pi_j^s > \pi_j^0$. Положим $\pi_j^{s+1} = \pi_j^s - \delta$, $\pi_i^{s+1} = \pi_i^s$ для $i \neq j$; $\delta(s+1,\ g) = \delta(s,\ g)$ для всех $g \in G_1$, для которых жилище $\delta(s+1,\ g)$ еще не определено; $r(s) = k$ (здесь и далее $r(s)$ — номер последнего шага этапа s). Переходим к шагу 1 этапа $s+1$.

(2b) $\pi_j^s = \pi_j^0$. Поскольку последовательность λ некорректна, $u(j,\ g_1,\ s) = u(\delta(s, g_2),\ g_1,\ s)$. Жилища j и $\delta(s,\ g_2) = t_{sk}(g_1)$ равноценны для агента g_1, он уходит из цепи и остается в j: $\delta(s+1,\ g_1) = \delta(s,\ g_1)$. Произошла одна сделка. Шаг k завершается, как в случае (1). Переходим к шагу $k+1$ этапа s.

(3) Случаи (1) и (2) не выполнены. Тогда $A_s^k = \varnothing$. Отсюда следует, что каждый потребитель g — участник некоторой сделки, реализованной на шаге $m < k$, и $\delta(s+1,\ g)$ максимизирует $u(i,\ g,\ s)$ на D_s^m. Заметим, что если некоторое жилище i свободно на шаге k ($i \in F_s^k$), но было занято на одном из предшествующих шагов, то $\pi_i^s = \pi_i^0$; см. (2a). Возможны следующие ситуации.

(3a) $\pi_i^s > \pi_i^0$ для некоторого $i \in F_s^k$ (владелец жилища i ограничен в предложении). Из Предположения 5 и (2a) следует $g(i) \in G_2(s)$ (жилище i принадлежит поставщику). Пусть

$$h = \arg\min\{n(g) \mid g \in G_2(s),\ \pi_{d(g)}^s > \pi_{d(g)}^0\}.$$

Полагаем $\pi_{d(h)}^{s+1} = \pi_{d(h)}^s - \delta$, $\pi_i^{s+1} = \pi_i^s$ для $i \neq d(h)$, $r(s) = k$ и переходим к шагу 1 этапа $s+1$.

(3b) Случай (3a) не выполнен, и существуют $i \in I$ и $g \in G_1$, такие что $i = t_s(g,\ I)$ и $u(i,\ g,\ s) > u(\delta(s+1, g),\ g,\ s)$ (потребитель g ограничен в спросе на жилище i). Тогда $i \notin F_s^k$ (иначе существовала бы допустимая последовательность). Из всех пар $(g,\ i)$ выбираем первую в лексикографическом упорядочении, порожденном нумерациями $n(g)$ и $n_g(s,\ i)$. Для i, входящего в выбранную пару, полагаем $\pi_i^{s+1} = \pi_i^s + \delta$, для прочих жилищ цены не меняем. Заметим, что цена на жилище

$d(g)$, которое поставщик g на этапе s не предлагает для продажи или аренды ($d(g) \notin D_s^1$), тоже может быть повышена. Полагаем $r(s) = k$ и переходим к шагу 1 этапа $s+1$.

(3c) Случаи (3a) и (3b) не выполнены. Полагаем $r(s) = k$ и завершаем процедуру.

Будем говорить, что на этапе s EQ-процедура определяет размещение $\zeta^s = (j(s, g) \mid g \in G(s))$, где $j(s, g) = \delta(s+1, g)$ для $g \in G_1$, $j(s, g) = 0$, если $g \in G_2(s)$ и $d(g) \in \{\delta(s+1, h) \mid h \in G_1\}$, и $j(s, g) = d(g)$ в остальных случаях. Размещение ζ^s и вектор цен p^s порождают распределение $z(s) = (z_g(s) \mid g \in G(s))$, в котором $z_g(s) = (y_{gj(s,g)}(s, p^s), j(s,g))$.

Множества G_1, $G_2(s)$, I_1, I_2 и векторы

$$(\delta(s, g) \mid g \in G_1),\ (d(s, g) \mid g \in G(s)),\ (b_{gi}(s)),\ (q^1_{gi}(j)),\ (q^2_{gi}(j))$$

задают *рыночную ситуацию* $A(s)$ в начале этапа s. На этапе s, который завершается по случаю (3), EQ-процедура работает в точности так же, как ρ-алгоритм (раздел 2.2) для некоторой схемы рационирования $\rho \in \mathfrak{R}$, а $\zeta^s = \zeta(\rho)$ есть равновесие относительно схемы ρ при ценах p^s для ситуации $A(s)$. Таким образом, если этап s не последний, то EQ-процедура определяет вектор цен p^{s+1} и размещение ζ^s. На некоторых этапах это размещение является равновесием из $E(\mathfrak{R})$ при ценах p^s.

Теорема 7. Если τ — завершающий этап EQ-процедуры, то $(z(\tau), p^\tau)$ есть вальрасово равновесие для ситуации $A(\tau)$.

Выясним, как меняются отправные цены потребителей в течение EQ-процедуры, а затем докажем ее конечную сходимость. На этапе 1 отправные цены определяются так, как описано в разделе 1.2. Сформулируем аналогичное определение отправных цен $b_{gi}(s)$ потребителя g на этапе $s > 1$, используя функцию полезности $u_{g,s-1}(y, i)$ и бюджетное ограничение $w_g(s)$.

Для $g \in G_1$ и $i \neq d(s, g)$ обозначим через $\Delta b_{gi}(s)$ максимум по $p \in P$ величины $\beta_i(s, p) = c(p_i) + q(g, i, s) - c(p_{d(s,g)}) - q(g, d(s,g), s)$ при условиях $y_{gi}(s, p) \geq y_g^0$ и $u_{g,s-1}(y_{gi}(s,p), i) \geq u_{g,s-1}(y_{gd(s,g)}(s,p), d(s,g))$.

Определение. Пусть $g \in G_1$. Отправные цены $b_{gi}(s)$ шага $s > 1$ — это единственное решение системы уравнений

$$b_{g0}(s) = q_{g0}, \quad b_{gi}(s) - b_{gd(s,g)}(s) = \Delta b_{gi}(s) \quad \text{для } i \neq d(s, g). \tag{37}$$

При $g \in G_2(s)$ и $i \in J_g$ положим $b_{gi}(s) = b_{gi}$ для всех s. При $g \in G_1$ для краткости обозначим

$$Q_{gj}(s) = \rho\ q^1_{gj}(\delta(s, g)),\ a_{gj}(s) = \pi^s_{d(s,g)} + w_g(s) - Q_{gj}(s) - y^0_g .$$

Лемма 8. Пусть $g \in G_1$, $j = \delta(s+1, g)$, $i \in I$. Если $j \in I_1 \cup \{\delta(s, g)\}$, то $b_{gi}(s+1) = b_{gi}(s)$; иначе $b_{gi}(s+1) = \min\{b_{gi}(s), a_{gj}(s)\}$.

Следствие. $\min\{0, b_{gi}(1)\} \le b_{gi}(s+1) \le b_{gi}(s)$ для всех $g \in G_1$, $i \in I$ и $s \ge 1$. Таким образом, отправные цены в течение EQ-процедуры не возрастают и ограничены снизу.

Лемма 9. Пусть $g \in G$ и $i = j(s, g)$. Тогда $b_{gi}(s) - q(g, i, s) \ge \pi^s_i$. Если $g \in G_1$, то $y_{gi}(p^s) \ge y^0_g$.

Из Леммы 9 следует, что в EQ-процедуре каждый потребитель делает выбор, при котором он платежеспособен, т.е. должен заплатить в течение года не больше, чем собирался, сохраняя приемлемый уровень нежилищного потребления.

Пусть $\mathrm{Al} = \{\zeta^s \mid s \ge 1\}$ и $\mathrm{Pr} = \{\pi^s \mid s \ge 1\}$ — множества всех размещений и векторов текущих цен соответственно, порождаемых EQ-процедурой.

Лемма 10. Множества Al и Pr конечны.

Из Леммы 10, в частности, следует, что текущие цены ограничены.

Лемма 11. Если на этапе s EQ-процедуры реализованы сделки, соответствующие последовательности $\lambda = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$, и $n > 1$, то найдется $g \in \{g_1, \ldots, g_n\}$, такое что $u(\delta(s,g), g, s) < \mathrm{u}(\delta(s+1,g), g, s)$.

Лемма 11 утверждает, что в каждой реализованной нетривиальной последовательности сделок хотя бы один из участников улучшает свое положение. Лемма 12 и Теорема 8 доказывают конечность EQ-процедуры.

Лемма 12. Существует число M, такое что если EQ-процедура не завершит работу за M этапов, то $b_{gi}(s) - b_{gi}(s+1) \ge \delta > 0$ для некоторых $g \in G_1$, i и $s \le M$.

Теорема 8. Предположение 8 обеспечивает конечность EQ-процедуры.

Итак, EQ-процедура завершается на некотором этапе τ (Теорема 8) и порождает вальрасово равновесие для ситуации $A(\tau)$ (Теорема 7).

В заключение раздела дадим некоторые комментарии к EQ-процедуре.

1. Можно считать, что нумерация агентов рынка зависит от номера этапа и нумерации жилищ ограничены только условием (34). Все результаты раздела 3 останутся верными, но в доказательстве Леммы 12 надо будет учесть конечность множества возможных нумераций. Следовательно, нумерации не ограничивают разнообразие поведения агентов рынка.

2. Сигналом к изменению цен в EQ-процедуре служит конец этапа. В реальности агенты рынка, конечно, не могут "заметить" этот момент, но это неважно. Если владелец жилища хочет и достаточно долго не может его продать или сдать в аренду, то он снижает цену. Поводом для повышения цены служит предложение о продаже или аренде жилища, сделанное его владельцу в момент, когда жилище занято.

3. Из Предположения 8 следует, что все параметры EQ-процедуры кратны δ (можно считать их целыми при подходящем выборе единицы измерения). Поэтому жилище, которое было единственным лучшим для агента до изменения цен на этапе s, останется для него лучшим (возможно, не единственным) на этапе $s+1$. Инерционность выбора обеспечивает сохранение допустимой, но некорректной последовательности, пока она не противоречит интересам участников.

4. Почему снижается цена жилища i, занятого первым участником допустимой, но некорректной на этапе s цепи? На i нет спроса при текущих ценах, так как цепь максимальна. Пусть $g(i) = g$. При $g \in G_1$ (жилище принадлежит жильцу) участие в цепи выгодно для агента g, если он продаст i за p_i^s. Но это невозможно. Агент g ищет наибольшую цену, при которой на i будет спрос. Не зная отправных цен других потребителей на i, он "нащупывает" эту цену, уменьшая π_i^s на δ. В конечном счете, либо возникнет спрос на i при цене, которая делает участие в цепи выгодным для агента g, цепь удлинится, и агент g уже не будет первым ее участником, либо окажется, что участие в цепи невыгодно для агента g при любой положительной цене жилища i. Если $g \in G_2$ (тогда i — арендное жилище), то, выбрав более выгодное жилище, жилец сообщает хозяину о прекращении аренды. Поставщик g ищет (нащупывает) цену, максимизирующую его прибыль. В итоге либо спрос на i возникнет при цене, не меньшей, чем ψ_{gi}, либо агент g выберет i (уйдет с рынка) при цене ψ_{gi}.

5. Значение функции полезности возрастает для первого участника реализованной цепи и не убывает для остальных ее участников. Следовательно, первый участник заинтересован в осуществлении всех сделок и может "перераспределить" свой выигрыш (например,

взять на себя часть фиксированных затрат по каждой сделке) так, чтобы каждый участник цепи оказался в выигрыше.

6. Используя Теорему 2, легко доказать, что если $\psi_{gi}(\tau) = \psi_{gi}$ для всех $(g, i)\in G_1\times I$ и $\psi_{gd(g)} = 0$ для $g\in G_2$, то цены p^τ уравновешивают размещение ζ^τ относительно ситуации $A(1)$. Аналогичное утверждение для более общих случаев не доказано.

4. АГРЕГИРОВАНИЕ МОДЕЛИ

Построим задачу линейного программирования, которая описывает все существенно различные вальрасовы равновесия, игнорируя несущественные подробности.

Определение. Жилища i и j *однотипны* $(i \sim j)$, если выполнены следующие условия: (a) либо $i = j = 0$, либо $\{g(i), g(j)\} \subseteq G_2$ и $\psi_{g(i)i} = \psi_{g(j)j}$, либо $\{g(i), g(j)\} \subseteq G_1$; (b) для всякого $g\in G_1$ из $\delta(g)\notin \{i, j\}$ следует $\psi_{gi} = \psi_{gj}$, а из $\delta(g)\in \{i, j\}$ следует $b_{gi} - q_{gi}^2 = b_{gj} - q_{gj}^2$.

Мы интерпретируем ψ_{gi} как чистую полезность выбора жилища i для потребителя g, а $b_{gi} - q_{gi}^2$ можно считать чистой полезностью проживания в i. Таким образом, условие (b) предшествующего определения требует, чтобы чистые полезности проживания в однотипных жилищах были равны для потребителя, занимающего одно из этих жилищ, и чистые полезности выбора однотипных жилищ совпадали для потребителя, занимающего некоторое другое жилище. Если $0 = i \neq j$, то условие (a) предшествующего определения не выполнено (потому что значение $g(0)$ не определено); поэтому фиктивное и нефиктивное жилища не могут быть однотипными. Заметим также, что $i \sim j$ для всех i.

Определение. Вальрасово равновесие (z, p) назовем *нормальным*, если $p_i = p_j$ при $i \sim j$ (цены однотипных жилищ совпадают).

Лемма 13. Для любого вальрасова равновесия (z, p) существует нормальное равновесие (z^0, p^0), такое что $\zeta(z^0) = \zeta(z)$.

Определение. Агенты g и h входят в одну *группу* $(g \approx h)$, если выполнены следующие условия: либо $\{g, h\} \subseteq G_1$, либо $\{g, h\} \subseteq G_2$; из $\{g, h\} \subseteq G_1$ следует $w_g = w_h$, $\psi_{gi} = \psi_{hi}$ для $i\notin \{\delta(g), \delta(h)\}$ и $b_{gi} - q_{gi}^2 = b_{hi} - q_{hi}^2$ для $i\in \{\delta(g), \delta(h)\}$; из $\{g, h\} \subseteq G_2$ следует $d(g) \sim d(h)$.

Лемма 14. Пусть (z, p) — нормальное равновесие и $g \approx h$. Если $\delta(g) \sim \delta(h)$ и $\{g, h\} \subseteq G_1$, то $u_g(z) = u_h(z)$; если $\{g, h\} \subseteq G_2$, то $u_g(z) - u_h(z) = w_g - w_h$.

По Лемме 14 потребители одной группы, первоначально занимающие однотипные жилища, и поставщики одной группы с равными доходами имеют в нормальном равновесии одинаковые полезности.

Определение. Нормальное равновесие (z, p) назовем стандартным, если из $j(z, g) \sim \delta(g)$ следует $j(z, g) = \delta(g)$ для $g \in G_1$ (никакой потребитель не меняет исходно занятое им жилище на однотипное).

Теорема 9. Для всякого нормального равновесия (z, p) существует стандартное равновесие (z^0, p), такое что $j(z^0, g) \sim j(z, g)$ для всех $g \in G_1$.

Таким образом, изменяя цены некоторых жилищ и распределение денег, можно перейти от произвольного равновесия к нормальному равновесию. Затем, заменяя жилища, выбранные некоторыми агентами, на равноценные, можно перейти к стандартному равновесию. Среди всех равновесий, описанных задачами T и T*, только стандартные могут возникать естественным образом вследствие рыночной конкуренции при полной информации. Теперь построим задачу AT, которая описывает стандартные равновесия так же, как задача T описывает все вальрасовы равновесия.

Будем использовать следующие обозначения: $I(n)$ — множество всех жилищ типа n (фиктивные жилища имеют тип 0); агента g группы h назовем (n, h)-агентом, если $\delta(g) \in I(n)$ (таким образом, поставщики группы h — это $(0, h)$-агенты); GC — множество всех групп потребителей и GS — множество всех групп поставщиков. Если $h \in$ GS, то все поставщики группы h владеют жилищами одного типа. Обозначим этот тип через $\tau(h)$; $G(h, n)$ — множество всех (n, h)-агентов; в частности, если $h \in$ GS, то $G(h, 0)$ — это группа h поставщиков.

Из Предположения 1' и определений с очевидностью следует утверждение Леммы 15: жилища типа $\tau(h)$ — это жилища, принадлежащие поставщикам группы h.

Лемма 15. Если $h \in$ GS, то $I(\tau(h)) = \{d(g) \mid g \in G(h, 0)\}$.

Пусть U — множество всех троек (n, k, h), таких что $I(k) \cap (\cup_{g \in G(h,n)} J_g) \neq \varnothing$ (некоторые (n, h)-агенты могут выбирать жилища типа k). Для $(n, k, h) \in U$ определим величины a_{nkh} таким образом: если $h \in$ GC, $g \in G(h, n)$ и $i \in I(k)$, то $a_{nkh} = \psi_{gi}$ при $k \neq n$ и $a_{nnh} = \psi_{g\delta(g)}$; если $h \in$ GS и $g \in G(h, 0)$, то $a_{00h} = \psi_{g0} = 0$ и $a_{0\tau(h)h} = \psi_{gd(g)}$. Следующая лемма позволяет интерпретировать a_{nkh} как чистую полезность жилищ из $I(k)$ для (n, h)-агентов.

Лемма 16. Определение величин a_{nkh} корректно.

Положим $C_n = |I(n)|$, $D_{hn} = |G(h, n)|$. Для каждой тройки $(n, k, h) \in U$ введем переменную X_{nkh} — число (n, h)-агентов, выбирающих жилища типа k.

Задача АТ (агрегированная задача Т) имеет вид

$$\max \textstyle\sum_{n,k,h} a_{nkh} X_{nkh} \quad \text{при условиях}$$

$$\textstyle\sum_k X_{nkh} = D_{hn}, \tag{38}$$

$$\textstyle\sum_{m,h} X_{mkh} \le C_k, \tag{39}$$

$$X \ge 0.$$

Мы предполагаем, что C_0 в (39) достаточно велико. Очевидно, что при $X_{nkh} = \sum_{g\in G(h,n)}\sum_{i\in I(k)} x_{gi}$, где x_{gi} — переменные задачи Т, условие (38) есть результат суммирования ограничений (12) по $g \in G(h, n)$, а (39) — результат суммирования ограничений (13) по $i \in I(k)$.

Двойственная задача АТ* имеет вид

$$\min \left(\textstyle\sum_{h,n} D_{hn}\, \gamma_{hn} + \sum_k C_k\, \pi_k\right) \quad \text{при условиях} \quad \gamma_{hn} + \pi_k \ge a_{nkh}, \quad \pi_k \ge 0.$$

Лемма 17 утверждает, что размещение, соответствующее допустимому решению задачи АТ, удовлетворяет условию, следующему из Предположения 1': потребитель может выбрать жилище, принадлежащее поставщику, только если этот поставщик выберет нуль.

Лемма 17. Если $h \in \mathrm{GS}$ и X — допустимое решение задачи АТ, то $\sum_m \sum_{a\in \mathrm{GC}} X_{m\,\tau(h)a} \le X_{00h}$.

Теорема 10. Если (z, p) — стандартное равновесие, $x = x(z)$, $X_{nkh} = \sum_{g\in G(h,n)}\sum_{i\in I(k)} x_{gi}$ *для* $(n, k, h) \in U$, $\gamma_{hn} = \alpha_g(z, p)$ для $g \in G(h, n)$ и $\pi_k = c(p_i)$ для $i \in I(k)$, то X и (γ, π) — оптимальные решения задач АТ и АТ* соответственно. Если X — целочисленное (в частности, базисное) оптимальное решение задачи АТ, (γ, π) — оптимальное решение задачи АТ*, $\bar{\pi}_i = \pi_k$ для $i \in I(k)$ и $\bar{\pi} = (\bar{\pi}_i \mid i \in I)$, то существует базисное оптимальное решение x задачи Т, такое что $(z(x, \bar{\pi}),\ r(\bar{\pi}))$ — стандартное равновесие и $X_{nkh} = \sum_{g\in G(h,n)}\sum_{i\in I(k)} x_{gi}$.

Итак, задачи АТ и АТ* описывают в точности все стандартные равновесия. Каждому целочисленному оптимальному решению задачи АТ соответствует, вообще говоря, некоторое множество равновесных распределений, различающихся несущественно: только распределением жилищ типа k среди (n, h)-агентов для некоторых троек (n, k, h).

Допустим, что жилище i принадлежит поставщику g. Можно считать, что в равновесии соизмеримая цена π_i не меньше, чем ψ_{gi} (Лемма 3). Если $\pi_i > \psi_{gi}$, то жилище занято потребителем (Лемма 2), а при $\pi_i = \psi_{gi}$ жилища 0 и i равноценны для агента g и можно считать, что он выбирает i. Поэтому оправдано следующее предположение.

Предположение 9. В равновесии каждый поставщик выбирает принадлежащее ему жилище, если оно не пользуется спросом.

Теперь в задаче AT условие (39) для $k = \tau(b)$ можно записать как равенство: $\sum_m \sum_{h\in \mathrm{GC}} X_{mkh} + X_{0\tau(b)b} = C_k$. Условие (38) для $n = 0$ и $h = b \in \mathrm{GS}$ имеет вид $X_{00b} + X_{0\tau(b)b} = D_{b0}$. Отсюда, используя $D_{b0} = C_{\tau(b)}$ (Лемма 15), получим $\sum_m \sum_{h\in \mathrm{GC}} X_{m\tau(b)b} = X_{00b}$. Положим $b_{nkh} = a_{nkh} - a_{0kb}$, если $k = \tau(b)$ для $b\in \mathrm{GS}$, и $b_{nkh} = a_{nkh}$ в других случаях. Переменная X_{00h} входит в целевую функцию задачи AT с коэффициентом $a_{00h} = 0$, поэтому

$$\sum_{n,k,h} a_{nkh} X_{nkh} = \sum_{n,k} \sum_{h\in \mathrm{GC}} a_{nkh} X_{nkh} + \sum_{h\in \mathrm{GS}} a_{0\tau(h)h} X_{0\tau(h)h} =$$
$$= \sum_{n,k} \sum_{h\in \mathrm{GC}} b_{nkh} X_{ijh} + \sum_{h\in \mathrm{GS}} a_{0\tau(h)h} D_{h0}.$$

Исключая переменные $X_{0\tau(b)b}$ для $b\in \mathrm{GS}$ с помощью равенств, соответствующих условиям (39), получим задачу ATC: $\max \sum_{n,k} \sum_{h\in \mathrm{GC}} b_{nkh} X_{ijh}$ при условиях $\sum_k X_{nkh} = D_{hn}$ для $h\in \mathrm{GC}$, $\sum_m \sum_{h\in \mathrm{GC}} X_{mkh} \le C_k$, $X \ge 0$. Задача ATC не зависит от переменных, связанных с поставщиками. Это ее свойство нам понадобится в разделе 6.

При Предположении 9 задачи AT и ATC эквивалентны. Поэтому задачи ATC и ATC* описывают все стандартные равновесия, удовлетворяющие Предположению 9. Легко понять, что оценка ограничения (39) в задаче AT больше соответствующей оценки в задаче ATC на ψ_{bk}, если $k = \tau(b)$; в противном случае оценки совпадают. Другими словами, задача ATC* выделяет из соизмеримой цены жилища i, принадлежащего поставщику g, "конкурентную надбавку" к минимальной цене ψ_{gi}.

5. СРАВНИТЕЛЬНАЯ СТАТИКА

Анализ сравнительной статики в рассматриваемой модели осложнен тем, что исходная ситуация определяет равновесие, как правило, не единственным образом. Разные системы цен могут уравновешивать одно распределение, и разные распределения могут быть уравновешены одной системой цен. Агрегирование (раздел 4) не снимает эту проблему. Поэтому пока достаточно полно проанализированы только последствия появления на рынке дополнительного свободного жилища. Результаты этого раздела хорошо согласуются с анализом последствий стимулирования жилищного строительства в книге (Жилищная экономика, 1996, с. 130–131).

Цену дополнительного жилища в равновесии для новой ситуации можно сравнивать только с ценой однотипного жилища в исходной ситуации. Поэтому рассмотрим стандартные равновесия, описанные задачей AT.

Пусть $f_0(A)$ — оптимальное значение целевой функции в задаче AT для рыночной ситуации A. По Следствию 1 из Теоремы 2 и Теореме 10 все вальрасовы равновесия для исходной ситуации A имеют инвариантную характеристику $F_0(A) = \sum_g w_g + f_0(A)$. Это сумма полезностей всех агентов в равновесии для ситуации A. Авторы работы (Bevia, Quinzii, Silva, 1999, с. 9) называют величину $F_0(A)$ общественным благом, порожденным множеством жилищ I.

Предположим, что в ситуациях A_1 и A_2 множества потребителей, исходные размещения и полезности жилищ совпадают, но в ситуации A_2 есть одно дополнительное свободное жилище d типа j для некоторого $j \in I$. Свободное в ситуации A_2 жилище d может принадлежать только поставщику. Тогда из определения однотипных жилищ следует, что все жилища типа j принадлежат поставщикам и в ситуации A_2 есть один дополнительный поставщик f. Можно считать, что в ситуации A_1 этот поставщик не предлагает жилище d для продажи (аренды) и, следовательно, получает полезность $w_f + \psi_{fj}$.

Таким образом, в равновесии для ситуации A_1 сумма полезностей всех агентов, участвующих в ситуации A_2, равна $F_0(A_1) + w_f + \psi_{fj}$. Поэтому "общественную полезность" жилища d можно оценить разностью $\delta = F_0(A_2) - [F_0(A_1) + w_f + \psi_{fj}]$. Обозначим через $\Pi(A)$ множество всех векторов соизмеримых цен, соответствующих ценам стандартных равновесий для ситуации A. Предложение 3.1 из работы (Bevia, Quinzii, Silva, 1999) в нашем случае эквивалентно следующему утверждению.

Теорема 11. $\max\{\pi_j \mid \pi \in \Pi(A_2)\} - \psi_{fj} \le \delta \le \min\{\pi_j \mid \pi \in \Pi(A_1)\} - \psi_{fj}$.

Авторы работы (Bevia, Quinzii, Silva, 1999, с. 9) трактуют величину δ как общественную полезность жилища типа j в ситуации A_2 и полезность "следующего наилучшего использования" такого жилища в ситуации A_1 ($\delta \ge 0$ по Лемме 3). Из Теоремы 11 следует, что $\delta + \psi_{fj}$ — нижняя граница соизмеримых цен на жилища типа j в стандартных равновесиях для A_1 и верхняя граница соизмеримых цен на такие жилища в стандартных равновесиях для A_2.

На дополнительное жилище j не будет спроса в том случае, если $\min\{\pi_j \mid \pi \in \Pi(A_1)\} < \psi_{fj}$; если же $\max\{\pi_j \mid \pi \in \Pi(A_2)\} > \psi_{fj}$, то на жилище

j спрос будет. Теорема 10 указывает способ вычисления δ. Кроме того, минимальную (максимальную) соизмеримую цену равновесия на жилища типа j в произвольной ситуации A можно найти, решив линейную задачу минимизации (максимизации) π_j при условиях $\gamma_{hi} + \pi_k \geq a_{ikh}$, $F(A;\ \gamma,\ \pi) \leq f_0(A)$, $\pi \geq 0$ (здесь $F(A;\ \gamma,\ \pi)$ — целевая функция задачи AT* для ситуации A). Таким образом, можно вычислить границы цен стандартных равновесий и выяснить, будет ли спрос на дополнительное жилище каждого типа.

Изменение равновесия при появлении нового свободного жилища можно изучить подробнее, если предположить, что в момент вариации рынок находится в равновесии. Будем использовать основную (неагрегированную) модель.

Для исходной ситуации A определим *соответствующее размещение* $\zeta(A)$: $\zeta_g(A) = \delta(g)$, если $g \in G_1$; $\zeta_g(A) = 0$, если $g \in G_2$ и $d(g) \in \{\delta(g) \mid g \in G_1\}$; $\zeta_g(A) = d(g)$ в остальных случаях.

Определение. Размещение $\zeta = (\zeta_g \mid g \in G)$ назовем *равновесным*, если существует равновесие $(z,\ p)$, такое что $\zeta = \zeta(z)$ (раздел 1.1).

Предположим, что в ситуации A_1 рынок находится в равновесии, т.е. размещение $\zeta(A_1)$ является равновесным. Тогда существует равновесие $e_1 = (z^1,\ p^1)$, такое что $\zeta(A_1) = \zeta(z^1)$, в частности $\delta(g) = j(z^1,\ g)$ для всех $g \in G_1$. Положим $\pi^1 = c(p^1)$. Обозначим через F множество всех жилищ, свободных в ситуации A_1, $F = \{0\} \cup (I \setminus \{\delta(g) \mid g \in G\})$. Добавляя свободное жилище j во множество I и включая его владельца-поставщика $g(j)$ во множество G_2, мы превратим ситуацию A_1 в ситуацию A_2. Пусть $\lambda = \langle j(1),\ \dots,\ j(n+1) \rangle$ — последовательность элементов из $I \cup \{j\}$.

Определение. Последовательность λ *допустима*, если $j(s) \neq j(k)$ при $s < k \leq n$, $j(s) \neq 0$ при $1 < s \leq n$, $j(n+1) \in F \cup \{j(1),\ j\}$ и для всякого $s \leq n$ существует агент $g(s)$, такой что $j(s) = j(z^1,\ g(s))$ и $j(s+1) \in J_{g(s)}$.

Допустимая последовательность λ описывает перемещения агентов, возможные в ситуации A_1: агент g_s, выбравший в исходном равновесии жилище $j(s)$, выбирает $j(s+1)$. Назовем такую последовательность *циклом*, если $j(n+1) = j(1)$, и *цепью* в других случаях. Из определения следует, что нуль может быть только крайним элементом цепи. Последний участник цепи выбирает жилище, свободное в ситуации A_1 (*цепь первого типа*), или j (*цепь второго типа*).

Определение. Пусть $\lambda = \langle j(1),\ \dots,\ j(n+1) \rangle$ — допустимая последовательность, $j(s) = j(z^1,\ g(s))$ для $s \leq n$; λ реализована в равновесии $e = (z,\ p)$ для ситуации A_2, если $j(s+1) = j(z,\ g(s))$ для $s \leq n$, и *нетривиальна*, если $n > 0$.

Для последовательности $\lambda = \langle j(1), \ldots, j(n+1)\rangle$ положим $I(\lambda) = \{j(s) \mid 1 \le s \le n+1\}$ (множество жилищ, участвующих в последовательности λ). Пусть $P(A)$ — множество всех систем цен равновесия для ситуации A. Для $p \in P(A_2)$ и $i \in I$ положим $\delta_i(p) = \pi_i^1 - c(p_i)$ (разность соизмеримых цен на жилище i в равновесиях e_1 и (z, p)).

Лемма 18. Пусть $e = (z, p)$ — равновесие для ситуации A_2 и $\lambda = \langle j(1), \ldots, j(n+1)\rangle$ — реализованная в e последовательность. (a) Если $j(s+1) \neq j$, то $\delta_{j(s)}(p) \le \delta_{j(s+1)}(p)$. (b) Если λ — цикл, то $\delta_i(p)$ одинаковы для всех $i \in I(\lambda)$. (c) Если λ — цепь, то $\delta_i(p) \ge 0$ для $i \in I(\lambda) \setminus \{j\}$. (d) Если λ — цепь первого типа, то $\delta_i(p) = 0$ для $i \in I(\lambda)$.

В ситуации A_1 жилище j отсутствует и цена p_j^1 не определена. Поэтому мы исключаем j из рассмотрения в утверждениях (a) и (c) Леммы 18. Конечно, только одна цепь второго типа может быть реализована при адаптации рынка, находящегося в равновесии e_1, к появлению жилища j (от других допустимых перемещений агенты рынка ничего не выигрывают). Но Лемма 18 сравнивает с e_1 любое равновесие для ситуации A_2. В этом случае могут существовать нетривиальные неулучшающие "последовательности различий" между равновесиями.

Из Леммы 18 следует, что по сравнению с соизмеримыми ценами π_i^1 цены $c(p_i)$ изменяются на одинаковую величину в реализованном цикле, не изменяются в реализованной цепи первого типа и не возрастают в реализованной цепи второго типа. При этом в цепи второго типа жилище дешевеет тем сильнее, чем оно ближе к j. Полагая, что реализованная цепь второго типа ведет от "худших" жилищ к "лучшим", можно заключить, что "лучшее" жилище дешевеет не меньше, чем "худшее".

Пусть $e = (z, p)$ — равновесие для ситуации A_2. Ясно, что каждый агент $g \in G$ входит в реализованную последовательность (возможно, тривиальную). Одна из этих последовательностей максимальна по включению; обозначим ее $\lambda_g(z)$.

Лемма 19. Если (z, p) — равновесие для ситуации A_2 и $j \notin I(\lambda_g(z))$, то $v_{g\delta(g)}(p) = u_g(z)$.

Из Леммы 19 следует, что размещение, полученное "отменой" всех сделок, соответствующих циклам и цепям первого типа в равновесии (z, p) для ситуации A_2, может быть уравновешено ценами p. С этим утверждением связано следующее определение.

Определение. Равновесие $e = (z, p)$ для ситуации A_2 назовем *простым*, если единственной реализованной в нем последовательностью является цепь второго типа.

Пусть SE — множество всех простых равновесий, $\lambda(e)$ для $e \in \mathrm{SE}$ — единственная последовательность (цепь второго типа), реализованная в равновесии e, $L = \{\lambda(e) \mid e \in \mathrm{SE}\}$, $\mathrm{SE}(\lambda) = \{e \in \mathrm{SE} \mid \lambda(e) = \lambda\}$.

Все равновесия из $\mathrm{SE}(\lambda)$ порождают одно размещение, обозначим его $\zeta(\lambda)$. Именно размещения $\zeta(\lambda)$ для $\lambda \in L$ могут возникать вследствие приспособления к ситуации A_2 рынка, находящегося в равновесии e_1. Если $L \neq \varnothing$, то из Теоремы 2 следует, что L — это множество всех допустимых последовательностей $\langle j(1), \ldots, j(n+1)\rangle$, максимизирующих $\sum_{s=1}^{n} (\psi_{g(s)j(s+1)} - \psi_{g(s)j(s)})$ при условиях $j(n+1) = j$ и $j(s) = j(z^1, g(s))$ для $s \leq n$. Ниже описан метод построения всех элементов множества L.

Пусть $J = I \cup \{ j \}$, $H_2 = G_2 \cup \{g(j)\}$ (множества жилищ и поставщиков соответственно в ситуации A_2). Опишем множество K_g, из которого агент g выбирает жилище в ситуации A_2 : $K_g = J$ для $g \in G_1$, $K_g = (d(g), 0)$ для $g \in H_2$. Положим для краткости $k(g) = j(z^1, g)$ при $g \in G$. Рассмотрим граф $\Gamma = (J, U)$ с множеством вершин J и множеством дуг $U = \{(k(g), i) \mid g \in G, i \in K_g\} \cup \{(0, d(g)) \mid g \in G_2\} \cup \{(0, 0)\}$. *Вес* $c(k, i)$ дуги (k, i) определим следующим образом: $c(k, i) = \psi_{gi} - \psi_{gk}$, если $k = k(g)$; $c(k, i) = \psi_{gi}$, если $(k, i) = (0, d(g))$ для $g \in G_2$; $c(0, 0) = 0$. *Путь* $\mu = \langle i_1, \ldots, i_k\rangle$ в графе Γ имеет *вес* $\Delta(\mu) = \sum_s c(i_s, i_{s+1})$.

Пусть граф Γ_1 получен из графа Γ добавлением дуги $(j, 0)$ с весом $c(j, 0) = -\psi_{g(j)j}$. Поскольку e_1 — равновесие, из Теоремы 2 следует, что всякий максимальный по вложению простой путь положительного веса в Γ_1 соответствует цепи второго типа (в частности, в Γ_1 нет положительных циклов и цепей первого типа). Тогда существует простой путь максимального веса в любую вершину графа Γ_1.

Ясно, что $\mathrm{SE} \neq \varnothing$, если и только если в Γ_1 существует простой путь с неотрицательным весом, завершающийся дугой $(j, 0)$. Но $c(j, 0) = -\psi_{g(j)j} \leq 0$, поэтому $\mathrm{SE} \neq \varnothing$, если и только если существует цепь λ второго типа (простой незамкнутый путь в графе Γ, ведущий в j) с весом $\Delta(\lambda) \geq \psi_{g(j)j}$. Все простые пути максимального веса в графе Γ, ведущие в j, можно найти одним из известных эффективных алгоритмов; см., например, (Minieka, 1978, Section 3.2). Если эти пути имеют вес, не меньший, чем $\psi_{g(j)j}$, то каждому из них соответствует последовательность $\lambda \in L$, порождающая простое равновесие.

Зафиксируем $\lambda = \langle j(1), \ldots, j(n), j(n+1) = j \rangle \in L$. В дальнейшем будем считать, что $e = (z, p) \in \mathrm{SE}(\lambda)$. Понятно, что если система цен p возникла в результате приспособления рынка к ситуации A_2 из равновесия e_1 (например, посредством механизма, описанного в разделе 3), то $p \le p^1$. Но, вообще говоря, в равновесии из множества $\mathrm{SE}(\lambda)$ некоторые цены могут быть выше, чем в e_1. Как показывает Теорема 12, эти цены можно снизить до уровня p^1.

Для $p \in P(A_2)$ положим $\overline{p}_i = \min\{p_i^1, p_i\}$ для $i \in I$, $\overline{p}_j = p_j$ и $\overline{p} = (\overline{p}_i \mid i \in J)$.

Теорема 12. Если $(z, p) \in \mathrm{SE}(\lambda)$ и $\bar{z}_g = (y_{gj(z,\,g)}(\overline{p}), j(z, g))$, то $(\bar{z}, \overline{p}) \in \mathrm{SE}(\lambda)$.

Другими словами, размещение $\zeta(\lambda)$, уравновешенное ценами p, может быть уравновешено и ценами $\overline{p}$ (Demange, Gale, 1985, c. 881). Для более общей модели авторы работы (Bevia, Quinzii, Silva, 1999, Theorem 3.10) доказали, что множество систем цен равновесия есть решетка. Это верно и для рассматриваемой модели: множество $P(A)$ есть решетка для любой ситуации A. Отсюда, однако, не следует Теорема 12, так как в определении вектора $\overline{p}$ участвуют равновесные цены для разных ситуаций. Лемма 3 обосновывает следующее предположение.

Предположение 10. Будем считать, что $\pi_i^1 \ge \psi_{g(i)i}$, если $g(i) \in G_2$.

Положим $H = G \cup \{g(j)\}$ (множество всех агентов рынка в ситуации A_2). Применяя конструкцию, предложенную в работе (Quinzii, 1984, Theorem 3), можно построить две интересные системы цен равновесия для размещения $\zeta(\lambda) = (j(\lambda, g) \mid g \in H)$.

Пусть μ_i для $i \in J$ — простой путь максимального веса в графе Γ, завершающийся в вершине i. Положим $\hat{\pi} = (\Delta(\mu_i) \mid i \in J)$, $\hat{p} = r(\hat{\pi})$ (раздел 2.1), $z_g(\lambda, \hat{p}) = (y_{gj(\lambda,g)}(\hat{p}), j(\lambda, g))$, $z(\lambda, \hat{p}) = (z_g(\lambda, \hat{p}) \mid g \in H)$ и $e(\lambda, \hat{p}) = (z(\lambda, \hat{p}), \hat{p})$.

Теорема 13. $e(\lambda, \hat{p}) \in \mathrm{SE}(\lambda)$ и $\hat{p}_i \le p_i^1$ для $i \in I$.

Следствие 1. Если $i \in I$, то $\hat{p}_i \le \min\{p_i \mid p \in P(A_1)\}$.

Следствие 2. Если $(z, p) \in \mathrm{SE}(\lambda)$, то $p_i \le \hat{p}_i$ для $i \in I(\lambda)$.

Следствие 3. Если $i \in I$, $k \in I(\mu_i) \setminus \{i\}$ и $\hat{p}_k < p_k^1$, то $\hat{p}_i < p_i^1$.

Заметим, что $\hat{p}_i < p_i^1$ (Теорема 13) и Следствие 3 для $i \in I(\lambda)$ охвачены Леммой 18, которая справедлива для любого вектора цен из $P(A_2)$.

Итак, $\hat{p}$ — система цен равновесия для ситуации A_2. Вектор $\hat{p}$ указывает верхние границы цен для жилищ, входящих в последовательность λ (Следствие 2). Эти границы и цены остальных жилищ в равновесии $e(\lambda, \hat{p})$ не выше, чем минимальные цены равновесия для ситуации A_1 (Следствие 1). Если равновесие $e(\lambda, \hat{p})$ уменьшает цену жилища k, то оно уменьшает также цены всех жилищ i, таких что путь максимального веса в графе Γ, завершающийся в i, проходит через k (Следствие 3). На "главном" пути λ жилища дешевеют тем больше, чем ближе они к j (Лемма 18).

Легко видеть, что в равновесии $e(\lambda, \hat{p})$ цены жилищ, не входящих в последовательность λ, не обязательно совпадают с максимальными ценами равновесия. Более того, если $I(\mu_i) \cap I(\lambda) = \varnothing$, то $\hat{p}_i$ — минимальная равновесная цена жилища i. Построим систему минимальных цен равновесия для произвольной ситуации A. Параметры ситуации A будем обозначать так же, как соответствующие параметры ситуации A_1, но не будем предполагать, что рынок уравновешен в ситуации A.

Пусть $\zeta = (\zeta(g) \mid g \in G)$ — равновесное размещение для ситуации A. Рассмотрим граф $\Gamma(\zeta) = (I, U)$ с множеством вершин I и множеством дуг $U = \{(\zeta(g), i) \mid g \in G,\ i \in J_g\} \cup \{(0, d(g)) \mid g \in G_2\} \cup \{(0, 0)\}$. Дуге (k, i) припишем *вес* $c(k, i)$, где $c(k, i) = \psi_{gi} - \psi_{gk}$, если $k = \zeta(g)$, $c(k, i) = \psi_{gk}$, если $(k, i) = (0, d(g))$ для $g \in G_2$, и $c(0, 0) = 0$.

Из Теоремы 2 следует, что в графе $\Gamma(\zeta)$ нет циклов положительного веса. Поэтому для любой вершины i среди путей, завершающихся в этой вершине, есть путь максимального веса. Среди таких путей имеется простой путь; обозначим его μ_i. Положим $\tilde{\pi} = (\Delta(\mu_i) \mid i \in J)$, $\tilde{p} = r(\tilde{\pi})$ (раздел 2.1), $z_g(\tilde{p}) = (y_{g\zeta(g)}(\tilde{p}), \zeta(g))$, $z(\tilde{p}) = (z_g(\tilde{p}) \mid g \in G)$ и $e(\tilde{p}) = (z(\tilde{p}), \tilde{p})$.

Теорема 14. $e(\tilde{p})$ — равновесие для ситуации A. Если $p \in P(A)$ и $c(p_{d(g)}) \geq \psi_{gd(g)}$ для всех $g \in G_2$, то $\tilde{p} \leq p$.

Таким образом, $\tilde{p}$ — система минимальных цен равновесия в классе равновесий (z, p), удовлетворяющих условию $c(p_{d(g)}) \geq \psi_{gd(g)}$ для всех $g \in G_2$. Из Леммы 3 следует, что это не ограничительное условие. Применяя Теорему 14 к размещению $\zeta(\lambda)$, найдем систему минимальных цен равновесия для ситуации A_2.

Лемма 20. Если $e = (z, p)$ — равновесие для ситуации A_2, $p \le p^1$ и $g \in G_1$, то $u_g(z^1) \le u_g(z)$.

Из Теоремы 12 следует, что всякое равновесное размещение для ситуации A_2 может быть уравновешено ценами, не превосходящими p^1. По Лемме 20 при таких ценах никакой потребитель не ухудшает свое положение по сравнению с равновесием e_1 (утверждение этой леммы тривиально для потребителя g, не владеющего никаким жилищем, но не совсем очевидно при $d(g) \ne 0$).

Следующий пример показывает, что появление дополнительного жилища может изменить равновесие, сохраняя цены и значения функций полезности потребителей. Рассмотрим задачу АТ, используя соответствующие обозначения из раздела 4.

Предположим, например, что в агрегированной ситуации A существует последовательность троек $(i(s), j(s), h(s))$, $1 \le s \le n$, для которой выполнены условия $D_{h(s)i(s)} > 0$ и $D_{h(s)i(s+1)} > 0$ (существуют агенты группы $h(s)$, занимающие жилища типов $i(s)$ и $i(s+1)$); $\Delta = \sum_{s=1}^{n-1}(a_{i(s)j(s+1)h(s)} - a_{i(s)i(s)h(s)}) > 0$; $j(s) = i(s+1)$ для $s < n$. Из последовательностей, удовлетворяющих этим условиям, выберем последовательность λ, максимизирующую Δ. Для простоты положим $\psi_{gd(g)} = 0$ при $g \in G_2$ (поставщик согласен продать или сдать в аренду свое жилище по любой цене). Допустим, что в ситуации A рынок находится в равновесии $e_1 = (z^1, p)$. Пусть $\pi = c(p)$, $\pi_{i(1)} = 0$, АТ(A) и АТ*(A) — задачи АТ и АТ* для ситуации A, x и (γ, π) — оптимальные решения этих задач. Можно считать, что $x_{iih} = D_{hi}$ (для всех i, h) и $x_{ijh} = 0$ при $i \ne j$ (нет перемещений). Тогда

$$\gamma_{i(s)h(s)} + \pi_{i(s)} = a_{i(s)i(s)h(s)},$$
$$\gamma_{i(s)h(s)} + \pi_{i(s+1)} \ge a_{i(s)i(s+1)h(s)},$$
$$\gamma_{i(s+1)h(s)} + \pi_{i(s+1)} = a_{i(s)i(s+1)h(s)},$$
$$\gamma_{i(s+1)h(s)} + \pi_{i(s)} \ge a_{i(s)i(s)h(s)}.$$

Отсюда следует, что $\gamma_{i(s)h(s)} = \gamma_{i(s+1)h(s)}$. Поэтому

$$a_{i(s)i(s+1)h(s)} - a_{i(s)i(s)h(s)} = \\ = (\gamma_{i(s+1)h(s)} + \pi_{i(s+1)}) - (\gamma_{i(s)h(s)} + \pi_{i(s)}) = \pi_{i(s+1)} - \pi_{i(s)}$$

и

$$\Delta = \sum_{s=1}^{n-1}(\pi_{i(s+1)} - \pi_{i(s)}) = \pi_{i(n)} - \pi_{i(1)} = \pi_{i(n)} \text{ (так как } \pi_{i(1)} = 0).$$

Появление свободного жилища типа $i(n)$ создает новую ситуацию B, в которой $C_{i(n)}$ на единицу больше, чем в ситуации A. Определим вектор y: $y_{i(s)i(s)h(s)} = x_{i(s)i(s)h(s)} - 1$, $y_{i(s)i(s+1)h(s)} = 1$, $y_{ijh} = x_{ijh}$ для всех остальных троек (i, j, h) (один $(i(s), h(s))$-агент перемещается в жилище типа $i(s+1)$). Пусть AT(B) и AT*(B) — задачи AT и AT* для ситуации B. Ясно, что y и (γ, π) — допустимые решения задач AT(B) и AT*(B) соответственно.

Пусть f, g^A и g^B — целевые функции задач AT(A), AT*(A) и AT*(B). Тогда $f(x) = g^A(\gamma, \pi)$ и $\Delta = f(y) - f(x) = p_{i(n)} = g^B(\gamma, \pi) - g^A(\gamma, \pi)$. Следовательно, $f(y) = g^B(\gamma, \pi)$, поэтому y и (γ, π) — оптимальные решения задач AT(B) и AT*(B) соответственно. По Теореме 10 размещение, определенное вектором y, отвечает некоторому равновесию $e_2 = (z^2, p)$ для ситуации B. В обоих равновесиях e_1 и e_2 значение функции полезности для (i, h)-агента равно $w_h + \gamma_{ih} + \pi_{d(h)}$.

EQ-процедура (раздел 3) объясняет, почему происходят перемещения, в результате которых потребители, казалось бы, ничего не выигрывают.

Предположим, что дополнительное жилище j типа $i(n)$ выходит на рынок по соизмеримой цене $\pi_{i(n)}$. На этапе 1 EQ-процедуры каждый потребитель выберет жилище, в котором живет. На последнем шаге произойдет случай (3a), вследствие чего цена жилища j станет равной $\pi_{i(n)} - \delta$. При ценах p жилища типов $i(s)$ и $i(s+1)$ для $(i(s), h(s))$-агентов равноценны (так как $a_{i(s)i(s+1)h(s)} - a_{i(s)i(s)h(s)} = \pi_{i(s+1)} - \pi_{i(s)}$) и не хуже всех остальных. Поэтому на этапе 2 жилище j окажется лучшим для $(i(n-1), h(n-1))$-агентов. При подходящих нумерациях агентов и жилищ возникнет цепь $\langle g_{n-1}\rangle$, $g_{n-1} \in G(h(n-1), i(n-1))$, которая будет реализована, если $\pi_{i(n-1)} = 0$.

Если же цепь $\langle g_{n-1}\rangle$ не корректна, то цена жилища j_{n-1} типа $i(n-1)$, занятого агентом g_{n-1}, уменьшится на δ по случаю (2a) и оно станет лучшим для $(i(n-2), h(n-2))$-агентов. И так далее. Заметим, что цепь не "развалится": однажды выбрав жилище j_{n-s}, агент g_{n-s} будет выбирать его на последующих шагах и этапах (так как $L(g_{n-s}) = j_{n-s}$).

Из $p_{i(1)} = 0$ следует, что при подходящих нумерациях агентов и жилищ на некотором этапе будут реализованы сделки, соответствующие последовательности λ. Затем возникнет равновесие относительно схемы $\rho \in \mathfrak{R}$ и произойдет случай (3b) (так как $D_{h(s)i(s+1)} > 0$). В результате цены всех жилищ, вошедших в цепь λ, возрастут на δ и вернутся к исходным значениям. Возникнет новое равновесие. При дальнейшем увеличении числа жилищ типа $i(n)$ цены уменьшатся лишь после того, как все ($i(s)$, $h(s)$)-агенты получат жилища типа $i(s+1)$ (для некоторого s).

6. ПРИЛОЖЕНИЯ К РАЗРАБОТКЕ ЖИЛИЩНОЙ ПОЛИТИКИ

Литература, посвященная целям жилищной политики и способам регулирования рынка жилья обширна; см., например, (Cullingworth, 1967; Donnison, 1967; Yeates, Garner, 1976, с. 412; Rothenberg, Galster, 1991; Бессонова, 1993; Жилищная политика..., 1998; Жилищная экономика, 1996). Однако модели, учитывающие неделимость жилищ, насколько нам известно, к проблеме регулирования рынка не применялись.

Государственное регулирование рынка жилья необходимо даже в развитых странах и, тем более, в России. "Общество признает необходимость регулирования рынка жилья либо потому, что люди считают жилищные условия бедных морально неприемлемыми в богатом обществе, либо из боязни, что такие условия создают угрозу существованию общества" (Yeates, Garner, 1976). В то же время "в теории местного управления отсутствует научно обоснованная методология формирования местной жилищной политики" (Жилищная политика..., 1998, с. 46). Предложенные ниже подходы к разработке локальных жилищных программ не универсальны, но могут быть полезны во многих случаях.

6.1. Постановка задачи

В формулировке (Rothenberg, Galster, 1991, с. 293) цель жилищной политики в самом общем виде — это "улучшение поведения рынка жилья". Жилищная политика обычно направлена на обеспечение достаточного предложения жилья, соблюдение общественно приемлемых стандартов и финансовую поддержку семей, неспособных платить рыночную цену.

В работе (Donnison, 1967) выделены следующие типы "взаимоотношений" государства с рынком жилья.

1. *Поддержка свободного рынка* (Турция, Греция). Государство стремится увеличить производство строительной продукции безотносительно к типам возводимых жилищ. Для этого власти стимулируют частные строительные предприятия и проводят институциональные реформы, позволяющие направлять больше средств в жилищное строительство.

2. *Социальные жилищные программы* в сочетании со свободным рынком (Великобритания, Швейцария). Государственные жилищные программы обслуживают конкретные группы населения и рассматриваются как временное вмешательство в свободный рынок. Государство не берет на себя ответственность за жилищные условия всех граждан.

3. *Всеобъемлющая жилищная политика* (Швеция, Франция). Государство формирует и контролирует рынок жилья в такой степени, что должно принять на себя ответственность за жилищные условия большей части населения. Жилищная политика объединяется с другими социальными политиками для достижения национальных целей.

В СССР реализовывался третий тип жилищной политики, минуя первые два. С одной стороны, государство не может свести социальные обязательства к приемлемому уровню как по политическим причинам, так и ввиду низких доходов подавляющей части населения. С другой стороны, бюджет не позволяет вкладывать достаточные средства в социальные жилищные программы. Поэтому сейчас жилищная политика российских властей сочетает элементы указанных выше подходов.

В Законе Российской Федерации "Об основах федеральной жилищной политики" (в редакции Федеральных законов от 12.01.96 № 9-ФЗ, от 21.04.97 № 68-ФЗ, от 10.02.99 № 29-ФЗ, от 17.06.99 № 113-ФЗ) цели и инструменты жилищной политики сформулированы следующим образом.

Целью федеральной жилищной политики является: обеспечение социальных гарантий в области жилищных прав граждан; осуществление строительства государственного, муниципального и частного жилищных фондов; создание условий для привлечения внебюджетных источников финансирования; развитие частной собственности; развитие конкуренции в строительстве, содержании и ремонте жилищного фонда. Гражданам, не обеспеченным жильем по нормативам, государство оказывает помощь, развивая строительство домов государственного и муниципального жилищных фондов, а также используя систему компенсаций (субсидий) и льгот по оплате строительства, содержания и ремонта жилья. Органы государственной власти и местного самоуправления обеспечивают доступность для населения условий найма жилых помещений в пределах социальной нормы, возможность кредитной поддержки граждан и предоставления налоговых льгот при приобретении и аренде жилья, жилищное строительство за счет бюджетов для предоставления жилья гражданам на условиях найма, аренды, купли-продажи. Органы государственного управления, местная администрация предоставляют гражданам компенсации (субсидии), обеспечивающие оплату жилья в пределах социальной нормы площади жилья и нормативов потребления коммунальных услуг с учетом совокупного дохода семьи.

Квартирная плата в арендном секторе субсидируется, однако субсидии на строительство или приобретение жилья труднодоступны (Жилищная политика…, 1998, с. 190–192, 212–214).

Таким образом, закон предоставляет властям возможности и возлагает на них обязанности регулирования рынка жилья. Однако власти не могут оказывать достаточные воздействия на рынок из-за дефицита бюджетов всех уровней. Ипотечное кредитование и другие долгосрочные меры регулирования внедряются очень медленно по очевидным причинам: общая нестабильность, низкие доходы большей части населения, недостаточно развитая банковская система, труднодоступность юридических услуг и т.д.

Анализ и сравнение различных методов регулирования рынка жилья — большая и интересная область исследований, которую мы оставляем в стороне. Мы ограничимся описанием моделей, которые могут быть полезными инструментами таких исследований. Учитывая специфику модели, описанной в разделе 1.1, мы будем говорить только о жилищной политике городских властей, рассчитанной на краткосрочный период. В терминах задачи АТ (раздел 4) проблему можно сформулировать следующим образом.

Предположим, что до начала рассматриваемого периода разработчик политики прогнозирует рыночную ситуацию A_0 на начало периода, решает соответствующие задачи АТ и АТ* и определяет *прогнозное равновесие* e_0. Возможно, в этом равновесии некоторые потребители занимают социально неприемлемые жилища (слишком плохие, или слишком дорогие по сравнению с доходами, или расположенные в неблагополучных районах и т.д.) и некоторые поставщики уводят с рынка свои "хорошие" жилища, не нашедшие спроса. Нужно так изменить параметры исходной ситуации, чтобы результирующее равновесие было, по возможности, свободно от этих недостатков. Понятно, что регулирование рынка путем изменения параметров рыночной ситуации требует затрат, ограниченность которых необходимо учесть. В разделе 6.4 мы обсудим возможные источники средств для покрытия этих затрат, а пока будем считать, что затраты ограничены величиной K.

Только две группы параметров задачи АТ частично управляемы. Это компоненты векторов $C = (C_i \mid i \in I)$ и $a = (a_{ijh} \mid (i, j, h) \in I^2 \times H)$, где I и H — множества типов жилищ и групп потребителей соответственно.

Увеличивая C_i (число жилищ типа i), можно влиять на рынок со стороны предложения. Увеличить a_{ijh} (чистую полезность жилища типа j) для (i, h)-агента g можно, субсидируя этого агента при условии его перемещения в жилище типа j (вследствие чего растет b_{gj}) или предоставляя ему льготы по фиксированным платежам (вследствие чего убывает q_{gj}). Таким образом, изменение a_{ijh} — это воздействие на рынок со стороны спроса.

Задача Регулятора — разработать программу жилищного строительства (распределить сумму K между типами жилищ) или программу жилищных субсидий (распределить сумму K между агентами рынка). Всякая регулирующая программа порождает новую рыночную ситуацию A_{reg}. Цель Регулятора — выбрать программу, максимизирующую число потребителей, занимающих приемлемые жилища в равновесиях для ситуации A_{reg}.

Пусть $D(h)$ — множество типов жилищ, приемлемых для потребителей группы h. Тогда $W = \{(i, j, h) \in U \mid j \in D(h)\}$ — множество приемлемых перемещений (множество U введено в разделе 4). Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\max \textstyle\sum_{(i,j,h)\in W} x_{ijh} \quad \text{при условиях} \tag{40}$$

$$\textstyle\sum_{i,h} x_{ijh} \le C_j, \tag{41}$$

$$\textstyle\sum_j x_{ijh} = D_{hi}, \quad f(x) \ge f_0, \quad x \ge 0, \tag{42}$$

где $f(x)$ — целевая функция задачи АТ(A_0), а f_0 — оптимальное значение целевой функции в этой задаче.

Многогранник задачи (40)–(42) есть оптимальная грань многогранника задачи АТ(A_0). Поэтому всякое базисное оптимальное решение задачи (40)–(42) является базисным оптимальным решением задачи АТ(A_0) и, следовательно, определяет равновесие $e_{\max}$, в котором число агентов, занимающих приемлемые жилища, максимально. Аналогично можно найти наихудшее (по степени достижения цели) равновесие $e_{\min}$.

6.2. Регулирование рынка со стороны предложения

Местные власти могут стимулировать жилищное строительство и/или непосредственно его финансировать. Стимулирование, направленное на снижение затрат производителя (налоговые льготы) или на привлечение инвестиций (страхование ипотечных кредитов) дает долгосрочные эффекты, которые, к сожалению, мы не можем учесть в рамках рассматриваемой модели. Поэтому будем предполагать, что власти разрабатывают программу жилищного строительства и намерены вложить в нее сумму K.

Пусть N — множество всех пар (i, h), таких что некоторые (i, h)-агенты в прогнозном равновесии e_0 занимают социально неприемлемые жилища. Тогда множество *целевых агентов* (потребителей, которым должна помочь разрабатываемая программа) имеет вид $\cup_{(i,h)\in N} G(h, i)$.

Каждое *программное жилище* порождает, как показано в разделе 5, цепь перемещений. Она полезна для достижения цели Регулятора, если включает перемещение целевого потребителя в приемлемое жилище. Полезная цепь может включать перемещения нецелевых агентов, если эти перемещения освобождают жилища, приемлемые для целевых агентов. Легко выяснить, какие типы жилищ приемлемы для целевых агентов по нормативам. Однако строительство жилищ других типов тоже может быть целесообразным.

Сравнивая равновесия, полученные максимизацией и минимизацией функции $\sum_{(i,j,h)\in N} \sum_{(i,j,h)\in D} x_{ijh}$ при ограничениях (41) и (42) (раздел 6.1), мы узнаем за какие жилища конкурируют целевые и нецелевые агенты. Такие жилища целесообразно строить. Оценки ограничений (41) указывают относительную полезность типов жилищ для достижения цели программы в наилучшем равновесии: нужно строить жилища тех типов, для которых оценки положительны. Однако это рассуждение, во-первых, справедливо только в области постоянства двойственных оценок, которую легко описать (см., например, Гдалевич, 1975, с. 35), и, во-вторых, не указывает, сколько жилищ каждого типа следует построить.

С другой стороны, для всякой фиксированной программы можно решить задачу AT(A_{reg}), найти оптимальное значение f_0 ее целевой функции и с помощью задачи, аналогичной задаче (40)–(42), определить $e_{\max}^{\text{reg}}$ и $e_{\min}^{\text{reg}}$: наилучшее и наихудшее с точки зрения Регулятора равновесия для ситуации A_{reg}. Сравнивая эти равновесия, можно оценить рассматриваемую программу. Таким образом, варьируя компоненты вектора C, можно эмпирически выбрать рациональную программу жилищного строительства.

Перейдем теперь к описанию задачи, находящей целесообразное распределение суммы K между типами жилищ в произвольной (прогнозируемой) рыночной ситуации.

Пусть I — множество типов жилищ в прогнозируемой ситуации A_0, IP — множество типов жилищ, строительство которых Регулятор считает возможным в рамках программы (*программные типы*), $J = I \cup IP$ — множество типов жилищ в ситуации A_{reg}, порожденной программой. Заметим, что в ситуации A_{reg} число жилищ типа $i\in IP \setminus I$ может быть нулем (если окажется, что строительство таких жилищ нецелесообразно).

В отношении программного жилища Регулятор играет роль владельца-поставщика (поэтому все жилища программных типов принадлежат поставщикам). Регулятор задает отправную цену программного жилища, которая может быть меньше, равна или больше потокового эквивалента затрат на строительство.

Рассуждения разделов 2.2 и 3 показывают, что состав цепи, порожденной программным жилищем, зависит от порядка, в котором агенты выходят на рынок. При свободном доступе к программному жилищу целевой агент может проиграть конкуренцию или конкурентоспособный агент может не получить это жилище, если другой агент его опередит. Тогда программа будет обеспечивать жилищами более богатых или более активных агентов.

Отсюда возникает естественное ограничение: доступ к жилищам, построенным за счет бюджета, имеют только целевые агенты (что не исключает стимулирование строительства жилищ, предназначенных для других потребителей). Обычное правило таково: доступ к непрограммным жилищам свободен; к программному жилищу имеют доступ только те целевые агенты, для которых это жилище соответствует социально гарантированному минимуму.

Правила доступа к однотипным существующим и программным жилищам могут различаться. В таком случае нужно объединить программные жилища в новый тип. Заметим, что в задаче АТС (раздел 4) запрет на доступ (i, h)-агентов к жилищам типа j можно отразить двумя эквивалентными способами. Во-первых, можно просто не вводить переменную X_{ijh}. Во-вторых, можно "подавить" эту переменную малым значением b_{ijh} (полагая, например, что (i, h)-агент g, желающий обойти правила доступа, должен дать взятку, вследствие чего фиксированный платеж q_{gj} очень велик). Следовательно, задача АТС порождает стандартные равновесия и при ограничениях на доступ некоторых агентов (например, богатых) к некоторым жилищам (например, входящим в социальный жилой фонд).

Пусть GC — множество групп потребителей в ситуации A_0 (и в ситуации A_{reg}). Опишем правила доступа множеством V троек $(i, j, h) \in J^2 \times \text{GC}$, таких что ($i$, h)-агенты имеют доступ к жилищам типа j. Будем считать, что во множество V входят тройки (i, 0, h) и (i, i, h) для всех $(i, h) \in J \times \text{GC}$ (потребитель имеет доступ к фиктивному жилищу и к исходно занятому им жилищу).

Предположение $(i, i, h) \in V$ оправдано тем, что жесткие правила доступа действуют обычно только при предоставлении принадлежащего государству или субсидируемого государством жилья. Изменение характеристик (увеличение дохода, изменение численности и т.д.)

домохозяйства, которому жилище уже предоставлено, может привести к увеличению текущих фиксированных затрат (например, на коммунальные услуги), но не к выселению.

Введем вектор $y = (y_i \mid i \in J)$, где y_i — переменная при $i \in IP$ и $y_i = 0$ при $i \notin IP$ (y_i — число программных жилищ типа i). Пусть $a_i > 0$ — бюджетные затраты, связанные со строительством жилища типа i. Задача регулирования рынка жилья со стороны предложения (ЗРП) с переменными y и $x = (x_{ijh} \mid (i, j, h) \in V)$ имеет вид

$$\max \textstyle\sum_{i,j,h} b_{ijh}\, x_{ijh} \quad \text{при условиях} \tag{43}$$

$$\textstyle\sum_j x_{ijh} = D_{hi}, \tag{44}$$

$$\textstyle\sum_{i,h} x_{ijh} \le C_j + y_j, \quad (C_0 \text{ достаточно велико}), \tag{45}$$

$$\textstyle\sum_i a_i\, y_i \le K, \quad (\text{бюджетное ограничение}), \tag{46}$$

$$x \ge 0, \quad y \ge 0, \tag{47}$$

$$y \text{ — целочисленный вектор.} \tag{48}$$

Здесь D_{hi} — число (i, h)-агентов и C_j — число жилищ типа j в ситуации A_0.

Вектор y, удовлетворяющий условиям (46)–(48), порождает рыночную ситуацию $A_{\text{reg}} = A(y)$, которая отличается от ситуации A_0 только числами свободных жилищ типов $i \in IP$ с ограниченным, возможно, доступом. Правая часть ограничения (45) выражает число жилищ типа j в ситуации $A(y)$. Величины $a_i\, y_i$ указывают распределение средств между типами жилищ. Вектор x с учетом Предположения 9 описывает размещение.

Пусть (x^1, y^1) — оптимальное решение ЗРП. Подставляя значения y_j^1 в задачу (43)–(45), (47), мы получим задачу АТС для ситуации $A(y^1)$. Понятно, что x^1 можно заменить любым оптимальным решением этой задачи. Из Теоремы 10 следует, что всякое целочисленное (например, базисное) оптимальное решение задачи АТС для ситуации $A(y^1)$ определяет размещение, соответствующее некоторому стандартному равновесию для этой ситуации.

Таким образом, решая ЗРП, можно найти y^1 и затем анализировать равновесия, возможные в ситуации $A(y^1)$, по критерию (40), как описано в разделе 6.1.

ЗРП описывает разумный подход к формированию программы муниципального жилищного строительства: целевые агенты могут выбирать жилище как на свободном рынке, так и среди программных жилищ (за которые они конкурируют между собой), а прочие могут улучшить свое положение вследствие снижения цен и/или освобождения жилищ. Потребность в программных жилищах, как правило, превышает предложение, и их занимают те целевые агенты, которые готовы больше платить (самые богатые среди бедных).

Заметим, что ЗРП не минимизирует затраты. В оптимальном решении ЗРП при $y_j > 0$ ограничение (45) может быть не натянуто. "Лишние" жилища нужно, конечно, исключить из программы. Такие жилища не возникнут, если после решения ЗРП найти "правильное" значение K_0 бюджета программы и вновь решить ЗРП, заменив K на K_0.

Величину K_0 можно найти, решая следующую задачу: min K при условиях (44)–(48) и $f(x) \geq f_0$, где $f(x)$ и f_0 соответственно — целевая функция (43) и оптимальное значение этой функции в ЗРП с первоначальным бюджетом программы K. Понятно, что $K_0 \leq K$ и ЗРП с бюджетом K_0 самым экономным образом обеспечивает максимальное значение $f(x)$, возможное в рамках первоначального бюджета K.

Чем беднее потребитель, тем менее он чувствителен к качеству жилья. При низкой платежеспособности целевых агентов в равновесии, порожденном решением ЗРП, возможна следующая ситуация: некоторые целевые агенты остаются в неприемлемых жилищах и, одновременно, существуют пригодные для них свободные жилища или бюджет программы недоиспользован. В таком случае необходима программа субсидирования целевых агентов (раздел 6.3), стимулирующая их перемещения в приемлемые жилища.

6.3. Регулирование рынка со стороны спроса

Рассмотрим только один из возможных подходов к регулированию рынка жилья со стороны спроса: субсидирование потребителей. Его можно осуществлять в разных формах: доплачивать арендодателям, ограничивать квартплату в государственном секторе, выдавать потребителям жилищные купоны, ваучеры, сертификаты (США) или "жилищные деньги" (ФРГ); см. (Жилищная экономика, 1996, с. 189–195; Жилищная политика…, 1998, с. 41, 42, 100).

Разработчик программы субсидирования потребителей должен решить: кого, в каком размере и с какой целью субсидировать. Главная цель субсидирования, как правило, — обеспечение социально приемлемым жильем тех, кто без субсидии не способен купить или арендовать такое жилье. Побочным результатом и, часто, одной из целей программы является предотвращение сокращения жилого фонда.

Рассмотрим прогнозное равновесие e_0 (раздел 6.1). Учитывая Лемму 3, можно считать, что жилище i, свободное в этом равновесии, имеет соизмеримую цену равновесия $\psi_{g(i)i}$ при $g(i)\in G_2$ и нуль при $g(i)\in G_1$. (Нулевая цена не означает, что потребитель h может получить жилище бесплатно: он должен оплатить фиксированные затраты q_{hi}.) Возможные стратегии владельца пустующего жилища — консервация, конверсия и отказ от жилища. Жилище будет изъято из обращения, в последних двух случаях — навсегда. Хуже того, отказ от жилища может вызвать "цепную реакцию" таких отказов, вследствие чего городской район может превратиться в трущобы (Жилищная экономика, 1996, с. 120–123).

В то же время некоторые из свободных в e_0 жилищ, возможно, соответствуют гигиеническим нормам и могут предоставить социально приемлемые условия малообеспеченным семьям при минимальных субсидиях. Следовательно, разработчик программы должен прежде всего обратить внимание на вытесняемых (в неприемлемые жилища) потребителей и не имеющие спроса жилища. Таких потребителей и такие жилища можно выявить, анализируя e_0, а также наилучшее и наихудшее по социальному критерию равновесия $e_{\max}$ и $e_{\min}$ (раздел 6.1).

Предположение 11. *Субсидия типа* (i, j, h) (или (i, j, h)-*субсидия*) предоставляется (i, h)-агенту при условии, что он выберет жилище типа j.

Пусть δ_{ijh} — размер (i, j, h)-субсидии, GC и GS — множества групп потребителей и поставщиков соответственно в ситуации A_0. Для $h\in$GC естественно предположить, что $\delta_{ijh} = 0$, если $j\notin D(h)$, и $\delta_{i0h} = 0$ для всех i (перемещения в неприемлемые жилища и за пределы рассматриваемого рынка не субсидируются). Если $h\in$GS, то (0, h)-агент (поставщик группы h) может выбрать жилище типа 0 или $\tau(h)$. Предположим, что $\delta_{0\tau(h)h} = 0$ (уход поставщика с рынка не стимулируется).

Субсидия типа (0, 0, h), обусловленная снижением отправной цены принадлежащего агенту жилища на размер субсидии, имеет смысл. Но для упрощения дальнейших рассуждений можно положить $\delta_{00h} = 0$ при $h\in$GS. Это предположение не ограничительное. Вместо субсидии поставщику группы h можно дать равноценную (i, $\tau(h)$, g)-субсидию потребителю $g\in$GC. Для получения этой субсидии потребитель должен будет выбрать жилище типа $\tau(h)$ и, следовательно, "передать" субсидию поставщику группы h. В терминах задачи АТС (0, 0, h)-субсидия при $h\in$GS уменьшает $\psi_{0\tau(h)h}$ и, значит, увеличивает $b_{i\tau(h)g}$ для всех i и $g\in$GC.

Правила доступа агентов к жилищам опишем множеством V троек (i, j, h)$\in I^2\times$GC. Как и в разделе 6.2, будем считать, что множество V

включает тройки $(i, 0, h)$ и (i, i, h) для всех $(i, h) \in I \times$GC. С учетом сделанных допущений будем считать, что для каждого $t = (i, j, h) \in V$ Регулятор определяет размер t-субсидии $\delta_t \geq 0$ и число t-субсидий.

Заселение пустующих жилищ вытесняемыми агентами — самый естественный вариант программы. Однако возможны и более сложные варианты. Допустим, что $i \in D(h) \setminus D(g)$, $j \in D(h) \cap D(g)$, в равновесии e_0 (i, h)-агент A выбирает жилище типа j (потому что жилище типа i для него слишком дорогое), а (k, g)-агент B выбирает неприемлемое жилище. Агенту A можно дать (i, i, h)-субсидию (чтобы он остался в исходном жилище), а агенту B — (k, j, g)-субсидию, т.е. можно ослабить агента A и поддержать агента B в конкуренции за жилище j. Но, во-первых, за это жилище могут конкурировать и другие агенты, во-вторых, жилище i может быть приемлемо для других целевых агентов. Поэтому нужна модель для анализа последствий описанной или другой предлагаемой политики.

Равновесие e_0 соответствует некоторым оптимальным решениям x и (γ, π) задач АТ и АТ*. Повторяя рассуждения Леммы 4, легко доказать, что $\gamma_{ih} \geq 0$. Тройка (x, γ, π) дает важную (но, к сожалению, не полную) информацию для определения величин δ_{ijh}. Пусть $(i, j, h) \in V$, $x_{ikh} > 0$ (некоторые (i, h)-агенты выбирают жилища типа k) и $j \neq k$. Тогда (см. ограничения задачи АТ*) $\gamma_{ih} + \pi_k = a_{ikh}$ и $\gamma_{ih} + \pi_j \geq a_{ijh}$. Минимальный размер субсидии, при котором (i, h)-агент g, возможно, выберет j, равен $\gamma_{ih} + \pi_j - a_{ijh} = \gamma_{ih} + (\pi_j + q_{gj}) - b_{gj} \geq 0$, где b_{gj} — отправная цена агента g на жилище типа j, а выражение в скобках — полная годовая стоимость жилища j для агента g. Например, если речь идет об арендном жилище типа j, $\gamma_{ih} = 0$ и b_{gj} не превышает 30% от w_g, то мы получаем известный принцип:

Субсидия =
= Фактическая квартплата (за стандартное жилье) – 0,3×Доход

(Жилищная экономика, 1996, с. 190, 191). Заметим, что в России "собственные расходы граждан, имеющих совокупный доход семьи на одного человека, не превышающий установленный прожиточный минимум, на оплату жилья и коммунальных услуг в пределах социальной нормы площади жилья и нормативов потребления коммунальных услуг не должны превышать половину установленного федеральным законом минимального размера оплаты труда" (Закон Российской Федерации "Об основах федеральной жилищной политики" в редакции Федеральных законов от 12.01.96 № 9-ФЗ, от 21.04.97 № 68-ФЗ, от 10.02.99 № 29-ФЗ, от 17.06.99 № 113-ФЗ).

С другой стороны, $\delta_{ijh} \geq \gamma_{ih} + \pi_j - a_{ijh} = (a_{ikh} - \pi_k) - (a_{ijh} - \pi_j)$, т.е. (i, j, h)-субсидия должна обеспечить агенту при выборе j полезность, не меньшую, чем при выборе k. На самом деле для (i, h)-агента (i, j, h)-субсидия должна сделать j более полезным, чем k, чтобы он "почувствовал разницу": $\delta_{ijh} = \gamma_{ih} + \pi_j - a_{ijh} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. В частности, если $x_{ijh} > 0$, то для (i, h)-агентов жилища типа j доступны без субсидирования и равноценны жилищам типа k. Тогда (i, j, h)-субсидия минимальна $(\delta_{ijh} = \varepsilon)$; она полезна, если $k \notin D(h)$, или есть свободные жилища типа j, или жилища типа k "нужны" для других агентов.

Рассмотрим частный случай, в котором удается обосновать величину субсидии. Предположим, что $\psi_{aj} \geq \psi_{bj}$ для всех j, $a \in G(h, i)$, $b \in G(g, i)$ (при равных фиксированных платежах это верно, если, например, агенты групп h и g имеют одинаковые предпочтения, но доход агентов группы g меньше). Пусть γ — вектор оценок ограничений $\sum_j x_{ijh} = D_{hi}$ в задаче (40) – (42). Если $\gamma_{ih} > \gamma_{ig}$, то "перевод" (i, g)-агента в группу h увеличит максимум социального критерия (40) на $\gamma_{ih} - \gamma_{ig}$. Полагая $\delta_{ijg} = \psi_{aj} - \psi_{bj}$ (разность не зависит от a и b; см. раздел 4) для всех j, мы осуществим такой "перевод".

Заметим также, что если ограничение (41) не натянуто в задаче АТ для ситуации A_0 и имеет положительную оценку в задаче (40) − (42), то (i, j, h)-субсидия может быть целесообразной.

Таким образом, можно оценить целесообразность субсидирования некоторых перемещений и размеры некоторых субсидий и, используя эту информацию, сформировать программу субсидирования. Предположим, что значения δ_t (возможно, нулевые) и число t-субсидий определены для всех $t \in V$. Для всех $(i, j, h) \in V$ объединим (i, h)-агентов, получивших (i, j, h)-субсидию, в одну группу. По Предположению 11 в новой рыночной ситуации A_{reg} чистая полезность жилища типа j для потребителя, получившего (i, j, h)-субсидию (соответствует параметру a_{ijh} в ситуации A_0), равна $a_{ijh} + \delta_{ijh}$.

Теперь можно построить задачу АТ(A_{reg}), найти оптимальное значение f_0 ее целевой функции и, с помощью задачи, аналогичной задаче (40)−(42), определить $e^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{max}}$ и $e^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{min}}$: наилучшее и наихудшее, с точки зрения Регулятора, равновесия для ситуации A_{reg}. Сравнивая эти равновесия, можно оценить рассматриваемую программу. Таким образом, варьируя размеры и число субсидий, можно эмпирически выбрать рациональную программу жилищных субсидий. Перейдем к описанию модели, позволяющей выбрать число субсидий каждого типа при заданных значениях δ_t для всех $t \in V$.

Пусть $g \in G(h, i)$, $k \in I(j)$. Прямое субсидирование покупки или аренды (i, h)-агентами жилищ типа j увеличивает b_{gk}, косвенное субсидирование посредством выплат владельцам таких жилищ уменьшает q_{gk} (если q_{gk} включает некоторые затраты владельца) и/или $\psi_{g(k)k}$. В любом случае b_{ijh} в целевой функции задачи АТС возрастает на δ_{ijh}.

Критерием выбора программы субсидирования будем считать суммарную чистую полезность субсидируемых жилищ для получателей субсидий (в том числе нулевых). Пусть y_t — число предоставляемых t-субсидий (переменная), $y = (y_t \mid t \in V)$. Задача регулирования рынка со стороны спроса (ЗРС), которая определяет наилучшую (по выбранному критерию) программу субсидирования y, имеет вид

$$\max \textstyle\sum_{t\in V} (b_t + \delta_t)\, y_t \quad \text{при условиях}$$

$$\textstyle\sum_j y_{ijh} = D_{hi}, \quad \sum_{i,h} y_{ijh} \le C_j; \quad \sum_t \delta_t\, y_t \le K, \quad y_t \ge 0, \text{ целые.} \tag{49}$$

При условиях (49) число субсидий, выделенных $(i,\ h)$-агентам, не превышает число таких агентов; число субсидий, обусловленных перемещениями в жилища типа j, не превышает число таких жилищ; бюджетное ограничение выполнено.

Положим $U_0 = \{t \mid \delta_t > 0\}$. Допустим, что программа y принята и субсидируемые агенты определены (но $(i,\ h)$-агент получит свою $(i,\ j,\ h)$-субсидию, только если выберет жилище типа j). Возникает новая рыночная ситуация $A_{\text{reg}} = A(y)$. В этой ситуации y_t потенциальных получателей t-субсидии образуют новую *t-группу* потребителей, если $t \in U_0$; (i, h)-агенты, не получившие субсидии, для каждого $t = (i, j, h) \notin U_0$ образуют *t-подгруппу* группы h, состоящую из y_t потенциальных "получателей" нулевой $(i,\ j,\ h)$-субсидии. Заметим, что $(i,\ h)$-агент, которому предназначена ненулевая $(i,\ j,\ h)$-субсидия, может, тем не менее, выбрать жилище типа $k \ne j$.

Чистую полезность $a_t(k)$ жилища типа k для членов t-группы или t-подгруппы (*t-агентов*) определим следующим образом: если $t = (i,\ j,\ h)$, то $a_t(k) = b_{ikh}$ для $k \ne j$ и $a_t(j) = b_t + \delta_t$ (субсидия типа $(i,\ j,\ h)$ увеличивает на δ_{ijh} полезность жилищ типа j и не меняет полезности других жилищ для $(i,\ h)$-агентов). Положим $W(i,\ h) = \{(i, j, h) \mid \delta_{ijh} = 0\}$.

Задача АТС для ситуации $A(y)$ имеет вид

$$\max \textstyle\sum_{t,k} a_t(k)\ x_t(k) \quad \text{при условиях} \tag{50}$$

$$\textstyle\sum_k \sum_{(i,j,h)\in W(i,h)} x_{ijh}(k) = \sum_k \sum_{(i,k,h)\in W(i,h)} y_{ikh}, \tag{51}$$

$$\textstyle\sum_k x_t(k) = y_t \quad \text{для } t \in U_0, \tag{52}$$

$$\textstyle\sum_t x_t(k) \le C_k, \quad x_t(k) \ge 0, \tag{53}$$

где $x_t(k)$ — число t-агентов, выбирающих жилища типа k.

Условие (51) соответствует ограничению (38) для группы, состоящей из t-подгрупп, входящих во множество $W(i,\ h)$: число агентов в этой группе должно быть равно числу выбранных ими жилищ. Условие (52) соответствует ограничению (38) для t-группы.

Размещение, которое возникло бы в результате реализации плана y, опишем вектором $x(y) = (x_t(k, y) \mid t \in V, k \in I)$: $x_{ijh}(j, y) = y_{ijh}$, $x_{ijh}(k, y) = 0$ при $k \neq j$ (для каждого t все t-агенты воспользовались t-субсидиями).

Теорема 15. Пусть y — оптимальное решение ЗРС. Тогда $x(y)$ — оптимальное решение задачи (50)–(53). С учетом Предположения 11 $x(y)$ описывает равновесное размещение для ситуации $A(y)$.

Таким образом, ЗРС определяет и рациональную программу субсидирования, и одно из тех равновесий, которые могут возникнуть в случае реализации этой программы.

6.4. Заключительные замечания

Добровольность выбора. Рассуждения разделов 6.2 и 6.3 показывают, что всякому оптимальному решению ЗРП или ЗРС соответствует некоторое стандартное равновесие e_{reg} на рассматриваемом рынке. Предположим, что вследствие реализации жилищной программы возникло равновесие e. Добровольность выбора агентов рынка ограничена только правилами доступа, и множественность равновесий не позволяет, вообще говоря, утверждать, что $e = e_{\text{reg}}$. Однако в равновесии e нецелевые агенты не занимают программные жилища (вследствие ограничений доступа), и (i, j, h)-субсидия предоставлена агенту, только если он выбрал приемлемое жилище типа j.

Из Теоремы 2 следует, что любая система цен равновесия уравновешивает любое равновесное размещение. Поэтому жилище, которое целевой агент занял бы в e_{reg}, будет для него наилучшим (возможно, не единственным) и в e. Представляется очевидным, что, сочетая строительство программных жилищ, субсидирование и пропаганду, можно обеспечить хорошее приближение к одному из равновесий e_{reg}.

Вариант целевой функции Регулятора. Мы рассматривали линейную по переменным задачи АТ целевую функцию Регулятора. Аналогичным образом можно анализировать целевую функцию R, линейную по переменным γ и π задачи АТ* (например, сумму цен на жилища некоторых типов). В частности, если Q — многогранник задачи АТ*, то $Q_0 = \{(\gamma, \pi) \in Q \mid \sum_{h,n} D_{hn}\, \gamma_{hn} + \sum_k C_k\, \pi_k \leq f_0\}$ — оптимальная грань этого многогранника. Поэтому Регулятор может сравнить максимум и минимум функции R по всем системам цен равновесия, решая соответствующие задачи линейного программирования на Q_0.

Согласование жилищных программ. Регулирование рынка со стороны предложения посредством строительства муниципальных жилищ без субсидирования потребителей целесообразно, если существует платежеспособный спрос целевых потребителей на эти жилища при ценах, окупающих затраты. Несоблюдение этого условия приводит "к строительству в некоторых регионах избыточного числа новых квартир, предлагаемых муниципалитетами для продажи, при наличии... групп населения, остро нуждающихся в жилье" (Жилищная политика..., 1998, с. 210).

С другой стороны, субсидирование потребителей, не поддержанное программой жилищного строительства, имеет смысл, если на рынке есть достаточное количество свободных или освобождающихся (выбывающих) жилищ. В противном случае либо субсидии не будут востребованы, либо цены на жилища, приемлемые для целевых потребителей, возрастут. Следовательно, нужна единая программа регулирования рынка. Объединение ЗРП и ЗРС позволит построить, возможно, модель для выбора такой программы.

Государственный сектор. Говоря о бюджетном финансировании жилищных программ, мы, в сущности, вводим в исходную модель рынка сектор государственных жилищ с ограниченным доступом и регулируемыми ценами. Регулирование цен в государственном секторе — одна из форм субсидирования. Местные власти могут устанавливать разные цены для разных групп потребителей.

Финансирование жилищных программ. При рассмотренных нами подходах к регулированию рынка жилья затраты на регулирование (величина K в задачах ЗРП и ЗРС) покрываются в значительной степени из бюджета. В развитых странах обычно центральный бюджет субсидирует местные бюджеты для осуществления локальных жилищных программ (Бессонова, 1993, с. 57, 139).

Российская государственная программа "Жилище" (утвержденная Постановлением Совета Министров — Правительства РФ от 20 июня 1993 г. № 595) указывает следующие источники средств для создания жилищного фонда социального использования и выплаты субсидий. Федеральные источники — это бюджетные средства, гарантированные государством кредиты, средства Государственного фонда занятости (организация общественных работ в жилищной сфере), доля федеральных экспортных квот и т.д. Местные источники включают в себя налог на прибыль от продажи жилья, долю налога на недвижимость, часть прибыли от продажи местными органами власти подготовленных участков для строительства.

При последующей переработке программы (Основные направления нового этапа реализации государственной целевой программы "Жилище"; утверждены Указом Президента РФ от 29.03.96 № 431) участие федерального бюджета в финансировании локальных жилищных программ было существенно уменьшено. В частности, предприятия и учреждения, в управлении которых находится муниципальный жилищный фонд, должны предоставлять жилищные субсидии гражданам за счет собственных средств. В качестве дополнительных источников финансирования, помимо прочего, указаны средства от продажи на коммерческих аукционах части построенного жилья и прибыль от муниципальных доходных домов.

Для компенсаций на оплату жилья и коммунальных услуг можно использовать часть доходов, получаемых при повышении платежей за жилье и коммунальные услуги (Положение о порядке предоставления гражданам компенсаций (субсидий) на оплату жилья и коммунальных услуг; утверждено постановлением Правительства РФ от 18.06.96 № 707). Следовательно, местные власти могут финансировать "затратные" жилищные программы за счет *прибыльных* программ или мероприятий.

Продавая на свободном рынке жилища из муниципального фонда, местные власти играют роль поставщика, максимизирующего прибыль. Задача АТ позволяет подобрать максимальные отправные цены продавца, при которых жилища будут проданы. Если муниципалитет финансирует строительство жилищ для продажи на свободном рынке, то распределить средства между типами жилищ можно, применяя ЗРП с неограниченным доступом ($V = I^2 \times H$).

Во многих городах часть возводимого частными инвесторами жилья безвозмездно поступает в распоряжение властей. Такое правило действует, например, в Санкт-Петербурге (Жилье, 1998, с. 53), а также в Новосибирске, где мэрия получает бесплатно 5% нового жилья (Смородинов, 1999). Прогнозируемый объем частного жилищного строительства определяет общую площадь S жилья, которое поступит в распоряжение местных властей. Эту общую площадь можно распределить между типами жилищ с помощью ЗРП, измеряя затраты на регулирование не деньгами, а площадью жилищ (считая, что a_i — площадь одного жилища типа i и $K = S$).

Развивая подход, предложенный в работе (Gustafsson *et al.*, 1980, с. 88, 89), можно использовать двойственные оценки для "отрицательного субсидирования" некоторых сделок на рынке жилья. Пусть x и (γ, π) — оптимальные решения задач АТ и АТ*, определяющие равновесие e_0 для ситуации A_0. Допустим, что в этом равновесии некоторые (i, h)-агенты выбирают жилища типа j и имеют при этом положительный потребительский излишек: $\gamma_{ih} = a_{ijh} - \pi_j > 0$. Зафиксируем δ так, что $0 < \delta < \gamma_{ih}$. Пусть $J(i, h) = \{k \in I \mid \gamma_{ih} = a_{ikh} - \pi_k\}$ — множество типов жилищ, равноценных j для (i, h)-агентов при ценах $p = r(\pi)$ (раздел 1.1). Положим $\alpha_{ikh} = a_{ikh} - \delta$ при $k \in J(i, h)$, $\beta = (\beta_{kg} \mid (k, g) \in I \times H)$, где $\beta_{ih} = \gamma_{ih} - \delta$ и $\beta_{kg} = \gamma_{kg}$ при $(k, g) \neq (i, h)$.

Легко видеть, что x и (β, p) — оптимальные решения задач АТ и АТ* для ситуации B, полученной из A_0 заменой a_{ikh} на α_{ikh} для $k \in J(i, h)$. Другими словами, если уменьшить a_{ikh} на δ для всех $k \in J(i, h)$, то (i, h)-агенты не изменят свой выбор, и в новом равновесии размещение и цены будут такими же, как в равновесии e_0. При этом с каждой сделки, соответствующей тройке (i, k, h), $k \in J(i, h)$, местные власти смогут получить в бюджет годовой доход δ для финансирования жилищных программ. Достаточно ввести для всех (i, h)-агентов дополнительный фиксированный платеж за жилища типов $k \in J(i, h)$. Это может быть либо ежегодная выплата δ, либо единовременный платеж $\delta \rho^{-1}$.

Таким образом, предложенные нами модели могут быть полезны при разработке прибыльных программ и мероприятий в жилищной сфере.

Для упрощения анализа можно предполагать, что прибыльные и затратные программы разделены во времени: прибыль, полученная местным бюджетом в текущем периоде, вкладывается в затратные программы следующего периода; местные власти накапливают средства, а потом их тратят.

Приближенное решение ЗРП и ЗРС. Формально ЗРП и ЗРС — это задачи целочисленного линейного программирования транспортного типа с одним "рюкзачным" ограничением. Они NP-полны: к каждой из них сводится задача "целочисленный рюкзак" (Papadimitriou, Steiglitz, 1982, Section 15.7). Следовательно, решение этих задач при реальных размерностях очень трудоемко.

Нами предложен метод приближенного решения ЗРП (подробное изложение этого метода содержится в работе (Khutoretsky, 2001)).

Идея метода заключается в анализе нецелых компонент произвольного базисного допустимого решения (x, y) линейной релаксации ЗРП (которую мы обозначим ЗРПЛ). Оказывается, что эти компоненты порождают структуру, которую мы назвали *маршрутом*. Маршрут состоит из *звеньев* (i, j, h), таких что x_{ijh} — не целое число. Звено (i, j, h) имеет *начало* i, *источник* (i, h) и *конец* j. *Соседние* звенья маршрута *соединены* источником, началом или концом. Следовательно, можно различать *прямые* и *обратные* звенья. Начала и концы звеньев являются в*ершинами* маршрута.

Маршрут μ, порожденный нецелыми компонентами вектора x, не замкнут. В векторе y нецелыми могут быть только компоненты, соответствующие крайним вершинам маршрута μ.

Допустимое решение (x, y) задачи ЗРПЛ назовем *экономным*, если для любого i либо $y_i = 0$, либо соответствующее ограничение (45) натянуто (неиспользуемые жилища не финансируются). По каждому базисному оптимальному решению задачи ЗРПЛ можно построить ее экономное базисное оптимальное решение.

Учитывая перечисленные результаты, будем считать, что (x, y) — оптимальное экономное базисное нецелочисленное решение ЗРПЛ и μ — порожденный этим решением маршрут. Оказывается, дробные части компонент вектора x, соответствующих одинаково ориентированным (прямым или обратным) звеньям, совпадают, а сумма дробных частей компонент, соответствующих двум противоположно ориентированным звеньям, равна единице.

Кроме того, дробные части нецелых компонент векторов x и y согласованы таким образом, что решение (x, y) удается "правильно округлить" вдоль маршрута μ. В результате получается оптимальное решение ЗРПЛ, в которой правая часть ограничения (46) заменена некоторым числом K_1. При этом $|K_1 - K| \le 0{,}5 \max\{a_i, a_j\}$, где i и j — крайние вершины маршрута μ, т.е. K_1 отличается от K не более, чем на половину стоимости одного из финансируемых жилищ. Понятно, что оптимальное решение ЗРПЛ, если оно целочисленное, является оптимальным решением ЗРП с такой же правой частью ограничения (46). Таким образом, метод позволяет найти решение для ЗРП с немного измененным бюджетом программы. Можно предполагать, что такая точность достаточна для экономических приложений (лимит K, как правило, задан не жестко).

Применяя описанный подход к ЗРС, мы рассматриваем ее линейную релаксацию ЗРСЛ. Положим $\varepsilon_{ijh} = \delta_{ijh} - \delta_{iih}$ для $i \ne j$. И опять всякое нецелочисленное базисное оптимальное решение y задачи ЗРСЛ можно "правильно округлить", так что получится целочисленное оптимальное решение y^1 задачи ЗРСЛ с немного измененными правыми частями ограничений. Для этого достаточно правую часть условия $\sum_t \delta_t y_t \le K$ заменить числом K_1, причем $|K_1 - K| \le \max\{\varepsilon_t \mid y_t > 0\}$, а правую часть одного из ограничений $\sum_{i,h} y_{ijh} \le C_j$ (скажем, C_k) увеличить на единицу. Ясно, что y^1 — оптимальное решение ЗРС с такими же правыми частями ограничений.

Вектор y^1 описывает рациональное распределение (в виде субсидий) суммы, отличающейся от K не более, чем на величину одной из субсидий. По y^1 можно построить равновесное размещение (Теорема 19) для гипотетической ситуации A_1, в которой есть одно дополнительное (по сравнению с ситуацией A_0) свободное жилище типа k. Этому размещению соответствует стандартное равновесие для ситуации A_1, возможное при политике субсидирования y^1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бессонова О.Э. (1993) *Жилье: рынок и раздача* (Новосибирск: Наука).

Гдалевич С.С. (1975) *Вопросы прикладного использования двойственных оценок* (Москва: Наука).

Жилищная политика местных властей: *Уроки западноевропейского опыта и реформы в России* (1998) (Санкт-Петербург: Наука).

Жилищная экономика (1996) пер. с англ. под ред. Г. Поляковского (Москва: Дело).

Жилье (1998) Информационно-правовой сборник "*Ваше право*", № 1(7) (Санкт-Петербург: Петроцентр).

Смородинов В. (1999) Как мэрия строителей "построила", газета "*Честное слово*" № 26 (Новосибирск).

Abdulkadiroglu A., Sonmez T. (1998) Random serial dictatorship and the core from random endowments in house allocation problem, *Econometrica* **66**(3), 689–701.

Benassy J.P. (1975) Neo-keynesian disequilibrium in a monetary economy, *Review of Economic Studies* **42**, 503–523.

Bevia C., Quinzii M., Silva J.A. (1999) Buying several indivisible goods, *Mathematical Social Sciences* **37**, 1–23.

Cullingworth J.B. (1967) Housing and state: responsibility of authorities, in: *The economic problems of housing* (London: Macmillan Ed.; New York: St. Martin's Press).

Demange G., Gale D. (1985) The strategy structure of two-sided matching markets, *Econometrica* **53**, 873–888.

Donnison D.V. (1967) *The government of housing* (London: Penguin Books).

Drèze J. (1975) Existence of an equilibrium under price rigidity and quantity rationing, *International Economic Review* **16**, 301–320.

Elzen A.H. (1993) *Adjustment processes for exchange economies and noncooperative games* (Berlin: Springer-Verlag).

Gale D. (1960) *The theory of linear economic models* (New York: Mc Graw-Hill), (русский перевод: Гейл Д. (1963) *Теория экономических моделей* (Москва: Изд-во иностранной литературы)).

Gale D. (1984) Equilibrium in a discrete exchange economy with money, *International Journal of Game Theory* **13**, 61–64.

Grandmont J.-M., Laroque G., Younès Y. (1978) Equilibrium with quantity rationing and recontracting, *Journal of Economic Theory* **19**, 84–102.

Grandmont J.-M.(1993) Temporary general equilibrium theory, in: *Handbook of Mathematical Economics* **2**, K.J. Arrow, M.D. Intrilligator, eds. (Amsterdam: North-Holland).

Gustafsson J.R., Holm P., Harsman B., Snickars F. (1980) Housing policy and housing market models — some disaggregated analyses, *Document D16:1980* (Stockholm: Swedish Council for Building Research).

Hayek F.F. (1955) *The Counterrevolution of Science* (London: Collier-Macmillan).

Herbert J., Stevens B. (1960) A model for distribution of residential activity in urban areas, *Journal of Regional Science* **2**, 21–36.

Kaneko M. (1976) Note on transferable utility, *International Journal of Game Theory* **5**, 183–185.

Kaneko M. (1983) Housing markets with indivisibilities, *Journal of Urban Economics* **13**, 22–50.

Khutoretsky A.B. (1999) Housing market short-term equilibria maximizing linear utility functions, *Journal of Mathematical Economics* **32**, 355–364.

Khutoretsky A.B. (2001) The generalized assignment problem and short-term regulation of housing market, *Annals of Operations Research*, in press.

Laroque G., Polemarchakis H. (1978) On the structure of the set of fixed price equilibria, *Journal of Mathematical Economics* **5**, 53–70.

MacRae C.D. (1982) Urban housing with discrete structures, *Journal of Urban Economics* **11**, 131–147.

Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J.R. (1995) *Microeconomic Theory* (New York: Oxford Univ).

Minieka E. (1978) *Optimization Algorithms for Networks and Graphs* (New York: Marcel Dekker, Inc.), (русский перевод: Майника Э. (1981) *Алгоритмы оптимизации на сетях и графах* (Москва: Мир)).

Papadimitriou C.H., Steiglitz K. (1982) *Combinatorial optimization: algorithms and complexity* (Englewood Cliffs: Prentice-Hall), (русский перевод: Пападимитриу Х., Стайглиц К. (1985) *Комбинаторная оптимизация: Алгоритмы и сложность* (Москва: Мир)).

Quinzii M. (1984) Core and competitive equilibria with indivisibilities, *International Journal of Game Theory* **13**, 41–60.

Roth A.E., Postlewaite A. (1977) Weak versus strong domination in a market with indivisible goods, *Journal of Mathematical Economics* **4**, 131–137.

Rothenberg J., Galster G.C. (1991) *The maze of urban housing markets* (Chicago: Univ. of Chicago Press).

Schwödiauer G. (1978) Introduction: Economic equilibrium and disequilibrium from a dynamic point of view, in: *Equilibrium and disequilibrium in economic theory* (Dordrecht/Boston: D. Reidel Publishing Company) pp XI – XLVIII.

Shapley L.S., Shubic M. (1972) The assignment game I: The core, *International Journal of Game Theory* **1**, 111–130.

Shapley L.S., Scarf H. (1974) Cores and indivisibility, *Journal of Mathematical Economics* **1**, 23–38.

Svensson L.G. (1983) Large indivisibles: an analysis with respect to price and fairness, *Econometrica* **51**(4), 939–954.

Wiesmeth H. (1985) Fixprice equilibria in a rental housing market, in: *Microeconomic models of housing markets* (Berlin: Springer-Verlag) 72–118.

Yeates M., Garner B. (1976) *The North American city* (New York: Harper & Row Publ.).

Younès Y. (1975) On the role of money in the process of exchange and the existence of a non-walrasian equilibrium, *Review of Economic Studies* **42**, 489–501.

ДОПОЛНЕНИЕ [1]

Теорема 1. Если $g \in G_1$, то $b_{gi} = e_{gi} - e_{g0} + q_{g0}$ для всех i.

Доказательство. Условие (4) эквивалентно $\beta_{gi}(p) \le e_{gi} - e_{gd(g)}$, (5) эквивалентно $\beta_{gi}(p) \le w_g - y_g^0 - q_{gd(g)}$. Поэтому $\Delta b_{gi} = \min\{e_{gi} - e_{gd(g)}, w_g - y_g^0 - q_{gd(g)}\}$. Из (2) следует, что $\Delta b_{gi} = e_{gi} - e_{gd(g)}$. Тогда $b_{gi} = e_{gi} - e_{g0} + q_{g0}$ — единственное решение системы (6).

Q.E.D

.

Лемма 1. Условие (9) эквивалентно условию $\psi_{gj(z,g)} - \psi_{gi} \ge c(p_{j(z,g)}) - c(p_i)$ для всех g и $i \in J_g$.

Доказательство. Пусть $j = j(z, g)$. Условие (9) эквивалентно условию $v_{gj}(p) \ge v_{gi}(p)$ для всех g и $i \in J_g$. Теперь утверждение леммы легко следует из (1), Теоремы 1 и определения ψ_{gi}.

Q.E.D

.

Лемма 2. Пусть (z, p) — равновесие и $\pi = c(p)$. (a) Для всех g справедливо равенство $u_g(z) = w_g + \psi_{gj(z,g)} + \pi_{d(g)} - \pi_{j(z,g)}$; если $g \in G_2$, то $u_g(z) = w_g + \max\{\psi_{gd(g)}, \pi_{d(g)}\}$. (b) Если $g \in G_1$, то $y(z, g) \ge y_g^0$. (c) Если $g \in G_2$, то $\pi_{d(g)} \ge \psi_{gd(g)}$ при $d(g) \in \{j(z, h) \mid h \in G_1\}$, иначе $\psi_{gd(g)} \ge \pi_{d(g)}$.

Доказательство. Пусть (z, p) — равновесие и $\pi = c(p)$. Утверждение (a) очевидно. Допустим, что $g \in G_1$. Очевидно, что $y_{gi}(p)$ — монотонно убывающая функция от $\beta_{gi}(p)$. Поэтому $y_{gi}(p) \ge y_g^0$, если $\beta_{gi}(p) \le \Delta b_{gi}$. Тогда из $y_{gi}(p) < y_g^0$ следует $(c(p_i) + q_{gi}) - (c(p_{d(g)}) + q_{gd(g)}) > \Delta b_{gi} = b_{gi} - b_{gd(g)}$, откуда $\psi_{gi} - \psi_{gd(g)} < c(p_i) - c(p_{d(g)})$. Последнее неравенство при $i = j(z, g)$ противоречит (9) (Лемма 1), что доказывает утверждение (b). Чтобы доказать (c), возьмем $g \in G_2$. Если $d(g) \in \{j(z, h) \mid h \in G_1\}$, то $j(z, g) = 0$ по (8). Из Леммы 1 при $i = d(g)$, учитывая, что $\pi_0 = \psi_{g0} = 0$, получаем $0 \ge \psi_{gd(g)} - \pi_{d(g)}$. Если $d(g) \notin \{j(z, h) \mid h \in G_1\}$, то, по (10), либо $j(z, g) = d(g)$, либо $\pi_{d(g)} = 0$. Если $j(z, g) = d(g)$, то $\psi_{gd(g)} \ge \pi_{d(g)}$ следует из Леммы 1 при $i = 0$;

---

[1] Здесь приведены полные доказательства результатов, включенных в печатный текст публикации. Нумерация формул продолжена.

иначе $\psi_{gd(g)} \geq \pi_{d(g)}$, так как $\psi_{gd(g)} \geq 0$ для $g \in G_2$ по определению.

Q.E.D

.

Лемма 3. Пусть $p \in P$, $\pi = c(p)$ и векторы π^1, p^1 определены следующим образом: если $g(i) \in G_2$, то $\pi_i^1 = \max\{\pi_i, \psi_{g(i)i}\}$, иначе $\pi_i^1 = \pi_i$; $p_i^1 = r(\pi_i^1)$ для всех $i \in I$. Если (z, p) — равновесие, то (z, p^1) — тоже равновесие.

Доказательство. Пусть (z, p) — равновесие и $j = j(z, g)$. Допустим, что $g \in G_1$. Либо $g(j) \in G_2$ и $\pi_j \geq \psi_{g(j)j}$ по Лемме 2, либо $g(j) \in G_1$, либо $j = 0$; в любом случае $\pi_j^1 = \pi_j$. Применяя Лемму 1 к равновесию (z, p), получаем: $0 \leq (\psi_{gj} - \psi_{gi}) - (\pi_j - \pi_i) \leq (\psi_{gj} - \psi_{gi}) - (\pi_j^1 - \pi_i^1)$ для всех i. Пусть $g \in G_2$. Если $p_{d(g)}^1 = p_{d(g)}$, то $p_i^1 = p_i$ для всех $i \in J_g$, в частности, $\pi_j^1 = \pi_j$. Тогда, как в предыдущем случае, $\psi_{gj} - \psi_{gi} \geq \pi_j^1 - \pi_i^1$ для $i \in J_g$. Предположим, что $p_{d(g)}^1 \neq p_{d(g)}$. Тогда $\pi_{d(g)} < \psi_{gd(g)}$, $j = d(g)$ по (9), $\pi_{d(g)}^1 = \psi_{gd(g)}$ и $\psi_{gj} - \psi_{g0} = \pi_j^1 - \pi_0^1$. Таким образом, $\psi_{gj} - \psi_{gi} \geq \pi_j^1 - \pi_i^1$ для всех g и $i \in J_g$, и условие (9) верно для (z, p^1) по Лемме 1. Если $p_i^1 \neq p_i$, то $g(i) \in G_2$ и, как показано выше, $j(z, g(i)) = i$. Следовательно, $p_i^1 = p_i$ для $i \notin \{j(z, g) \mid g \in G\}$, и (10) выполнено для (z, p^1).

Q.E.D

.

Лемма 4. Если (α, π) — оптимальное решение задачи T*, то $\alpha \geq 0$ и $\pi \in P$.

Доказательство. Ограничение (14) не натянуто для любого оптимального решения задачи T по выбору S_0, поэтому $\pi_0 = 0$ и $\pi \in P$. Из (6) следует, что $\psi_{g0} = 0$, поэтому в (17) при $i = 0$ получаем $\alpha_g \geq 0$.

Q.E.D

.

Теорема 2. Если (z, p) — равновесие, то $x(z)$ — базисное оптимальное решение T и $(\alpha(z,p), c(p))$ — оптимальное решение T*; если x — базисное оптимальное решение T и (α, π) — оптимальное решение T*, то $(z(x,\pi), r(\pi))$ — равновесие.

Доказательство. (1) Пусть (z, p) — равновесие. Положим $x = x(z)$. Из (8) следует, что x принадлежит многограннику, определенному ограничениями (12) – (15); этот многогранник погружен в единичный куб, и x — целочисленный вектор, поэтому x — вершина многогранника и *бдр* задачи T. Если $g \in G$, $i \in J_g$ и $z^1 = (y_{gi}(p), i) \in Z_g$, то из (9) и (1) следует, что $\alpha_g(z, p) = u_g(z) - w_g - c(p_{d(g)}) \geq u_g(z^1) - w_g - c(p_{d(g)}) = \psi_{gi} - c(p_i)$. Поэтому $(\alpha(z,p), c(p))$ — допустимое решение задачи T*.

Значения функций (11) и (16) при $x = x(z)$ и $(\alpha, \pi) = (\alpha(z,p), c(p))$, соответственно, равны. Действительно, пусть $A = \{j(z, g) \mid g \in G\}$. Заметим, что, по (10), $p_i = 0$, если $i \notin A$. Используя Лемму 2, получаем $\sum_{g,i} \psi_{gi} \cdot x_{gi} = \sum_g \psi_{gj(z,g)} = \sum_g [u_g(z) - w_g - c(p_{d(g)}) + c(p_{j(z,g)})] = \sum_g \alpha_g(z, p) + \sum_{i \in A} c(p_i) = \sum_g \alpha_g(z, p) + \sum_i c(p_i)$. Следовательно, $x(z)$ и $(\alpha(z,p), c(p))$ — оптимальные решения задач T и T*, соответственно (по первой теореме двойственности).

(2) Пусть x — базисное оптимальное решение T и (α, π) — оптимальное решение T*. Как отмечено в разделе 2.1, x — целочисленный вектор. Положим $z = z(x, \pi)$ и $p = r(\pi)$; очевидно, $(z, p) \in Z \times P$. Выберем $g \in G$. По определению $z(x, \pi)$ имеем $j(z, g) = k(x, g)$. По второй теореме двойственности $\alpha_g + \pi_{j(z,g)} = \psi_{gj(z,g)}$ (так как $x_{gk(x,g)} = 1$). Отсюда, учитывая (17), следует неравенство $\psi_{gj(z,g)} - \pi_{j(z,g)} \geq \psi_{gi} - \pi_i$ для всех $i \in J_g$, эквивалентное условию (9) по Лемме 1. Условие (8) выполнено для z по определению $z(x, \pi)$. Если $i \notin \{j(z, g) \mid g \in G\}$, то (13) не натянуто для i и $p_i = \pi_i = 0$. Следовательно, (10) выполнено для $z(x, \pi)$. Тогда (7) тоже выполнено (Mas-Collel, Whinston, Green, 1995, Lemma 10.B.1, c. 316).

Q.E.D

.

Следствие 1. Если $z \in \mathrm{FD}$, то $\sum_{g \in G} u_g(z) = \sum_g w_g + \sum_{g,i} \psi_{gi} \cdot x_{gi}(z)$; в частности, если $z \in E$, то $\sum_{g \in G} u_g(z) = F_0$.

Доказательство. Пусть $z \in \mathrm{FD}$. Используя (7), мы получаем: $\sum_g u_g(z) = \sum_g [y(z, g) + b_{gj(z,g)}] = \sum_g [b_{gj(z,g)} - q_{gj(z,g)} + w_g] = \sum_g [\psi_{gj(z,g)} + w_g] = \sum_g w_g + \sum_{g,i} \psi_{gi} \cdot x_{gi}(z)$. Если $z \in E$, то, по Теореме 2, $\sum_{g,i} \psi_{gi} \cdot x_{gi}(z) = f_0$ и, следовательно, $\sum_g u_g(z) = F_0$.

Q.E.D

.

Следствие 2. Если $z \in \mathrm{FD}$, $x(z)$ — базисное оптимальное решение задачи T и существует оптимальное решение (α, π) задачи T*, такое что $u_g(z) = \alpha_g + w_g + \pi_{d(g)}$ для всех $g \in G$, то $(z, r(\pi))$ — равновесие.

Доказательство. Пусть z и (α, π) удовлетворяют условиям Следствия 2, $p = r(\pi)$ и $z^1 = z(x(z), \pi)$. Ясно, что $\zeta(z^1) = \zeta(z)$, и по Теореме 2 (z^1, p) — равновесие. Если $i = j(z, g) = j(z^1, g)$, то $x_{gi}(z) = 1$ и соответствующее ограничение (17) натянуто для (α, π). Поэтому $\alpha_g = \psi_{gi} - \pi_i$. Из определения $z(x, \pi)$ и Леммы 2 следует $y(z^1, g) = w_g + \pi_{d(g)} - \pi_i - q_{gi} = w_g + \pi_{d(g)} + \alpha_g - (\psi_{gi} + q_{gi}) = u_g(z) - b_{gi} = y(z, g)$. Итак, $z = z^1$ и (z, p) — равновесие.

Q.E.D

.

Лемма 5. Если $z \in C$, то $\sum_{g \in G} u_g(z) = F_0$ и $u_g(z) \geq w_g + \psi_{gd(g)}$ для всех $g \in G$.

Доказательство. Пусть $z \in C$ и z^1 — некоторое равновесное распределение. Тогда $\sum_g u_g(z) \leq \sum_g u_g(z^1) = F_0$ (Следствие 1). Допустим, что $\sum_g u_g(z) < F_0$. Положим $\varepsilon = (|G|^{-1}) \cdot [F_0 - \sum_g u_g(z)] > 0$ и $y_g = \varepsilon + u_g(z) - u_g(z^1)$. Рассмотрим распределение $z^0 = (z_g^0 \mid g \in G)$, где $z_g^0 = (y_g + y(z^1, g), j(z^1, g))$. Ясно, что $\sum_g y_g = 0$ и $z^0 \in \mathrm{FD}$, причем $u_g(z^0) = u_g(z^1) + y_g = u_g(z) + \varepsilon$. Тогда коалиция G блокирует z, что невозможно, так как $z \in C$. Следовательно, $\sum_g u_g(z) = F_0$. Если $u_g(z) < w_g + \psi_{gd(g)}$, то коалиция $Q = \{g\}$ блокирует z посредством распределения $(w_g - q_{gd(g)}, d(g)) \in \mathrm{FD}(Q)$; поэтому $u_g(z) \geq w_g + \psi_{gd(g)}$ для всех $g \in G$.

Q.E.D

.

Лемма 6. Пусть $z \in C$, $x = (x_{gi} \mid g \in G, i \in J_g)$ и $c_{gi} = \psi_{gi} - u_g(z) + w_g$ для всех $g \in G$, $i \in J_g$. Тогда следующая задача ограничена:

$$\max \textstyle\sum_{g,i} x_{gi} \cdot c_{gi} \quad \text{при условиях} \tag{18}$$

$$x \geq 0 \quad \text{и} \quad \textstyle\sum_g x_{gi} - \sum_j x_{g(i)j} \leq 0 \quad \text{для} \quad i \neq 0. \tag{19}$$

Доказательство. Допустим, что $z \in C$ и задача (18), (19) не ограничена. Тогда можно выбрать такое допустимое решение x этой задачи, что $\sum_{g,i} x_{gi} \cdot c_{gi} > 0$. Ясно что $\{(g, i) \mid x_{gi} > 0\} \neq \varnothing$. Последовательность $\lambda = \langle h(1), i(1), \ldots, h(n), i(n)\rangle$ *максимальна* относительно x, если выполнены следующие условия: $h(s) \in G$, $i(s) \in J_{h(s)}$ и $x_{h(s)i(s)} > 0$ для всех s; $h(s+1) = g(i(s))$ (отсюда $i(s) \neq 0$) при $1 \leq s < n$; если $i(n) \neq 0$, то $h(1) =$

$g(i(n))$; если $i(n) = 0$, то либо $\sum_g x_{gd(h(1))} = 0$, либо $d(h(1)) = 0$. Из (19) следует, что существует максимальная относительно x последовательность λ. Положим $A(\lambda) = \{(h(s), i(s)) \mid 1 \le s \le n\}$, $L(\lambda) = \sum_{(g,i)\in A(\lambda)} c_{gi}$ (*вес последовательности*), $\varepsilon = \min\{x_{gi} \mid (g, i)\in A(\lambda)\} > 0$. Допустим, что $L(\lambda) \le 0$. Тогда положим $y_{gi} = x_{gi} - \varepsilon$, если $(g, i)\in A(\lambda)$, иначе $y_{gi} = x_{gi}$. Ясно, что $y = (y_{gi})$ удовлетворяет (19) и $\sum_{g,i} y_{gi}\cdot c_{gi} = \sum_{g,i} x_{gi}\cdot c_{gi} - L(\lambda)\cdot\varepsilon > 0$. Но λ — не максимальная последовательность относительно y, так как $y_{gi} = 0$ для некоторой пары $(g, i)\in A(\lambda)$.

Повторяя процедуру, мы построим вектор x, удовлетворяющий (19), такой что $\sum_{g,i} x_{gi}\cdot c_{gi} > 0$ и каждая максимальная относительно x последовательность имеет положительный вес. Зафиксируем такую последовательность $\lambda = \langle h(1), i(1), \ldots, h(n), i(n)\rangle$. Положим $\varepsilon = L(\lambda)\cdot n^{-1} > 0$, $Q = \{h(s) \mid 1 \le s \le n\}$. Затем мы полагаем $j(h(s)) = i(s)$ для всех s (перемещение членов коалиции Q в соответствии с λ), $y(g) = u_g(z) - b_{gj(g)} + \varepsilon$, $z_g = (y(g), j(g))\in Z_g$ для каждого $g\in Q$ и $z^1 = (z_g \mid g\in Q)$. Используя определения ε, $L(\lambda)$, c_{gi} и ψ_{gi}, получаем $\sum_{g\in Q} y(g) = \sum_{g\in Q} [w_g - q_{gj(g)}]$. Следовательно, $z^1\in \mathrm{FD}(Q)$. Но $u_g(z^1) = y(g) + b_{gj(g)} = u_g(z) + \varepsilon$ для всех $g\in Q$, поэтому коалиция Q блокирует z, противоречие.

Q.E.D

.

Теорема 3. $E = C \subseteq \mathrm{PM}$. Если $|G| \ge 2$, то $E \subset \mathrm{PM}$.

Доказательство [2]. Включение $E \subseteq C$ известно (см., например, Mas-Collel, Whinston, Green, 1995, с. 654). Докажем, что $C \subseteq$ E. Пусть $z\in C$. Тогда $x(z)$ — допустимое решение задачи T. По Следствию 1 из Теоремы 2 и Лемме 5 $\sum_{g,i} \psi_{gi}\cdot x_{gi}(z) = \sum_g u_g(z) - \sum_g w_g = F_0 - \sum_g w_g = f_0$, поэтому $x(z)$ — целочисленное (и поэтому базисное) оптимальное решение задачи T. Положим $\pi_0 = 0$ и рассмотрим следующую систему неравенств:

$$\pi \ge 0, \quad \pi_i - \pi_{d(g)} \ge \psi_{gi} - u_g(z) + w_g \quad \text{для } g\in G,\ i\in J_g, \tag{54}$$

где π_i при $i \ne 0$ — переменные (для единообразия мы помещаем π_0 в левые части некоторых неравенств).

Задача, двойственная для системы (54), имеет вид (18), (19). Она ограничена по Лемме 6, поэтому система (54) разрешима; пусть $(\pi_i \mid i\in I \setminus \{0\})$ — некоторое решение этой системы. Вектор $\pi =$

[2] В доказательстве использована идея Quinzii (1984, Theorem 3).

$(\pi_i \mid i \in I)$ теперь полностью определен. Пусть $\alpha = (\alpha_g \mid g \in G)$, где $\alpha_g = u_g(z) - w_g - \pi_{d(g)}$. Из (54) следует, что (α, π) — допустимое решение задачи T*. Из определения α_g получим $\sum_g \alpha_g + \sum_i \pi_i = \sum_g [u_g(z) - w_g] = f_0$ (последнее равенство доказано выше). Поэтому (α, π) — оптимальное решение задачи T*, и $z \in E$ по Следствию 2 из Теоремы 2.

Докажем, что $C \subseteq$ PM. Предположим противное: $z \in C \setminus$ PM. Из $z \notin$ PM следует, что $\sum_g u_g(z^1) > \sum_g u_g(z)$ для некоторого $z^1 \in$ FD. Применяя Следствие 1 из Теоремы 2 и Лемму 5, получаем $\sum_{g,i} \psi_{gi} \cdot x_{gi}(z^1) = \sum_g [u_g(z^1) - w_g] > \sum_g [u_g(z) - w_g] = f_0$, что невозможно.

Пусть $\{1, 2\} \subseteq G$ (на рынке не менее двух агентов). Построим распределение, лежащее в PM $\setminus E$. Выберем $z \in E$. Положим $y^1(1) = y(z, 1) - \varepsilon$, $y^1(2) = y(z, 2) + \varepsilon$, $y^1(g) = y(z, g)$ для $g \in G \setminus \{1, 2\}$. Пусть $z(\varepsilon)$ — вектор с компонентами $(y^1(g), j(z, g))$ для $g \in G$. Ясно, что $z(\varepsilon) \in$ FD. Предположим, что существует распределение $z^0 \in$ FD, такое что $u_g(z^0) \geq u_g(z(\varepsilon))$ для всех $g \in G$ с хотя бы одним строгим неравенством. Положим $y^2(1) = y(z^0, 1) + \varepsilon$, $y^2(2) = y(z^0, 2) - \varepsilon$, $y^2(g) = y(z^0, g)$ для $g \in G \setminus \{1,2\}$. Рассмотрим распределение z^2, такое что $z^2_g = (y^2(g), j(z^0, g))$ для всех $g \in G$. Очевидно, что $z^2 \in$ FD и $u_g(z^2) \geq u_g(z)$ для всех g с хотя бы одним строгим неравенством, что противоречит доказанному выше включению $E \subseteq$ PM. Поэтому $z(\varepsilon) \in$ PM для любого $\varepsilon \in R$. Если $\varepsilon > u_1(z) - (w_1 + \psi_{1d(1)})$, то $u_1(z(\varepsilon)) = u_1(z) - \varepsilon < w_1 + \psi_{1d(1)}$, и $z(\varepsilon) \notin C = E$ по Лемме 4. Таким образом, $z(\varepsilon) \in$ PM $\setminus E$, если $\varepsilon > u_1(z) - (w_1 + \psi_{1d(1)})$.

Q.E.D

.

Лемма 7. Сигнал $\sigma(\rho)$ упорядочен и условия (21) – (23) выполнены для любого набора торговых предложений $\Theta = (\Theta_g \mid g \in G)$.

Доказательство. Допустим, что ограничение спроса на жилище i существенно для агента $g \in G_1$: $w_g(i) > w_g(t(g))$. По определению $t(g) = t(g, D^k)$ для некоторого $k \geq 1$. Тогда $i \notin D^k$. Из построения множеств D^n для $n \leq k$ следует, что $i \in \{t(h) \mid h \in G\}$. Поэтому $s^-(\rho, g(i)) = -1$ и ограничение предложения несущественно для агента $g(i)$, т.е. сигнал $\sigma(\rho)$ упорядочен. Из $I^+(\rho, g) = \{0, d(g), t(g)\}$ следует, что $\Theta_g \cap I^+(\rho, g) \subseteq \{t(g)\}$, а этого достаточно для выполнения условий (21) – (23).

Q.E.D

.

Теорема 4. $\zeta(\rho)$ есть равновесие относительно схемы $\rho\in\mathfrak{R}$.

Доказательство. Очевидно, что $\zeta(\rho)\in \mathrm{DA}(\sigma(\rho))$. Положим $\Theta_g(\rho)$ = $(\{i\in J_g \mid w_g(t(g)) < w_g(i)\} \cup \{t(g)\}) \setminus \{0, d(g)\}$ и $\Theta(\rho) = (\Theta_g(\rho) \mid g\in G)$. Легко видеть, что распределение $\zeta(\rho)$ удовлетворяет условиям (25) – (27) при $\Theta = \Theta(\rho)$ и условию (24) для $g\in G_2$. Пусть $g\in G_1$. Тогда $g\in A^k$ и $t(g) = t(g, D^k)$ для некоторого k. Учитывая начальные условия шага k, имеем $D^k \supseteq I^+(\rho, g)$. Поэтому $w_g(t(g)) = \max\{w_g(i) \mid i\in D^k\} \geq \max\{w_g(i) \mid i\in I^+(\rho, g)\} = U_g(\sigma(\rho))$ и $\max\{w_g(i) \mid i\in I^+(\rho, g)\} \geq w_g(t(g))$, так как $t(g)\in I^+(\rho, g)$. Следовательно, (24) верно для $g\in G_1$. Осталось проверить, что $\Theta_g(\rho)$ есть эффективный спрос агента g при сигнале $\sigma(\rho)$ для любого $g\in G$. Это верно для $g\in G_2$, так как $J_g = \{d(g), 0\}$. Пусть $g\in G_1$. Если $i\in I^+(\rho, g) \setminus \{d(g), 0\}$, то $i = t(g)\in \Theta_g(\rho)$. Если $i\in J_g \setminus I^+(\rho, g)$ и $w_g(i) > w_g(j)$ для всех $j\in I^+(\rho, g)$, то $i\notin \{d(g), 0\}$ и $w_g(i) > w_g(t(g))$, поэтому $i\in \Theta_g(\rho)$. Следовательно, $\Theta(\rho)$ есть набор эффективных спросов при сигнале $\sigma(\rho)$.

Q.E.D

.

Теорема 5. Если условие (28) верно, то $\zeta(\rho)$ — единственное равновесие относительно схемы $\rho\in\mathfrak{R}$.

Доказательство. Предположим, что ζ — равновесие относительно схемы $\rho\in\mathfrak{R}$. Тогда $\zeta\in \mathrm{DA}(\sigma(\rho))$. Напомним, что $\zeta_g(\rho) = t(g)$ и схема ρ сопоставляет любому набору торговых предложений Θ сигнал $\sigma(\rho)$, не зависящий от Θ.

Пусть $g\in G_2$. Тогда $d(g) \neq 0$. Если $t(g) = d(g)$, то $s^-(\rho, g) = -1$ по определению и $t(g)\notin I^+(\rho, h)$ для $h\in G_1$, поэтому $\zeta_h \neq t(g)$ для $h\in G_1$. Теперь $\zeta_g = 0$ противоречит условию (27) для ζ, следовательно, $\zeta_g = d(g)$. Если $t(g) = 0$, то $w_g(0) > w_g(d(g))$ по (28) и $\zeta_g = 0$ по (24). Итак, $\zeta_g = t(g)$ для $g\in G_2$.

Пусть $g\in G_1$. Возможны следующие случаи: $t(g) \neq 0$, $0 = t(g) \neq d(g)$ и $0 = t(g) = d(g)$. Если $t(g) \neq 0$, то $t(g) = d(g_1)$ для некоторого $g_1\in G$, $s^-(\rho, g_1) = -1$ по определению и $t(g)\notin I^+(\rho, h)$ для $h\in G_1 \setminus \{g\}$. Выше мы доказали, что $\zeta_h = t(h)$ для $h\in G_2$. Итак, $\zeta_h \neq t(g)$ для $h\in (G \setminus \{g\})$.

Теперь из $\zeta_g \neq t(g)$ следовало бы $t(g) = d(g_1) \notin \{\zeta_h \mid h \in G\} \cup \{0\}$, что противоречит условию (27) для ζ. Если $t(g) = 0 \neq d(g)$, то из (28) следует $w_g(0) > w_g(d(g))$; тогда $\zeta_g = 0$ по (24). Если, наконец, $t(g) = 0 = d(g)$, то $I^+(\rho, g) = \{0\}$; поэтому $\zeta_g = 0$. Таким образом, $\zeta_g = t(g)$ для всех g.

Q.E.D

.

Теорема 6. FPC = $E(\mathfrak{R})$.

Доказательство [3]. 1. Пусть $\zeta = \zeta(\rho)$, $\rho \in \mathfrak{R}$. Тогда $w_g(\zeta_g) = \max\{w_g(i) \mid i \in J_g\}$ для $g \in G_2$ по (24). Предположим, что $\zeta \notin$ FPC, $\zeta \prec \xi$ и $\lambda = \langle g(1), \ldots, g(n) \rangle$ — соответствующая улучшающая последовательность. Обозначим через st(s) номер шага k, на котором ρ-алгоритм определяет $t(g(s)) = \zeta_{g(s)} = t(g(s), D^k)$. Пусть $s < n$. Если $\zeta_{g(s)} = \xi_{g(s)}$, то $\xi_{g(s)} \neq \zeta_{g(s+1)}$ (так как $\zeta \in$ DA) и из (29) следует $\zeta_{g(s)} = \xi_{g(s)} = \delta(g(s+1))$, т.е. агент $g(s+1)$ вошел в допустимую последовательность не позднее шага st(s): st(s) $\geq$ st(s+1). Если $\zeta_{g(s)} \neq \xi_{g(s)}$, то $w_{g(s)}(\xi_{g(s)}) > w_{g(s)}(\zeta_{g(s)})$ по (31) и $\xi_{g(s)} \notin D^{\mathrm{st}(s)}$ по определению $t(g(s))$. При этом по (29) либо $\xi_{g(s)} = \delta(g(s+1))$, либо $\xi_{g(s)} = \zeta_{g(s+1)}$. В первом случае из начального условия шага st(s) следует $g(s+1) \notin A^{\mathrm{st}(s)}$; во втором случае $t(g(s+1)) = \zeta_{g(s+1)}$ было определено до шага st(s); в любом случае st(s) > st(s+1). Если $\xi_{g(n)} \in \{\delta(g(1)), \zeta_{g(1)}\}$, то аналогичные рассуждения дают st(n) $\geq$ st(1) со строгим неравенством при $w_{g(n)}(\xi_{g(n)}) > w_{g(n)}(\zeta_{g(n)})$. Таким образом, если $\xi_{g(n)} \in \{\delta(g(1)), \zeta_{g(1)}\}$, то st(1) $\geq \ldots \geq$ st(n) $\geq$ st(1) с хотя бы одним строгим неравенством по (32), что невозможно. Если же $\xi_{g(n)} \notin \{\delta(g(1)), \zeta_{g(1)}\}$, то $\xi_{g(n)} \in F(\zeta)$ и $n = 1$ по (30); тогда $w_{g(n)}(\xi_{g(n)}) > w_{g(n)}(\zeta_{g(n)})$ по (31). Но $F(\zeta) \subseteq D^k$ для всех k, в частности $\xi_{g(n)} \in D^{\mathrm{st}(n)}$, поэтому $w_{g(n)}(\zeta_{g(n)}) \geq w_{g(n)}(\xi_{g(n)})$ — противоречие. Следовательно, улучшающая последовательность невозможна и $\zeta(\rho) \in$ FPC.

2. Предположим, что $\zeta \in$ FPC. Построим схему $\rho \in \mathfrak{R}$, для которой $\zeta(\rho) = \zeta$. Для этого достаточно определить нумерации $n(g)$ для $g \in G_1$ и

[3] В доказательстве использованы некоторые идеи работы Roth, Postlewaite (1977).

$n_g(i)$ для $g \in G$, $i \in J_g$. Выберем нумерации $n_g(i)$, удовлетворяющие условиям

$$\text{если } w_g(i) > w_g(j), \text{ то } n_g(i) < n_g(j); \tag{55}$$

$$\text{если } i \neq \zeta_g \text{ и } w_g(i) = w_g(\zeta_g), \text{ то } n_g(i) > n_g(\zeta_g). \tag{56}$$

Понятно, что такие нумерации существуют. Теперь опишем процедуру, определяющую нумерацию $n(g)$. На каждом шаге этой процедуры будет построена *последовательность наилучших сделок*, согласованная с размещением ζ.

Шаг 0. На подготовительном шаге 0 для $g \in G_2$ полагаем $t(g) = t(g, J_g)$ (из (56) следует, что $t(g) = \zeta_g$). Определяем D^1, A^1 и F^1 как на шаге 0 ρ-алгоритма. Положим $\delta(g) = 0$, если $g \in G_1$ и $\delta(g) \notin D^1$ (обоснование — как в ρ-алгоритме), $J^1 = \{\delta(g) \mid g \in G_1\} \setminus \{0\}$.

Шаг $k+1$. Пусть для каждого m ($1 \leq m \leq k$), построена последовательность наилучших сделок $\lambda_m = \langle g_{m1}, \ldots, g_{mn(m)} \rangle$, $G(\lambda_m) = \{g_{ms} \mid 1 \leq s \leq n(m)\} \subseteq A^m$, $G(\lambda_i) \cap G(\lambda_j) = \varnothing$ при $i \neq j$ и $t(g) = \zeta_g$ для $g \in \cup_m G(\lambda_m)$. Положим $D(\lambda_m) = \{\zeta_g \mid g \in G(\lambda_m)\} \setminus \{0\}$, $A^{k+1} = G_1 \setminus \cup_m G(\lambda_m)$, $D^{k+1} = D^1 \setminus \cup_m D(\lambda_m)$, $J^{k+1} = \{\delta(g) \mid g \in A^{k+1}\} \setminus \{0\}$, $F^{k+1} = D^{k+1} \setminus J^{k+1}$. Заметим, что в F^{k+1} входят не занятые участниками последовательностей $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ исходно свободные жилища из F^1 и жилища, которые освободились в результате перемещений, описанных этими последовательностями. Ясно, что $\zeta_g \in D^{k+1}$ эквивалентно $g \in A^{k+1}$. Предположим, что $\delta(g) \in D^{k+1}$ для всех $g \in A^{k+1}$ (это условие выполнено на шаге 1 и процедура обеспечивает его выполнение на последующих шагах). Допустим, что $A^{k+1} \neq \varnothing$. Возможны следующие случаи.

(1) $\zeta_g = t(g, D^{k+1}) \in F^{k+1}$ для некоторого $g \in A^{k+1}$; положим $\lambda_{k+1} = \langle g \rangle$.

(2) $t(g, D^{k+1}) \in F(\zeta)$ для некоторого $g \in A^{k+1}$; положим $\lambda_{k+1} = \langle g \rangle$.

(3) Случаи (1) и (2) не выполнены. Пока не будет построена последовательность λ_{k+1}, делаем следующие операции. Если g_1 еще не определено, то выберем произвольно $g_1 \in A^{k+1}$. Пусть $g_1, \ldots, g_s$ уже определены и агент g_a занимает в размещении ζ жилище j_a ($1 \leq a \leq s$). Положим $i = t(g_s, D^{k+1})$; $i \notin F(\zeta)$, так как случай (2) не выполнен.

(3а) $i \in J^{k+1}$. Тогда $i = \delta(g) \neq 0$ для некоторого $g \in A^{k+1}$. Положим $g_{s+1} = g$, если $g \notin \{g_j \mid 1 \leq j \leq s\}$, и $\lambda_{k+1} = \langle g_m, \ldots, g_s \rangle$, если $g = g_m$.

(3b) $i \notin J^{k+1}$. Тогда $i \in F^{k+1}$ и $i \notin F(\zeta) \cup \{j_s\}$, так как случаи (1) и (2) не выполнены. Поэтому $i = \zeta_g \neq 0$ для некоторого $g \in A^{k+1}$, $g \neq g_s$ и $\zeta_g \neq t(g, D^{k+1})$, так как случай (1) не выполнен. Положим $\lambda_{k+1} = \langle g_m, \ldots, g_s \rangle$, если $g = g_m$, и $g_{s+1} = g$, если $g \notin \{g_j \mid 1 \leq j \leq s\}$.

В конечном счете будет построена последовательность $\lambda_{k+1} = \langle g_{k+1,1}, \ldots, g_{k+1,n(k+1)} \rangle$. Положим $G(\lambda_{k+1}) = \{g_{k+1,s} \mid 1 \leq s \leq n(k+1)\}$, $t(g) = t(g, D^{k+1})$ для $g \in G(\lambda_{k+1})$. Обозначим через $j_{k+1,a}$ жилище, занятое агентом $g_{k+1,a}$ в размещении ζ. Определим размещение ξ следующим образом: $\xi_g = t(g)$, если $g \in \cup_{m \leq k+1} G(\lambda_m)$, иначе $\xi_g = 0$. Ясно, что $\xi \in$ DA. Условия (29) и (30) выполнены для ξ при $\lambda = \lambda_{k+1}$ по построению. Из определений множеств A^{k+1} и D^{k+1} следует, что $w_g(\zeta_g) \leq w_g(t(g))$ для $g \in A^{k+1}$. Из (55) и (56) получаем, что $t(g) = \zeta_g$, если $g \in G(\lambda_{k+1})$ и $w_g(\zeta_g) = w_g(t(g))$. Поэтому (31) выполнено для ξ при $\lambda = \lambda_{k+1}$. Если ξ и $\lambda = \lambda_{k+1}$ удовлетворяют условию (32), то $\zeta \prec \xi$, что невозможно, так как $\zeta \in$ FPC. Следовательно, $w_g(\xi_g) = w_g(\zeta_g)$ для всех $g \in G(\lambda_{k+1})$. Из (55) и (56) следует, что $t(g) = \zeta_g$ для $g \in G(\lambda_{k+1})$. Поэтому случай (3b) не был использован при построении последовательности λ_{k+1}, $j_{k+1,s} = \delta(g_{k+1,s+1})$ при $1 \leq s < n(k+1)$ и $j_{k+1,n(k+1)} \in F^{k+1} \cup \{\delta(g_{k+1,1})\}$. Это значит, что мы выделили последовательность наилучших сделок в размещении ζ. Присвоим элементам из $G(\lambda_{k+1})$ очередные номера в нумерации $n(g)$ и закончим шаг $k+1$. Поскольку $G(\lambda_k) \neq \varnothing$, имеем $A^r = \varnothing$ для некоторого r, и построение нумерации $n(g)$ будет завершено на шаге $r-1$. Нумерации $n(g)$ и $n_g(i)$ задают схему $\rho \in \mathfrak{R}$. Легко видеть, что $\zeta(\rho) = \zeta$. Таким образом, FPC $\subseteq E(\mathfrak{R})$.

Q.E.D

.

Теорема 7. Если τ — завершающий этап EQ-процедуры, то $(z(\tau), p^\tau)$ есть вальрасово равновесие для ситуации $A(\tau)$.

Доказательство. На последнем шаге этапа τ выполнен случай (3c). Случаи (2a) и (3a) EQ-процедуры и определение $j(s, g)$ обеспечивают выполнение условия (10) для $z(\tau)$, $p_0 = 0$. Тогда (Mas-Collel, Whinston, Green, 1995, Лемма 10.B.1, с. 316) выполнено и условие (7). Выберем $g \in G(\tau)$ и положим $j = j(\tau, g)$. Пусть $g \in G_1$. Случай (3b) не произошел, следовательно $u(i, g, \tau) \leq u(j, g, \tau)$ для всех $i \in J_g$. Тогда $\psi_{gj}(\tau) - \pi_j^\tau \geq \psi_{gi}(\tau) - \pi_i^\tau$. Пусть теперь $g \in G_2(\tau)$; тогда $j \in \{0, d(g)\}$. Если $j = 0$, то $d(g) \in \{j(\tau, g) \mid g \in G_1\}$; тогда $d(g) \in D_\tau^1$ и поэтому $\psi_{gd(g)} - \pi_{d(g)}^\tau \leq 0 = \psi_{g0} - \pi_0^\tau$. Если $j = d(g)$, то $j \notin \{j(\tau, g) \mid g \in G_1\}$. Тогда либо $j \notin D_\tau^1$, либо $j \in F_\tau^{r(\tau)}$. Следовательно (см. шаг (3а) EQ-процедуры), $\psi_{gd(g)} - \pi_{d(g)}^\tau \geq 0 = \psi_{g0} - \pi_0^\tau$. В любом случае (9) выполнено для g по Лемме 1.

Q.E.D

.

Лемма 8. Пусть $g \in G_1$, $j = \delta(s+1, g)$, $i \in I$. Если $j \in I_1 \cup \{\delta(s, g)\}$, то $b_{gi}(s+1) = b_{gi}(s)$; иначе $b_{gi}(s+1) = \min\{b_{gi}(s), a_{gj}(s)\}$.

Доказательство. Пусть $d = d(s, g)$, $m = d(s+1, g)$. Из (37) и определения $\Delta b_{gi}(s)$, повторяя рассуждения Теоремы 1, получаем:

$$b_{gi}(s+1) - b_{gm}(s+1) = \min\{b_{gi}(s) - b_{gm}(s), w_g(s+1) - y_g^0 - q(g, m, s+1)\}. \quad (57)$$

Из (2) и (57) следует, что

$$b_{gi}(s) - b_{gd(s,g)}(s) \leq w_g(s) - y_g^0 - q(g, d(s,g), s) \quad \text{для всех } s. \quad (58)$$

(1) Если $\delta(s, g) = j$, то $w_g(s+1) = w_g(s)$, $m = d$ и (58) можно переписать в виде $b_{gi}(s) - b_{gm}(s) \leq w_g(s+1) - y_g^0 - q(g, m, s+1)$. Тогда из (57) следует, что $b_{gi}(s+1) - b_{gm}(s+1) = b_{gi}(s) - b_{gm}(s)$ для всех i. Но $b_{g0}(s+1) = b_{g0}(s) = q_{g0}$, поэтому $b_{gi}(s+1) = b_{gi}(s)$ для всех i.

(2) Если $\delta(s, g) \neq j$, то $j = t_{sk}(g)$ для некоторого шага k этапа s, на котором EQ-процедура определяет $\delta(s+1, g)$. Тогда j максимизирует $u(i, g, s)$ на D_s^k и $d \in D_s^k$ по Предположению 5 и (36), откуда

$$b_{gd}(s) - b_{gj}(s) \leq [\pi_d^s - \pi_j^s] + [q(g, d, s) - q(g, j, s)]. \quad (59)$$

Суммируя это неравенство с (58), получаем:

$$b_{gi}(s) - b_{gj}(s) \leq w_g(s) - y_g^0 + \pi_d^s - \pi_j^s - q(g, j, s). \quad (60)$$

(2а) $j \in I_1$. Тогда $m = j$, $w_g(s+1) = w_g(s) + \pi_d^s - \pi_j^s - Q_{gj}(s)$. Используя Предположение 7 и определение $q(g, i, s)$, запишем (60) в виде: $b_{gi}(s) - b_{gm}(s) \leq w_g(s+1) - y_g^0 - q_{gj}^2 = w_g(s+1) - y_g^0 - q(g, m, s+1)$. Отсюда и из (57), как в случае (1), следует $b_{gi}(s+1) = b_{gi}(s)$ для всех i.

(2b) $j \notin I_1$. Тогда $m = 0$, $w_g(s+1) = w_g(s) + \pi_d^s - Q_{gj}(s)$, $a_{gj}(s) = w_g(s+1) - y_g^0$ и (57) принимает вид $b_{gi}(s+1) - q_{g0} = \min\{b_{gi}(s) - q_{g0}, a_{gj}(s) - q_{g0}\}$.

Q.E.D

.

Следствие. $\min\{0, b_{gi}(1)\} \le b_{gi}(s+1) \le b_{gi}(s)$ для всех $g \in G_1$, $i \in I$, $s \ge 1$.

Доказательство. Правое неравенство следует из Леммы 8. Положим $d = d(s, g)$, $j = \delta(s+1, g)$ и допустим, что $b_{gi}(s+1) < b_{gi}(s)$. Тогда, по Лемме 8, $\delta(s, g) \ne j$ и $b_{gi}(s+1) = a_{gj}(s) = \pi_d^s + w_g(s) - Q_{gj}(s) - y_g^0$, причем $j = t_{sk}(g)$ для некоторого шага k этапа s. По (59) $b_{gj}(s) - b_{gd}(s) \ge \pi_j^s - \pi_d^s + q(g, j, s) - q(g, d, s)$. Тогда из (58) при $i = j$ следует, что $w_g(s) - y_g^0 - q(g, d, s) \ge \pi_j^s - \pi_d^s + q(g, j, s) - q(g, d, s)$ и $0 \le w_g(s) + \pi_d^s - \pi_j^s - q(g, j, s) - y_g^0 \le w_g(s) + \pi_d^s - Q_{gj}(s) - y_g^0 = b_{gi}(s+1)$. Поэтому $b_{gi}(s+1) \ge 0$, если $b_{gi}(s+1) \ne b_{gi}(1)$.

Q.E.D

.

Лемма 9. Пусть $g \in G$, $i = j(s, g)$ и на последнем шаге этапа s выполняется случай (3). Тогда $b_{gi}(s) - q(g, i, s) \ge \pi_i^s$, а если $g \in G_1$, то $y_{gi}(s, p^s) \ge y_g^0$.

Доказательство. Пусть $g \in G_2(s)$, тогда $\psi_{gi}(s) = \psi_{gi}$. При $i = 0$ утверждение очевидно ($b_{g0} = q_{g0} = \pi_0^s = 0$). Если $i \ne 0$, то $i = d(g)$; тогда либо $i \notin D_s^1$ (и $\pi_i^s < \psi_{gi}$ по определению D_s^1), либо $i \in D_s^1 \setminus \{j(s, h) \mid h \in G_1\}$ (и $\pi_i^s \le \psi_{gi}$ по случаю (3a) EQ-процедуры). Пусть $g \in G_1$. Тогда $b_{g0}(s) = q_{g0}$ по (37), $\psi_{g0} = 0$, $0 \in D_s^k$ и i максимизирует $u(i, g, s)$ на D_s^k. Из $u(i, g, s) \ge u(0, g, s)$ и (33) получаем $\psi_{gi}(s) - \pi_i^s \ge 0$. Итак, $b_{gi}(s) - q(g, i, s) \ge \pi_i^s$ в любом случае.

Для $s = 1$ условие $y_{gi}(p^s) \ge y_g^0$ выполнено по Лемме 2. Предположим, что это условие выполнено для $s-1$ ($s \ge 2$) и докажем его для s. По определению i максимизирует $u(i, g, s)$ на D_s^k для некоторого k. Если $\delta(s-1, g) = \delta(s, g)$, то $d(s-1, g) = d(s, g) = d$. Тогда $d \in D_s^k$, поэтому $u(i, g, s) \geq u(d, g, s)$ и $\psi_{gi}(s) - \psi_{gd}(s) \geq \pi_i^s - \pi_d^s$. Отсюда, используя (58), получаем: $y_{gi}(s, p^s) = w_g(s) - \pi_i^s + \pi_d^s - q(g, i, s) \geq b_{gi}(s) - b_{gd}(s) + q(g, d, s) + y_g^0 - \pi_i^s + \pi_d^s - q(g, i, s) = [\psi_{gi}(s) - \psi_{gd}(s)] - [\pi_i^s - \pi_d^s] + y_g^0 \geq y_g^0$. Предположим теперь, что $\delta(s-1, g) \neq \delta(s, g)$. Легко видеть, что $y_{gi}(s, p)$ монотонно убывает как функция от $\beta_i(s, p)$. Поэтому $y_{gi}(s, p) \geq y_g^0$, если $\beta_i(s, p) \leq \Delta b_{gi}(s)$. Тогда из $y_{gi}(s, p^s) < y_g^0$ следовало бы $\beta_i(s, p^s) = \pi_i^s + q(g, i, s) - \pi_{d(s,g)}^s - q(g, d(s,g), s) > \Delta b_{gi}(s) = b_{gi}(s) - b_{gd(s,g)}(s)$, откуда $\psi_{gi} - \psi_{gd(s,g)} < \pi_i^s - \pi_{d(s,g)}^s$, что противоречит (59).

Q.E.D

.

Лемма 10. Множества Al и Pr конечны.

Доказательство. Если на шаге $r(s)$ выполнен случай (3) EQ-процедуры и $i = j(s, g)$, то по Лемме 9 и Следствию из Леммы 8 $\pi_i^{s+1} \leq \pi_i^s + \delta \leq \psi_{gi}(s) + \delta \leq b_{gi}(s) + \delta \leq b_{gi}(1) + \delta$. Если на шаге $r(s)$ не выполнен случай (3) EQ-процедуры или $i \notin \{\delta(s+1, g) \mid g \in G\}$, то $\pi_i^{s+1} \leq \pi_i^s$. Легко видеть, что случай (3) обязательно произойдет на каком-то этапе процедуры. Пусть m — номер первого такого этапа. Положим $K = \max\{\max\{b_{gi} \mid g \in G, i \in J_g\} + \delta, \max\{\pi_i^s \mid i \in I, s < m\}\}$. Ясно, что $0 \leq \pi_i^s \leq K$ для всех i, s. Поскольку $\pi_i^{s+1} \in \{\pi_i^s, \pi_i^s + \delta, \pi_i^s - \delta, \pi_i^0\}$, множество Pr конечно. Конечность множества Al очевидна.

Q.E.D

.

Лемма 11. Если на этапе s EQ-процедуры реализованы сделки, соответствующие последовательности $\lambda = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$, и $n > 1$, то найдется $g \in \{g_1, \ldots, g_n\}$, такое что $u(\delta(s,g), g, s) < u(\delta(s+1,g), g, s)$.

Доказательство. Если λ — цепь, то $u(\delta(s,g_1), g_1, s) < u(\delta(s+1,g_1), g_1, s)$ по определению корректной последовательности. Предположим, что λ — цикл. Последовательность λ не возникала до этапа s (иначе она была бы реализована). Пусть k — первый шаг этапа s, на котором возник цикл λ; $t_{sk}(g_j) \neq \delta(s, g_j)$ для всех j (так как $n > 1$) и $t_{sk}(g_m)$ не совпадает со значением $L(g_m)$ в начале шага k для некоторого m (иначе цикл возник бы раньше). Тогда для $g = g_m$ имеем $u(\delta(s,g), g, s) < u(t_{sk}(g), g, s)$ и $\delta(s+1, g) = t_{sk}(g)$.

Q.E.D

.

Лемма 12. Существует такое число M, что если EQ-процедура не завершит работу за M этапов, то $b_{gi}(s) - b_{gi}(s+1) \geq \delta > 0$ для некоторых $g\in G_1$, i и $s \leq M$.

Доказательство. Если $i\notin D_s^1$ для всех s, то π_i^s не убывает по s. Предположим, что $i\in D_s^1$ для некоторого s, и пусть $s(i)$ — наименьшее такое s. Рассмотрим $t > s(i)$. Из определения D_s^1 следует, что $\pi_i^{s(i)} \geq \pi_i^0$; тогда и $\pi_i^t \geq \pi_i^0$ (так как все π_i^s кратны δ), поэтому $i\in D_t^1$. Случай (3b) EQ-процедуры гарантирует, что

$$\text{из } s \geq s(i) \text{ и } \pi_i^s < \pi_i^{s+1} \text{ следует } i\in \{\delta(s+1, g) \mid g\in G_1\}. \qquad (61)$$

Положим $B_s = \{\delta(s, g) \mid g\in G_1\}$ (множество жилищ, занятых потребителями в начале этапа s). Если $\pi_i^t > \pi_i^{t+1}$ и $i\notin B_{t+1}$, то $i\notin B_s$ для всех $s \leq t$ (если жилище i освобождается на этапе s, то $\pi_i^s = \pi_i^0$ по определению корректной последовательности, после чего цена не может измениться, пока жилище свободно) и, учитывая (61), $\pi_i^{s-1} \geq \pi_i^s$ при $s(i) < s \leq t$. Следовательно, оба условия $\pi_i^t > \pi_i^{t+1}$ и $i\notin B_{t+1}$ могут выполняться только для конечного числа этапов t. Тогда существует $s_0 \geq \max\{s(i)\}$, такое что

$$\text{из } s > s_0 \text{ и } \pi_i^s > \pi_i^{s+1} \text{ следует } i\in B_{s+1}. \qquad (62)$$

Условия (61) и (62) означают, что на этапах $s > s_0$ могут меняться цены только для жилищ из B_{s+1}. Учитывая Лемму 10, положим $M = 1 + s_0 + |\mathrm{Al}|\cdot|\mathrm{Pr}|$.

Предположим, что EQ-процедура не завершилась за $|\mathrm{Al}|\cdot|\mathrm{Pr}|$ этапов после этапа s_0. Тогда существуют такие этапы a и b, что $s_0 < a < b$, $\pi^a = \pi^b$ и $\zeta^a = \zeta^b = \zeta$ (начальные размещения и цены на этапах a и b совпадают). Начиная с этапа a, процедура циклически повторяется.

Допустим, что на этапах $s\in[a, b)$ размещение неизменно, $\zeta^s = \zeta$. Тогда $B_s = B_a$ для $s \in [a, b)$ и, учитывая Лемму 8,

$$b_{gi}(s) = b_{gi}(a) \quad \text{для } s \in [a, b) \text{ и всех } g, i. \tag{63}$$

Если s — не последний этап EQ-процедуры, то $\zeta^s \neq \zeta^{s+1}$ или $\pi^s \neq \pi^{s+1}$. Поэтому $\pi^s \neq \pi^{s+1}$ для $s \in [a, b)$. Рассмотрим жилище i, такое что $i = \zeta_g$ для $g \in G_1$, g входит в максимальную допустимую некорректную последовательность на этапе $m \geq a$ и после этого i дорожает на этапе n: $\pi_i^m = \pi_i^n < \pi_i^{n+1}$. Допустим, что цены жилищ, занятых членами допустимых некорректных последовательностей, в которых участвует g на этапах $s \in [m, n)$, не возрастают в этом промежутке. Тогда на каком-то шаге этапа n агент g окажется первым участником максимальной допустимой некорректной последовательности, что невозможно, так как $u(i, h, m) > u(\delta(n,h), h, n)$ и $i = t_n(h, l)$ для какого-то $h \in G_1$. Таким образом, существуют $i(1)$, $m(1)$ и $n(1)$, такие что $\pi_{i(1)}^{m(1)} = \pi_{i(1)}^{n(1)} < \pi_{i(1)}^{n(1)+1}$, $[m(1), n(1)) \subset [m, n)$, $i(1) = \zeta_{h(1)}$ и агент $h(1)$ входит в максимальную допустимую некорректную последовательность на этапе $m(1)$.

Понятно, что существуют i, m и n, такие, что $a \leq m < n$ и $\pi_i^m \geq \pi_i^{m+1} = \pi_i^n < \pi_i^{n+1}$ (цена жилища i убывает на этапе m и возрастает на этапе n). Тогда $i = \zeta_g$ и g входит в максимальную допустимую некорректную последовательность на этапе m. По доказанному найдутся этапы $m(1)$ и $n(1)$, такие что $[m(1), n(1)) \subset [m(1), n(1))$, цена некоторого жилища $i = \zeta_{h(1)}$ неизменна на промежутке $[m(1), n(1))$ и возрастает на этапе $n(1)$, а агент $h(1)$ входит в допустимую некорректную последовательность на этапе $m(1)$. Продолжая рассуждение, мы построим бесконечную последовательность интервалов $[m(k), n(k))$ с целыми концами и монотонно убывающими длинами, что невозможно. К противоречию приводит предположение $\zeta^s = \zeta$ для всех $s \in [a, b)$. Следовательно, на этапах $s \in [a, b)$ реализуются нетривиальные последовательности сделок.

По правилу выбора жилища $t_{sk}(g)$ имеем $u(\delta(s+1,g), g, s) \geq u(\delta(s,g), g, s)$ для всех g и s. Из (33) и Леммы 11 следует

$$\pi^s_{\delta(s,g)} - \pi^s_{\delta(s+1,g)} \geq \psi_{g\delta(s,g)}(s) - \psi_{g\delta(s+1,g)}(s) \tag{64}$$

со строгим неравенством хотя бы для одной пары (g, s), $g \in G_1$, $s \in [a, b)$. Суммируя неравенства (64) по s от a до $b-1$, получаем:

$$\sum_{s=a}^{b-1} (\pi^s_{\delta(s,g)} - \pi^s_{\delta(s+1,g)}) \geq \sum_{s=a}^{b-1} [\psi_{g\delta(s,g)}(s) - \psi_{g\delta(s+1,g)}(s)]. \quad (65)$$

Поскольку $\pi^a_{\delta(a,g)} = \pi^b_{\delta(b,g)}$, имеем $\sum_{s=a}^{b-1} (\pi^s_{\delta(s,g)} - \pi^s_{\delta(s+1,g)}) = \pi^a_{\delta(a,g)} - \pi^{b-1}_{\delta(b,g)} + \sum_{s=a+1}^{b-1} (\pi^s_{\delta(s,g)} - \pi^{s-1}_{\delta(s,g)}) = \sum_{s=a+1}^{b} (\pi^s_{\delta(s,g)} - \pi^{s-1}_{\delta(s,g)})$. По Следствию из Леммы 8, используя $\delta(a, g) = \delta(b, g)$, получаем $\psi_{g\delta(a,g)}(a) - \psi_{g\delta(b,g)}(b-1) = \psi_{g\delta(b,g)}(a) - \psi_{g\delta(b,g)}(b-1) \geq \psi_{g\delta(b,g)}(b) - \psi_{g\delta(b,g)}(b-1)$. Тогда $\sum_{s=a}^{b-1} [\psi_{g\delta(s,g)}(s) - \psi_{g\delta(s+1,g)}(s)] \geq \sum_{s=a+1}^{b} [\psi_{g\delta(s,g)}(s) - \psi_{g\delta(s,g)}(s-1)]$. Если $i = \delta(s, g)$, $j = \delta(s-1, g)$ и $g \in G_1$, то $q(g, i, s) = q_{gi}(i) = q^2_{gi}$ и $q(g, i, s-1) = q_{gi}(j) = q^2_{gi} + Q_{gi}(s-1)$. Положим $R_{gs} = \psi_{g\delta(s,g)}(s) - \psi_{g\delta(s,g)}(s-1) = b_{g\delta(s,g)}(s) - b_{g\delta(s,g)}(s-1) + Q_{g\delta(s,g)}(s-1)$. Из (65) следует, что $\sum_{s=a+1}^{b} R_{gs} \leq \sum_{s=a+1}^{b} (\pi^s_{\delta(s,g)} - \pi^{s-1}_{\delta(s,g)})$ со строгим неравенством хотя бы для одного g. Суммируя по $g \in G_1$, получаем:

$$\sum_g \sum_{s=a+1}^{b} (\pi^s_{\delta(s,g)} - \pi^{s-1}_{\delta(s,g)}) > \sum_g \sum_{s=a+1}^{b} R_{gs}. \quad (66)$$

(1) Если $R_{gs} \geq 0$ для всех g и s, то $\sum_g \sum_{s=a+1}^{b} (\pi^s_{\delta(s,g)} - \pi^{s-1}_{\delta(s,g)}) > 0$. В последней сумме учтены изменения цен на жилища из множества B_s на этапе $s-1$. Но из (61) и (62) следует, что цены жилищ, не входящих в это множество, неизменны на этапе $s-1$, если $s > a$. Поэтому $\sum_i (\pi^b_i - \pi^a_i) = \sum_g \sum_{s=a+1}^{b} (\pi^s_{\delta(s,g)} - \pi^{s-1}_{\delta(s,g)}) > 0$, что невозможно, так как $\pi^b = \pi^a$.

(2) Пусть $R_{gs} < 0$ для какого-то $g \in G_1$ и $s \in [a+1, b]$. Положим $i = \delta(s, g)$. Из $R_{gs} < 0$ получаем $b_{gi}(s-1) - b_{gi}(s) > Q_{gi}(s-1) \geq 0$. Из Предположения 8 и EQ-процедуры следует, что π^s_i, $w_g(s)$, $b_{gi}(s)$ и $Q_{gi}(s-1)$ рациональны и кратны δ. Теперь ясно, что $b_{gi}(s-1) - b_{gi}(s) \geq \delta > 0$.

Q.E.D

.

Теорема 8. Предположение 8 обеспечивает конечность EQ-процедуры.

Доказательство. Если EQ-процедура не завершилась за M этапов, то $b_{gi}(s) - b_{gi}(s+1) \geq \delta > 0$ для некоторых $g \in G_1$, $i \in I$, $s \leq M$ (Лемма 12); δ не зависит от g, i, s. Применим Лемму 12 к завершающей ситуации этапа M. Если процедура не завершится за следующие M этапов, то в течение этих M этапов одна из отправных цен уменьшится не менее чем на $\delta > 0$. Отправные цены не возрастают и ограничены снизу по Следствию из Леммы 8; поэтому процедура конечна.

Q.E.D

.

Лемма 13. Для любого вальрасова равновесия (z, p) существует нормальное равновесие (z^0, p^0), такое что $\zeta(z^0) = \zeta(z)$.

Доказательство. Пусть (z, p) — равновесие. По Лемме 3 существует вектор p^1, такой что (z, p^1) — равновесие и $c(p^1_{d(g)}) \geq \psi_{gd(g)}$ для всех $g \in G_2$. Пусть $\pi^1 = c(p^1)$. Предположим, что равновесие (z, p^1) не является нормальным. Тогда существуют такие i и j, что $i \sim j$ и $\pi^1_i > \pi^1_j \geq 0$. Если $i \notin \{j(z, g) \mid g \in G_1\}$, то $g(i) \in G_2$, так как $\pi^1_i > 0$. Из $i \sim j$ следует $g(j) \in G_2$ и $\pi^1_i > \pi^1_j \geq \psi_{g(j)j} = \psi_{g(i)i}$, что противоречит Лемме 2. Поэтому $i = j(z, h)$ для некоторого $h \in G_1$. Если $\delta(h) \notin \{i, j\}$, то $(\psi_{hj} - \psi_{hi}) - (\pi^1_j - \pi^1_i) = \pi^1_i - \pi^1_j > 0$. Если $\delta(h) = j$, то $(\psi_{hj} - \psi_{hi}) - (\pi^1_j - \pi^1_i) = (b_{hj} - b_{hi}) - (q^2_{hj} - \rho \cdot q^1_{hi} - q^2_{hi}) - (\pi^1_j - \pi^1_i) = \rho \cdot q^1_{hi} + \pi^1_j - \pi^1_i > 0$. В обоих случаях получаем противоречие с Леммой 1. Следовательно, $j(z, h) = \delta(h) = i$.

Определим $\pi^2 \in P$: $\pi^2_i = \pi^1_j$, $\pi^2_k = \pi^1_k$ для $k \neq i$. Обозначим через p^2 вектор цен, однозначно определенный условием $c(p^2) = \pi^2$ и определим $z^2 \in FD$ следующим образом: $z^2_g = (y_{gj(z,g)}(p^2), j(z,g))$ для всех $g \in G$. Покажем, что (z^2, p^2) — равновесие. Условие (10) выполнено для (z^2, p^2), так как оно выполнено для (z, p^1) и $\pi^2 \leq \pi^1$. Если $k \neq i$, то, применяя Лемму 1 для равновесия (z, p^1), получаем $\pi^2_i - \pi^2_k < \pi^1_i - \pi^1_k \leq \psi_{hi} - \psi_{hk}$. Пусть $g \in G_1 \setminus \{h\}$. Тогда $j(z, g) \neq i$ и $\delta(g) \neq i$. Если $k \neq i$, то, применяя Лемму 1 для равновесия (z, p^1), получаем $\pi^2_{j(z,g)} - \pi^2_k = \pi^1_{j(z,g)} - \pi^1_k \leq \psi_{gj(z,g)} - \psi_{gk}$. Из $i \sim j$ следует, что $\psi_{gi} = \psi_{gj}$, если $\delta(g) \neq j$, и $\psi_{gi} \leq \psi_{gj}$, если $\delta(g) = j$. Поэтому $\pi^2_{j(z,g)} - \pi^2_i = \pi^1_{j(z,g)} - \pi^1_j \leq \psi_{gj(z,g)} - \psi_{gj} \leq \psi_{gj(z,g)} - \psi_{gi}$. Таким образом, (z^2, p^2) удовлетворяет условию (9) при всех $g \in G_1$ (Лемма 1). Если $g \in G_2$ и $d(g) \neq i$, то (9) выполнено для g, так как $\pi^1_k = \pi^2_k$ для всех $k \in J_g$. Если $g \in G_2$ и $d(g) = i$, то $g(j) \in G_2$ и $\psi_{gi} = \psi_{g(j)j} \leq \pi^1_j = \pi^2_i < \pi^1_i$; поэтому $j(z, g) = j(z^2, g) = 0$ и $u_g(z^2) - v_{gi}(p^2)$

$= \pi_i^2 - \psi_{gi} \geq 0$. Теперь (9) доказано для всех $g \in G$. Следовательно, (z^2, p^2) — равновесие. При этом $\zeta(z^2) = \zeta(z)$ и $\pi_i^2 = \pi_j^2$. Ясно, что продолжая процедуру мы построим искомое нормальное равновесие.

Q.E.D.

Лемма 14. Пусть (z, p) — нормальное равновесие и $g \approx h$. Если $\delta(g) \sim \delta(h)$ и $\{g, h\} \subseteq G_1$, то $u_g(z) = u_h(z)$; если $\{g, h\} \subseteq G_2$, то $u_g(z) - u_h(z) = w_g - w_h$.

Доказательство. Пусть (z, p) — нормальное равновесие, $\pi = c(p)$ и $g \approx h$. Предположим, что $\{g, h\} \subseteq G_1$ и $\delta(g) \sim \delta(h)$. Тогда $\pi_{\delta(g)} = \pi_{\delta(h)}$ и $\pi_{d(g)} = \pi_{d(h)}$. Пусть $i = j(z, g)$. Если $i \notin \{\delta(g), \delta(h)\}$, то $u_g(z) = w_g + \pi_{d(g)} - \pi_i + \psi_{gi} = w_h + \pi_{d(h)} - \pi_i + \psi_{hi} = v_{hi}(p) \leq u_h(z)$ по (9). Если $i \in \{\delta(g), \delta(h)\}$, то $b_{gi} - q_{gi}^2 = b_{hi} - q_{hi}^2 = b_{h\delta(h)} - q_{h\delta(h)}^2$. Вспомним, что $q_{g\delta(g)}^1 = q_{h\delta(h)}^1 = 0$. Поэтому, если $i = \delta(g)$, то $u_g(z) = v_{g\delta(g)}(p) = v_{h\delta(h)}(p) \leq u_h(z)$. Если же $i = \delta(h)$, то $u_g(z) = w_g + \pi_{d(g)} - \pi_i + b_{gi} - q_{gi} \leq w_g + \pi_{d(h)} - \pi_i + b_{hi} - q_{hi}^2 = v_{hi}(p) \leq u_h(z)$. Таким образом, $u_g(z) \leq u_h(z)$ в любом случае. Но $g \approx h$ влечет $h \approx g$, поэтому $u_g(z) = u_h(z)$. Предположим теперь, что $\{g, h\} \subseteq G_2$. Тогда $d(g) \sim d(h)$, $\pi_{d(g)} = \pi_{d(h)}$ и, используя Лемму 2, мы имеем $u_g(z) - w_g = \max\{\psi_{gd(g)}, \pi_{d(g)}\} = \max\{\psi_{hd(h)}, \pi_{d(h)}\} = u_h(z) - w_h$.

Q.E.D

.

Теорема 9. Для всякого нормального равновесия (z, p) существует стандартное равновесие (z^0, p), такое что $j(z^0, g) \sim j(z, g)$ для всех $g \in G_1$.

Доказательство. Пусть (z, p) — нормальное равновесие (оно существует по Лемме 13) и $\pi = c(p)$. Если равновесие (z, p) не стандартно, то $\delta(g) \sim j(z, g) \neq \delta(g)$ для некоторого $g \in G_1$. Выберем такое g и положим $j = j(z, g)$, $i = \delta(g)$. Тогда $i \neq 0$, $j \neq 0$, $\pi_i = \pi_j$, $b_{gi} - q_{gi}^2 = b_{gj} - q_{gj}^2$ и $u_g(z) = w_g + \pi_{d(g)} - \pi_j + b_{gj} - q_{gj} \leq w_g + \pi_{d(g)} - \pi_i + b_{gi} - q_{gi}^2 = v_{gi}(p)$. Учитывая (9), получаем $u_g(z) = v_{gi}(p)$ (жилища i и j равноценны для агента g). Положим $k(g) = i$. Если $i = j(z, h)$ для некоторого $h \in G_2$, то $i = d(h)$ (так как $J_h = \{d(h), 0\}$ и $i \neq 0$) и $\pi_i \leq \psi_{hi}$ (Лемма 2). Из $i \sim j$ следует, что $g(j) \in G_2$ и $\pi_j = \pi_i \leq \psi_{hi} = \psi_{g(j)j}$. Но $j(z, g) = j$ влечет $\pi_j \geq \psi_{g(j)j}$ (Лемма 2). Поэтому $\pi_i = \psi_{hi}$ (нуль и i равноценны для агента h). Положим $k(h) = 0$. Если $i = j(z, h)$ для некоторого $h \in G_1$, то из (8) и Предположения 1′ следует, что $h \neq g$ и $\delta(h) \neq i$ (потому что $i \neq 0$). Если $\delta(h) = j \sim i = j(z, h)$, то, как доказано выше, $u_h(z) = v_{hj}(p)$. Если $\delta(h) \neq j$, то $\delta(h) \notin \{i, j\}$ и $\psi_{hi} = \psi_{hj}$ (так как $i \sim j$); тогда $u_h(z) - v_{hj}(p) = \pi_j - \pi_i + \psi_{hi} - \psi_{hj} = 0$. В любом случае жилища i и j равноценны для агента h. Положим $k(h) = j$. Положим $k(h) = j(z, h)$ для всех $h \in G$, таких что $h \neq g$ и $j(z, h) \neq i$. Ясно, что $k(h) \sim j(z, h)$ для всех $h \in G_1$. Положим $z^1 = (z^1(h) \mid h \in G)$, где $z^1(h) = (y_{hk(h)}(p), k(h))$. Легко видеть, что (z^1, p) — нормальное равновесие, и в этом равновесии число агентов рынка, для которых нарушено условие стандартности нормального равновесия, меньше, чем в z. Повторяя процедуру, мы построим стандартное равновесие (z^0, p).

Q.E.D

.

Лемма 15. Если $h \in \mathrm{GS}$, то $I(\tau(h)) = \{d(g) \mid g \in G(h, 0)\}$.

Доказательство. Если $h \in \mathrm{GS}$, то все жилища, принадлежащие поставщикам группы h, имеют тип $\tau(h)$. И обратно, если $i \in I(\tau(h))$, то i принадлежит поставщику группы h (см. определение типа жилища).

Q.E.D

.

Лемма 16. Определение величин a_{nkh} корректно.

Доказательство. Пусть величина a_{nkh} определена, $\{i, j\} \in I(k)$ и $\{x, y\} \subseteq G(h, n)$; тогда $x \approx y$, $i \sim j$ и $\{\delta(x), \delta(y)\} \subseteq I(n)$. Из $x \approx y$ следует, что либо $\{x, y\} \subseteq G_1$, либо $\{x, y\} \subseteq G_2$. Допустим, что $\{x, y\} \subseteq G_1$. Если $k \neq n$, то $\{i, j\} \cap \{\delta(x), \delta(y)\} = \varnothing$; тогда из $x \approx y$ и $i \sim j$ следует $\psi_{xi} = \psi_{yi} = \psi_{yj}$. Поэтому a_{nkh} определено однозначно. Если $n = k$, то из $x \approx y$ и $\delta(x) \sim \delta(y)$ следует, что $\psi_{x\delta(x)} = b_{x\delta(x)} - q^2_{x\delta(x)} = b_{x\delta(y)} - q^2_{x\delta(y)} = b_{y\delta(y)} - q^2_{x\delta(y)} = \psi_{y\delta(y)}$ и определение a_{nnh} корректно. Допустим, что $\{x, y\} \subseteq G_2$. Тогда $\psi_{x0} = \psi_{y0} = 0$ по определению и $\psi_{xd(x)} = \psi_{yd(y)}$, так как $d(x) \sim d(y)$. Следовательно, определение a_{nkh} корректно при $k \in \{0, \tau(h)\}$.

Q.E.D

.

Лемма 17. Если $h \in \mathrm{GS}$ и X — допустимое решение задачи АТ, то $\sum_m \sum_{a \in \mathrm{GC}} X_{m\tau(h)a} \leq X_{00h}$.

Доказательство. Пусть $h \in \mathrm{GS}$ и X — допустимое решение задачи АТ.

Ясно, что $\cup_{g\in G(h,0)} J_g = \{d(g) \mid g\in G(h, 0)\} \cup \{0\}$. Из Леммы 15 следует, что переменные X_{0kh} определены только для $k\in\{\tau(h), 0\}$. Для $k = \tau(h)$ и $n = 0$ условия (39) и (38) принимают вид $\sum_m\sum_{a\in GC} X_{m\tau(h)a} + X_{0\tau(h)h} \le C_{\tau(h)}$ и $X_{0\tau(h)h} + X_{00h} = D_{h0}$. Утверждение леммы следует из $C_{\tau(h)} = D_{h0}$ (Лемма 15).

Q.E.D

.

Теорема 10.[4] Если (z, p) — стандартное равновесие, $x = x(z)$, $X_{nkh} = \sum_{g\in G(h,n)}\sum_{i\in I(k)} x_{gi}$ для $(n, k, h)\in U$, $\gamma_{hn} = \alpha_g(z, p)$ для $g\in G(h, n)$ и $\pi_k = c(p_i)$ для $i\in I(k)$, то X и (γ, π) — оптимальные решения задач АТ и АТ* соответственно. Если X — целочисленное (в частности, базисное) оптимальное решение задачи АТ, (γ, π) — оптимальное решение задачи АТ*, $\bar\pi_i = \pi_k$ для $i\in I(k)$ и $\bar\pi = (\bar\pi_i \mid i\in I)$, то существует базисное оптимальное решение x задачи Т, такое что $(z(x, \bar\pi), r(\bar\pi))$ — стандартное равновесие и $X_{nkh} = \sum_{g\in G(h,n)}\sum_{i\in I(k)} x_{gi}$.

Доказательство. (1) Пусть (z, p) — стандартное равновесие и $x = x(z)$. Из определения нормального равновесия и Леммы 11 следует, что γ и π в формулировке теоремы определены корректно. Ясно, что если $X_{nkh} = \sum_{g\in G(h,n)}\sum_{i\in I(k)} x_{gi}$, то X — допустимое решение задачи АТ. По Теореме 2 $(\alpha(z,p), c(p))$ — оптимальное решение Т*, поэтому (γ, π) — допустимое решение АТ*. Кроме того, из $i \sim \delta(g)$ и $i \ne \delta(g)$ следует, что $x_{gi} = 0$ (так как (z, p) — стандартное равновесие). Поэтому $\sum_{n,k,h} a_{nkh}\cdot X_{nkh} = \sum_{g,i} \psi_{gi}\cdot x_{gi} = \sum_g \alpha_g(z, p) + \sum_i c(p_i) = \sum_{h,n}\sum_{g\in G(h,n)} \alpha_g(z, p) + \sum_k\sum_{i\in I(k)} c(p_i) = \sum_{h,n} D_{hn}\cdot\gamma_{gn} + \sum_k C_k\cdot\pi_k$. Поэтому X и (γ, π) — оптимальные решения задач АТ и АТ*, соответственно.

(2) Заметим, что задача АТ вполне унимодулярна, поэтому все ее базисные допустимые решения целочисленны. Пусть X — целочисленное оптимальное решение АТ и (γ, π) — оптимальное решение АТ*. Опишем процедуру построения вектора x. Вначале все компоненты x_{gi} вектора x равны нулю. Полагая $x_{gi} = 1$, будем подразумевать, что $x_{gk} = 0$ для всех $k\in J_g \setminus \{i\}$, и говорить, что вектор $x_g = (x_{gk} \mid k\in J_g)$ *определен* и жилище *i распределено* (если $i \ne 0$). Для

[4] В формулировке и доказательстве использованы определения из раздела 2.1.

каждой пары (h, n), такой что $G(h, n) \neq \varnothing$ и $h \in \mathrm{GC}$, выберем X_{nnh} представителей в $G(h, n)$, таких что x_g еще не определен для каждого выбранного агента g (выбор возможен, потому что $X_{nnh} \leq D_{hn}$). Положим $x_{g\delta(g)} = 1$ для каждого выбранного агента g. Если $n = \tau(b)$ для некоторого $b \in \mathrm{GS}$, то жилища, исходно занятые выбранными агентами, принадлежат поставщикам группы b; для каждого такого поставщика g вектор x_g еще не определен, и мы полагаем $x_{g0} = 1$.

Дальнейшее построение происходит по шагам. Для $(n, k, h) \in U$ обозначим через X^s_{nkh} количество всех (n, h)-агентов g, таких что мы положили $x_{gi} = 1$ для $i \in I(k)$ до шага s. Ясно, что X^s_{nkh}— это сумма по $g \in G(h, n)$ и $i \in I(k)$ компонент x_{gi} всех векторов x_g, определенных до шага s. Положим $I^s(k) = \sum_{n,h} X^s_{nkh}$ (если $k \neq 0$, то $I^s(k)$ — это число жилищ из $I(k)$, распределенных до шага s). Из предшествующего построения следует, что: $X^1_{nkh} = X_{nkh}$, если $k = n$ и $h \in \mathrm{GC}$; $X^1_{nkh} = \sum_{a \in \mathrm{GC}} X_{\tau(h)\tau(h)a} \leq X_{00h}$, если $n = k = 0$ и $h \in \mathrm{GS}$ (Лемма 17); $X^1_{nkh} = 0$ в остальных случаях. Кроме того, $I^1(k) = \sum_{h \in \mathrm{GC}} X_{kkh} \leq C_k$ по (39), если $k \neq 0$, и $I^1(0) = \sum_{h \in \mathrm{GC}} X_{00h} + \sum_{b \in \mathrm{GS}} \sum_{h \in \mathrm{GC}} X_{\tau(b)\tau(b)h} \leq \sum_h X_{00h} \leq C_0$ по Лемме 17 и (39). Опишем теперь шаг $s \geq 1$.

Допустим, что перед шагом s выполнены следующие *начальные условия*: если $k \neq 0$ или $h \in \mathrm{GC}$, то $X^s_{nkh} \in \{X_{nkh}, 0\}$; если $h \in \mathrm{GS}$ и $k \in \{\tau(h), 0\}$, то $X^s_{0kh} \leq X_{0kh}$; $I^s(k) \leq C_k$ для всех k. Эти условия выполнены перед шагом 1. Возможны следующие случаи.

(a) $X^s_{nkh} = 0$ для какой-то тройки $(n, k, h) \in U$ при $h \in \mathrm{GC}$. Тогда $k \neq n$. Выберем в $G(h, n)$ X_{nkh} представителей так, что вектор x_g еще не определен для каждого выбранного агента g (выбор возможен, так как $\sum_{m \neq k} X^s_{nmh} + X_{nkh} \leq \sum_m X_{nmh} = D_{hn}$). Выберем также X_{nkh} еще не распределенных жилищ из $I(k)$ (это возможно, так как $I^s(k) + X_{nkh} = \sum_{(m,a) \neq (n,h)} X^s_{mka} + X_{nkh} \leq \sum_{m,a} X_{mka} \leq C_k$). Установим произвольное взаимно однозначное соответствие $i(g)$ между выбранными агентами и жилищами. Положим $x_{gi(g)} = 1$ для всех g. Если $k = \tau(b)$ для некоторого $b \in \mathrm{GS}$, то жилища, распределенные на шаге s, принадлежат поставщикам группы b; для каждого такого поставщика g вектор x_g еще не определен (по построению мы определяем x_g для $g \in G_2$

только после того, как $d(g)$ распределено), и мы полагаем $x_{g0} = 1$. Шаг s закончен. Заметим, что начальные условия выполнены для $s + 1$. В частности, $I^{s+1}(0) = \sum_n \sum_{h\in GC} X^{s+1}_{n0h} + \sum_{b\in GS} \sum_n \sum_{h\in GC} X^{s+1}_{n\tau(b)h} \le \sum_n \sum_{h\in GC} X_{n0h} + \sum_{b\in GS} \sum_n \sum_{h\in GC} X_{n\tau(b)h} \le \sum_{n,h} X_{n0h} \le C_0$ по Лемме 17 и (39), и $X^{s+1}_{00h} = \sum_n \sum_{a\in GC} X^{s+1}_{n\tau(h)a} \le \sum_n \sum_{a\in GC} X_{n\tau(h)a} \le X_{00h}$ для $h\in GS$ по Лемме 17.

(b) Случай (a) не выполнен и $X^s_{00h} < X_{00h}$ для некоторого $h\in GS$. Тогда случай (c) не выполнялся до шага s, поэтому $X^s_{0\tau(h)h} = 0$. Выберем $X_{00h} - X^s_{00h}$ поставщиков в группе h, таких что вектор x_g еще не определен для каждого выбранного агента g (это возможно, так как $D_{h0} - X^s_{00h} \ge X_{00h} - X^s_{00h}$). Положим $x_{g0} = 1$ для каждого выбранного агента g. Шаг s закончен. Начальные условия для $s + 1$ выполнены с очевидностью.

(c) Предыдущие случаи не выполнены и $X^s_{nkh} < X_{nkh}$ для некоторой тройки $(n, k, h)\in U$. Тогда $(n, k, h) = (0, \tau(h), h)$ для некоторого $h\in GS$, $X^s_{00h} = X_{00h}$ и $X^s_{0\tau(h)h} = 0$. $D_{h0} = X_{00h} + X_{0\tau(h)h}$ по (38), поэтому в группе h можно выбрать $X_{0\tau(h)h}$ поставщиков, таких что вектор x_g еще не определен и, следовательно, жилище $d(g)$ еще не распределено для каждого выбранного агента g. Положим $x_{gd(g)} = 1$ для каждого выбранного агента g. Шаг s закончен и начальные условия для $s + 1$ выполнены.

(d) $X^s_{nkh} = X_{nkh}$ для всех $(n, k, h)\in U$. Построение завершено.

После конечного числа шагов построение будет завершено, векторы x_g будут определены для всех g, и допустимое решение x задачи T будет построено. Ясно, что $\sum_{g\in G(h,n)} \sum_{i\in I(k)} x_{gi} = X_{nkh}$ для всех $(n, k, h)\in U$. Положим $\alpha_g = \gamma_{hn}$ для $g\in G(h, n)$ и $\bar{\pi}_i = \pi_k$ для $i\in I(k)$. Очевидно, $(\alpha, \bar{\pi})$ — допустимое решение задачи T*. X и (γ, π) — оптимальные решения AT и AT* соответственно, поэтому $\sum_{g,i} \psi_{gi} \cdot x_{gi} = \sum_{n,k,h} a_{nkh} \cdot X_{nkh} = \sum_{h,n} D_{hn} \cdot \gamma_{hn} + \sum_k C_k \cdot \pi_k = \sum_g \alpha_g + \sum_i \bar{\pi}_i$; поэтому x и $(\alpha, \bar{\pi})$ — оптимальные решения задач T и T*, соответственно. Тогда x — базисное (потому что целочисленное) оптимальное решение T. Из Теоремы 2 и определений векторов x и $\bar{\pi}$ следует, что

$(z(x, \bar\pi), r(\bar\pi))$ — стандартное равновесие.

Q.E.D

.

Теорема 11. $\max\{\pi_j \mid \pi\in\Pi(A_2)\} - \psi_{fj} \le \delta \le \min\{\pi_j \mid \pi\in\Pi(A_1)\} - \psi_{fj}$.

Доказательство. Если $c(p) = \pi\in\Pi(A)$, то (z, p) — стандартное равновесие для ситуации A при некотором z. Тогда (γ, π) — оптимальное решение задачи AT* при некотором γ (Теорема 10). Заметим, что $\delta = F_0(A_2) - F_0(A_1) - w_f - \psi_{fj} = f_0(A_2) - f_0(A_1) - \psi_{fj}$. Обозначим AT*$(k)$, $k\in\{1, 2\}$, задачу AT* в ситуации A_k и пусть $F_k(\gamma, \pi)$ — целевая функция задачи AT*(k). Ясно, что задачи AT*(k) имеют одно и то же множество допустимых решений D. Пусть $\pi^k\in\Pi(A_k)$, (γ^k, π^k) — оптимальное решение задачи AT*(k). Тогда $f_0(A_2) = F_2(\gamma^2, \pi^2) \le F_2(\gamma^1, \pi^1) = F_1(\gamma^1, \pi^1) + \pi_j^1 = f_0(A_1) + \pi_j^1$. С другой стороны, для $(\gamma, \pi)\in D$ имеем $F_2(\gamma, \pi) = F_1(\gamma, \pi) + \pi_j \ge F_1(\gamma^1, \pi^1) + \pi_j$, откуда при $(\gamma, \pi) = (\gamma^2, \pi^2)$ получаем $f_0(A_2) \ge f_0(A_1) + \pi_j^2$. Следовательно, $\pi_j^2 \le \delta + \psi_{fj} \le \pi_j^1$. Теорема доказана, так как системы цен $\pi^k\in\Pi(A_k)$ выбраны произвольно.

Q.E.D

.

Лемма 18. Пусть $e = (z, p)$ — равновесие для ситуации A_2 и $\lambda = \langle j(1), \ldots, j(n+1)\rangle$ — реализованная в e последовательность. (a) Если $j(s+1) \ne j$, то $\delta_{j(s)}(p) \le \delta_{j(s+1)}(p)$. (b) Если λ — цикл, то $\delta_i(p)$ одинаковы для всех $i\in I(\lambda)$. (c) Если λ — цепь, то $\delta_i(p) \ge 0$ для $i\in I(\lambda) \setminus \{j\}$. (d) Если λ — цепь первого типа, то $\delta_i(p) = 0$ для $i\in I(\lambda)$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что λ — максимальная по вложению реализованная в e последовательность. Пусть $\pi = c(p)$, $j(s) = j(z^1, g(s))$. Применяя Лемму 1 к равновесиям e_1 и e, получаем:

$$\psi_{g(s)j(s)} - \psi_{g(s)j(s+1)} \ge \pi^1_{j(s)} - \pi^1_{j(s+1)} \quad \text{и} \quad \psi_{g(s)j(s+1)} - \psi_{g(s)j(s)} \ge \pi_{j(s+1)} - \pi_{j(s)}. \tag{67}$$

Тогда $\pi^1_{j(s)} - \pi^1_{j(s+1)} \le \pi_{j(s)} - \pi_{j(s+1)}$, откуда $\delta_{j(s)}(p) \le \delta_{j(s+1)}(p)$. Утверждение (a) доказано. Если λ — цикл, то из (a) получаем $\delta_{j(1)}(p) \le \delta_{j(2)}(p) \le \ldots \le \delta_{j(n)}(p) \le \delta_{j(1)}(p)$, откуда следует (b). Пусть λ — цепь. Если $j(1) = 0$, то $\delta_{j(1)}(p) = 0$. Пусть $j(1) \ne 0$. Тогда $j(1)\notin\{j(z, g) \mid g\in G\}$, $\pi_{j(1)} = 0$ по (10) и $\delta_{j(1)}(p) \ge 0$. Теперь (c) следует из (a).

Пусть λ — цепь первого типа и $k = j(n+1)$. Из максимальности λ следует, что $k \in F$. Тогда $\pi_k^1 = 0$ по (10) и из Предположения 1′ следует, что $k \notin \{d(g) \mid g \in G_1\}$. Допустим, что $g(k) = g \in G_2$. По определению реализованной в e последовательности $k = j(z, h)$ для некоторого $h \in G$. Если $h \in G_1$, то, по Лемме 2, $\pi_k \geq \psi_{gk} \geq 0 = \pi_k^1$. Если же $h \in G_2$, то $h = g$, $\lambda = \langle 0, k \rangle$, $j(z^1, g) = 0$, $j(z, h) = k$. Применяя Лемму 2 к равновесиям e и e_1, получим $0 = \pi_k^1 \geq \psi_{gk} \geq \pi_k$, т.е. $\pi_k^1 = \pi_k = 0$. Если $k = 0$, то опять $\pi_k^1 = \pi_k = 0$. Итак, в любом случае $\delta_k(p) \leq 0$. Теперь из (a) и (c) получаем $0 \leq \delta_{j(1)}(p) \leq \ldots \leq \delta_{j(n+1)}(p) \leq 0$, откуда следует (d).

Q.E.D

.

Лемма 19. Если (z, p) — равновесие для ситуации A_2 и $j \notin I(\lambda_g(z))$, то $v_{g\delta(g)}(p) = u_g(z)$.

Доказательство. Пусть $a = j(z^1, g) = \delta(g)$, $b = j(z, g)$, $j \notin I(\lambda_g)$. Из (67) следует, что $(\psi_{ga} - \psi_{gb}) - (\pi_a^1 - \pi_b^1) \geq 0 \geq (\psi_{ga} - \psi_{gb}) - (\pi_a - \pi_b)$. Но λ_g — цепь первого типа или цикл, поэтому $\delta_a = \delta_b$ (Лемма 18), откуда $\pi_a^1 - \pi_b^1 = \pi_a - \pi_b$. Тогда $0 = (\psi_{ga} - \psi_{gb}) - (\pi_a - \pi_b) = v_{ga}(p) - u_g(z)$.

Q.E.D

.

Теорема 12. Если $(z, p) \in \mathrm{SE}(\lambda)$ и $\bar{z}_g = (y_{gj(z,g)}(\bar{p}), j(z,g))$, то $(\bar{z}, \bar{p}) \in \mathrm{SE}(\lambda)$.

Доказательство. Пусть $\bar{\pi} = c(\bar{p})$. Покажем, что $(\bar{z}, \bar{p}) \in \mathrm{SE}(\lambda)$. Равновесия (z, p) и $(\bar{z}, \bar{p})$ порождают одинаковые размещения, поэтому условие (10) выполнено для $(\bar{z}, \bar{p})$. По Лемме 1 достаточно проверить для $(\bar{z}, \bar{p})$ условие:

$$\psi_{gj(z,g)} - \bar{\pi}_{j(z,g)} \geq \psi_{gi} - \bar{\pi}_i \quad \text{для } g \in G \cup \{g(j)\},\ i \in K_g. \tag{68}$$

Для $g(j)$ условие (68) выполнено, так как $\bar{\pi}_i = \pi_i$ для $i \in K_{g(j)}$. Выберем $g \in G$ и положим $a = j(z^1, g)$, $b = j(z, g)$. Поскольку e^1 и $e = (z, p)$ — равновесия для ситуаций A_1 и A_2 соответственно, справедливы неравенства

$$\psi_{ga} - \pi_a^1 \geq \psi_{gi} - \pi_i^1 \quad \text{для } i \in J_g \quad \text{и} \quad \psi_{gb} - \pi_b \geq \psi_{gi} - \pi_i \quad \text{для } i \in K_g. \tag{69}$$

Пусть $g \in G_1$, тогда $K_g = I \cup \{j\}$. Предположим, что $b \in I(\lambda)$. Тогда $a \in I(\lambda)$. По Лемме 18 $\bar{\pi}_b = \pi_b$ и $\bar{\pi}_a = \pi_a \le \pi_a^1$. Из (69) получаем $\psi_{gb} - \pi_b \ge \psi_{ga} - \pi_a \ge \psi_{ga} - \pi_a^1 \ge \psi_{gi} - \pi_i^1$ для $i \in I$. Отсюда, учитывая второе из неравенств (69), следует (68) для $i \in I$, так как $\bar{\pi}_i \in \{\pi_i^1, \pi_i\}$; (68) для $i = j$ следует из (69) и $\bar{\pi}_j = \pi_j$. Допустим теперь, что $b \notin I(\lambda)$. Тогда $b = a$, $\psi_{gb} - \bar{\pi}_b = \max\{\psi_{gb} - \pi_b, \psi_{gb} - \pi_b^1\}$ по определению $\bar{p}$. Если $i \in I$, то из (69) следует $\psi_{gb} - \bar{\pi}_b \ge \max\{\psi_{gi} - \pi_i^1, \psi_{gi} - \pi_i\} = \psi_{gi} - \bar{\pi}_i$. При $i = j$ из (69) получаем $\psi_{gb} - \bar{\pi}_b \ge \psi_{gj} - \pi_j = \psi_{gj} - \bar{\pi}_j$.

Пусть $g \in G_2$, тогда $J_g = K_g = \{0, d(g)\}$ и $\psi_{gd(g)} \ge 0$ по определению. Если $j(z, g) = d(g)$, то $\pi_{d(g)} \le \psi_{gd(g)}$ по (9), поэтому и $\bar{\pi}_{d(g)} \le \psi_{gd(g)}$. Допустим, что $j(z, g) = 0$, тогда $\pi_{d(g)} \ge \psi_{gd(g)}$ по Лемме 2. Если $d(g) \in \{j(z, h) \mid h \in G_1\} \subseteq \{j(z^1, h) \mid h \in G_1\}$, то $\pi^1_{d(g)} \ge \psi_{gd(g)}$ по Лемме 2, поэтому $\bar{\pi}_{d(g)} \ge \psi_{gd(g)}$. Если $d(g) \notin \{j(z, h) \mid h \in G_1\}$, то $\pi_{d(g)} = 0$, откуда $\bar{\pi}_{d(g)} = \psi_{gd(g)} = 0$. В любом случае условие (68) выполнено.

Q.E.D

.

Теорема 13. $e(\lambda, \hat{p}) \in \mathrm{SE}(\lambda)$ и $\hat{p}_i \le p_i^1$ для $i \in I$.

Доказательство. Покажем, что $e(\lambda, \hat{p})$ — равновесие. Достаточно проверить условия $\hat{p} \ge 0$, $\hat{p}_0 = 0$, (9) и (10). Если $g(i) \in G_2$, то в графе Γ есть путь $\mu = \langle 0, i \rangle$ и $\hat{\pi}_i \ge \Delta(\mu) = \psi_{g(i)i} \ge 0$. Если $g(i) \in G_1$, то $j(z^1, g) = i$, в графе Γ есть путь $\mu = \langle i, i \rangle$ и $\hat{\pi}_i \ge \Delta(\mu) = 0$. Наконец, в графе Γ есть путь $\mu = \langle 0, 0 \rangle$, поэтому $\hat{\pi}_0 \ge \Delta(\mu) = 0$. С другой стороны, μ_0 — цепь первого типа или цикл, и $\hat{\pi}_0 = \Delta(\mu_0) \le 0$ по Теореме 2 (так как (z^1, p) — равновесие). Следовательно, $\hat{p} \ge 0$ и $\hat{p}_0 = 0$.

Пусть $i \ne 0$ и $i \notin \{j(\lambda, g) \mid g \in G\}$. Тогда $i \in F \cup \{j(1)\}$. Если $\Delta(\mu_{j(1)}) > 0$, то путь, полученный присоединением $\mu_{j(1)}$ к λ слева, имеет вес $\Delta(\mu_{j(1)}) + \Delta(\lambda) > \Delta(\lambda)$, что противоречит выбору λ. Следовательно, $\hat{p}_{j(1)} = \hat{\pi}_{j(1)} = 0$. Если $i \in F$, то μ_i — цепь первого типа и $\Delta(\mu_i) \le 0$, так как

(z^1, p) — равновесие. Отсюда, учитывая $\hat{p} \geq 0$, следует $\hat{p}_i = \hat{\pi}_i = 0$. Итак, условие (10) выполнено для $e(\lambda, \hat{p})$.

Зафиксируем $g \in G$ и положим $a = j(z^1, g)$, $b = \zeta_g(\lambda) = j(\lambda, g)$. По Лемме 1 условие (9) для $e(\lambda, \hat{p})$ эквивалентно $\psi_{gb} - \hat{\pi}_b \geq \psi_{gi} - \hat{\pi}_i$ для всех $i \in K_g$. Предположим противное: $i \in K_g$ и

$$\hat{\pi}_i < \hat{\pi}_b - \psi_{gb} + \psi_{gi}. \tag{70}$$

Допустим, что $b \in I(\lambda)$. Тогда $a \in I(\lambda)$ и, по выбору λ, $\hat{\pi}_b = \hat{\pi}_a + \psi_{gb} - \psi_{ga}$. Тогда $\hat{\pi}_b = \hat{\pi}_a + \psi_{gb} - \psi_{ga}$. Отсюда и из (70) получаем $\hat{\pi}_i < \hat{\pi}_a + \psi_{gi} - \psi_{ga} = \hat{\pi}_a + c(a, i)$, т.е. $\Delta(\mu_i) < \Delta(\mu_a) + c(a, i)$, что невозможно по определению μ_i. Пусть теперь $b \notin I(\lambda)$. Тогда $a = b$ и (70) дает $\hat{\pi}_i < \hat{\pi}_a + c(a, i)$, что приводит к противоречию, как в предыдущем случае. Таким образом, $e(\lambda, \hat{p})$ — равновесие и $e(\lambda, \hat{p}) \in \mathrm{SE}(\lambda)$ по построению.

Если $\hat{\pi}_i = 0$, то $\hat{p}_i \leq p_i^1$, в частности, из $\hat{\pi}_{j(1)} = 0$ (доказано выше) следует $\hat{\pi}_{j(1)} \leq \pi^1_{j(1)}$. Пусть $i \in I \setminus \{j(1)\}$, $\hat{\pi}_i \neq 0$ и $\mu_i = \langle i(1), i(2), \ldots, i(n) = i \rangle$. Если $\hat{\pi}_{i(1)} > 0$, то в графе Γ существует путь, вес которого больше, чем $\Delta(\mu_i)$, что невозможно. Следовательно, $\hat{\pi}_{i(1)} = 0$. Начальный отрезок пути μ_i не может иметь отрицательный вес, а начальный отрезок с нулевым весом можно из μ_i исключить. При этом $\hat{\pi}_{i(s)} = \Delta(\langle i(1), \ldots, i(s) \rangle)$. Поэтому мы можем считать, что $\hat{\pi}_{i(s)} > 0$ для $s > 1$ (в частности, $i(2) \neq 0$). Тогда $i(s) \in \{\zeta_g(\lambda) \mid g \in G\} \subseteq \{j(z^1, g) \mid g \in G\}$ для $s > 1$ (иначе говоря, жилище $i(s)$ выбрано каким-то агентом в равновесии e^1). Пусть $i(s) = j(z^1, g_s)$, $s > 1$. Из Леммы 1 для равновесия e_1 следует, что $c(i(s), i(s+1)) \leq \pi^1_{i(s+1)} - \pi^1_{i(s)}$. Суммируя эти неравенства по $s > 1$, получаем:

$$\hat{\pi}_i - \hat{\pi}_{i(2)} = \Delta(\mu_i) - c(i(1), i(2)) \leq \pi_i^1 - \pi^1_{i(2)}. \tag{71}$$

Если $i(1) \in \{j(z^1, g) \mid g \in G\}$, то, как выше, из Леммы 1 следует, $\hat{\pi}_i - \hat{\pi}_{i(1)} \leq \pi_i^1 - \pi^1_{i(1)} \leq \pi_i^1$. Но $\hat{\pi}_{i(1)} = 0$, поэтому $\hat{\pi}_i \leq \pi_i^1$. Если $i(1) \notin \{j(z^1, g) \mid g \in G\}$, то дуга $(i(1), i(2))$ имеет вид $(0, d(g))$ для некоторого $g \in G_2$ (так как $i(2) \neq 0$). Тогда $\hat{\pi}_{i(2)} = c(0, d(g)) = \psi_{gd(g)} \leq \pi^1_{i(2)}$ по Предположению 10 и из (71) следует $\hat{\pi}_i \leq \pi_i^1$.

Q.E.D

.

Следствие 1. Если $i \in I$, то $\hat{p}_i \leq \min\{p_i \mid p \in P(A_1)\}$.

Доказательство. Пусть $p \in P(A_1)$. Тогда существует распределение z для ситуации A_1, такое что $\zeta(z) = \zeta(z^1)$ и (z, p) — равновесие для этой ситуации (так как любая равновесная система цен уравновешивает всякое равновесное размещение, см. комментарий к Теореме 2). Граф Γ полностью определен размещением $\zeta(z^1)$ и не зависит от цен p^1, поэтому мы можем в Теореме 13 заменить p^1 на p.

Q.E.D

.

Следствие 2. Если $(z, p) \in \mathrm{SE}(\lambda)$, то $p_i \leq \hat{p}_i$ для $i \in I(\lambda)$.

Доказательство. Пусть $e = (z, p) \in \mathrm{SE}(\lambda)$, $\pi = c(p)$. Положим $\lambda(k) = \langle j(1), \ldots, j(k)\rangle$ (начальный отрезок пути λ). Путь λ имеет максимальный вес, поэтому $\hat{\pi}_{j(k)} = \Delta(\lambda(k))$ для $k \leq n+1$. В равновесии e^1 жилище $j(s)$, $s \leq n$, выбрано агентом $g(s)$: $j(s) = j(z^1, g(s))$. В равновесии e агент $g(s)$ выбирает $j(s+1)$. Из Леммы 1 для e получаем $c(j(s), j(s+1)) \geq \pi_{j(s+1)} - \pi_{j(s)}$. Суммируя эти неравенства по s от 1 до $k-1$, получаем $\pi_{j(k)} - \pi_{j(1)} \leq \Delta(\lambda(k)) = \hat{\pi}_{j(k)}$ для $k \leq n+1$. Из $j(1) \notin \{\zeta_g(\lambda) \mid g \in H\}$ по (10) следует, что жилище $j(1)$ имеет нулевую цену в любом равновесии из $\mathrm{SE}(\lambda)$. Тогда $\pi_{j(k)} \leq \hat{\pi}_{j(k)}$ для $k > 1$. И $p_{j(1)} = \hat{p}_{j(1)} = 0$, так как $e(\lambda, \hat{p}) \in \mathrm{SE}(\lambda)$ (Теорема 13).

Q.E.D

.

Следствие 3. Если $i \in I$, $k \in I(\mu_i) \setminus \{i\}$ и $\hat{p}_k < p_k^1$, то $\hat{p}_i < p_i^1$.

Доказательство. Пусть $\mu_i = \langle i(1), i(2), \ldots, i\rangle$. Положим $\mu_i(s) = \langle i(1), i(2), \ldots, i(s)\rangle$. Из определения пути μ_i следует, что $\hat{\pi}_{i(s)} = \Delta(\mu_i(s))$. Знаки соответственных компонент векторов $\hat{p} - p^1$ и $\hat{\pi} - \pi^1$ совпадают. Тогда $\hat{\pi}_k < \pi_k^1$, и достаточно доказать, что $\hat{\pi}_i < \pi_i^1$. Пусть $k = i(s)$ и либо $s > 1$, либо $k \in \{j(z^1, g) \mid g \in G\}$. Положим $\mu = \langle i(s), i(s+1), \ldots, i\rangle$. Рассуждая как при доказательстве неравенства (71), получим $\Delta(\mu) \leq \pi_i^1 - \pi_{i(s)}^1$. Тогда

$\hat{\pi}_i - \hat{\pi}_{i(s)} = \Delta(\mu) \leq \pi_i^1 - \pi_{i(s)}^1$, откуда $\pi_i^1 - \hat{\pi}_i \geq \pi_{i(s)}^1 - \hat{\pi}_{i(s)} > 0$ по условию. Если же $k = i(1)$ и $k \notin \{j(z^1, g) \mid g \in G\}$, то $\pi_k^1 = 0$ по (10) и $\hat{p}_k \geq p_k^1$ вопреки условию.

Q.E.D

.

Теорема 14. $e(\tilde{p})$ — равновесие для ситуации A. Если $p \in P(A)$ и $c(p_{d(g)}) \geq \psi_{gd(g)}$ для всех $g \in G_2$, то $\tilde{p} \leq p$.

Доказательство. Достаточно проверить условия $\tilde{p} \geq 0$, $\tilde{p}_0 = 0$, (9) и (10). Если $g(i) \in G_2$, то в графе $\Gamma(\zeta)$ есть путь $\mu = \langle 0, i \rangle$ и $\tilde{\pi}_i \geq \Delta(\mu) = \psi_{g(i)i} \geq 0$. Если $g(i) \in G_1$, то $\zeta(g) = i$, в графе $\Gamma(\zeta)$ есть путь $\mu = \langle i, i \rangle$ и $\tilde{\pi}_i \geq \Delta(\mu) = 0$. Наконец, в графе Γ есть путь $\mu = \langle 0, 0 \rangle$, поэтому $\tilde{\pi}_0 \geq \Delta(\mu) = 0$. С другой стороны, путь μ_0, завершающийся в нуле, не может иметь положительный вес по Теореме 2 (так как ζ — равновесное размещение). Следовательно, $\tilde{p} \geq 0$ и $\tilde{p}_0 = 0$.

Пусть $i \neq 0$ и $i \notin \{\zeta(g) \mid g \in G\}$. Тогда, как в случае $i = 0$, $\Delta(\mu_i) \leq 0$ по Теореме 2. Отсюда, учитывая $\tilde{p} \geq 0$, следует $\tilde{p}_i = 0$. Условие (10) выполнено для $e(\tilde{p})$.

Зафиксируем $g \in G$ и положим $b = \zeta(g)$. Для любого $i \in J_g$ имеем $\Delta(\mu_i) \geq \Delta(\mu_b) + c(b, i)$. Тогда $\tilde{\pi}_i < \tilde{\pi}_b - \psi_{gb} + \psi_{gi}$, а это по Лемме 1 эквивалентно условию (9) для $e(\tilde{p})$. Таким образом, $e(\tilde{p})$ — равновесие.

Пусть $p \in P(A)$ и $\pi = c(p)$. Выберем $i \in I$. Если $\tilde{p}_i = 0$, то $\tilde{p}_i \leq p_i$. Пусть $\tilde{p}_i > 0$ и $\mu_i = \langle i(1), i(2), \ldots, i(n) = i \rangle$. Путь, завершающийся в нуле, не может иметь положительный вес по Теореме 2 (так как ζ — равновесное размещение), поэтому можно считать, что $i(k) \neq 0$ для $k \geq 2$. Тогда, по определению графа $\Gamma(\zeta)$, $i(k) \in \{\zeta(g) \mid g \in G\}$ для $k \geq 2$. Предположим сначала, что $i(1) \in \{\zeta(g) \mid g \in G\}$, тогда $i(k) = \zeta(g(k))$ для $k \geq 1$. По Лемме 1 имеем $\psi_{g(k)i(k+1)} - \psi_{g(k)i(k)} \leq \pi_{i(k+1)} - \pi_{i(k)}$. Суммируя эти неравенства по k от 1 до $n-1$, получаем $\tilde{\pi}_i - \tilde{\pi}_{i(1)} \leq \pi_i - \pi_{i(1)} \leq \pi_i$. Но $\tilde{\pi}_{i(1)} = 0$ (так как μ_i — путь максимального веса с концом i), поэтому $\tilde{\pi}_i \leq \pi_i$. Пусть теперь $i(1) \notin \{\zeta(g) \mid g \in G\}$. Тогда $(i(1), i(2)) = (0, d(g))$ для некоторого $g \in G_2$ и $\zeta(g) = d(g)$. Отсюда следует, что дуга $(i(2), 0)$ с весом $(-\psi_{gd(g)}) \le 0$ — единственная дуга в графе $\Gamma(\zeta)$, выходящая из $i(2)$. Тогда $\mu_i = \langle i(1), i(2)\rangle$, $i = i(2)$ и $\tilde{\pi}_i = \Delta(\mu_i) = \psi_{gd(g)} \le \pi_i$ по условию.

Q.E.D

.

Лемма 20. Если $e = (z, p)$ — равновесие для ситуации A_2, $p \le p^1$ и $g \in G_1$, то $u_g(z^1) \le u_g(z)$.

Доказательство. Пусть $\pi = c(p)$, $g \in G_1$ и $\varepsilon = u_g(z) - u_g(z^1)$. По условию (10) $\varepsilon \ge v_{g\delta(g)}(p) - u_g(z^1) = [\pi_{d(g)} - \pi^1_{d(g)}] - [\pi_{\delta(g)} - \pi^1_{\delta(g)}]$. Если $\pi^1_{d(g)} = 0$, то $\pi_{d(g)} = 0$ по условию и $\varepsilon \ge \pi^1_{\delta(g)} - \pi_{\delta(g)} \ge 0$. Если $\pi^1_{\delta(g)} > 0$, то $d(g) \ne 0$; из Предположения 1′ следует, что $d(g) = \delta(g)$; поэтому $\varepsilon \ge v_{g\delta(g)}(p) - u_g(z^1) = 0$.

Q.E.D

.

Теорема 15. Пусть y — оптимальное решение ЗРС. Тогда $x(y)$ — оптимальное решение задачи (50) – (53). С учетом Предположения 11 $x(y)$ описывает равновесное размещение для ситуации $A(y)$.

Доказательство. Ясно, что условия (51) – (53) выполнены для $x(y)$. Пусть $x = (x_t(k))$ — оптимальное решение задачи (50) – (53). Первое утверждение теоремы следует из того, что $\sum_{t,k} a_t(k) \cdot x_t(k) \le \sum_{t,k} (b_t + \delta_t) \cdot x_t(k) = \sum_t (b_t + \delta_t) \cdot \sum_k x_t(k) = \sum_t (b_t + \delta_t) \cdot y_t = \sum_{t,k} a_t(k) \cdot x_t(k, y)$.

Теперь второе утверждение следует из Теоремы 10 и обсуждения задачи АТС в разделе 4.

Q.E.D

.