А.С. Пелих
Л.Л. Терехов
Л.А. Терехова

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В УПРАВЛЕНИИ ПРОИЗВОДСТВОМ

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Серия
• Высшее образование •

А.С. Пелих, Л.Л. Терехов, Л.А. Терехова

Экономико-математические методы и модели
в управлении производством

Ростов-на-Дону
«ФЕНИКС»
2005

УДК 65.0:330(075.8)
ББК 65.290я73
КТК 0904

П 23

Рецензенты:
И.И. Боков, А.Г. Пронченко

Пелих А.С.

П 23 **Экономико-математические методы и модели в управлении производством** / А.С. Пелих, Л.Л. Терехов, Л.А. Терехова. – Ростов н/Д: «Феникс», 2005. – 248 с. – (Высшее образование)

Учебное пособие содержит материал для изучения, исследования экономических процессов, их протекания в современных условиях, установления устойчивых тенденций и выявления проблем. В работе рассматриваются экономико-математические методы и модели, используемые в управлении производством.

Учебное пособие предназначено для подготовки студентов экономических специальностей вузов и переподготовки специалистов-экономистов.

ISBN 5-222-07215-0

УДК 65.0:330(075.8)
ББК 65.290я73

ВВЕДЕНИЕ

Наука и практика располагают арсеналом математических методов для решения многообразных математических задач, охватывающих анализ, планирование и управление народным хозяйством. Многие из них были созданы практически одновременно с появлением ЭВМ.

Экономический анализ представляет первоначальное изучение, исследование экономических процессов, их протекания в прошлом, установление устойчивых тенденций, выявление проблем. Анализ должен предшествовать выработке управленческих решений и воздействий, призван служить их исходной точкой и обоснованием.

Планирование – одна из важнейших функций и составных частей управления экономикой. Планирование – это построение плана, способа будущих действий, определение экономической траектории, то есть содержания и последовательности шагов, ведущих к поставленной цели, установление намечаемых конечных результатов.

Современная экономика, состоящая из совокупности самых разнообразных по характеру своей деятельности человеко-машинных организаций производственной и непроизводственной сферы, представляет собой сложную, непрерывно развивающуюся систему. От качества управленческих решений во многом зависит эффективность функционирования этих объектов. Широкие возможности для совершенствования управления, повышения его эффективности, оперативности, действенности открывает использование вычислительной техники в сочетании с современными математическими и кибернетическими методами.

Управление есть сознательное воздействие человека на объекты, процессы и на участвующих в них людей, осуществляемое с целью придать определенную направленность экономической деятельности и получить желаемые результаты. Методы управления характеризуют способы, посредством которых субъект управления оказывает воздействие на объект управления. Экономико-математические методы наиболее важны в управлении экономикой рыночного типа.

В настоящем учебном пособии дается описание наиболее глубоко разработанных теоретически и широко применяемых в практических расчетах – в анализе, планировании и управлении – экономико-математических методов и моделей. Методы последовательно изложены в пяти главах учебного пособия. Для каждого из рассматриваемых методов дается общая характеристика, а затем анализируются сущность и особенности соответствующих прикладных экономико-математических задач, тестов и контрольных вопросов.

Глава 1

ХАРАКТЕРИСТИКА ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

1.1. Принципы моделирования в экономике

Метод моделирования является важнейшим универсальным методом исследования. Используя его, не следует забывать понятия аналогии. Модель может во многих отношениях отличаться от самого объекта исследования, но непременно должна иметь подобие, аналогию с этим объектом, прежде всего в отношении тех характеристик, которые подлежат изучению и прогнозированию.

Модель какой-либо сложной системы тоже представляет собой систему (и нередко весьма сложную), имеющую физическое воплощение, либо записанную с помощью слов, цифр, математических обозначений, графических изображений и т. д.

Таким образом, можно сказать, что модель – это физическая или знаковая система, имеющая объективное подобие с исследуемой системой в отношении функциональных, а часто и структурных характеристик, являющихся предметом исследования.

Для построения знаковых моделей может использоваться, в принципе, любой язык – естественный, алгоритмический, графический, математический. Наибольшее значение и распространение имеют математические модели в силу универсальности, строгости, точности математического языка.

Математическая модель представляет собой совокупность уравнений, неравенств, функционалов, логических условий и других соотношений, отражающих взаимосвязи и зависимости основных характеристик моделируемой системы. Применительно к нашей теме будут рассматриваться преимущественно математические модели, хотя не исключены и другие, в частности алгоритмические.

Однако важное преимущество модели состоит в том, что необъятная с точки зрения полного описания реальная социально-экономическая система заменяется пусть даже непростой, но вполне доступной для анализа и расчетов моделью, которая вместе с тем сохраняет в себе все существенное, что интересует исследователя. Это существенное выступает в модели даже более четко и рельефно, не будучи затемнено всевозможными незначащими частностями и деталями, посторонними и случайными факторами.

С построением модели исследователь получает широкое поле для экспериментальной деятельности: он может изменять различные параметры, переменные величины, условия и ограничения и выяснять, к каким возможным результатам это приводит. В итоге многовариантных экспериментов с моделью (обычно на ЭВМ) вырабатывается ответ на кардинальный вопрос: при каких конкретных условиях следует ожидать в будущем наилучшего функционирования объекта с точки зрения поставленных целей? Аналогичное экспериментирование с самим реальным объектом чаще всего сильно затруднено или вообще невозможно; легко понять, например, что беспрерывное экспериментирование на «живых» предприятиях неприменимо как в социальном, так и чисто экономическом смысле. Модель же никаких ограничений в этом смысле не ставит. Формируемые для анализа, планирования, управления модели различаются по ряду признаков. Прежде всего, отметим различия по степени определенности используемой информации. Обратимся к теории принятия решений. Задачи принятия решений подразделяются на три группы:

- задачи в условиях полной определенности, или детерминированные задачи;
- задачи в условиях вероятностной определенности, или стохастические задачи;
- задачи в условиях неопределенности.

В детерминированных задачах принятие решения производится на основе полной, достоверной информации, относящейся к проблемной ситуации, ограничениям, критериям оптимальности. Точность исходных условий и данных приводит к однозначности принимаемого решения.

Стохастические задачи принятия решений учитывают случайный характер некоторых (или всех) явлений, процессов, относящихся к изучаемой проблеме. Здесь действуют случайные факторы, законы распределения, вероятности которых нам известны. Скажем, ежегодный естественный прирост населения в республиках, областях страны есть в строго математическом смысле величина случайная, но его (прироста) вероятностные характеристики специалистам по демографии хорошо известны. Знание законов распределения случайных величин и определяет название соответствующих задач, как задач в условиях вероятностной определенности.

Задачам в условиях неопределенности свойственна большая неполнота и недостоверность используемой информации, влияние многообразных и очень слабо детерминированных факторов.

Действующие здесь случайные события не характеризуются известными распределениями их вероятностей.

Соответственно, в этой дифференциации задач принятия решений можно модели социально-экономических процессов разделить на два больших класса – модели детерминированные и стохастические. В первых из них все зависимости, отношения, исходная информация определены полно и однозначно. Каждому набору исходных параметров и переменных величин соответствует единственный вариант расчетного прогноза.

В моделях стохастических каждому набору исходных величин соответствует лишь известное распределение вероятностей случайных событий прогнозируемого процесса. Решение по такой модели не теряет своей определенности, но определенности уже вероятностной, а не детерминированной.

Сложнее обстоит дело с задачами в условиях неопределенности. Для них в сущности исключена возможность построения адекватных моделей и отыскание четких количественных решений. Такие задачи лучше исследовать не методами моделирования, а средствами логико-эвристического анализа, в частности – методами экспертных оценок.

Модели разделяются также на статические и динамические. В статических моделях не учитывается время как фактор, изменяющий основные характеристики изучаемого объекта. Динамические модели включают фактор времени: время может фигурировать в них как самостоятельная переменная величина, влияющая на конечные результаты; параметры и переменные показатели также могут выступать как функции времени.

В статической постановке задач нас вполне устраивает получение решений в виде оптимальных состояний, справедливых независимо от различных моментов времени. В динамических моделях приходится искать не оптимальное состояние (как бы фотоснимок), а оптимальное поведение во времени (как бы киноленту). Нетрудно понять, что динамическая задача носит более общий характер, статическая модель – ее частный случай.

Следует разделять такие модели, как изыскательские и нормативные. Первые основаны на продолжении в будущем тенденций, взаимосвязей, сложившихся в прошлом и настоящем. Вторые определяют пути, ресурсы, сроки достижения в будущем возможных состояний объекта, отвечающих поставленным целям. Значит, изыскательские модели формализуют на базе статистики сложившиеся процедуры развития объекта и моделируют движение от прошлого к будущему; нормативные – устанавливают сначала целевые состояния, а затем строят соединяющие пути от будущего к настоящему.

Модели классифицируются и по некоторым другим признакам.

По характеру взаимосвязи между переменными модели подразделяются на линейные и нелинейные.

По степени структуризации народнохозяйственных процессов модели делятся на однопродуктовые и многопродуктовые, на многоотраслевые и одноотраслевые, на одноэтапные и многоэтапные.

По характеру требований, предъявляемых к результатам решения задач, модели экономических процессов могут быть либо балансовыми, либо оптимизационными.

По глубине временного горизонта модели подразделяются на модели долгосрочного прогнозирования, перспективные, среднесрочные и текущие.

По степени полноты охвата экономического объекта выделяются макро- и микромодели.

Классификация экономико-математических моделей позволяет, с одной стороны, их упорядочить, систематизировать, а с другой – более детально разобраться в самой сущности моделирования экономических процессов.

Моделирование экономических процессов – это часть области применения математических методов и моделей в анализе, планировании, организации и управлении народным хозяйством.

Оно представляет собой сложную работу, состоящую из ряда последовательных и взаимосвязанных этапов на стадиях:

а) постановки задачи,
б) построения формализованной схемы,
в) построения модели,
г) исследования модели,
д) проверки модели и оценки решения,
е) внедрения решения и контроля его правильности.

При разработке экономико-математических моделей необходимо соблюдать следующие основные требования:

1) модель должна базироваться на строго научной экономической теории, раскрывающей категории и закономерности данной формации;
2) модель должна отображать реальную структуру моделируемого процесса или объекта в соответствии с принципом структурного подобия (изоморфизма);
3) в модели должно быть обеспечено единство масштаба и соблюдено соответствие размерностей экономических величин;
4) в модели должно проводиться принципиальное различие между управляемыми, полууправляемыми и неуправляемыми параметрами;

5) модель должна удовлетворять условиям, определяющим степень ее соответствия объекту и границы применяемости.

В целом моделирование является неотъемлемой составной частью общего процесса научного познания. К первым этапам познания нового объекта относится построение приближенной и упрощенной его модели.

По мере углубления знаний об объекте создаются все более детализированные и более точные модели. При этом очень важно, что в процессе познания реализуется не только принцип «больше узнал – создал новую модель», но и обратный – «создал новую модель – больше узнал».

Построение и анализ моделей не просто оформляют новое, добытое иными путями знание об объекте, но и сами становятся источником расширения знаний о нем. В конечном счете этот процесс приводит к разработке последовательной и законченной теории изучаемого объекта или явления, а отсюда – к всесторонним выводам и рекомендациям практического характера.

1.2. Корреляционно-регрессионный анализ

Модели экстраполяции характеризуются тем, что изменение прогнозируемого показателя исследуется в них только в зависимости от времени. Но время само по себе не является причинным фактором, определяющим величину этого показателя (хотя оно и «вбирает» в себя воздействие многих факторов). Представляется естественным явное введение в модели действительных факторов, отражающих причинно-следственные взаимосвязи в прогнозируемых процессах. Это приводит к разработке эконометрических моделей.

Название нового научного направления «эконометрика» официально появилось в 1933 г., когда было основано эконометрическое общество как «международное общество для развития экономической теории в ее связи со статистикой и математикой». С 1933 г. в США выходит специальный журнал «econometrica».

В буквальном переводе эконометрика – это просто «измерение в экономике». Но в действительности не всякое измерение экономических явлений и процессов относится к эконометрике. Это научное направление точнее следует понимать как некоторый синтез экономики, математики и статистики. Есть еще определение, что эконометрика – это дисциплина, которая с помощью статистических методов устанавливает количественные взаимосвязи между экономическими переменными.

В структуре этой дисциплины можно выделить два основных раздела:

1. Математико-статистические методы, которые используются в эконометрических исследованиях.
2. Содержание и формы приложения этих методов к конкретным экономическим проблемам, задачам.

В качестве основных своих методов эконометрика использует методы теории вероятностей и математической статистики, особенно часто такой их раздел, как корреляционно-регрессионный анализ. Методы корреляции и регрессии более или менее широко и многосторонне применяются практически во всех эконометрических построениях и моделях.

В части приложений конкретных экономических задач, решаемых эконометрикой, можно выделить пять основных направлений.

1. Производственные функции, отражающие математико-статистическую зависимость результативных показателей производственной деятельности от обусловивших эти результаты показателей – факторов.

2. Выявление трендов, формализованных тенденций развития изучаемых показателей во времени, проведение прогностической экстраполяции.

3. Свойственные рыночной экономике зависимости между предложением, спросом, потреблением, ценами товаров и услуг; функции спроса и потребления от воздействия различных факторов.

4. Построение макроэкономических моделей, то есть моделей экономики в целом – обычно в форме системы эконометрических уравнений.

5. Построение микроэкономических моделей – на уровне объединений, предприятий, различных технологий и производств, тоже обычно в форме систем уравнений, неравенств, других математических зависимостей.

Рассмотрим основные математические положения корреляционно-регрессионного анализа. Построение корреляционных моделей позволяет дать количественную характеристику связи, зависимости и взаимной обусловленности экономических показателей. Хотя модель является упрощенным отражением действительности, она обеспечивает строго математический подход к исследованию экономических взаимосвязей. Вследствие математической завершенности, количественной определенности своих характеристик корреляционно-регрессионная модель служит не только средством анализа предшествующего экономического развития, но и становится важным инструментом прогнозных и плановых расчетов.

Несколько показателей могут быть связаны функциональной или корреляционной зависимостью. Функциональная зависимость проявляется определенно и точно в каждом отдельном случае, в каждом отдельном наблюдении. Например, закон Ома устанавливает функциональную зависимость между напряжением, приложенным к проводнику, его сопротивлением и силой тока. Этот закон строго соблюдается в каждом отдельном опыте независимо от того, каких длины и сечения взят проводник, из какого материала он изготовлен, большое или малое напряжение к нему приложено. Знание функциональных зависимостей позволяет абсолютно точно предсказывать события. Так, возможно на много лет вперед предсказать солнечные и лунные затмения с точностью до минут и даже секунд.

Корреляционная зависимость, в отличие от функциональной, проявляется лишь в общем и среднем и только в массе наблюдений. Экономические величины складываются обычно под влиянием множества различных факторов. Закономерности не проявляются в сфере экономики с той точностью и неизменностью, как в мире неживой природы. Поэтому при изучении взаимосвязей экономических показателей чаще всего приходится прибегать к корреляционному анализу.

В простейшем случае корреляционного анализа исследуется связь между двумя показателями, из которых один рассматривается как независимый фактор (х), а второй – как зависимая переменная (у). Наличие самой зависимости между этими показателями устанавливается в результате качественного анализа, позволяющего вскрыть внутреннюю сущность изучаемого явления и порождающих его причин. Сам же корреляционный анализ предназначен для количественного измерения самого качественного анализа. Таким образом, еще до математического расчета считается установленным, что связь между x и y может существовать и характеризуется функцией $y = f(x)$.

Одной из первых задач корреляционного анализа является установление вида этой функции, то есть отыскание такого корреляционного уравнения (иначе оно называется уравнение регрессии), которое наилучшим образом соответствует характеру изучаемой связи. Уравнение регрессии – важнейшая составная часть корреляционных моделей, и его правильный подбор и расчет относятся к наиболее ответственным этапам корреляционного моделирования.

Простейшим уравнением, которое может характеризовать зависимость между двумя переменными, является уравнение прямой вида:

$$y = a_0 + a_1 x,$$

где a_0 и a_1 – постоянные коэффициенты (константы, параметры уравнения).

Уравнение прямой описывает такую связь между двумя переменными, при которой с изменением независимой переменной на какую-либо постоянную величину зависимая переменная изменяется на другую постоянную величину (в частности, при изменении x на одну единицу величина y изменяется на a_1 единиц).

Если качественный анализ изучаемой зависимости допускает прямолинейный характер связи двух переменных, то это предположение проверяется затем непосредственно на количественных данных.

Для этого необходимо иметь ряд фактических значений переменной x и соответствующих ей величин зависимой переменной y. Поскольку корреляционная связь с достаточной четкостью и полнотой проявляется лишь в массе случаев, количество наблюдений, на основании которых строится модель, должно быть достаточно велико. Считается, что число наблюдений должно по меньшей мере в 5–6 раз превышать количество параметров уравнения.

Вывод о прямолинейном характере связи проверяется вначале путем простого сопоставления по имеющимся данным вариации зависимой и независимой переменных, а также графическим способом. При графическом способе каждое наблюдение отмечается в виде точки в прямоугольной системе координат, в которой по оси абсцисс отсчитываются значения x, по оси ординат – значения y. При достаточно большом количестве наблюдений расположение точек на графике позволяет определить правильность или ошибочность представления о линейном характере связи между изученными переменными.

Следующим этапом является выявление уравнения прямой при данной конкретной зависимости между x и y. Для этого необходимо определить численные значения постоянных величин уравнения (a_0 и a_1), при которых прямая будет наилучшим образом соответствовать имеющимся фактическим данным. Критерий, по которому отыскивается «наилучшая прямая», в известной мере условен. В качестве такого критерия принято брать минимум суммы квадратов отклонений фактических значений y от вычисленных по уравнению прямой.

Минимуму квадратов отклонений соответствует единственная прямая, коэффициенты которой отыскиваются так называемым **методом наименьших квадратов**.

Таким образом, если связь между x и y характеризуется прямой вида $y = a_0+a_1x$, то первой задачей корреляционного исчисления является определение таких значений a_0 и a_1, при которых сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений $y_ф$ от расчетных $y_р$ будет минимальной, то есть

$$S(y_ф - y_р)^2 = \min.$$

Уравнение прямой можно записать следующим образом:

$$y = a_о + a_1 x_ф;$$

подставляя значение в условие минимизации суммы квадратов, получим:

$$S\,(y_ф - a_о - a_1 x_ф)^2 = \min.$$

Рассматриваемая сумма квадратов представляет собой функцию, в которой $x_ф$ и $y_ф$ являются известными величинами (исходными данными), а $a_о$ и a_1 – неизвестными (искомыми) величинами.

В точке минимума функции первая производная равна 0. Поэтому для расчета искомых коэффициентов прямой необходимо приравнять нулю частные производные данной функции по $a_о$ и a_1. Обозначив функцию в целом через f и отбросив подписанные индексы у x и y, имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial a_0} = -2\sum(y - a_0 - a_1 x) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = -2\sum(y - a_0 - a_1 x)x = 0.$$

После упрощения и почленного суммирования получаем

$$\begin{aligned} \Sigma y &= Na_0 + a_1 \Sigma x\,, \\ \Sigma xy &= a_0 \Sigma x + a_1 \Sigma x^2. \end{aligned} \qquad (1.1)$$

Это так называемая система нормальных уравнений, решение которой приводит к определению величины коэффициентов a_0 и a_1; все остальные входящие в систему величины рассчитываются на основании фактических исходных данных; N обозначает число единиц наблюдения.

Зависимость может отражаться кривой, имеющей минимум. Так, при изучении связи между размером предприятий и себестоимостью единицы их продукции логично предположить, что до известного предела увеличение размера предприятия способствует снижению себестоимости, а дальнейший его рост приведет к росту себестоимости в связи с усилением действия отрицательных особенностей предприятий-гигантов.

Отыскание этого минимума, т. е. оптимального размера предприятия, становится важной задачей самого моделирования. Простейшей кривой, описывающей подобного рода зависимости, является парабола второго порядка, характеризуемая уравнением:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

При более сложном характере зависимости анализируется возможность применения параболы третьего порядка:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

Вообще, любая зависимость между двумя переменными может быть описана с помощью параболы *n*-го порядка:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Кроме того, часто используются следующие кривые:

$y = a_0 x^{a_1}$; $y = a_0 + \frac{a_1}{x}$; $y = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$; $y = a_0 a_1^x$

и т. д.

При использовании любой формы криволинейной корреляционной зависимости теснота связи между переменными может быть определена с помощью **индекса корреляции** (i), который определяется аналогично коэффициенту корреляции, т. е. по формуле:

$$i = 1 - \frac{S_{yx}^2}{S_y^2};$$

где S^2_{yx} – средний квадрат отклонений фактических значений y от значений, вычисленных по уравнению кривой;

S^2_y – средний квадрат отклонений фактических значений y от их средней арифметической величины.

Индекс корреляции по величине изменяется от 0 до 1. Определенного знака он не имеет, так как на протяжении кривой линии характер связи может изменяться: на одних участках кривой корреляция переменных положительная, на других – отрицательная. Индекс корреляции – условная величина, рассчитываемая лишь по отношению к конкретной форме кривой, и его абсолютное значение всегда может быть доведено до единицы.

Например, если в качестве кривой взять параболу, в уравнении которой количество постоянных коэффициентов равно числу исходных единиц наблюдения, то кривая пройдет через все точки графика, а величина индекса корреляции достигнет единицы. Однако было бы ошибочно считать это признаком выявления кривой, наилучшим образом характеризующей изучаемую зависимость. Слишком сложные уравнения регрессии, как правило, лишены реального экономического содержания, так как в них теряется различие между нетипичным и существенным, а случайность возводится в закономерность.

Поэтому усложнение уравнения допустимо лишь в определенных пределах. Параметры уравнения должны поддаваться определенному экономическому толкованию.

Корреляционный анализ основывается обычно на достаточно большой совокупности исходных данных, которая, однако, не охватывает все аналогичные, однородные в качественном отношении данные.

При исследовании зависимости между экономическими показателями однотипных предприятий ограничиваются данными лишь части таких предприятий, при условии, что эта часть действительно является представительной по отношению ко всей массе предприятий.

Совокупность всех единиц, качественно однородных в отношении изучаемых признаков, называется **генеральной совокупностью**, а отобранная для анализа и расчета группа единиц наблюдения называется **выборочной совокупностью**.

Предположим, что в ходе исследования связи между двумя показателями на основании выборочных данных рассчитаны уравнения регрессии и коэффициенты корреляции. В дальнейшем оказалось возможным привлечь для анализа все единицы генеральной совокупности и на основании этой более широкой группы данных вновь определить уравнение связи и коэффициент корреляции.

Возникает вопрос: совпадут ли по величине параметры уравнений и коэффициенты корреляции, вычисленные для выборочной и генеральной совокупностей?

Полное совпадение может произойти лишь случайно. В целом же характеристики, вычисленные для выборочной совокупности, содержат определенную «ошибку», по сравнению с соответствующими характеристиками генеральной совокупности. Исчисление вероятных ошибок и оценка параметров генеральной совокупности по данным выборочного расчета являются необходимой составной частью разработки моделей.

Рассмотрим вопрос об ошибке вычисленных по уравнению связи величин зависимой переменной y. В качестве меры этой ошибки принимается среднее квадратическое отклонение фактических значений $y(S_{yx})$. Предположим, что отклонения действительных значений от прямой линии близки к нормальному распределению. Если провести на графике две прямые, расположенные на расстоянии S_{yx} по обе стороны от линии регрессии, то в соответствии со свойствами нормального распределения между этими прямыми будет находиться 68% всех фактических значений y. Между прямыми, расположенными от линии регрессии на расстоянии $\pm 2S_{yx}$, будет заключено приблизительно 95% точек, а в пределах $\pm 2{,}58\ S_{yx}$ – 99%.

Тем же соотношениям между фактическими и расчетными величинами может быть дана интерпретация. Если для какой-либо единицы, которая входит в генеральную совокупность, но не входит в выборочную, известно значение $x_ф$, то по уравнению регрессии можно определить для этой единицы вероятное значение – $y_р$. Нельзя ожидать, что величина $y_р$ в точности совпадет с действительным значением $y_р$. Однако границы, в которых заключается $y_ф$, могут быть определены достаточно точно.

С вероятностью 0,68 $y_ф$ находится в пределах $y_р \pm S_{yx}$; с вероятностью 0,95 $y_ф$ находится в пределах $y_р \pm 2\ S_{yx}$; наконец с вероятностью 0,99 справедливо:

$$y_р - 2{,}58\ S_{yx} < y_ф < y_р + 2{,}58\ S_{yx}.$$

Коэффициент корреляции r, рассчитанный по выборочным данным, так же не совпадает с коэффициентом корреляции в генеральной совокупности r. Ошибка выборочного коэффициента корреляции равна:

$$\sigma_r = \frac{1-\rho^2}{\sqrt{N-1}}.$$

В эту формулу входит коэффициент корреляции генеральной совокупности, величина которого неизвестна. При большом объеме выборочной совокупности можно игнорировать различие между σ и ρ и расчет проводить по формуле:

$$\sigma_r \cong \frac{1-r^2}{\sqrt{N-1}}.$$

Таким образом, с вероятностью 0,99 справедливо соотношение:

$$r - 2{,}58\ \sigma_r \leq \rho < r + 2{,}58\ \sigma_r.$$

Наибольший интерес представляет проверка так называемой нулевой гипотезы. Поскольку коэффициент корреляции выборочной совокупности отличается от коэффициента корреляции в генеральной совокупности ρ, не исключено, что если даже $\rho = 0$, то r будет заметно отличаться от нуля, т. е. вследствие случайных отклонений r покажет наличие связи там, где ее в действительности нет.

Проверка значимости коэффициента корреляции выборочной совокупности позволяет ответить на вопрос: совместима ли ее величина с предположением об отсутствии корреляционной связи в генеральной совокупности? Чтобы ответить на этот вопрос, выдвигают гипотезу, что коэффициент корреляции в генеральной совокупности равен нулю, и определяют, может ли полученное значение коэффициента корреляции выборочной совокупности обусловливаться случайными колебаниями или оно слишком велико для такого предположения. Если считать $\rho = 0$, то формула для σ_r упрощается:

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{N-1}}.$$

Если $\rho = 0$, то при нормальном распределении r его величина с вероятностью 0,99 будет заключаться в пределах $\pm$ 2,58 σ_r. Если найденный по выборочным данным коэффициент корреляции находится в этом интервале, то гипотеза об отсутствии связи в генеральной совокупности является вполне правдоподобной, и лишь за пределами этого интервала коэффициент корреляции выборочной совокупности позволяет с уверенностью говорить о наличии корреляционной связи в генеральной совокупности. Для измерения совместного влияния ряда показателей – факторов на величину анализируемого показателя строятся модели множественной корреляции, в которых зависимая переменная y рассматривается как функция n независимых переменных x:

$$y = f(x_1, x_2,..., x_n).$$

Одним из важнейших вопросов моделирования множественной корреляции является вопрос о форме связи, что представляет собой сложную задачу, так как действия различных факторов взаимно переплетаются и отсутствует возможность графического контроля. В данном случае еще большее значение приобретает качественный анализ характера связи каждого из факторов с зависимым показателем. Если эта связь линейная, то применяется линейное уравнение множественной корреляции:

$$y = a_0+a_1x_1+ a_2x_2+ \ldots +a_nx_n.$$

Если воздействие факторов не может считаться прямолинейным, то соответствующие переменные включаются в уравнение в различных степенях. Нередко в уравнение вводятся члены с произведением переменных. В экономических приложениях часто используется степенная функция:

$$y = a_0x_1^{a_1}\ x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}.$$

Ее логарифмирование показывает, что эта функция линейна в логарифмах:

$$\lg y = \lg a_0+ a_1 \lg x_1 + a_2 \lg x_2 + \ldots + a_n \lg x_n.$$

Не исключено использование в моделях множественной корреляции и более сложных математических функций. Вычисление параметров функций производится методом наименьших квадратов. Он предусматривает простую процедуру вычисления параметров для широкого круга математических функций, если они линейны относительно своих параметров, т. е. могут быть представлены в виде:

$$y = a_0 + a_1 V_1 + a_2 V_2 + \ldots + a_n V_n. \qquad (1.2)$$

Здесь $V_1, V_2, \ldots, V_n$ – любые функции одной или нескольких переменных, не содержащие неизвестных параметров. Таким образом, V может обозначать: $\sqrt{x}$; x; x^2; $\lg x$; $x_1 x_2$; $\frac{x_1}{x_2}$ и т. п.

К виду (1.2) приводится большинство практически применяемых уравнений.

Метод наименьших квадратов предусматривает минимизацию суммы квадратов отклонений $y_ф$ от $y_р$. Подставляя значение $y_р$ из уравнения (1.2), получаем:

$$S[(a_0 + a_1 V_1 + a_2 V_2 + \ldots + a_n V_n) - y]^2 = \min. \qquad (1.3)$$

Здесь величины $V_1, V_2, \ldots, V_n$, y даны фактически наблюдаемыми значениями, a_0, a_1, …, a_n – являются искомыми параметрами функции. В точке минимума функции (1.3), обозначаемой ниже через f, обращаются в нуль ее частные производные по неизвестным a_0, a_1, …, a_n.

Приравняем нулю частную производную функции (1.3) по a_0:

$$\frac{\partial f}{\partial a_0} = -2\sum[(a_0 + a_1 V_1 + a_2 V_2 + \ldots + a_n V_n) - y] = 0.$$

Откуда после почленного суммирования и других преобразований получаем:

$$Sy = Na_0 + a_1\Sigma V_1 + a_2\Sigma V_2 + \ldots + a_n\Sigma V_n,$$

где N – число наблюдений в исходной совокупности данных. Для искомого коэффициента a_1 имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = -2\sum V_1[(a_0 + a_1 V_1 + a_2 V_2 + \ldots + a_n V_n) - y] = 0.$$

После преобразования получаем:

$$\Sigma V_1 y = a_0\Sigma V_1 + a_1\Sigma V_1^2 + a_2\Sigma V_1 V_2 + \ldots + a_n\Sigma V_1 V_n.$$

Аналогично определяются и другие частные производные, образуя в конечном итоге так называемую систему нормальных уравнений, которая в данном случае содержит n + 1 линейное уравнение с n + 1 неизвестным параметром:

$$\Sigma y = Na_0 + a_1\Sigma V_1 + a_2\Sigma V_2 + \ldots + a_n\Sigma V_n,$$
$$\Sigma V_1 y = a_0\Sigma V_1 + a_1\Sigma V_1^2 + a_2\Sigma V_1V_2 + \ldots + a_n\Sigma V_1V_n,$$
$$\Sigma V_2 y = a_0\Sigma V_2 + a_1\Sigma V_1V_2 + a_2\Sigma V_2^2 + \ldots + a_n\Sigma V_2V_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Sigma V_n y = a_0\Sigma V_n + a_1\Sigma V_1V_n + a_2\Sigma V_2V_n + \ldots + a_n\Sigma V^2_n.$$

Приведенная система позволяет составить нормальные уравнения для расчета параметров любых функций, приводимых к линейному виду.

Составим, например, нормальные уравнения для расчета параметров двухфакторной функции вида:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_3x_1x_2.$$

Подставляя в систему нормальных уравнений $V_1 = x_1$, $V_2 = x_2$, $V_3 = x_1x_2$ получим:

$$\Sigma y = Na_0 + a_1\Sigma x_1 + a_2\Sigma x_2 + a_3\Sigma x_1x_2,$$
$$\Sigma x_1y = a_0\Sigma x_1 + a_1\Sigma x_1^2 + a_2\Sigma x_1x_2 + a_3\Sigma x_1^2x_2,$$
$$\Sigma x_2y = a_0\Sigma x_2 + a_1\Sigma x_1x_2 + a_2\Sigma x_2^2 + a_3\Sigma x_1x_2^2,$$
$$\Sigma x_1x_2y = a_0\Sigma x_1x_2 + a_1\Sigma x_1^2x_2 + a_2\Sigma x_1x_2^2 + a_3\Sigma x_1^2x_2^2.$$

В этой системе 4 уравнения и 4 неизвестных – a_0, a_1, a_2, a_3. Все входящие в систему суммы вычисляются на основе исходных статистических данных.

Надежность оценок исследуемого показателя, получаемых по уравнению множественной корреляции, будет тем выше, чем меньше рассеивание фактических значений y по отношению к вычисленным значениям этой переменной. Мерой надежности является средняя квадратическая ошибка уравнения множественной корреляции: сумма квадратов отклонений фактических значений y от вычисленных по уравнению делится на количество исходных единиц наблюдения, и из полученной величины (дисперсии) извлекается квадратный корень.

Средняя квадратическая ошибка уравнения множественной корреляции обозначается символом $S_{y.1.2.3...n}$, где подписные индексы **1.2.3...n** указывают, что зависимая переменная *у* рассматривается как показатель, величина которого связана с *n* независимыми факторами и определяется:

$$S_{y.1.2.3...n} = \sqrt{\frac{\Sigma(y_ф - y_р)^2}{N-k}},$$

где N – число единиц наблюдения;

k – количество постоянных величин в уравнении.

$S_{y.1.2.3...n}$ измеряется в тех же единицах, что и *у*.

Если уравнение связи вычислено по выборочным данным, то квадратическая ошибка позволяет найти интервал, в котором с заданной вероятностью будет заключено значение *у* в генеральной совокупности.

Отвлеченной мерой тесноты связи между включенными в модель показателями – факторами, с одной стороны, и зависимым показателем, с другой стороны, является **коэффициент корреляции** $R_{y.1.2.3...n}$, который характеризует силу совместного влияния ряда факторов на величину зависимой переменной и рассчитывается по формуле:

$$R_{y.1.2.3...n} = \sqrt{1 - \frac{S^2_{y.1.2.3...n}}{S^2_y}}.$$

По абсолютной величине $R_{y.1.2.3...n}$ изменяется от нуля до единицы. Определенного знака он не имеет.

Наряду с определением показателя, отражающего тесноту связи со всеми факторами, вместе взятыми, представляет интерес изменение степени влияния каждого фактора в отдельности на изменение величины зависимой переменной.

Действительно, даже при очень высоком общем коэффициенте множественной корреляции не исключено, что влияние отдельных факторов окажется ничтожным, а их включение в корреляционную модель – неоправданным. Об этом можно судить на основе коэффициентов частной корреляции.

1.3. Производственные функции

Ведущим направлением корреляционного анализа в экономике является исследование зависимостей в сфере производства – производственных функций. Производственные функции в широком смысле охватывают моделирование зависимостей, существующих между такими показателями производственной деятельности, как объем выпускаемой продукции, капитальные затраты, фондоотдача, производительность труда и др.

Цель построения производственных функций – количественно оценить, измерить характер и степень влияния различных факторов на результат процесса производства. Одним из наиболее важных направлений использования аппарата производственных функций является анализ эффективности ресурсов производства.

С помощью производственных функций можно исследовать эффективность трудовых затрат, производственных фондов, природных и других ресурсов не изолированно, а в их взаимодействии, выявить границы взаимозаменяемости ресурсов и наиболее рациональные их пропорции с точки зрения конечного результата производства. Широкие возможности открывают производственные функции для анализа научно-технического прогресса и его влияния на общественное производство, на общие темпы экономического развития.

Существенную роль играют производственные функции как инструмент прогнозирования конечных результатов производственной деятельности. На основе анализа количественного роста и повышения эффективности ресурсов общественного производства, типа и темпа научно-технического прогресса производственные функции дают возможность рассчитать прогнозируемые величины национального дохода и других результативных экономических показателей как на ближайшую, так и достаточно отдаленную перспективу.

С учетом содержания изучаемой зависимости, целей и задач исследования применяются различные формы производственных функций. В простейшем случае изменение результативного показателя связано с изменением одного из показателей – факторов (например, изучается влияние глубины орошения на урожайность культуры). Тогда производственная функция представляет собой уравнение $y = f(x)$ с двумя переменными – независимой x (показатель – фактор) и зависимой y (результативный показатель).

Чаще строятся многофакторные производственные функции, позволяющие измерить характер и силу совместного, комбинированного влияния нескольких показателей – факторов x_1, x_2,..., x_n на величину изучаемого результативного показателя y производственной деятельности. Уравнение многофакторной производственной функции имеет общий вид:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Из-за наличия неучтенных факторов и неоднозначного действия учтенных производственная функция является функцией лишь в статистическом смысле, соответственно и аппаратом исследования производственных функций служат методы математической статистики, корреляционно-регрессионного анализа.

Экономико-математическое исследование производственных функций позволяет получить ряд показателей, связанных с содержанием и формой функции и дающих широкие возможности для анализа и выводов о характере изучаемой зависимости. Рассмотрим эти показатели вначале на примере одной из распространенных производственных функций – так называемой функции Кобба-Дугласа.

Предположим, что в масштабах народного хозяйства изучается зависимость величины созданного общественного продукта от двух важнейших факторов: совокупных затрат живого труда в материальном производстве и суммарного объема применяемых производственных фондов. Зависимость исследуется с помощью производственной функции вида:

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}. \tag{1.4}$$

Здесь y, x_1, x_2 – переменные величины, причем y обозначает величину общественного продукта, x_1 – затраты труда, x_2 – объем производственных фондов (обычно y и x_2 измеряются в стоимостных единицах, x_1 – в человеко-часах или количестве среднегодовых работников). Величины a_0, a_1, a_2 – это параметры (постоянные величины, константы) производственной функции; их конкретные числовые значения определяются на основе статистических данных с помощью корреляционных методов. Забегая несколько вперед, отметим, что в соответствии со своим экономическим содержанием коэффициенты-регрессии a_1 и a_2 по величине заключены внутри интервала от нуля до единицы, т. е. для функции (1.4) соблюдается условие $0 < a_i < 1$, где $i = 1, 2$.

По своей математической форме уравнение (1.4) является степенной функцией. Если вместо самих переменных величин использовать их логарифмы, то функция становится линейной.

Действительно, прологарифмировав выражение (1.4), имеем линейно-логарифмическое уравнение:

$$\log y = \log a_0 + a_1 \log x_1 + a_2 \log x_2. \qquad (1.5)$$

Прежде всего определим на основании производственной функции (1.4) показатель производительности труда как отношение величины общественного продукта к совокупным затратам труда. Имеем

$$\frac{y}{x_1} = a_0 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2}. \qquad (1.6)$$

Выражение (1.6) характеризует среднюю производительность труда, т. е. показывает среднее количество продукции, приходящееся на единицу отработанного времени. Поскольку коэффициент a_1 больше нуля и меньше единицы, показатель степени $(a_1 - 1)$ при x_1 в правой части уравнения (1.6) является отрицательной величиной; следовательно, с увеличением затрат труда (величины x_1) средняя производительность труда снижается.

Заметим, что согласно уравнению (1.6) производительность труда снижается с ростом трудовых затрат лишь при прочих равных условиях, т. е. при неизменном объеме других ресурсов, в том числе производственных фондов x_2. Увеличение используемых производственных фондов, как показывает (1.6), ведет к росту производительности труда.

В анализе производственных функций наряду со средними показателями существенную роль играют предельные величины. Так, предельная производительность труда показывает, сколько дополнительных единиц продукции приносит дополнительная единица затраченного труда. Уравнение предельной производительности труда для функции (1.4) есть частная производная выпуска продукции по затратам труда:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_0\, a_1\, x_1^{a_1 - 1}\, x_2^{a_2}. \tag{1.7}$$

Из выражения (1.7) следует, что предельная производительность труда, так же как и средняя, зависит от общей величины трудовых затрат x_1 и объема используемых производственных фондов x_2. С увеличением затрат труда при неизменных фондах предельная производительность труда снижается. С увеличением объема фондов предельная производительность труда возрастает.

Сопоставляя выражения (1.6) и (1.7), получаем:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_1 \frac{y}{x_1}. \tag{1.8}$$

Поскольку $0 < a_1 < 1$, можно сделать вывод, что в производственной функции вида (1.4) предельная производительность труда всегда ниже средней выработки.

Наряду с исчислением абсолютного прироста продукции на единицу прироста затрат представляет интерес определение показателя, характеризующего относительный прирост объема производства на единицу относительного увеличения ресурсов труда. Для этой цели необходимо предельную производительность труда разделить на объем продукции y и умножить на величину трудовых затрат x_1. Пользуясь выражением (1.8), легко получаем:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{y} = a_1. \tag{1.9}$$

Полученный показатель называется **эластичностью выпуска продукции по затратам труда**. Он показывает, на сколько процентов увеличивается выпуск при увеличении затрат труда на 1%. Как видим, в отличие от абсолютной предельной производительности труда, относительная предельная производительность от объемов ресурсов не зависит, и при любом их сочетании увеличение трудовых затрат на 1% приводит к росту объема производства на a_1%. Этот вывод относится, конечно, не ко всем производственным функциям вообще, а только к рассматриваемой функции вида (1.4).

Аналогичные показатели можно рассчитать по отношению ко второму фактору функции (1.4) – производственным фондам. Объем продукции в расчете на единицу используемых фондов назовем фондоотдачей и определим, прежде всего, среднюю фондоотдачу из выражения (1.4):

$$\frac{y}{x_2} = a_0\, x_1^{a_1}\, x_2^{a_2 - 1}. \tag{1.10}$$

Уравнение (1.10) показывает, что средняя фондоотдача всегда увеличивается с увеличением ресурсов труда (при неизменных фондах) и уменьшается с увеличением самих фондов (при неизменных трудовых ресурсах).

Показатель предельной фондоотдачи определяется как частная производная выпуска продукции по объему фондов:

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = a_0 a_2 x_1^{a_1} x_2^{a_2 - 1}. \tag{1.11}$$

Предельная фондоотдача отличается от средней лишь сомножителем a_2. Поскольку положительный коэффициент a_2 меньше единицы, предельная фондоотдача в производственной функции (1.4) всегда ниже средней.

Относительная предельная фондоотдача, или эластичность выпуска продукции по объему производственных фондов, определяется выражением:

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{y} = a_2. \tag{1.12}$$

Как и по отношению к затратам труда, эластичность выпуска по фондам есть величина постоянная, равная коэффициенту регрессии a_2.

Производственная функция позволяет рассчитать (в частности, для вариантов прогноза) потребность в одном из ресурсов при заданных объеме производства и величине другого ресурса. Из уравнения (1.4) следует, что потребность в ресурсах труда равна:

$$x_1 = \left(\frac{y}{a_0 x_2^{a_2}} \right)^{\frac{1}{a_1}}.$$

Аналогично определяется потребность в фондах при заданных объеме продукции и ресурсах труда.

До сих пор были рассмотрены показатели, каждый из которых относился к одному из ресурсов. Производственная функция позволяет исследовать и вопросы соотношения, замещения, взаимодействия ресурсов. Рассчитав отношение x_2 и x_1, найдем такой важный экономический показатель, как фондовооруженность труда. В известном смысле взаимодействующие ресурсы могут замещать друг друга. Это означает, что единицу одного ресурса можно было бы заменить некоторым количеством другого ресурса так, что объем производства при этом не изменится. На основе производственной функции можно рассчитать предельную норму замещения ресурсов. Так, предельная норма замещения затрат труда производственными фондами для функции вида (1.4) равна:

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -\frac{a_1 x_2}{a_2 x_1}. \tag{1.13}$$

Правая часть выражения (1.13) по абсолютной величине равняется частному от деления предельной производительности труда (1.7) на предельную фондоотдачу (1.11). Это и понятно: если предельный продукт в расчете на единицу одного фактора, скажем, вдвое больше предельного продукта на единицу другого фактора, то и предельная норма замещения первого фактора вторым равна 2. Знак в выражении (1.13) означает, что при фиксированном объеме производства увеличению одного ресурса соответствует уменьшение другого.

Как видим, предельная норма замещения ресурсов для функции (1.4) зависит не только от параметров a_1 и a_2, но и от соотношения объемов ресурсов. Чем выше фондовооруженность труда, тем выше и норма замещения затрат живого труда производственными фондами.

Важной характеристикой производственной функции вида (1.4) является также сумма коэффициентов эластичности выпуска по затратам, т. е. величина $A = a_1 + a_2$. Уже отмечалось, что значение каждого из этих коэффициентов лежит внутри промежутка от нуля до единицы. Экономически такое предположение вполне оправдано. Действительно, если бы, например, коэффициент a_1 был отрицательным, это означало бы, что с увеличением объема трудовых затрат объем продукции абсолютно снижается. Нереально и допущение, что коэффициент a_1 равен или больше единицы, это означало бы, что увеличение только трудовых ресурсов, скажем, в два раза при неизменном количестве остальных производственных ресурсов обеспечивает прирост продукции в два раза (если $a_1=1$) или даже более, чем в два раза (если $a_1 > 1$). Аналогичные соображения относятся и к величине коэффициента a_2.

Но хотя каждый из коэффициентов a_1 и a_2 меньше единицы, их сумма А может быть меньше, равна или больше единицы. Эта сумма показывает эффект одновременного пропорционального увеличения объема как ресурсов труда, так и производственных фондов. Предположим, что объем каждого из ресурсов увеличивается в m раз. Тогда в соответствии с функцией (1.4) новый объем продукции y^* составит:

$$y^* = a_0(mx_1)^{a_1}(mx_2)^{a_2} = m^{a_1+a_2}\, a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} = m^A y.$$

Итак, при расширении масштабов производства (пропорциональном увеличении обоих ресурсов) можно, в зависимости от величины $A = a_1+a_2$, получить три прогнозных варианта результатов.

1. **Если А = 1**, то увеличение ресурсов в m раз приводит к увеличению объема производства также в m раз ($y^* = my$). Экономически это отвечает предположению, что, например, удвоение числа предприятий какой-либо отрасли приводит и к удвоению выпускаемой отраслью продукции. Нередко условие А = 1 ставится заранее при исчислении параметров производственной функции. Функция (1.4) в этом случае является так называемым однородным уравнением первой степени.

2. **Если А > 1**, то увеличение ресурсов в m раз приводит к росту объема продукции более чем в m раз. Экономически в

этом случае можно говорить о положительном эффекте расширения масштабов производства (характерно для металлургии, машиностроения).

3. **Если A < 1**, то увеличение ресурсов в m раз приводит к возрастанию объема производства менее чем в m раз. В этом случае имеет место отрицательный эффект расширения масштабов или укрупнения производства (характерно для сельского хозяйства, торговли и др.).

Производственные функции исследуются не только в статическом виде, но и в динамическом варианте, когда некоторые либо все переменные величины и параметры модели рассматриваются как функции времени. Приведем динамизированный вариант функции Кобба-Дугласа, при котором все переменные и параметр a_0 зависят от времени t. Тогда на основе выражения (1.4) имеем:

$$y(t) = a_0(t)\,[x_1(t)]^{a_1}\,[x_2(t)]^{a_2}. \tag{1.14}$$

Динамизированная функция наряду с анализом всех показателей, исчисляемых и в статическом случае, позволяет исследовать закономерность изменения и взаимосвязи показателей во времени. Определим темпы прироста показателей функции (1.14) как отношения приращений этих показателей во времени к их абсолютному уровню. **Обозначая темпы прироста через q**, получим следующие выражения для темпов прироста переменных во времени показателей уравнения (1.14):

$$q_y = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{y};\quad q_{a_0} = \frac{da_0}{dt}\cdot\frac{1}{a_0};$$

$$q_{x_1} = \frac{dx_1}{dt}\cdot\frac{1}{x_1};\quad q_{x_2} = \frac{dx_2}{dt}\cdot\frac{1}{x_2}.$$

Продифференцировав выражение (1.14) по времени, определив частные производные выпуска y, произведя другие математические преобразования, окончательно получим зависимость

$$q_y = q_{a_0} + a_1\,q_{x_1} + a_2 q_{x_2}. \tag{1.15}$$

Уравнение (1.15) устанавливает простую зависимость темпа прироста выпуска продукции от темпов прироста обоих ресурсов и параметра a_0. Исследование подобных соотношений представляет значительный интерес не только для анализа происшедших изменений в экономике, но и для целей планирования и прогнозирования экономического развития.

Анализ конкретной производственной функции вида (1.4) позволяет сделать некоторые общие замечания и выводы. Производственная функция дает количественную характеристику влияния на результат производства различных показателей – факторов, в том числе трудовых затрат, производственных фондов, используемых земельных площадей и т. д. В рамках производственной функции изучается взаимодействие факторов, мера их замещения, определяются аналитические показатели, в числе которых предельная эффективность факторов, предельная норма замещения ресурсов и др.

Учитывая характеристики, полученные ранее для функции вида (1.4), дадим обобщенное описание производственной функции. При n-показателях – факторах производственная функция имеет общий вид

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

В процессе анализа производственной функции получают ряд важных расчетных показателей. Для любого ресурса i можно определить его среднюю производительность (отдачу, эффективность) при фиксированных объемах остальных ресурсов:

$$\frac{y}{x_i} = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_i}.$$

Предельная производительность (отдача, эффективность) i-го ресурса, характеризующая приращение результата производства на единицу приращения i-го ресурса, определяется выражением:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = f'_{xi}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Обычно представляет интерес выяснение характера изменения предельной производительности с изменением объема i-го ресурса при неизменном объеме других ресурсов. Для этого можно рассчитать вторую частную производную зависимой переменной y по i-му ресурсу:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} = f''_{xi}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Если эта производная положительна, то предельная отдача i-го ресурса возрастает, если вторая производная отрицательна, то предельная производительность является убывающей, в случае знакопеременной производной кривая предельной отдачи фактора имеет восходящий и нисходящий участки, причем в некоторой точке достигается максимум предельной производительности. Для отыскания точки максимума достаточно приравнять вторую производную нулю:

$$f''_{xi}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Характеристику относительного изменения результата производства на единицу относительного изменения затрат i-го ресурса дает показатель эластичности выпуска по затратам i-го ресурса:

$$\mathrm{E}_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{y} = \frac{x_i f'x_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Потребность в i-м ресурсе как функция величины выпуска и объемов других ресурсов определяется выражением:

$$x_i = f(y, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Для любой пары ресурсов i и j можно определить предельную норму h_{ij} замещения j-го ресурса i-м ресурсом. Эта норма равна взятому со знаком минус отношению предельных производительностей j-го и i-го ресурсов:

$$h_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial y / \partial x_j}{\partial y / \partial x_i}.$$

При выборе вида производственной функции необходимо учитывать закономерности изменения средних и предельных продуктов, норм замещения, коэффициентов эластичности. Нередко приемлемую, на первый взгляд, форму функции приходится отвергать, так как соответствующие ей уравнения указанных показателей противоречат выводам качественного экономического анализа или наблюдаемым тенденциям.

Рассмотрим некоторые типичные виды производственных функций и соответствующие им производные показатели. Вначале обратимся к однофакторным функциям, в которых результат производства (зависимая переменная) ставится в связь с единственной независимой переменной. Последняя обозначает либо суммарные производственные затраты, выраженные в рублях, либо затраты какого-то специфического ресурса, особенно в производственных функциях, основанных на экспериментальных данных, когда по самим условиям опыта варьирует лишь один вид затрат (например, внесение удобрений) при неизменной величине всех остальных ресурсов.

Простейшей формой однофакторной производственной функции является линейное уравнение вида:

$$y = a_0 + a_1 x.$$

При этой форме зависимости предельная производительность ресурса есть постоянная величина, равная коэффициенту a_1.

Однофакторная производственная функция может быть, конечно, и нелинейной, включая такие формы, как квадратическая, кубическая, гиперболическая, степенная, показательная, экспоненциальная и др.

Производственная функция, включающая не один, а несколько показателей-факторов, позволяет измерять характер и силу их совместного влияния на результативный производственный показатель. Многофакторная функция позволяет исследовать и влияние каждого фактора в отдельности, но уже с учетом действия других факторов, тогда как однофакторная функция игнорирует, по сути дела, прочие факторы.

Применение многофакторных производственных функций расширяет круг аналитических показателей за счет появления показателей замещения ресурсов. Рассматривая виды многофакторных функций, будем ограничиваться пока лишь двумя факторами, имея в виду, что увеличение их числа делает все выкладки более громоздкими, ничего не меняя в принципиальном отношении.

Как и в однофакторном случае, простейшим уравнением многофакторной производственной функции является линейное уравнение, имеющее для двух факторов вид:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2. \qquad (1.16)$$

Показатели производительности определим для первого ресурса, имея в виду, что точно так же они определяются и для второго ресурса. Средняя производительность характеризуется соотношением:

$$\frac{y}{x_1} = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2}{x_1} = a_1 + \frac{a_0 + a_2x_2}{x_1}.$$

Средняя производительность с ростом x снижается по гиперболическому закону, асимптотически приближаясь к величине a_1.

Предельная производительность первого ресурса постоянна и равна коэффициенту при x_1:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_1.$$

Эластичность выпуска по затратам первого ресурса определяется выражением:

$$\text{Е}_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{y} = \frac{a_1x_1}{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2}.$$

Эластичность положительна (при положительных параметрах уравнения) и возрастает от нуля при $x_1 = 0$ до значений, близких к единице, при неограниченном увеличении x_1. Определим из уравнения (1.16) потребность в ресурсе первого вида:

$$x_1 = \frac{y - a_0 - a_2x_2}{a_1}.$$

Предельная норма замещения первого ресурса вторым определяется отношением:

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2} = -\frac{a_1}{a_2}.$$

Как видим, линейная производственная функция вида (1.16) характеризуется постоянной нормой замещения, не зависящей от объемов и соотношения ресурсов. Ресурсы могут в постоянной пропорции замещать друг друга без всяких ограничений. Даже при равенстве одного из ресурсов нулю можно получить любую величину выпуска за счет увеличения затрат другого ресурса. В связи с этим свойством линейная форма производственной функции часто оказывается непригодной при моделировании реальных зависимостей.

Многофакторная производственная функция часто строится в форме степенного уравнения типа рассмотренной выше функции Кобба-Дугласа. Производственные функции различаются не только по их математической форме, но и по экономическому содержанию, охвату объектов исследования.

1.4. Системы эконометрических уравнений

Сложность и многогранность производственных взаимосвязей, объектов анализа и управления, специфика конкретной производственной структуры или особые цели и формы исследования часто обусловливают необходимость представления производственной функции не одним уравнением, а в виде системы уравнений.

Системы эконометрических уравнений можно условно подразделить на три вида.

К первому виду относятся системы независимых уравнений, каждое из которых решается самостоятельно, вне зависимости от других уравнений, но все они рассматриваются совместно в рамках единой экономико-математической модели, предназначенной для анализа, планирования или прогнозирования производства. Иными словами, интересы исследования производства в целом требуют совместного рассмотрения ряда функций, каждая из которых может характеризовать лишь одну из сторон этого производства.

Простейший вариант такой системы уравнений возникает при анализе выпуска продукции с применением определенной технологии, требующей строго фиксированных пропорций затрат различных ресурсов (непосредственная заменяемость ресурсов отсутствует). Тогда уровень затрат ресурса изменяется пропорционально изменению объема производства. Если рассматривается два ресурса, причем возможен их расход сверх минимальной потребности на данный объем производства y, то производственная функция представляется системой неравенств:

$$x_1 \geq a_1 y,$$
$$x_2 \geq a_2 y.$$

Технологическая характеристика описываемого этой системой производственного процесса определяется коэффициентами затрат:

$$a_1 = \frac{x_1}{y} \text{ и } a_2 = \frac{x_2}{y}.$$

В экономико-математических моделях часто исследуется определенный набор технологических процессов, в которых затрачивается ряд видов ресурсов и производится различная продукция. Если сохраняются предположения о пропорциональности затрат выпуску и отсутствии взаимозаменяемости ресурсов в рамках каждого производственного процесса, то основой модели служит система производственных функций вида:

$$x_{ij} = a_{ij} y_j,$$

где x_{ij} – уровень затрат i-го ресурса в j-м технологическом процессе;

y_j – интенсивность j-го процесса или выпуск j-го вида продукции;

a_{ij} – технологический коэффициент, норма затрат i-го ресурса на единицу интенсивности j-го процесса (или на единицу j-го вида продукции).

При m ресурсах и n производственных процессах эта система содержит, очевидно, mn уравнений. Такой вид производственных функций широко применяется в моделях межотраслевого баланса и линейных моделях оптимального планирования и прогнозирования; они будут рассмотрены в последующих главах.

Ко второму виду относятся системы зависимых уравнений статического характера. Можно выделить два случая зависимости уравнений. В одном случае уравнения описывают последовательную цепочку прямых причинно-следственных связей; при этом факторы, влияющие на анализируемый результативный производственный показатель, сами являются функциями иных факторов, последние также находятся в зависимости от своих показателей-факторов и т. д. Например, одно уравнение системы может представлять объем национального дохода y в зависимости от величины трудовых ресурсов x_1 и производственных фондов x_2, т. е. функцию $y = f(x_1, x_2)$.

Другое уравнение определяет величину трудовых ресурсов x_1 как функцию общей численности населения L, т. е. $x_1 = y$ (L). В такой системе уравнения решаются последовательно (сначала, например, определяется объем трудовых ресурсов на основе прогнозных данных о численности населения, а затем уже может рассчитываться национальный доход из первого уравнения).

В другом случае в цепи причинно-следственных зависимостей отражаются обратные связи, например, национальный доход y является функцией трудовых ресурсов и производственных фондов, т. е. $y = f(x_1, x_2)$, а величина производственных фондов x_2 ставится в зависимость от созданного национального дохода y и иных факторов z, т. е. $x_2 = y\ (y_1\ z)$. В такой системе уравнения должны решаться совместно, одновременно. В обоих рассматриваемых случаях системы уравнений второго вида включают два типа переменных: эндогенные и экзогенные переменные. Эндогенными являются «внутренние» переменные – их значения рассчитываются в рамках самой системы уравнений. Экзогенные переменные влияют на эндогенные, но сами определяются за пределами данной системы уравнений; они являются как бы «внешними» переменными в том смысле, что воздействующие на них факторы данной системой уравнений контролируются. Например, в только что приведенных примерах национальный доход, трудовые ресурсы, производственные фонды являются эндогенными переменными, а общая численность населения – переменная экзогенная, ее величина определяется социально-демографическими факторами, лежащими вне рамок производственных функций. Для разрешимости системы уравнений необходимо, вообще говоря, чтобы число эндогенных переменных в системе было равно числу уравнений.

К третьему виду относятся динамические системы уравнений, охватывающие ряд периодов времени и устанавливающие зависимость переменных не только в пределах каждого периода, но и в связи с их состоянием в предшествующие периоды. Обратимся к примеру. Предположим, что в задачу прогнозирования входит определение четырех взаимосвязанных переменных для некоторого периода t: $x_{1,t}$; $x_{2,t}$; $x_{3,t}$; $x_{4,t}$. В анализ включены не только связи в самом периоде t, но и воздействия с запаздыванием, т. е. зависимости величин переменных в периоде t от состояния влияющих переменных в предыдущем (или еще более раннем) периоде. Такие влияния с запаздыванием вполне реальны; например, величина производственных фондов в народном хозяйстве в данном периоде в значительной степени зависит от объема капиталовложений предыдущего периода.

Взаимосвязи четырех переменных нашего примера схематически показаны на рис. 1.1. Как видим, переменная $x_{1,t}$ зависит от величины переменной x_2 в предыдущем ($t-1$)-м периоде и от переменной x_3 в периоде t. Переменная $x_{1,t}$ влияет на величину переменной $x_{2,t}$, зависящей также от состояния переменной x_3 в ($t-1$)-м периоде. На переменную $x_{3,t}$ воздействуют переменные $x_{2,t}$ и $x_{4,t-1}$. Для переменной $x_{4,t}$ факторами являются переменные $x_{2,t}$ и $x_{3,t-1}$. Переменная $x_{4,t}$ отличается от других тем, что в рамках данной системы связей она не служит фактором для какой-либо другой переменной, представляя собой, очевидно, результирующий производственный показатель.

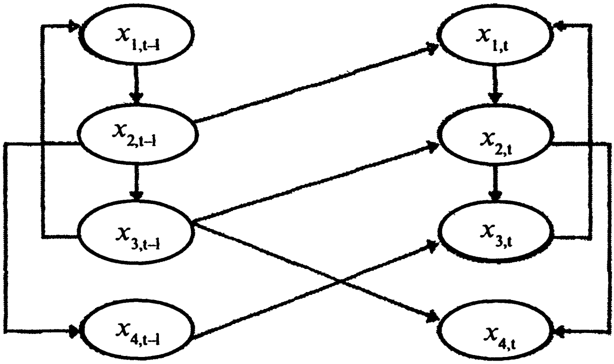


Рис. 1.1. Взаимосвязи переменных с учетом запаздывания

При построении системы уравнений нужно учитывать, что, помимо влияний, показанных на рисунке, каждая анализируемая переменная может испытывать воздействие одной или нескольких экзогенных переменных. Пусть $z_{1,t}$ обозначает экзогенные факторы переменной $x_{1,t}$; соответственно для $x_{2,t}$; $x_{3,t}$; $x_{4,t}$ введем агрегированные экзогенные переменные $z_{2,t}$; $z_{3,t}$; $z_{4,t}$. Тогда с учетом всех взаимосвязей имеем в общем виде следующую систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
x_{1,t} &= f_1(x_{3,t}, x_{2,t-1}, z_{1,t}),\\
x_{2,t} &= f_2(x_{1,t}, x_{3,t-1}, z_{2,t}),\\
x_{3,t} &= f_3(x_{2,t}, x_{4,t-1}, z_{3,t}),\\
x_{4,t} &= f_4(x_{2,t}, x_{3,t-1}, z_{4,t}).
\end{aligned}
$$

В этой системе четко различаются три группы переменных:

1) **эндогенные переменные** $x_{1,t}$; $x_{2,t}$; $x_{3,t}$; $x_{4,t}$, определение которых требует решения приведенной системы уравнений;

2) **запаздывающие эндогенные переменные**: $x_{1,t-1}$; $x_{2,t-1}$; $x_{3,t-1}$; $x_{4,t-1}$; для t-го периода они считаются известными, определенными либо на основе статистической информации, либо в результате решения аналогичной системы уравнений, составленной для $(t-1)$-го периода;

3) **экзогенные переменные** $z_{1,t}$; $z_{2,t}$; $z_{3,t}$; $z_{4,t}$, определяемые за рамками данной системы уравнений.

Переменные второй и третьей групп имеют то общее, что их значения предопределены внешними по отношению к системе уравнений факторами; влияя на переменные t-го периода, они сами не подвержены их обратному влиянию. Переменные второй и третьей групп будем называть предопределенными. Количество предопределенных переменных в уравнениях имеет существенное значение для решения системы эконометрических уравнений.

Частным случаем, упрощающим расчеты, является система уравнений в виде причинной цепочки зависимостей при отсутствии обратных связей между переменными. Пример такой системы зависимостей показан на рис. 1.2.

Как видим, любая цепочка связей приводит в конечном счете к переменной $x_{4,t}$ последовательно и без возвратов. Данная

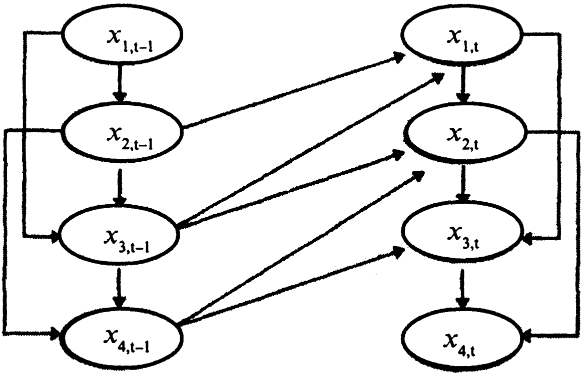


Рис. 1.2. Причинная цепь взаимосвязей переменных

цепь взаимосвязей с добавлением экзогенных переменных дает систему уравнений:

$$x_{1,t} = f_1(x_{2,t-1}, x_{3,t-1}, z_{1,t}),$$
$$x_{2,t} = f_2(x_{1,t}, x_{3,t-1}, x_{4,t-1}, z_{2,t}),$$
$$x_{3,t} = f_3(x_{1,t}, x_{2,t}, x_{4,t-1}, z_{3,t}),$$
$$x_{4,t} = f_n(x_{2,t}, x_{3,t}, z_{4,t}).$$

Такие системы уравнений в виде однозначной причинной цепи называются рекурсивными (рекуррентными) системами. Уравнения в них решаются не одновременно, а последовательно. Так, в приведенной системе вначале решается первое уравнение – определяется $x_{1,t}$ как функция только предопределенных переменных. Затем из второго уравнения получаем $x_{2,t}$ как функцию предопределенных переменных и уже вычисленной $x_{1,t}$. Далее последовательно получаем $x_{3,t}$ из третьего уравнения и $x_{4,t}$ из последнего уравнения системы. Здесь расчеты в первых трех уравнениях являются, в сущности, подготовительными этапами для решения четвертого уравнения, в котором переменная $x_{4,t}$ может в конечном счете рассматриваться как сложная функция всех остальных переменных системы. В этом смысле рекурсивные системы занимают промежуточное положение между производственными функциями, состоящими из одного уравнения, и системами эконометрических уравнений, требующих одновременного решения.

Макроэкономические модели в виде систем эконометрических уравнений составлялись практически во всех развитых странах. Число уравнений в моделях колебалось от нескольких единиц, десятков до сотен и даже тысяч. Так, последние модели для США насчитывали 346 и 608 уравнений, Японии – 691 уравнение, Франции – 2000, Великобритании – 2552 уравнения.

Приведем для примера небольшую по числу уравнений модель, разработанную в свое время в Германии:

$$Y_t = 18{,}50 + 1{,}453\, I_t + 0{,}717\, Y_{t-1},$$

$$I_t = -18{,}92 + 0{,}123\, Y_t + 1{,}293\, Q_t,$$

$$C_t = 32{,}98 + 0{,}540\, Y_t + 0{,}157\, C_{t-1} - 0{,}272\, P_t,$$

$$Q_t = -13{,}98 + 0{,}145\, Q_{t-1} + 0{,}425\, R_t.$$

Здесь Y_{t-1}, Y_t – национальный доход;
I_t – чистые капиталовложения;
C_{t-1}, C_t – личное потребление;
Q_{t-1}, Q_t – прибыль;
P_t – индекс стоимости жизни;
R_t – индекс производительности в промышленности.

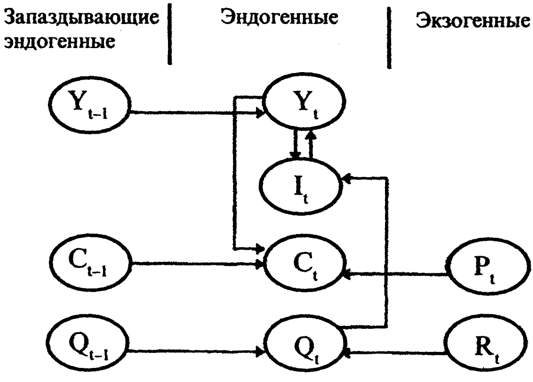


Рис. 1.3. Граф взаимосвязи переменных модели

Как видим, это динамическая модель со всеми тремя разновидностями переменных величин. Изобразим их взаимосвязь в форме графа (рис. 1.3).

Итак, национальный доход в период *t* зависит от его объема в период (*t* –1) и капиталовложений в период *t*.

Чистые капиталовложения зависят от национального дохода и прибыли в период *t*. Личное потребление определяется объемом национального дохода, личным потреблением прошлого периода, а также отрицательным влиянием индекса стоимости жизни. Прибыль зависит от ее величины в прошлом периоде и от индекса производительности в промышленности.

Основные термины и понятия

- экономико-математическая модель;
- эконометрика;
- корреляционно-регрессионный анализ;
- метод наименьших квадратов;
- методы исследования операций;
- производственная функция;
- эластичность в производственных функциях;
- системы эконометрических уравнений;
- эндогенные и экзогенные переменные;
- запаздывающие эндогенные переменные.

Упражнения

Задача 1.

На основании статистических данных по народному хозяйству России за 1995–2003 гг. о национальном доходе Y, основных производственных фондах F и трудовых ресурсах L была получена производственная функция:

$$Y=1{,}058\ F^{0{,}687}\ L^{0{,}313}.$$

Требуется проанализировать указанную производственную функцию по таким показателям:

- средняя эффективность затрат труда;

- предельная эффективность затрат труда;
- средняя фондоотдача;
- предельная фондоотдача;
- эластичность национального дохода по затратам труда;
- эластичность национального дохода по производственным фондам;
- предельная норма замещения ресурсов.

Задача 2.

В одном из исследований была принята следующая формула корреляционной связи между показателями по труду и темпом снижения себестоимости:

$$T_с = AT_п^{a_1}T_з^{a_2}Y_з^{a_3},$$

где $T_с$ – индекс себестоимости 1 руб. товарной продукции в действующих ценах;

$T_п$ – индекс производительности труда в расчете на одного трудящегося;

$T_з$ – индекс средней заработной платы на одного трудящегося;

$Y_з$ – удельный вес заработной платы в затратах на производство базисного периода;

A, a_1, a_2, a_3 – постоянные величины.

В результате расчетов по данным некоторых машиностроительных предприятий были получены значения постоянных величин модели:

A = 0,972; a_1 = – 0,873; a_2 = 0,139; a_3 = –0,048.

1. Пользуясь приведенной формулой, необходимо рассчитать вероятную величину индекса себестоимости, если в плановом периоде предусматривается рост производительности труда на 15%, средней заработной платы – на 10%, а удельный вес заработной платы в затратах на производство базисного периода составил 30%.

2. Сделать выводы о характере и степени влияния показателей – факторов на величину индекса себестоимости.

Тесты

1. Разделы математики, наиболее широко используемые в эконометрике:

а) дифференциальное и интегральное исчисление;

б) корреляционно-регрессионный анализ;

в) теория вероятности и математическая статистика.

2. Для чего в эконометрике применяется метод наименьших квадратов?

а) для расчета параметров уравнений регрессии;

б) для расчета скорости движения астрономических объектов;

в) для определения ошибок выборочной совокупности данных.

3. Что позволяет изучать анализ производственных функций:

а) эффективность основных производственных ресурсов;

б) способы повышения производительности труда;

в) эффект расширения масштабов производства;

г) воздействие на производство научно-технического прогресса.

4. Каково различие между эндогенными и экзогенными переменными в системах эконометрических уравнений?

а) различие определяется экономическим содержанием системы уравнений;

б) различие в расчете переменных при решении или до решения системы уравнений;

в) определяется характеристикой самих переменных.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение экономико-математической модели.
2. Приведите классификацию экономико-математических моделей.
3. Охарактеризуйте сущность и область применения корреляционно-регрессионного анализа.
4. Опишите содержание и возможные приложения метода наименьших квадратов.

5. Дайте определение производственной функции.
6. Приведите средние и предельные показатели, вытекающие из производственной функции.
7. Охарактеризуйте содержание систем эконометрических уравнений.
8. Раскройте смысл эндогенных и экзогенных переменных в системах эконометрических уравнений.

ГЛАВА 2

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВОМ

2.1. Основы математического программирования

Если проанализировать производство какого-либо определенного вида продукции, то, как правило, выявится возможность получения этого продукта несколькими технологическими способами с применением различных взаимозаменяемых средств производства. Так, существует несколько способов выплавки стали (мартеновский, конверторный, в электропечах), добычи угля (шахтный, открытый, гидравлический), производства электроэнергии (на гидростанциях, на тепловых электростанциях, на атомных электростанциях, с использованием энергии приливов и отливов). Нередко сходные продукты получаются с применением не только различных технологических способов, но и разных видов исходного сырья (например, получение натурального и искусственного волокна). В ряде производств допустимы замена одних материалов другими (например, металлов пластмассами), использование различных видов топлива (твердого, жидкого, газообразного). Продукция может выпускаться в различные периоды времени, а произведенная продукция может доставляться потребителям не одним, а несколькими (на выбор) видами транспорта, причем сам маршрут доставки также не является единственно возможным.

Более глубокий анализ обнаруживает, что и одноименные ресурсы и средства производства не являются вполне однородными, а отличаются теми или иными особенностями. Так, теплотворная способность и иные свойства угля зависят от бассейна, где он добывался; производительность однотипных станков — от времени выпуска, конструктивных особенностей, степени изношенности; плодородие различных участков земли даже в пределах одного хозяйства — от месторасположения этих участков, свойств почвы, близости водоемов и пр. Таким образом, если на первый взгляд для каждого продукта имеется вполне определенный способ получения и затрачиваются вполне определенные ресурсы, то в действительности существует множество возможных вариантов решения производственных вопросов, начиная от выбора сырья до перевозки готовой продукции, и на практике всегда приходится выбирать одни варианты и отбрасывать другие.

Естественно, что различные варианты плана требуют неодинаковых затрат и приносят в конечном счете неодинаковый экономический эффект. Если затраты и результаты производства по всем вариантам могут быть точно подсчитаны и сопоставлены, то следует, конечно, отобрать более эффективные варианты и отбросить менее эффективные. Окончательно эта задача суживается до выявления единственного варианта, который в данных условиях эффективнее всех остальных. Если определены ресурсы, которыми мы располагаем, то самым эффективным будет вариант, дающий при этих ресурсах наиболее высокий производственный результат (например, наибольший выпуск в натуральном или стоимостном выражении); если же заранее задан результат производства (например, объем выпуска продукции), то наиболее эффективным считается вариант, требующий наименьших затрат средств или ресурсов для достижения этого результата. Самый эффективный вариант называется оптимальным вариантом. Таким образом, оптимальным является план, обеспечивающий заданный производственный результат при минимальных затратах или максимальный производственный эффект при заданном объеме ресурсов.

Выявление оптимального плана представляет собой, как правило, довольно сложную задачу. Дело в том, что количество возможных вариантов плана обычно весьма велико и отыскание наиболее эффективного из них путем простого их сравнения может потребовать колоссальных затрат времени и труда, во много раз превышающих величину самого эффекта, получаемого за счет оптимального планирования. Поэтому в практике планирования приходится останавливаться лишь на более или менее удачных вариантах плана, не зная даже, насколько они далеки от оптимальных. С другой стороны, в условиях мощного высокоразвитого современного производства неоптимальность плановых решений грозит все более ощутимыми потерями и ущербом. Если принятый фактически вариант плана требует хотя бы на один процент меньше продукции, чем обеспечил бы при тех же условиях оптимальный вариант, то в абсолютном выражении потерянный при этом эффект измеряется зачастую многими миллионами рублей.

Значит, оптимальное планирование — сложная экономическая проблема. До постановки математической задачи необходимо решить ряд экономико-математических проблем, к которым можно отнести: выбор критерия эффективности плана, масштабы и степень детализации построения модели, очередность решения и использование результатов решения, экономико-математических моделей для различных звеньев народного хозяйства и экономических проблем, взаимосвязь и взаимозависимость этих моделей и др.

Определив исходные предпосылки, можно приступать к построению модели. Наиболее общей моделью определения показателей оптимального плана является общая задача математического программирования

$$f(x_1, x_2, \dots, x_i) \to \max (\min),$$

при соблюдении условий

$$F_j(x_1 x_2, \dots, x_i) < в_j, \quad j = 1, 2, \dots, J,$$
$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, I,$$

где x_i — показатели технико-экономических характеристик плана (объем выпуска продукции, степень использования оборудования и т. д.),

F_j — функция, определяющая величину j-го лимитирующего план показателя в зависимости от технико-экономических характеристик плана (затраты сырья, трудовых ресурсов, выпуск продукции, объем полученной прибыли и т. д.);

$в_j$ — величина j-го лимитирующего план показателя;

$f(x_i)$ — оптимизируемая величина (критерий оптимальности плана).

Одним из наиболее эффективных, глубоко разработанных и широко проверенных на практике методов решения задач оптимального планирования является линейное программирование, когда функции f и F в приведенной задаче линейные. Линейное программирование объединяет теорию и методы решения определенного класса задач, в которых требуется найти совокупность значений переменных величин, удовлетворяющую заданным линейным ограничениям и максимизирующую (минимизирующую) некоторую линейную функцию этих переменных.

Помимо линейного программирования, для решения разнообразных экономических задач на оптимум применяются и элементарные расчетные приемы, и средства классического математического анализа, и методы нелинейного, целочисленного, а также динамического программирования, теории массового обслуживания и др. В свою очередь математический аппарат линейного программирования используется при решении не только экономических, но и технических, военных и других задач.

В общей постановке задача линейного программирования сводится к следующему. Необходимо максимизировать (минимизировать):

$$\sum_{i=1}^{I} c_i x_i \to \max (\min),$$

при соблюдении условий :

$$\sum_{i=1}^{I} a_{ij} x_i \gtrless в_j, \qquad j = 1, 2,..., J,$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1,2,..., I.$$

Здесь x_i — переменные величины задачи линейного программирования;

a_{ij}, $в_j$, c_i — константы задачи.

В математической модели задачи линейного программирования выделяются три составные части: целевая (максимизируемая) функция, система ограничений и условие неотрицательности переменных.

Всякое решение задачи, удовлетворяющее системе ограничений и условию неотрицательности, называется допустимым решением, а удовлетворяющее всем трем группам требований — оптимальным решением.

Система ограничений общей задачи линейного программирования включает J равенств и неравенств. Для общей постановки и решения задачи линейного программирования исходные ограничения — неравенства должны быть преобразованы в уравнения. Это достигается введением в левую часть каждого ограничения дополнительной неотрицательной величины. Так, следующая система ограничений:

$$\sum_{i=1}^{I} a_{ij}x_i < в_j, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{I} a_{ij}x_i = в_j, \quad j = n+1, n+2, ..., m, \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{I} a_{ij}x_i > в_j, \quad j = m+1, m+2, ..., J, \tag{2.3}$$

преобразуется в систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^{I} a_{ij}x_i + x_{i+j} = в_j, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

$$\sum_{i=1}^{I} a_{ij}x_i = в_j, \quad j = n+1, n+2, ..., m,$$

$$\sum_{i=1}^{I} a_{ij}x_i - x_{i+j} = в_j, \quad j = m+1, m+2, ..., J.$$

В задачах линейного программирования дополнительные переменные имеют вполне определенный экономический смысл. Так, если в ограничениях (2.1) величины $в_j$ отражают наличие производственных ресурсов, дополнительные переменные в оптимальном плане будут характеризовать объем ресурсов. Если в ограничениях (2.3) величины $в_j$ отражают плановые задания (прибыль, валовая продукция и т. д.), дополнительные переменные в оптимальном плане характеризуют величину перевыполнения планового задания.

Общее количество переменных (I + n + J – m) должно превышать количество линейно независимых уравнений (J). В этом случае система может иметь бесконечное множество решений, именно тогда возникает необходимость в специальных методах отыскания среди них решения, наилучшего с точки зрения принятого критерия эффективности. При I + n + J – m = J, то есть, когда все ограничения заданы равенствами и количество переменных равно количеству линейно независимых уравнений, система ограничений имеет единственное решение. Разумеется, система ограничений может оказаться и несовместной, т. е. не имеющей решений вообще.

Из математических особенностей общей модели линейного программирования вытекает ряд требований, которые необходимо учитывать при постановке экономической задачи. Как уже отмечалось, далеко не каждая задача оптимального планирования может быть сформулирована и решена в рамках линейного программирования. Укажем основные условия, при которых это становится возможным.

1. В задаче должен быть четко сформулированный и количественно определенный показатель эффективности — критерий оптимальности плана. В конкретных задачах не всегда легко найти единственный критерий, позволяющий отбрасывать одни варианты и принимать другие. О работе предприятий судят по ряду показателей — объему, ассортименту и качеству продукции, прибыли, рентабельности и др.; о различных вариантах капитального строительства — по величине капиталовложений, объему и себестоимости продукции, срокам строительства. Но в математической задаче должна быть одна целевая функция, хотя она может объединять и несколько экономических показателей; например, текущие производственные затраты, приведенные капиталовложения, транспортные расходы в некоторых задачах объединяют в единый критерий «минимум приведенных затрат».

2. Важнейшей составной частью задачи являются особые условия и ограничения, связанные с наличными ресурсами, потребностями и другими факторами, определяющими допустимые решения. В реальной экономической действительности взаимодействует слишком большое количество факторов, чтобы все они могли быть учтены в задаче. К этому и не следует стремиться. Однако необходимо отобрать и ввести в условия задачи все решающие факторы и ограничения, чтобы упрощенная по сравнению с действительностью модель не потеряла реального характера и практической ценности.

3. Линейное программирование предназначено для выбора оптимальной программы среди многих допустимых программ,

и оно применяется только тогда, когда конкретные условия экономической задачи обусловливают свободу выбора вариантов. Переменные величины в моделях линейного программирования взаимозаменяемы, они не только зависимы между собой по величине, но и могут непосредственно замещать друг друга в плане. Следовательно, свойство взаимозаменяемости должно быть присуще и тем экономическим величинам, которые выступают в задаче в качестве ее переменных.

4. Модель задачи линейного программирования должна содержать только линейные уравнения и неравенства, т. е. в целевую функцию и ограничения задачи переменные могут входить лишь в первой степени. Реальные экономические зависимости не всегда носят линейный характер. Тогда необходимо либо ограничиться приближенным решением, аппроксимировав нелинейные функции линейными, либо прибегнуть к более сложным численным методам, прежде всего к методам нелинейного программирования.

Отметим некоторые общие особенности получаемого решения задачи линейного программирования. В задаче возможны четыре основных результата решения:

1) условия задачи несовместны, задача не имеет неотрицательных решений;
2) неотрицательные решения имеются, но максимум (минимум) целевой функции не ограничен (стремится к бесконечности);
3) оптимум целевой функции есть конечное число и достигается при единственном сочетании значений переменных величин;
4) максимальное (минимальное) значение целевой функции достигается при многих вариантах программы (случай множества оптимальных планов).

При плановой постановке экономической задачи первый и второй результаты исключаются, наложение на переменные величины слишком жестких ограничений может привести к противоречивости всей системы исходных условий задачи.

В линейном программировании доказывается, что если задача включает I переменных и J линейно независимых ограничений (I>J), то в оптимальном плане положительные значения будут иметь не более J переменных, а остальные I–J переменные равны нулю. Это важно иметь в виду при постановке экономической задачи. Если в задаче планирования производственной программы фигурируют 5 видов продукции и 2 ограничения, то еще до решения задачи видно, что в оптимальный план войдет не больше двух видов продукции из 5.

Для решения задачи линейного программирования используются симплексный метод и различные его модификации. Если условия задачи линейного программирования не противоречивы, то область ее допустимых решений образует выпуклый многогранник в I-мерном пространстве. При этом оптимальное решение, если оно существует, обязательно достигается в некоторой вершине многогранника. Чтобы найти решение задачи линейного программирования, достаточно перебрать лишь планы, соответствующие вершинам многогранника допустимых решений. Такие планы называются опорными планами.

Симплексный метод позволяет осуществить упорядоченный перебор вершин многогранника. После определения одной из вершин этот метод помогает установить, является ли найденный план оптимальным, т. е. достигнут ли в этой вершине максимум целевой функции. Если план не оптимален, то производится переход к такой соседней вершине многогранника, которая обеспечивает не меньшее значение целевой функции.

Повторное применение указанной процедуры приводит в конце концов к вершине, соответствующей оптимальному плану. Количество шагов (переходов) от исходной вершины до точки оптимума обычно представляет собой величину одного порядка с числом ограничений решаемой задачи.

Последовательность расчетов по оптимальному методу рассмотрим на следующем примере. Предприятие может выпускать изделия четырех видов — А, Б, В, Г. Все изделия имеют неограниченный сбыт и предприятие может самостоятельно планировать ассортимент и величину выпуска. Лимитирующим фактором являются три группы оборудования, плановый фонд времени работы которого задан и не может быть превышен. Известны нормы времени на обработку каждого вида изделий на оборудовании каждой группы, а также величина прибыли, получаемой предприятием за единицу отдельных изделий (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Исходная информация задачи

Группы оборудования	Время в минутах на единицу изделия				Месячный фонд времени (мин.)
	А	Б	В	Г	
I	1	2	4	8	24 000
II	3	5	1	0	12 000
III	6	0	3	1	30 000
Прибыль за единицу изделия (тыс. руб.)	0,4	0,2	0,5	0,8	

План производства должен обеспечить предприятию наибольшую сумму прибыли. Сформулируем математически условие задачи:

максимизировать: $0{,}4\,x_1 + 0{,}2\,x_2 + 0{,}5\,x_3 + 0{,}8\,x_4$

при соблюдении условий:
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \le 24\,000;$$
$$3x_1 + 5x_2 + x_3 \le 12000;$$
$$6x_1 + 3x_3 + x_4 \le 30\,000;$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 – соответственно выпуск изделий А, Б, В, Г. Здесь и дальше условие неотрицательности не приводится, но подразумевается. Преобразовав неравенства в уравнения, получим:
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_5 = 24\,000,$$
$$3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_6 = 12000,$$
$$6x_1 + 3x_3 + x_4 + x_7 = 30\,000.$$

По экономическому содержанию переменные x_5, x_6, x_7 обозначают неиспользуемое в плане время работы оборудования соответствующей группы. Для решения задачи симплексным методом составляется специальная симплексная таблица (табл. 2.2). В ней выделяются три последовательно расположенные части, соответствующие трем планам задачи. Первый получен непосредственно на основе исходных данных. В самой верхней строке таблицы записаны коэффициенты целевой функции. Дополнительные переменные входят в целевую функцию с нулевыми коэффициентами. В столбце представлены коэффициенты целевой функции при переменных, входящих в план на данном этапе. Строка $z_i - c_i$ заполняется так. Величина z для i-го столбца получается как сумма произведений величин столбца на соответствующие коэффициенты столбца i, затем из произведения вычитается величина c_i.

Таблица 2.2

Решение задачи симплексным методом

Базис	c_i	План	0,4	0,2	0,5	0,8	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	0	24000	1	2	4	8	1	0	0
x_6	0	12000	3	5	1	0	0	1	0 (1)
x_7	0	30000	6	0	3	1	0	0	1
$z_i - c_i$	–	0	-0,4	-0,2	-0,5	-0,8	0	0	0
$\rightarrow x_4$	0,8	3000	1/8	1/4	1/2	1	1/8	0	0
x_6	0	12000	3	5	1	0	0	1	0 (2)
x_7	0	27000	47/8	-1/4	5/2	0	-1/8	0	1
$z_i^{I} - c_i$	–	2400	-0,3	0	-0,1	0	0,1	0	0
x_4	0,8	2500	0	1/24	11/24	1	1/8	1/24	0
$\rightarrow x_1$	0,4	4000	1	5,3	1/3	0	0	1/3	0(3)
x_7	0	3500	0	-241/24	13/24	0	-1/8	-47/24	1
$z_i^{II} - c_i$	–	3600	0	0,5	0	0	0,1	0,1	0

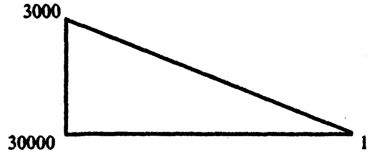
Переменные величины в правой части нашей таблицы имеют определенные числовые значения, а именно: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$; $x_5 = 24\,000$; $x_6 = 12\,000$; $x_7 = 30\,000$. Все основные переменные приравнены нулю и не входят в базис, а дополнительные переменные получают свои предельные значения в соответствии с исходными уравнениями. Это отвечает такому «плану», при котором ничего не производится, ресурсы не используются и значение целевой функции равно нулю.

Решение задачи заключается в последовательном введении в план основных переменных, пока не будет получено оптимальное решение. При этом на каждом этапе расчета можно ввести лишь одну переменную. Одновременно другая переменная выводится из базиса, так как при трех ограничениях задачи в базисе не может содержаться более трех переменных. Сначала определяется, какая именно из основных переменных вводится в базис. Поскольку задача решается на максимум прибыли, целесообразнее начать с наиболее прибыльного изделия. В нашем примере самым прибыльным является изделие Г, иначе говоря, переменной x_4 соответствует в строке $z_i - c_i$ наибольшее по абсолютной величине число. Определим, в каком количестве может быть предусмотрен выпуск изделий Г. Это зависит от объема ресурсов и нормативов затрат. На оборудовании I группы можно обработать 3 000 изделий (24 000 мин. : 8 мин.). Оборудование II группы для выпуска этого изделия не используется.

Фонда времени оборудования III группы хватит на обработку 30 000 изделий Г. Очевидно, что больше 3000 изделий Г изготовить не удается, так как лимитирует оборудование I группы. Поэтому переменная x_4 в плане равняется 3000 и вводится на место переменной x_5, которая исключается из базиса и принимает нулевое значение.

Подчеркнем число 8, находящееся на пересечении столбца x_4 (вводимой переменной) и строки x_5 (выводимой переменной). Это число называется направляющим (ключевым, разрешающим) элементом. Рассмотрим вторую часть таблицы 2.2. Прежде всего рассчитывается строка вводимой переменной (отмеченная в таблице стрелкой). Эта строка получается из строки x_5 – исходного варианта путем деления всех элементов на направляющий элемент. Именно в этом соотношении (1:8) переменная x_4 замещает переменную x_5. В столбце c_i проставляется прибыль за изделие Г (0,8).

После расчета строки x_4 пересчитывается столбец «план». На оборудовании II группы изделие Г не обрабатывается, а в новом плане фонд его времени остается без изменений — 12 000 мин. Фонд времени оборудования III группы уменьшится. Первоначально он составляет 30 000 мин., на каждое изделие Г затрачивается 1 мин., всего производится 3 000 изделий Г, следовательно, остающийся неиспользованным фонд времени оборудования III группы составит 30000 — 1 × 3000 = 27 000 мин. Данные для расчета расположены своеобразным треугольником в нашей таблице: две вершины лежат в 1-м (старом) плане, третья — во 2-м (новом).



При расчете из числа, стоящего в вершине прямого угла, мы вычитали произведение двух других чисел. Остаток (x_7 =27 000) записываем в соответствующей строке нового плана. Следующее число в графе «план» – прибыль при данном варианте, равное произведению выпуска изделий Г на единичную прибыль (0,8× 3000=2 400).

После столбца «план» пересчитываются остальные столбцы симплексной таблицы. При этом следует иметь в виду, что в столбцах всех переменных, входящих в базис, на пересечении одноименных строк и столбцов всегда находится единица, а остальные элементы столбца равны нулю.

Остальные столбцы подлежат пересчету. Для пересчета какого-либо коэффициента в симплексной таблице находятся три числа:

1) число, стоящее на месте этого коэффициента в предыдущем варианте;
2) число, стоящее в той же строке предыдущего варианта, но в столбце вводимой переменной;
3) число, находящееся в новом варианте в одном столбце с искомым коэффициентом, в строке вновь введенной переменной.

Указанные три числа в таблице образуют прямоугольный треугольник. Для определения искомого коэффициента нужно из первого числа (оно находится в вершине прямого угла) вычесть произведение двух других чисел. Рассчитаем, например, коэффициент на пересечении столбца x_1 и строки x_7. Он равен $6 - 1 \times 1/8 = 47/8$. Показатель в строке $z_i^! - c_i$ можно рассчитывать либо непосредственно по формуле, подставляя новые данные, либо по общему правилу треугольника. По окончанию пересчета получаем вариант (2). Теперь необходимо выяснить, является ли данный вариант плана оптимальным или он может быть улучшен. Для этого просматривается строка $z_i^! - c_i$ варианта (2); если она содержит отрицательные числа, то план можно улучшить. Как видим, в этой строке есть два отрицательных числа. Они указывают, что план может быть улучшен введением в базис переменной x_1 или x_3.

Отрицательные числа также показывают, насколько увеличится прибыль при введении в план единицы того или другого изделия (на 0,3 – для изделия А и на 0,1 – для изделия В). Эти цифры могут показаться противоречащими исходным условиям задачи – изделие А приносит 0,4 тыс. руб. прибыли, а изделие В — 0,5 тыс. руб. Дело в том, что на данном этапе расчета введение в план изделий А или В вытеснит известное количество ранее введенных изделий Г, чтобы высвободить для вновь вводимых часть времени оборудования I группы. Цифры –0,3 и –0,1 показывают возможное увеличение прибыли с учетом потерь от частичного вытеснения из плана изделий Г. Так как переменной x_1 соответствует наибольшее по абсолютной величине отрицательное число, она вводится в план. Расчет производится аналогично, как и для переменной x_4. После расчета просматриваем в новом варианте строку $z_i^{II} - c_i$. В ней содержатся только нули и положительные элементы. Это означает, что вариант (3) является оптимальным и не может быть улучшен, т. е. в данных условиях нельзя получить более 3 600 тыс. руб. прибыли.

Рассмотрим обобщенную характеристику процесса расчета оптимального плана по симплексному методу. Задача состоит в максимизации

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_I x_I + c_{I+1} x_{I+1} + \dots + c_{I+J} x_{I+J}$$

при соблюдении условий:

$$a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \dots + a_{I1} x_I + x_{I+1} = b_1,$$
$$a_{12} x_2 + a_{22} x_2 + \dots + a_{I2} x_I + x_{I+2} = b_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{1J} x_1 + a_{2J} x_2 + \dots + a_{IJ} x_I + x_{I+J} = b_J,$$
$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \dots, I, I+1, \dots, I+J.$$

Важной особенностью такой постановки задачи является то, что исходные уравнения в числе неизвестных величин содержат переменные, коэффициенты при которых образуют единичную матрицу. В целевую функцию каждая переменная может входить с любым коэффициентом (положительным, отрицательным, нулевым).

В качестве исходного опорного плана задачи принимается следующий план:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_I = 0,\ x_{I+1} = b_1,\ x_{I+2} = b_2,\ \dots,\ x_{I+J} = b_J.$$

При данном исходном плане матрица представлена в таблице 2.3.

Таблица 2.3

строка	базис	c_i	план	c_1	c_2	...	c_i	...	c_I	c_{I+1}	c_{I+2}	...	c_{I+j}	...	c_{I+J}
				x_1	x_2	...	x_i	...	x_I	x_{I+1}	x_{I+2}	...	x_{I+j}	...	x_{I+J}
1	x_{I+1}	c_{I+1}	$в_1$	a_1	a_{21}	...	a_{i1}	...	a_{I1}	1	0	...	0	...	0
2	x_{I+2}	c_{I+2}	$в_2$	a_{12}	a_{22}	...	a_{i2}	...	a_{I2}	0	1	...	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
j	x_{I+j}	c_{I+j}	$в_j$	a_{1j}	a_{2j}	...	a_{ij}	...	a_{Ij}	0	0	...	1	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
J	x_{I+J}	c_{I+J}	$в_J$	a_{1J}	a_{2J}	...	a_{iJ}	...	a_{IJ}	0	0	...	0	...	1
J + 1	-	-	z_0	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	...	$z_i - c_i$	...	$z_I - c_I$	0	0	...	0	...	0

Показатели первых J строк переносятся в таблицу непосредственно из исходных данных, показатели J+1 строки вычисляются:

$$z_0 = c_{I+1}\, в_1 + c_{I+2}\, в_2 + \dots + c_{I+J}\, в_J \tag{2.4}$$

$$z_i - c_i = (c_{I+1}\, a_{i+1} + c_{I+2}\, a_{i2} + \dots + c_{I+J}\, a_{iJ}) - c_i . \tag{2.5}$$

Первым шагом в анализе исходного опорного плана является проверка его на оптимальность. План является оптимальным, если в (J+1)-й строке отсутствуют отрицательные числа, т. е. $z_i - c_i > 0$ для всех i.

Если же в (J+1)-й строке есть хотя бы одно отрицательное число, а в соответствующем ему столбце имеется один положительный коэффициент, то это свидетельствует о возможности отыскания другого опорного плана, при котором значение целевой функции будет не меньше величины z_0 исходного плана.

Вычислительный процесс при переходе от одного опорного плана к другому заключается в следующем.

1. Если в (J+1)-й строке имеется несколько отрицательных чисел, выбирается переменная, которая будет вводиться в базис. Предпочтение отдается переменной, введение которой обеспечит большой прирост целевой функции. Предположим, что в базис вводится переменная x_i.

2. Необходимо установить, какая переменная выводится из базиса. Для всех положительных коэффициентов i-го столбца определяются отношения:

$$\frac{в_1}{a_{i1}}, \frac{в_2}{a_{i2}}, \dots, \frac{в_J}{a_{iJ}} .$$

Минимальное из этих отношений указывает строку выводимой из базиса переменной. Допустим, что это строка j; следовательно, переменная x_i будет замещать переменную x_{I+j}. Направляющим элементом является элемент a_{ij}.

3. Производится переход к новой симплексной таблице, в которой прежде всего заполняется строка переменной x_i. Новые элементы этой строки определяются путем деления элементов j-й строки исходного варианта на величину направляющего элемента:

$$\frac{в_j}{a_{ij}}, \frac{a_{1j}}{a_{ij}}, \frac{a_{2j}}{a_{ij}}, \dots, 1, \dots, \frac{a_{Ij}}{a_{ij}}, 0, 0, \dots, \frac{1}{a_{ij}}, \dots, 0.$$

В столбце c_i в j-й строке нового варианта проставляется c_i.

4. Пересчитывается столбец «план». В строке j этого столбца уже находится величина $\frac{в_j}{a_{ij}}$.

Остальные элементы определяются по правилу трех чисел, из которых первое и второе находятся соответственно в столбцах «план» и x_i исходного варианта, а третьим является частное $\frac{в_j}{a_{ij}}$.

При расчете из первого числа вычитается произведение двух других. Таким образом, элементы столбца «план» равны:

$$в_1 - a_{i1}\frac{в_j}{a_{ij}},\ в_2 - a_{i2}\frac{в_j}{a_{ij}},\ \ldots,\ \frac{в_j}{a_{ij}},\ \ldots,\ в_j - a_{ij}\frac{в_j}{a_{ij}}.$$

5. Производится пересчет матрицы коэффициентов. Формулы пересчета аналогичны рассмотренным в пункте 4. Так, элементы столбца x_1 выражаются через элементы исходной матрицы коэффициентов следующим образом:

$$a_{11} - a_{i1}\frac{a_{1j}}{a_{ij}},\ a_{12} - a_{i2}\frac{a_{1j}}{a_{ij}},\ \ldots,\ \frac{a_{1j}}{a_{ij}},\ \ldots,\ a_{1j} - a_{ij}\frac{a_{1j}}{a_{ij}}.$$

6. Определяются элементы (J+1)-й строки нового плана: либо непосредственно по формулам (2.4), (2.5) для новых значений столбцов, либо по общему правилу трех чисел. Например:

$$z_0^{\mathrm{I}} = z_0 - (z_i - c_i)\frac{в_j}{a_{ij}}.$$

Последний способ требует обычно меньшего объема вычислений, сохраняется единый принцип пересчета всей матрицы коэффициентов.

7. По завершении расчета нового варианта плана в нем анализируется (J + 1)-я строка. Если в ней имеются отрицательные числа, просматриваются столбцы, к которым они относятся.

Если в столбцах нет положительных коэффициентов, то максимум целевой функции не ограничен и возможно построить планы со сколь угодно большим ее значением. Если же в столбце с отрицательным элементом в (J +1)-й строке имеются положительные коэффициенты, то мы можем перейти к новому опорному плану.

После получения (J+1)-й строки со всеми положительными элементами, мы будем иметь оптимальный план. При этом возможно, что некоторой переменной, не входящей в окончательный базис, в (J+1)-й строке соответствует нуль. Тогда можно обычным путем ввести эту переменную в базис и получить новый план, который также будет оптимальным. При наличии двух или нескольких опорных оптимальных планов оптимальными будут и любые их выпуклые линейные комбинации.

Для построения исходного опорного плана при решении задачи симплексным методом необходимо, чтобы матрица коэффициентов при переменных I столбцов, J строк (I > J) имела в себе единичную матрицу порядка J. Если единичной матрицы нет, для решения задачи применяется симплексный метод с искусственным базисом.

В левую часть уравнений вводятся неотрицательные искусственные переменные $w_1, w_2, \ldots, w_J$, коэффициенты при которых образуют единичную матрицу. Эти же переменные с большими по абсолютной величине отрицательными коэффициентами (-M) включаются в целевую функцию. Расширенная задача предполагает максимизацию:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_i x_i - Mw_1 - Mw_2 - \ldots - Mw_J \rightarrow \max,$$

при соблюдении условий

$$a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{I1} x_I + w_1 = b_1,$$
$$a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{I2} x_I + w_2 = b_2,$$

....

$$a_{1J} x_1 + a_{2J} x_2 + \ldots + a_{IJ} x_J + w_J = b_J,$$
$$x_i \geq 0, \quad w_j \geq 0.$$

Искусственные переменные необходимы для построения исходного плана задачи. Однако в дальнейшем они должны выводиться из базиса, так как в окончательном плане задачи должны соблюдаться исходные уравнения вида:

$$\sum_{i=1}^{I} a_{ij} x_i = b_j,$$

а это возможно лишь тогда, когда все искусственные переменные равны нулю. Исключение из базиса искусственных переменных обеспечивается тем, что в целевую функцию они входят с очень большими по абсолютной величине отрицательными коэффициентами, поэтому для максимизации линейной формы обращение этих переменных в нуль является необходимым условием. Матрица исходного опорного плана задачи с искусственным базисом формируется так же, как и матрица без него с одним отличием. При расчете величин $z_i - c_i$ в них войдут компоненты, содержащие число М, например (–4 – 3М). Поэтому для $z_i - c_i$ в таблицах будем выделять две строки: в верхнюю (J+1)-ю записываются компоненты, не содержащие число М, – (–4) , в нижнюю (J+2)-ю – компоненты, содержащие число М, – (3М).

Расчет начинается с оценки возможности улучшения плана. Для этого в (J+2)-й строке отыскивается число М с наибольшим по абсолютной величине отрицательным коэффициентом. После исключения из базиса искусственных переменных план улучшается по (J+1)-й строке. Поскольку исключенные из базиса искусственные переменные в дальнейшем снова в него не включаются, пересчет относящихся к этим переменным столбцов необязателен. Возможны случаи, когда в (J+2)-й строке еще остается отрицательное число, но в соответствующем ему столбце отсутствуют положительные коэффициенты. Это означает, что исходная задача не имеет решения.

Вернемся к общей характеристике задач линейного программирования и сформулируем задачу наилучшего распределения ограниченных ресурсов для достижения максимального выпуска продукции. Предположим, что в производстве используется J различных видов ресурсов, объем которых ограничен величинами $в_j$. Может производиться I видов продукции, величина выпуска которых характеризуется переменными x_i. Известны нормы затрат каждого ресурса на единицу каждого вида продукции – a_{ij}, а также стоимостная оценка единицы продукции c_i. Необходимо максимизировать:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_I x_I \to \max,$$

при соблюдении условий

$$a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{I1} x_I \le в_1,$$

$a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{12} x_1 \leq в_2,$

....

$a_{1J} x_1 + a_{2J} x_2 + \ldots + a_{1J} x_1 \leq в_J,$
$x_i \geq 0.$

На базе тех же исходных данных может быть поставлена еще одна задача, в которой переменными величинами, подлежащими определению, являются оценки – y_j, приписываемые каждому виду ресурсов. Они должны быть такими, чтобы общая оценка всего имеющегося количества ресурсов была минимальной, но при условии, что суммарная оценка ресурсов, расходуемых на единицу любого вида продукции, будет не меньше, чем цена за эту единицу.

Математически задача сводится к минимизации:

$$\sum_{j=1}^{J} в_j y_j \to \min,$$

при соблюдении условий:
$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{1J} y_J \leq c_1,$
$a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2J} y_J \geq c_2,$

....

$a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1J} y_J \geq c_I,$
$y_i \geq 0.$

Сопоставим обе задачи. Первая из них – задача на максимум, вторая – задача на минимум; в соответствии с этим изменился и характер ограничений (знак неравенства). В первой задаче I неизвестных и J ограничений, во второй J неизвестных и I ограничений.

Коэффициенты в целевых функциях и величины в правых частях неравенств при переходе от одной задачи к другой меняются местами. Кроме того, при этом переходе транспонируется матрица коэффициентов (строки матрицы заменены столбцами).

Обе задачи образуют двойственную пару задач. Первую из них называют **прямой**, а вторую – **двойственной задачей**. С экономической стороны решение прямой задачи дает оптимальный план выпуска продукции, а решение двойственной задачи – оптимальную систему условных оценок применяемых ресурсов.

Если в прямой задаче ограничения заданы уравнениями и неравенствами «больше или равно», то в двойственной отсутствует условие $y_i \geq 0$. Для прямой задачи можно записать следующие соотношения:

максимизируемая функция

Σc стоимость единицы продукции	·	x размеры выпуска продукции	=	Σcx стоимость всей продукции	$\to$ max

ограничивающие условия

Σa нормы расходов ресурсов на единицу продукции	·	x размеры выпуска продукции	=	Σax общий расход ресурсов	$\leq$	$в$ объем имеющихся ресурсов

Соотношения для двойственной задачи следующие:

минимизируемая функция

Σa объем имеющихся ресурсов	·	y условные оценки единицы ресурсов	=	$\Sigma\, вy$ общая оценка имеющихся ресурсов	$\to$ min

ограничивающие условия

Σa нормы расходов ресурсов на единицу продукции	·	y условные оценки единицы продукции	=	$\Sigma\, ay$ общая оценка ресурсов, расходуемых на единицу продукции	$\geq$	c стоимость единицы продукции

В линейном программировании доказывается следующая **основная теорема двойственности**: если одна из задач двойственной пары имеет оптимальное решение, то другая также имеет оптимальный план, причем максимум целевой функции исходной задачи и минимум двойственной численно равны. Оптимальные планы двух задач связаны не только равенством значений целевых функций. В них соблюдаются и другие важные соотношения. Если в оптимальном плане исходной задачи какое-либо j-е ограничение выполняется как строгое неравенство, то соответствующая j-я переменная в оптимальном плане двойственной задачи равна нулю. По экономическому содержанию это означает, что положительную двойственную оценку могут иметь лишь ресурсы, полностью используемые в оптимальном плане; оценки не полностью используемых ресурсов всегда равны нулю.

С другой стороны, если какая-то i-я переменная исходной задачи входит в оптимальный план с положительным значением, то соответствующее ограничение в оптимальном плане двойственной задачи будет выполняться как строгое равенство. Если же i-я переменная исходной задачи не входит в оптимальный план, то в оптимальном плане двойственной задачи соответствующее i-е ограничение будет, как правило, обращаться в строгое неравенство. Экономическое содержание этой математической зависимости следующее: если данный вид продукции вошел в оптимальный план, то двойственная оценка ресурсов, затрачиваемых на единицу этой продукции, в точности равна ее цене, и производство продукции по оценкам оправдано. Если же выпускать данную продукцию нерационально и она не вошла в оптимальный план, то и по оценкам ее производство будет убыточным, т. е. оценка затрачиваемых на нее ресурсов окажется выше цены этой продукции. Характерно, что при исследовании симплексного метода решение одной из задач двойственной пары автоматически приводит к решению другой задачи.

Вернемся к изложенному примеру и составим двойственную к ней задачу. Она заключается в минимизации:

$$24\,000\, y_1 + 12\,000\, y_2 + 30\,000\, y_3 \to \min,$$

при соблюдении условий

$$\begin{aligned}
&y_1 + 3y_2 + 6y_3 \ge 0{,}4\,;\\
&2y_1 + 5y_2 \ge 0{,}2\,;\\
&4y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 0{,}5;\\
&8y_1 + y_3 \ge 0{,}8;
\end{aligned}$$

где y_1, y_2, y_3 – условные оценки ресурсов (времени работы оборудования). В последней части таблицы 2.2 в столбце «план» находим решение прямой задачи: $x_1 = 4000$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 2500$. Сумма прибыли в оптимальном плане соответствует 3 600 тыс. руб. Решение двойственной задачи находится в строке $z_i^{\prime} - c_i$ (табл. 2.2) в трех последних столбцах (столбцах дополнительных переменных): $y_1 = 0{,}1$; $y_2 = 0{,}1$; $y_3 = 0$. Переменные y

обозначают оценки одной минуты времени работы оборудования. Таким образом, для I и II групп оборудования они равны 0,1; для III группы оценка равна нулю, так как фонд времени этой группы в оптимальном плане используется не полностью.

Рассмотрим более подробно экономическое содержание и основные свойства двойственных оценок. Величина двойственной оценки того или иного ресурса показывает, насколько возросло бы максимальное значение целевой функции, если бы объем данного ресурса увеличился на одну единицу. Так, если располагаемый фонд времени работы I или II группы оборудования увеличится на 1 мин., то можно будет построить новый оптимальный план, в котором общая прибыль будет на 0,1 тыс. руб. выше. В связи с этим понятна и нулевая оценка, полученная для III группы оборудования: поскольку это оборудование используется не полностью, то дальнейшее увеличение фонда его времени не повлияет на оптимальный план выпуска продукции и сумму прибыли.

Нужно, однако, иметь в виду, что оценки позволяют судить об эффекте не любых, а лишь сравнительно небольших изменений объема ресурсов. При значительных изменениях сами оценки становятся другими. Таким образом, двойственные оценки измеряют эффективность малых приращений объемов ресурсов в конкретных условиях данной задачи.

Если нашей целью является расширение производства и повышение эффективности плана путем привлечения дополнительных ресурсов, то анализ оценок поможет выбрать правильное решение. Прирост различных ресурсов будет давать неодинаковый эффект, и оценки позволяют с большой точностью выявить «узкие места», сдерживающие рост эффективности производства. С учетом всех конкретных условий задачи оценки показывают, какие ресурсы являются более дефицитными (они будут иметь самые высокие оценки), какие менее дефицитны и какие избыточны.

К соответствующим выводам нельзя прийти путем элементарного анализа исходных данных. Так, в нашем примере фонд времени I группы оборудования вдвое больше, чем фонд времени II группы, но с учетом всех условий дефицитность того и другого оборудования одинакова (оценки равны). Из этого следует, что двойственные оценки отражают сравнительную дефицитность различных видов ресурсов в отношении принятого в задаче показателя эффективности.

На основании оценок можно определять своеобразные «нормы заменяемости ресурсов».

Так, в нашем примере, поскольку оценки равны, известная часть фонда времени оборудования I группы может быть заменена таким же количеством времени работы оборудования II группы. При этом оптимальный план выпуска продукции изменится, но его эффект (сумма прибыли) останется на том же уровне. Если оценки различаются в два раза, то соответствующие замены могут производиться в соотношении 1:2. Разумеется, такая эквивалентная замена может осуществляться не для всего объема ресурсов, а лишь в известных пределах. Кроме того, речь идет не об абсолютной заменяемости ресурсов, а об относительной, т. е. заменяемости с точки зрения конечного эффекта и лишь в конкретных условиях данной задачи.

Двойственные оценки связаны с понятием рентабельности плана, причем устанавливается своеобразный расчетный показатель рентабельности: рентабельным считается тот план, в котором результат производства равен затратам, рассчитанным по оценкам. Поскольку максимум линейной формы прямой (исходной) задачи и минимум двойственной задачи численно равны, то в оптимальном плане гарантируется равенство общего эффекта общей оценке затрачиваемых ресурсов. Равенство эффекта и оценки затрат обеспечивается и для отдельных видов продукции, если они входят в оптимальный план; для видов продукции, не входящих в оптимальный план, оценка затрат оказывается выше получаемого эффекта. Многообразие свойств двойственных оценок говорит о том, что они должны рассматриваться как неотъемлемый и важный элемент оптимального плана.

2.2. Методы управления хозяйственной деятельностью предприятий

Экономико-математическая модель оптимизации производственной программы предприятия требует определения этой производственной программы предприятия, то есть объема производства продукции в натуральном и стоимостном выражении за определенный период (как правило, за год). План производства продукции разрабатывается в рамках бизнес-плана предприятия обычным, традиционным методом. Однако математическое моделирование позволяет не только проверить и уточнить производственную программу, но и оптимизировать ее величину с учетом всех имеющихся ресурсов и выбранной целевой функции.

Суть оптимизационной задачи сводится к следующему. Имеется номенклатурно-ассортиментный набор различных видов продукции. Из этого набора предприятию необходимо сформировать план производства продукции с учетом имеющихся ограничений, чтобы доход от реализации этой продукции оказался наибольшим.

В общем виде экономико-математическая модель оптимизации производственной программы предприятия выглядит следующим образом.

$$x_j \geq N_{дj} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots n)$$

$$x_j \leq N_{зj}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq в_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots m)$$

$$z = \sum c_j x_j \to \max,$$

где x_j — объем производства j-ой продукции в натуральном выражении;

$N_{дj}$ — договоры по производству j-ой продукции в натуральном выражении;

$N_{зj}$ — объем j-ой продукции по заявкам потребителей;

m — номенклатура ограниченных используемых ресурсов;

a_{ij} — норма расхода i-го ресурса на единицу j-ой продукции;

$в_i$ — объем выделенного i-го ресурса;

z — целевая функция;

c_j — прибыль предприятия от реализации единицы j-ой продукции.

Краткая характеристика модели. Данная модель относится к разряду экономико-математических, оптимизационных моделей. Она описывает статическую, детерминированную систему с линейной зависимостью между зависимыми и независимыми переменными и предназначена для краткосрочного (в пределах одного года) планирования.

Информационное обеспечение модели. В модели можно четко выделить три вида информации, полнота и точность которой во многом определяют успешное решение задачи. Это, во-первых, информация об объеме производства продукции; во-вторых, информация о ресурсах и нормах их расхода на единицу продукции; в-третьих, информация о доходах и расходах предприятия от производства к реализации каждого вида продукции.

Значения показателя $N_{зj}$ принимаются по данным сформированного портфеля заказов предприятия, поступивших заявок от многочисленных потребителей на каждый вид продукции, заявок торгующих организаций и т. п.

В систему ограничений модели целесообразно включать только те виды ресурсов, которые являются ограниченными и дефицитными. Это позволяет значительно сократить количество уравнений системы и снизить трудоемкость вычислительных операций. Одновременно устанавливается и номенклатура ресурсов, включаемых в систему, т. е. показатель m.

Значения каждого вида ограниченных ресурсов $в_i$ определяется по расчетным данным самого предприятия в зависимости от режимных условий его работы, количества и состава действующего оборудования, профессионального и квалификационного состава кадров. Нормы расхода ресурсов a_{ij} устанавливаются предприятием.

Особое значение придается целевой функции модели. Это может быть максимум прибыли (как представлено в данной модели), но может быть и минимум затрат (себестоимости) на производство продукции. В отдельных случаях в качестве целевой функции могут быть приняты и другие критерии, например, максимум производительности труда, максимум фонда материального поощрения, минимум расхода какого-нибудь ресурса, максимум рентабельности производства и т. д.

Модель определения производственной мощности промышленного предприятия. Производственная мощность предприятия представляет собой величину максимально возможного выпуска продукции в единицу времени (обычно за год) при условии наиболее полного использования средств труда, применения новой техники, прогрессивной технологии и совершенствования организации производства.

Производственная мощность предприятия — это один из важнейших показателей промышленного предприятия, на базе которого устанавливается ее производственная программа, выявляются существующие диспропорции между отдельными структурными подразделениями предприятия, определяются резервы возможного увеличения выпуска продукции (рис. 2.1).

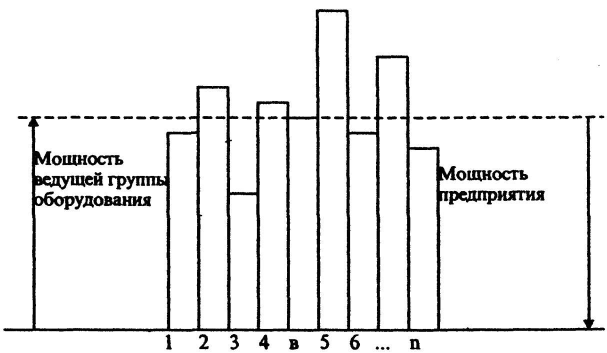


Рис. 2.1. Диаграмма соотношения производственной мощности оборудования и мощности предприятия в целом

Модель определения производственной мощности промышленного предприятия выглядит следующим образом:

$$x_j \ge N_{дj} \qquad (i = 1, 2, 3, \dots n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le в_в$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \gtrless в_i \qquad (i = 1, 2, 3, \dots m)$$

$$z = \sum_{j=1}^{n} ц_j x_j \to \max,$$

где x_j — объем производства j-ой продукции в натуральном выражении;

$N_{дj}$ — договоры по производству j-ой продукции в натуральном выражении;

$в_в$ — величина ресурсов ведущей группы оборудования, час;

a_j — норма затрат времени ведущей группы оборудования на производство единицы j-ой продукции;

a_{ij} — норма затрат времени i-ой группы оборудования (кроме ведущей) на производство единицы j-ой продукции;

$в_i$ — величина ресурса i-ой группы оборудования (кроме ведущей);

$ц_i$ — договорная цена реализации единицы j-ой продукции.

После определения производственной мощности предприятия можно установить плановый уровень ее использования по формуле:

$$K_{пл} = \frac{P_п}{M},$$

где $K_{пл}$ — плановый коэффициент использования производственной мощности предприятия;

$P_п$ — плановый объем реализации продукции, который принимается в соответствии с оптимальной производственной программой предприятия;

M — величина производственной мощности предприятия, соответствующая максимуму целевой функции рассматриваемой модели.

Характеристика модели и ее информационное обеспечение совпадают с моделью оптимальной производственной программы предприятия.

Модель оптимизации рецептуры смеси. Широкое распространение в промышленности получила модель оптимизации рецептуры смеси. Эта модель используется на предприятиях металлургической, машиностроительной, химической, нефтеперерабатывающей и пищевой промышленности.

В зависимости от того, где и на каком предприятии применяется указанная модель, ее название несколько видоизменяется. Очень часто подобного рода задачи называют задачей оптимизации соединений (в химии), задачей оптимального рациона (в пищевой промышленности) и т. д. Все эти задачи по своей сущности аналогичны и решаются с помощью одной и той же математической модели.

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

где c_j — стоимость единицы j-го сырья;

x_j — объем j-го сырья;

n — количество различных видов сырья, которые могут быть использованы для получения необходимой продукции;

z — минимизируемая целевая функция.

Характеристика данной модели совпадает с моделью оптимизации производственной программы предприятия. Решение поставленной задачи может быть осуществлено в двух аспектах. Во-первых, на основе данных службы материально-технического снабжения можно установить оптимальную рецептуру смеси только имеющихся в наличии на предприятии различных видов сырья. Во-вторых, оптимальную смесь можно составить из тех видов сырья, которые производятся промышленностью, но по каким-либо причинам в данный момент на предприятии отсутствуют. Тогда решение задачи и нахождение наиболее рациональных видов сырья для получения готовой продукции позволяет наметить программу материально-технического обеспечения производства с целью сокращения его затрат. Таким образом, в зависимости от характера решаемой задачи устанавливается величина (n), то есть количество различных используемых видов сырья. Количество единиц каждого полезного вещества, содержащегося в единице каждого сырья (a_{ij}), можно определить по данным ГОСТа (или ТУ) либо установить в результате проведенного лабораторного анализа.

Модель оптимизации раскроя материалов. Предполагается, что значительная часть различных материалов поступает на промышленные предприятия в виде стандартных полуфабрикатов определенного профиля, габаритов, размеров. Впоследствии для получения необходимых производству заготовок этот материал приходится раскраивать.

На предприятиях разных отраслей промышленности используются различного вида стандартные материалы (металлические трубы, стальные листы, бумага, картон, стекло, фанера, доски и т. п.).

Раскроить поступающий на предприятие материал с таким расчетом, чтобы полностью удовлетворить производство необходимыми заготовками в требуемом количестве и получить при этом наименьшие отходы, — это очень важная задача, решение которой позволяет значительно снизить материалоемкость продукции, удешевить ее производство. Для этой цели используется следующая математическая модель:

$$z = \sum_{\varphi=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_\varphi} ц_\varphi x_\varphi \to \min,$$

где p — количество различных видов стандартного материала, используемого при раскрое;

n_φ — количество различных вариантов раскроя из единицы $ц$-го вида стандартного материала;

x_φ — количество стандартных единиц материала $ц$-*го* вида, раскраиваемых по j-му варианту;

$ц_\varphi$ — цена единицы стандартного материала $ц$-го вида;

z — целевая функция.

В случае, если при раскрое используется только один вид стандартного материала (т. е. когда $p=1$), математическая модель значительно упрощается и выглядит следующим образом:

$$z = \sum_{j=1}^{n} x_j \to \min \text{ или}$$

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

где n — количество различных вариантов раскроя;

x_j — количество стандартных единиц материала, раскраиваемых по j-му варианту;

c_j — величина отхода при j-ом варианте раскроя;

z — целевая функция.

Характеристика данной модели совпадает с моделью оптимизации производственной программы предприятия.

Информационное обеспечение модели. Оптимизация раскроя материала всецело зависит от полноты информации о возможных вариантах раскроя и количестве получаемых различных заготовках при каждом из них. Получить такую информацию при линейном раскрое (т. е. при раскрое материалов в одном измерении) не представляет особого труда. Для этого последовательно рассматриваются все реально возможные варианты раскроя, а затем — нерациональные варианты отбрасываются. По оставшимся вариантам и производится поиск оптимального решения.

Значительно сложнее обстоит дело, когда раскрой осуществляется в двух измерениях, а количество различных видов заготовок, получаемых из данного стандартного материала, больше двух. Тогда количество разнообразных вариантов раскроя может оказаться очень значительным и перебрать их все бывает затруднительно. В таких случаях прибегают к услугам ЭВМ, которая по заранее заданной программе находит все рациональные варианты раскроя, т. е. такие варианты, у которых отходы материала не превысят наперед установленной величины. Отобранные варианты и включаются в математическую модель, решение которой обеспечивает оптимальный раскрой материала.

Рациональность раскроя проверяется по показателю, характеризующему уровень использования стандартного материала. Этот показатель определяется по формуле:

$$K_{и} = \frac{Q_{п}}{Q},$$

где $K_{и}$ — коэффициент использования стандартного материала;

$Q_{п}$ — количество полезно используемого стандартного материала для изготовления требуемых заготовок в натуральном выражении (в т, кг, $м^2$ и т. п.);

Q — общее количество израсходованного стандартного материала для изготовления требуемых заготовок в натуральном выражении.

2.3. Модель оперативно-календарного планирования производства на предприятии

Необходимость равномерного и ритмичного производственного процесса обусловливает применение на предприятиях оперативно-календарного планирования, при котором обеспечивается согласованность действий всех структурных подразделений.

Опыт показывает, что обеспечить эффективное оперативно-календарное планирование на предприятии бывает порой чрезвычайно сложно. И в этом вопросе неоценимую помощь могут оказать математические методы.

Само по себе моделирование процесса оперативно-календарного планирования должно рассматриваться как комплексная проблема, при которой решаются следующие взаимосвязанные задачи:

- составление наиболее рациональных технологических маршрутов обработки различных деталей и изделий;
- оптимальное распределение и закрепление детале-операций между станками внутри выделенных групп взаимозаменяемого оборудования;
- определение оптимального размера партии обрабатываемых деталей;
- обеспечение оптимальной очередности запуска деталей в обработку;
- обеспечение выпуска готовой продукции в необходимом объеме и в требуемые сроки.

Решение этих задач в рамках единой комплексной математической модели пока еще не реализовано из-за чрезвычайно большой сложности самой проблемы. Поэтому каждую задачу решают в отдельности с учетом специфических условий производства, применяя хорошо зарекомендовавшие себя традиционные методы. При этом очень часто пользуются математической моделью, которая позволяет решить последнюю из указанных задач, т. е. позволяет обеспечить выпуск готовой продукции в необходимом объеме, требуемой номенклатуры и в установленные сроки при минимальных запасах незавершенного производства и нереализованной продукции (рис. 2.2).

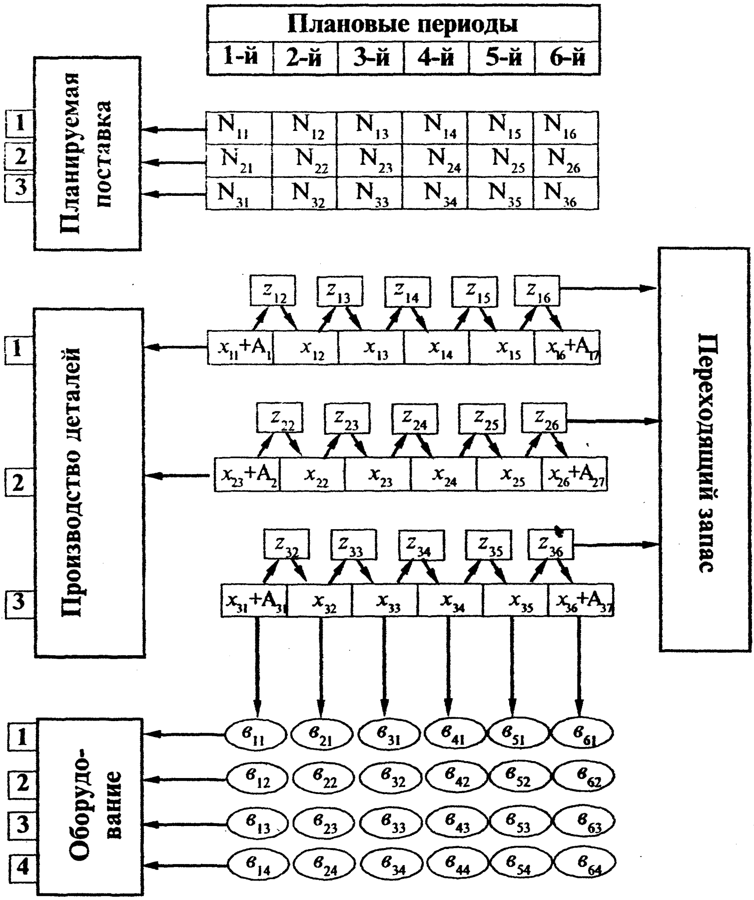


Рис. 2.2. Иллюстрация математической модели оперативно-календарного планирования

В цехе (на участке, в бригаде) изготавливаются три различных детали. Известна потребность этих деталей в смежных подразделениях (плановая поставка деталей) в каждом из шести плановых периодов. Необходимо спланировать количество производимых в каждом отрезке времени деталей всех наименований (x_{ij}) с учетом безусловного удовлетворения имеющейся в них потребности.

При этом детали проходят обработку на оборудовании четырех различных групп. Каждая группа оборудования в каждом плановом периоде располагает определенным фондом рабочего времени – $в_{jк}$. Поэтому количество обрабатываемых и изготавливаемых деталей каждого наименования по плановым периодам не должно превышать возможностей установленного в цехе оборудования. Отсюда становится ясно, что в каждом плановом периоде, учитывая ограниченные возможности оборудования, необходимо планировать переходящий запас по каждой детали — z_{ij}, величину которого следует стремиться минимизировать. Но при этом следует иметь в виду, что на начало 1-го планового периода и на конец последнего периода по каждой детали, как правило, для обеспечения ритмичности их поставок создается переходящий запас готовых деталей – A_{i1} и $A_{i(m+1)}$. Величина этих запасов определяется по условию задачи.

Такая модель выглядит следующим образом:

$$x_{i1} - z_{i2} = N_{i1} - A_{i1} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n)$$

$$x_{i1} + z_{ij} - z_{1(j+1)} = N_{ij} \qquad (j = 2, 3, 4, \ldots m-1)$$

$$x_{im} + z_{im} = N_{im} + A_{i(m+1)} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots p)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, x_{ij} \le в_{jk}\, (j = 1, 2, 3, \ldots m)$$

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i\, z_{ij} \to \min,$$

где n — номенклатура изготовляемых видов продукции;

m — количество отдельных отрезков времени (например, месяцев, декад, недель, дней, рабочих смен и т. д.) в течение планового периода;

N_{ij} — потребность (производственная программа) выпуска i-ых изделий в j-ом отрезке времени;

A_{i1} и $A_{(m+1)}$ — количество готовых i-ых изделий (или незавершенное производство) соответственно на начало 1-го и (m+1)-го отрезка времени;

x_{ij} — количество изготовляемых i-ых изделий в j-ом отрезке времени;

z_{jk} — количество готовых i-ых изделий (или незавершенное производство) на начало j-го отрезка времени;

$в_{jк}$ – ресурс полезного фонда времени в j-ом отрезке времени для k-ой группы оборудования;

p – количество различных групп оборудования;

a_{ik} – норма затрат времени на обработку одного i-го изделия на k-ой группе оборудования;

c_i – себестоимость единицы готового i-го изделия (в отдельных случаях это может быть весовая характеристика изделия, его площадь, объем и т. п.).

2.4. Модели управления запасами

Каждое промышленное предприятие для успешного функционирования и выполнения установленного задания в срок должно иметь запасы различных видов сырья, материалов, топлива. Величина этих запасов в процессе производства не остается постоянной, а все время колеблется от максимума к минимуму, от минимума к максимуму.

Объем производственных запасов различных ресурсов зависит от действия многих факторов, которые имеют противоположную направленность. Одни факторы способствуют увеличению запасов, другие – наоборот, их сокращению. Именно поэтому величина запасов может оказывать существенное влияние на разнообразные технико-экономические показатели деятельности предприятия. Так, увеличение запасов сокращает транспортные затраты по поставке данного вида ресурса, но увеличивает затраты по его хранению, требует больших складских помещений, повышает потребность предприятия в оборотных средствах. Однако главное, увеличение запасов способствует более ритмичной работе предприятия, снижает вероятность срыва выполнения производственного задания из-за неудовлетворительной материально-технической базы. Поэтому в каждом конкретном случае имеет место оптимальная величина производственного запаса какого-либо ресурса, достижение которого обеспечивает наилучшие суммарные технико-экономические показатели деятельности предприятия (рис. 2.3).

На рисунке 2.3 представлены отдельные составляющие затрат, величина которых зависит от размера запасов какого-то конкретного ресурса. Кривая 1 отражает те затраты, которые

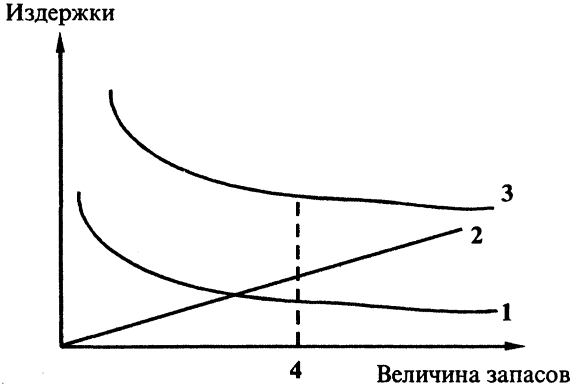


Рис. 2.3. Зависимость издержек от величины запасов производства

с увеличением запаса сокращаются. Линия 2 – это затраты, возрастающие с увеличением запаса. Кривая 3 – суммарные затраты, которые с увеличением запаса вначале сокращаются, а затем начинают увеличиваться. Точка 4 характеризует оптимальную величину запаса, при которой суммарные затраты, связанные с доставкой и хранением запаса, оказываются минимальными. Для отыскания этой точки пользуются методом моделирования.

Все производственные запасы на предприятии принято подразделять на текущие, страховые, подготовительные и сезонные. Последние два вида запасов в оптимизации не нуждаются. Они носят нормативный характер и зависят от конкретных условий производства. Поэтому задача сводится к тому, чтобы найти оптимальную величину текущего и страхового запасов. На рисунке 2.4 показан характер текущего запаса во времени и постоянство страхового запаса. Так как каждый вид запаса предназначен для различных целей, их оптимизацию следует проводить в отдельности.

Текущий запас предназначен для удовлетворения производственного процесса в необходимых видах сырья, материалов, топлива. Из этого запаса цеха и участки предприятия ежедневно черпают потребляемые ими ресурсы.

Величина текущего запаса зависит от размера партии поставки и среднесуточного потребления данного ресурса, а следовательно, от периода поставки.

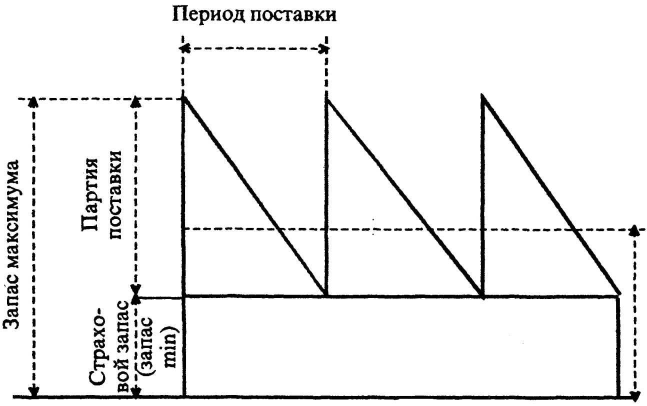


Рис. 2.4. Схема изменения текущего запаса

Запишем годовые затраты, связанные с формированием и транспортировкой до потребителя партий конкретного ресурса (кр. 1 рис. 2.3).

Модель оптимизации текущего запаса

$$C_1 = \frac{П}{Q} А_т,$$

где П — годовая потребность предприятия в данном ресурсе;

Q — величина партии поставки;

$А_т$ — затраты на формирование и транспортировку одной партии.

Теперь определим прочие годовые затраты, которые будут возрастать с увеличением запасов ресурса (лин. 2, рис. 2.3).

$$C_2 = \frac{Q}{2} [(А_х + А_а) + Е_н Ц],$$

где $А_х$ — годовые затраты, связанные с хранением единицы конкретного ресурса;

$A_а$ — годовые амортизационные затраты складского помещения, приходящиеся на единицу хранимого конкретного ресурса;

$E_н$ — нормативный коэффициент эффективности дополнительных капиталовложений;

Ц — оптовая цена единицы конкретного ресурса.

Чтобы найти суммарные затраты (кр. 3, рис. 2.3), необходимо сложить составляющие их затраты, которые следует минимизировать, т. е.

$$C = C_1 + C_2 = \frac{П}{Q} A_Т + \frac{Q}{2} [(A_х + A_а) + E_н Ц] \to \min.$$

Минимум суммарных затрат можно определить, если взять их первую производную и приравнять к нулю.

$$\frac{dC}{dQ} = \frac{-ПA_Т}{Q^2} + \frac{A_x + A_a + E_н Ц}{2} = 0.$$

Откуда находится величина оптимальной партии поставки:

$$Q_{опт} = \sqrt{\frac{2ПA_Т}{A_x + A_a + E_н Ц}}.$$

В модели необходимо учесть еще возможные ограничения на размер партии поставки, т. е.

$$Q_{опт} \leq Q_{огр},$$

где $Q_{огр}$ — ограничение на величину партии поставки конкретного ресурса, которое принимается по одному или нескольким факторам (например, по площади имеющегося складского помещения, по грузоподъемности существующих транспортных средств и т. п.).

Модель оптимизации страхового запаса определяется на предприятии для того, чтобы ликвидировать возможную остановку производственного процесса или предупредить нерациональные затраты в связи с нарушением срока очередной поставки партии конкретного ресурса. Если установленный срок будет нарушен и очередная партия поступит на предприятие позже намеченной даты, то цеха и участки будут работать за счет страхового запаса.

Годовые затраты, связанные с хранением страхового запаса и увеличением необходимых оборотных средств, можно выразить в виде следующей формулы (лин. 2, рис. 2.3).

$$S_1 = q\,t\,(A_x + A_a + E_н\,Ц),$$

где q — среднесуточное потребление конкретного ресурса на предприятии;

t — количество дней, на которое создается страховой запас.

Годовые затраты, связанные с нарушением срока поставок очередных партий ресурсов, можно определить по формуле (кр. 1. рис. 2.3):

$$S_2 = q\,\frac{П}{Q}\,\tau\,В,$$

где τ — математическое ожидание запаздывания очередной поставки партии ресурсов в днях после исчерпывания страхового запаса, приходящегося на одну поставку (эта величина является функцией значения t, с увеличением которого она сокращается и определяется на основе статистических данных о запаздывании очередных поставок партий относительно установленных сроков за прошлый период);

В — дополнительные затраты, связанные с заменой единицы продукции одного вида ресурса на единицу другого.

Тогда оптимальный размер страхового запаса будет соответствовать минимуму суммарных затрат, т. е.

$$S = S_1 + S_2 = qt\,(A_x + A_a + E_н\,Ц) + q\,\frac{П}{Q}\,\tau\,В \to \min.$$

Изменяя значение t, для каждого из которых рассчитываются суммарные затраты, можно найти оптимальный страховой запас.

2.5. Основы динамического программирования

В теории динамического программирования исследуется широкий и важный круг задач оптимизации. Особенностью этих задач является то, что процесс принятия решений в них распадается на ряд последовательных этапов. Естественно, что многоэтапность ассоциируется, прежде всего, с развитием процесса во времени. Поэтому динамическое программирование хорошо применимо к динамическим задачам, в которых должно быть принято не однократное оптимальное решение, а ряд последовательных во времени решений, обеспечивающих оптимальность всего развития в целом. Необходимо отметить, что и многие задачи статистического характера оказывается возможным сформулировать и решать как задачи динамического программирования. В то же время и некоторые динамические задачи успешно решаются методами линейного и нелинейного программирования.

Рассмотрим основные особенности задач и методов динамического программирования на следующем примере. Имеются два месторождения полезного ископаемого **А** и **Б** с запасами соответственно 200 и 100 единиц. Имеется одна машина **М** для работы на этих месторождениях, причем при использовании она либо с определенной вероятностью добывает часть запасов, либо выходит из строя и в дальнейшем использоваться не может.

На рисунке 2.5 обозначены исходные данные задачи. В начальный момент имеется возможность выбора: направить машину на месторождение А или на месторождение Б. Если машина будет работать на месторождении А, то с вероятностью 0,7 она добудет часть запаса, а с вероятностью 0,3 — выйдет из строя (вероятности указаны цифрами над пунктирными линиями). Добытая доля составит 0,6 всего запаса, т. е. 120 единиц (добываемые доли указаны цифрами в кружках). Если первоначально машина будет использована на месторождении Б, то она с вероятностью 0,8 добудет 0,9 всего запаса, т. е. 90 единиц, а с вероятностью 0,2 придет в негодность.

Если на первом этапе машина не вышла из строя, то возможен второй этап ее эксплуатации, причем снова допускается выбор месторождения. Если первоначально машина работала на месторождении А, то продолжение на втором этапе эксплуатации того же месторождения позволит с вероятностью 0,7 добыть оставшиеся 40% запасов полезного ископаемого, т. е. 80 единиц, а переброска ее на месторождение Б даст 90 единиц (100 единиц × 0,9) с вероятностью 0,8.

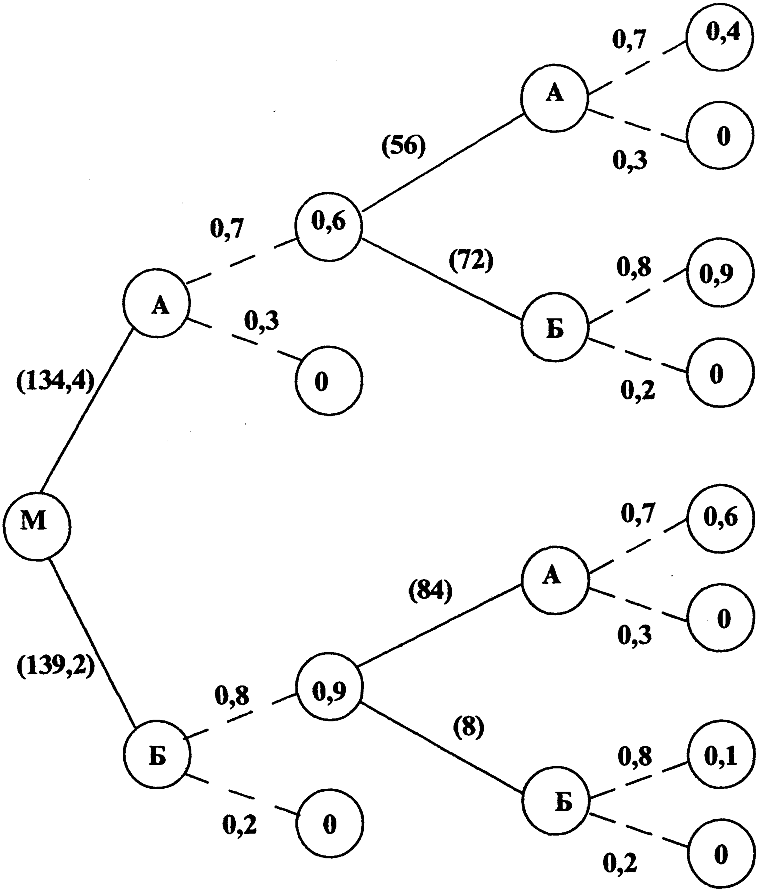


Рис. 2.5. График задачи динамического программирования

Если на первом этапе машина использовалась на месторождении Б, то, оставляя ее на втором этапе на этом же месторождении, с вероятностью 0,8 получим остальные 10% запасов, т. е. 10 единиц, а перебросив на месторождение А, с вероятностью 0,7 добудем 60% запасов месторождения А. После второго этапа машина уже не используется.

Требуется определить такую последовательность выбора месторождений, при которой за два этапа максимизируется общая ожидаемая величина добычи. Для многоэтапной задачи применяется следующий метод: вначале исследуется последний этап, и различные возможные решения оцениваются безотносительно к тому, какие решения могли быть приняты на предыдущих этапах, затем происходит переход к предпоследнему этапу, и также решается одноэтапная задача, но уже с учетом результатов, полученных ранее (для последнего этапа). Двигаясь таким образом от конца процесса к началу, получают решение всей задачи.

Этот метод опирается на так называемый общий принцип оптимальности, который формулируется следующим образом: если некоторая последовательность решений оптимальна, то на любом этапе остающиеся решения образуют оптимальную политику по отношению к результату предшествующих решений.

Именно на основе общего принципа оптимальности можно уверенно отбрасывать некоторые решения, даже не зная тех решений, которые были приняты на предыдущих этапах.

Решение задачи начнем с рассмотрения последнего (в нашем примере – второго) этапа. Поскольку неизвестно, какой выбор был сделан на первом этапе, необходимо исследовать четыре возможных решения: выбор месторождения А или Б после первоначально выбранного А и такой же выбор для случая, если на первом этапе машина работала на месторождении Б (сплошные линии на рис. 2.5).

Если предположить, что на обоих этапах выбирается месторождение А, то на втором этапе имеется 70 шансов из 100 добыть 80 единиц и 30 шансов — не добыть ни одной единицы. «Взвесив» результаты по их вероятностям, получаем математическое ожидание добычи:

$$0{,}7 \times 80 + 0{,}3 \times 0 = 56 \text{ единиц.}$$

Эта оценка на схеме указана в скобках над соответствующей сплошной линией. Если после месторождения А выбирается месторождение Б, то математическое ожидание добычи равно:

$$0{,}8 \times 90 + 0{,}2 \times 0 = 72 \text{ единицы.}$$

Аналогично получаем числовые оценки двух возможных решений для случая, когда на первом этапе было выбрано месторождение Б. Выбор месторождения А дает 84 единицы, а выбор месторождения Б – 8 единиц.

Сделаем вывод о втором этапе работы машины. Если первоначально она была занята на месторождении А, то на втором этапе следует выбрать месторождение Б. Если же на первом этапе выбиралось месторождение Б, то на втором этапе следует выбрать месторождение А.

Рассмотрим первый этап и оценим возможные решения. Если вначале выбрать месторождение А, то с вероятностью 0,7 можно добыть 120 единиц, а переход на месторождение Б оценивается в 72 единицы. Таким образом, общая ожидаемая величина добычи при выборе месторождения А на первом этапе (с учетом оптимальной политики на втором этапе) составляет:

$$0{,}7 \times (120 + 72) = 134{,}4 \text{ единицы.}$$

Выбрав вначале месторождение Б, с вероятностью 0,8 мы получим 90 единиц, после чего примем решение (с оценкой 84 единицы) о переходе на месторождение А. В целом первоначальный выбор месторождения Б дает:

$$0{,}8 \times (90 + 84) = 139{,}2 \text{ единицы.}$$

Поскольку эта оценка выше оценки альтернативного выбора, мы можем сделать **общий вывод**, что в рассмотренном примере оптимальная политика заключается в выборе месторождения Б на первом этапе и месторождения А на втором.

Дадим теперь общее описание рассмотренной задачи и ее решения. Обозначим: x, y — соответственно запасы полезных ископаемых месторождений А и Б; p_1 и p_2 — соответственно вероятности безаварийной работы машины на месторождении А и Б (следовательно, вероятность выхода ее из строя равна $(1-p)$); r_1 и r_2 – соответственно доля запаса, добываемая за один этап при первичной эксплуатации месторождений А и Б (следовательно, при повторной эксплуатации на втором этапе добывается доля, равная $(1-r)$).

В рассмотренном примере: $x = 200$; $y = 100$; $p_1 = 0{,}7$; $p_2 = 0{,}8$; $r_1 = 0{,}6$; $r_2 = 0{,}9$. Обозначим через $f_N(x, y)$ максимальную ожидаемую величину добычи для процесса, продолжающегося N этапов. В нашем примере искомый максимум обозначается $f_2(x, y)$.

Решение задачи начинаем со второго этапа. Если бы на первом этапе машина эксплуатировалась на месторождении А, то при продолжении эксплуатации этого месторождения ожидаемая добыча составила бы:

$$p_1 (1 - r_1)\, x = 0{,}7 \times 0{,}4 \times 200 = 56 \text{ единиц},$$

а при переходе на месторождение Б:

$$p_2\, r_2\, y = 0{,}8 \times 0{,}9 \times 100 = 72 \text{ единицы}.$$

В этом одноэтапном процессе оптимальным является выбор месторождения Б, т. е.

$$f_1 [(1 - r_1)\, x, y] = \max [p_1 (1 - r_1) \times p_2\, r_2\, y\,] = \max [56, 72] = 72.$$

В случае, если на первом этапе эксплуатировалось месторождение Б, для второго этапа аналогично получим:

$$f_1 [x, (1 - r_2)\, y] = \max [p_1\, r_1\, x;\, p_2 (1 - r_2)\, y] = \max [84, 8] = 84.$$

Переходя к первому этапу и с учетом оптимальной политики на втором этапе, мы имели следующие оценки вероятной добычи за оба шага. При первоначальном выборе месторождения А:

$$f_2^{А} (x, y) = p_1 [r_1\, x + f_1 (1 - r_1)\, x, y)] = 0{,}7\,(0{,}6 \times 200 + 72) = 134{,}4 \text{ ед.};$$

при первоначальном выборе месторождения Б:

$$f_2^{Б} (x, y) = p_2 [r_2\, y + f_1 (x, (1 - r_2)\, y)] = 0{,}8\,(0{,}9 \times 100 + 84) = 139{,}2 \text{ ед.}$$

Оптимальное решение всей задачи определяется максимальной ожидаемой величиной, т. е.

$$f_2 (x, y) = \max [f_2^{А} (x, y), f_2^{Б} (x, y)] = \max [134{,}4;\, 139{,}2] = 139{,}2 \text{ ед.}$$

Принцип получения оптимума не меняется, если возможно произвольное число этапов N. Тогда общая ожидаемая величина добычи определяется из соотношения: при первоначальном выборе месторождения А:

$$f^{А}_{N+1} (x, y) = p_1 [r_1\, x + f_N ((1 - r_1)\, x, y)],$$

при первоначальном выборе месторождения Б:

$$f^{Б}_{N+1} (x, y) = p_2 [r_2\, y + f_N (x, (1 - r_2)\, y)],$$

Отсюда получаем основное рекуррентное соотношение для данного типа задач динамического программирования:

$$f_{N+1}(x, y) = \max \begin{bmatrix} f^{A}{}_{N+1}(x,y) \\ f^{Б}{}_{N+1}(x,y) \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} p_1[r_1 x + f_N((1-r_1)x, y)] \\ p_2[r_2 y + f_N(x,(1-r_2)y)] \end{bmatrix}.$$

Для процесса, продолжающегося неограниченное количество шагов, получаем следующее функциональное уравнение:

$$f_2(x, y) = \max \{p_1 [r_1 x + f_N ((1 - r_1) x, y)], p_2 [r_2 y + f_N (x, (1 - r_2) y)]\}.$$

В динамическом программировании применение общего принципа оптимальности позволяет построить функциональные уравнения (по типу приведенных выше). Исследование этих уравнений дает возможность либо обосновать один из методов поэтапного решения задачи, либо установить ряд важных свойств изучаемого процесса, которые помогут судить об оптимальном направлении развития.

Типичными представителями экономических задач динамического программирования являются задачи производства и хранения. Предположим, что планируется производство определенного продукта на ряд периодов при известной для каждого периода величине спроса. Спрос должен удовлетворяться либо за счет производства в данном периоде, либо за счет запасов предыдущих периодов. Для каждого периода известны удельные затраты ресурсов на производство продукции, на хранение продукции и на наращивание производственных мощностей. Необходимо установить оптимальный режим производства и хранения продукции во времени с целью минимизации общей величины издержек.

К модели динамического программирования можно свести также и задачу распределения капиталовложений. В ней необходимо с наибольшей эффективностью распределить сумму капиталовложений К между n объектами. Неизвестные величины x_j обозначают сумму, выделяемую j-му объекту. При этом по каждому объекту известна зависимость дополнительного выпуска продукции z от суммы выделяемых капиталовложений, т. е. заданы функции $z(x_j)$.

Возможности применения динамического программирования ограничиваются рядом недостатков этого метода. Первая трудность, которая характеризует его применение, возникает при формировании задачи оптимизации исследуемого процесса. Затем, в отличие от линейного программирования, где имеется универсальный алгоритм решения задач — симплекс-метод — в динамическом программировании отсутствует общий алгоритм, пригодный для всех задач. Динамическое программирование дает лишь общее направление решения конкретной задачи, и потому в каждом отдельном случае требуется находить наиболее подходящий метод оптимизации. Исследование динамического программирования встречает некоторые трудности и при решении задач высокой размерности, которая определяется не только количеством переменных состояния и уравнения, но и частотой их варьирования. Кроме того, задачи динамического программирования чаще решаются с помощью численных, а не аналитических методов. Поэтому эффективное применение динамического программирования предполагает необходимость использования совершенной электронно-вычислительной техники.

2.6. Методы и модели массового обслуживания

Одной из типичных производственных ситуаций являются процессы, приводящие к задержкам в обслуживании определенных элементов системы. Задачей теории массового обслуживания является определение таких характеристик системы, которые обеспечивают заданное качество ее функционирования (времени ожидания обслуживания, издержек, длины очереди).

Основными элементами системы массового обслуживания, характеризующими структуру, состав и функциональные связи, являются входящий поток требований, очередь требований, приборы обслуживания и выходящий поток требований (рис. 2.6).

По времени пребывания требований в системе до начала обслуживания системы массового обслуживания делятся на **три группы**: с неограниченным временем ожидания, системы с отказами (потерями) и системы смешанного типа. В первом случае элемент системы, застав все обслуживающие приборы занятыми, становится в очередь и ожидает до тех пор, пока не освободится один из обслуживающих приборов.

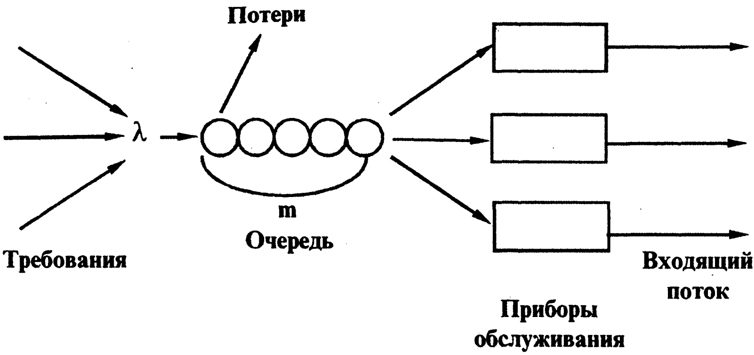


Рис. 2.6. Элементы системы массового обслуживания

В системах с отказами всякий поступивший элемент, застав все приборы занятыми, покидает систему. В системах смешанного типа поступивший в нее элемент, застав все приборы занятыми, становится в очередь, в которой находится ограниченное время, за которое или обслуживается, или покидает систему.

Классическим примером является телефонная станция. Входящим потоком элементов являются телефонные звонки, обслуживающей системой — АТС, сущностью обслуживания — соединение с абонентом, выходящим потоком — происшедшие разговоры.

Задачей теории массового обслуживания является отыскание зависимостей, характеризующих качество функционирования системы, от характеристик входящего потока параметров, описывающих возможности обслуживающего аппарата системы и способов организации системы в целом.

Под эффективностью обслуживающей системы понимается характеристика уровня выполнения этой системой ее функций. Показатели эффективности определяются тремя группами факторов: характеристиками качества и надежности системы обслуживания, экономическими показателями и особенностями функционирования системы. Наиболее часто встречающимися показателями являются следующие:

1. Вероятность потери элемента, равная вероятности того, что все приборы заняты обслуживанием $P_п$ или $P_{от}$.

2. Вероятность $P_к$ того, что обслуживанием занято $к$ приборов;

$P_о$ — вероятность того, что все приборы свободны.

3. Среднее число занятых приборов

$$N_з = \sum_{k=1}^{n} к\, p_k,$$

характеризующее степень загрузки системы.

4. Среднее число свободных от обслуживания приборов:

$$N_о = \sum_{k=0}^{n-1} (n - к)\, p_k.$$

5. Коэффициент простоя приборов:

$$k_n = \frac{N_n}{n}.$$

6. Коэффициент загрузки приборов:

$$k_з = \frac{N_з}{n}.$$

7. Среднее время ожидания элементов:

$$T = M(t_{ож}) = -\int_0^{\infty} t_d\, p_1\, (t_{ож} > t),$$

$$P_1\, (t_{ож} > t_1) = \sum_{k=0}^{n} p_k\, P_k\, (t_{ож} > t),$$

где $P_к\, (t_{ож} > t)$ — условная вероятность того, что время ожидания $t_{ож} > t$ при условии, что в момент поступления элемента в систему в ней уже обслуживалось k элементов.

8. Вероятность того, что время пребывания элемента в очереди не продлится больше определенной величины:

$$P_2\, [t_{ож} < t) = \sum_{k=n}^{\infty} p_k\, P_k\, [t_{ож} < t].$$

9. Средняя величина очереди:

$$M_{ож} = \sum_{k=n}^{\infty} (k - n)\, P_k\,,\ k \ge n.$$

10. Среднее число элементов в сфере обслуживания:

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = M_{ож} + N_з.$$

11. Вероятность того, что число элементов в очереди больше некоторого числа m:

$$P = \sum_{k=m+1}^{\infty} P_к.$$

При оценке эффективности системы могут быть использованы стоимостные показатели: стоимость обслуживания каждого элемента $q_{об}$; стоимость потерь, связанных с ожиданием в единицу времени, $q_{ож}$; стоимость убытков, связанных с уходом элементов из системы, $q_у$; стоимость эксплуатации прибора в единицу времени q_k; стоимость единицы времени простоя $q_{пр}$.

Используются для оптимизации следующие функции стоимости потерь: для системы с ожиданием

$$C_п = (q_{ож}\, M_{ож} + q_{пр}\, N_о + q_k\, N_з)T,$$

где T — интервал времени; для систем с отказами

$$C_п = (q_k\, N_о + q_у\, P_п \lambda)\, T;$$

для смешанных систем

$$C_п = (q_{пр}\, N_о + q_{ож}\, M_{ож} + q_у\, P_п \lambda + q_k\, N_з)\, T.$$

Между этими характеристиками существуют следующие связи:

$$N_з + N_о = n,\ M_{ож} + M_{ос} = M,\ M_{ос} = N_з,$$

$$M = \sum_{k=1}^{n} k\, p_k,\ \bar{t}_{ож} + \bar{t}_{обс} = \bar{t};\ \lambda \bar{t}_{ож} = M_{ож},\ \lambda_t = M,\ \lambda = \lambda_в.$$

$\lambda_в$ — суммарная интенсивность входящего потока для систем с отказами. Процесс поступления элементов на обслуживание является случайным. Поток элементов может быть описан некоторой функцией, определяющей число элементов, требующих обслуживания за промежуток времени (0, t). Эта функция есть случайная величина для каждого значения t. Очевидно, что число элементов, поступивших за промежуток времени (0, t), зависит от величины этого промежутка, т. е. от значения t. Поэтому функция, определяющая число элементов, поступающих за время t, зависит от параметра t и является однопараметрическим семейством случайных величин. Это семейство является случайной функцией. Изучение процессов массового обслуживания при описании входящего потока в виде случайной функции общего вида является трудной задачей.

Часто на практике встречаются потоки, обладающие свойствами, которые позволяют найти более простые способы их описания. Так, многие потоки обладают свойством стационарности. Стационарными являются потоки, для которых вероятность поступления определенного количества элементов в течение определенного промежутка времени не зависит от начала отсчета времени, а зависит от длины промежутка.

В некоторых потоках число элементов, поступивших в систему после произвольного момента времени t, не зависит от того, какое число элементов поступило в систему до момента t. Это свойство независимости характера потока элементов от числа ранее поступивших элементов и моментов их поступления носит название **отсутствия последействия**. В некоторых системах обслуживания характер потока элементов таков, что в любой момент времени может поступить лишь один элемент. Потоки, обладающие таким свойством, называются **ординарными потоками**. Поток элементов, одновременно обладающий свойствами стационарности, отсутствия последействия и ординарности, называется **простейшим потоком элементов**. Потоки такого типа или близкие к ним встречаются на практике и их описание имеет наиболее простой вид. Если анализ показывает, что изучаемый поток является простейшим, то для его полного описания достаточно определить среднее число элементов, поступивших за единицу времени.

Следующим важным этапом для описания системы является определение ее типа. Основным признаком, позволяющим определить тот или иной тип системы массового обслуживания, является поведение элемента, поступившего в систему в момент, когда все обслуживающие аппараты заняты. При изучении систем с потерями важнейшей характеристикой их является вероятность отказа в обслуживании (вероятность потери элемента). Так как отказ элементу в обслуживании происходит тогда, когда заняты все обслуживающие аппараты, то вероятность отказа равна вероятности того, что все обслуживающие аппараты заняты. Эта вероятность определяет, в какой степени система обслуживания способна удовлетворить поступающий поток элементов. Степень загрузки обслуживающей системы может быть охарактеризована средним числом занятых аппаратов. В некоторых случаях для систем с потерями важно знать среднее число потерянных элементов за определенный промежуток времени. Рассматриваются и более сложные системы: с учетом выхода из строя обслуживающих устройств, с резервированием и т. д.

Системы массового обслуживания с потерями

Рассмотрим систему, имеющую *n* обслуживающих аппаратов. Когда прибывает элемент, система может находиться в одном из следующих состояний: S_0 – все аппараты свободны; S_1 – один аппарат занят, остальные свободны; S_2 – два аппарата заняты, остальные свободны; ... , S_k – k аппаратов заняты, остальные свободны; ... , S_n – все аппараты заняты. Задача заключается в том, чтобы для любого момента времени определить вероятность того, что система будет находиться в одном из состояний S_k, т. е. требуется найти систему функций $P_k(t)$; $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Поток требований считаем простейшим со средним числом заявок в единицу времени λ. Время обслуживания распределено по показательному закону:

$$t_{обс} = \frac{\lambda}{M},$$

где M — параметр показательного закона.

Если входящий поток рассматривается как простейший, время обслуживания изменяется по показательному закону, а система рассматривается в момент, достаточно далекий от начала работы, то процесс обслуживания можно считать стационарным (установившимся), а вероятности нахождения системы в том или ином состоянии – не зависящими от времени. То есть при $t \to \infty$ функции P_k (t) стремятся к постоянным пределам

$p_0(t) \to p_0$; $p_i(t) \to p_1$; ... , $p_n(t) \to p_n$. Для любого k получаем:

$$P_к = \frac{l^к}{k!m^к} P_0.$$

Если обозначить $\dfrac{\lambda}{\mu} = \alpha$, то $P_к = \dfrac{\alpha^к}{k!} P_0$,

где α — среднее число элементов, приходящееся на среднее время обслуживания одного элемента. Чтобы найти p_0, воспользуемся известной из теории вероятностей формулой:

$$\sum_{k=0}^{n} p_n = 1,$$

означающей, что система обязательно находится в одном из возможных состояний. Подставляя в эту формулу значения $P_к$, получим:

$$\sum_{k=0}^{n} p_n = \sum_{k=0}^{n} p_0 \frac{\alpha^к}{k!} = p_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^к}{k!} = 1, \text{ откуда}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k}{k!}}.$$

Подставляя значение p_0 в формулу для $p_к$, получим:

$$P_k = \frac{\dfrac{\alpha^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k}{k!}}.$$

Этой формулой определяются все значения $p_к$. Отсюда вероятность отказа

$$P_{отк} = P_n = \frac{\dfrac{\alpha^n}{n!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k}{k!}}.$$

Относительная пропускная способность системы будет $q = 1 - p_{отк}$. Зная закон распределения числа занятых аппаратов, можно найти среднее число занятых аппаратов; оно будет равно их математическому ожиданию:

$$M = \sum_{k=0}^{n} k p_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{(k-1)!} P_0.$$

Система формул p_k и p_0 называется **формулами Эрланга**. Они выражают предельные вероятности состояний системы в зависимости от параметров λ, m, n (λ — интенсивность потока элементов, m — интенсивность обслуживания, n — число обслуживающих аппаратов).

Система массового обслуживания с ожиданием

Рассмотрим системы массового обслуживания (СМО) с ожиданием.

Класс задач такого типа подразделяется на группы. Так, например, если время ожидания в очереди ничем не ограничено, то система называется **«чистой системой с ожиданием»**. Если же время ожидания ограничено, т. е. элемент может находиться в очереди не больше определенного отрезка времени, после чего покидает систему, то такая СМО называется **системой смешанного типа**. Ограничение может быть наложено не на время ожидания в очереди, а на длину очереди, т. е. вновь поступившая заявка может стать в очередь, если длина ее не превосходит определенного числа. Ограничение может также накладываться на общее время пребывания заявки в системе (время пребывания в очереди плюс время обслуживания). Во всех случаях решение имеет специфическую структуру. Рассмотрим СМО, имеющую n обслуживающих аппаратов, в которую поступает поток элементов с интенсивностью λ; интенсивность обслуживания одним аппаратом — m; число мест в очереди — r. Состояние системы может быть следующим:

S_0 – все аппараты свободны;

S_1 – один аппарат занят, остальные свободны;

....

S_k – k аппаратов заняты, остальные свободны;

S_n – заняты все n аппаратов;

Очереди нет

S_{n+1} — заняты все n аппаратов, одна заявка в очереди;

....

S_{n+r} – заняты все n аппаратов, r заявок в очереди;

....

S_{n+m} – заняты все n аппаратов, m заявок в очереди.

Вероятность состояний:

$$P_0 = \left[1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!} + \frac{\frac{2}{n} - \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{m+1}}{1 - \frac{\alpha}{n}} \right]^{-1},$$

$$P_1 = \frac{\alpha}{1!} P_0,\ P_2 = \frac{\alpha^2}{2!} P_0, \ldots,\ P_n = \frac{\alpha^n}{n!} P_0,\ P_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1}}{nn!} P_0, \ldots,$$

$$P_{n+r} = \frac{\alpha^{n+r}}{n^r n!} P_0, \ldots,\ P_{n+m} = \frac{\alpha^{n+m}}{n^m n!} P_0.$$

Рассмотрим некоторые характеристики эффективности обслуживания. Элемент получит отказ, если заняты все аппараты и все m мест в очереди.

$$P_{отк} = P_{n+m} = \frac{\alpha^{n+m}}{n^m n!} P_0.$$

Относительная пропускная способность:

$$q = 1 - P_{отк}.$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda q = \lambda \left(1 - \frac{\alpha^{n+m}}{n^m n!} P_0 \right).$$

Среднее число занятых аппаратов:

$$M_1 = \frac{A}{\mu} = \alpha \left(1 - \frac{\alpha^{n+m}}{n^m n!} P_0 \right).$$

Среднее число элементов в очереди:

$$M_2 = \frac{1-(m+1)\frac{\alpha}{n}+m\frac{\alpha}{n}}{\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^2}\frac{\alpha^{n+1}}{nn!}P_0.$$

Среднее число элементов в системе: $M = M_1 + M_2$.

Среднее время ожидания:

$$t_{ож} = \frac{M_2}{\mu}.$$

Среднее время пребывания элементов в системе:

$$t_c = t_{ож} + \frac{q}{\mu}.$$

Если длина очереди не ограничена, установившийся режим будет существовать при $\frac{\alpha}{n} < 1$.

При $\frac{\alpha}{n} \geq 1$ очередь будет бесконечно возрастать.

Так как каждый элемент рано или поздно будет обслужен, то

$$P_{отк} = 0, q = 1, A = \lambda q = 1.$$

Остальные характеристики СМО (среднее число элементов в очереди, среднее время ожидания, среднее число занятых аппаратов) находятся с помощью предельного перехода.

Мы рассматривали системы СМО, где элементы приходили извне и интенсивность потока элементов не зависела от состояния системы. Теперь рассмотрим СМО другого типа — такие, в которых интенсивность потока поступающих элементов зависит от состояния СМО. Такие системы называются **замкнутыми системами**. В качестве примера такой СМО рассмотрим случай, когда бригада из *m* рабочих — наладчиков обслуживает *n* станков. Каждый станок может в любой момент выйти из строя и потребовать обслуживания со стороны наладчика. Интенсивность потока неисправностей каждого станка равна *X*. Если в этот момент хотя бы один из рабочих бригады свободен, он берется за наладку станка и тратит в среднем время

$$t_{об} = \frac{1}{\mu},$$

где μ — интенсивность потока обслуживании.

Если в момент выхода станка из строя все рабочие заняты, станок становится в очередь и ждет обслуживания. Требуется найти вероятность состояний данной системы и ее характеристики: вероятность того, что рабочий не будет занят; вероятность наличия очереди; среднее число станков, ожидающих очереди на ремонт и т. д. Мы рассматриваем такую СМО, где число элементов ограничено и интенсивность общего потока элементов зависит от того, сколько элементов связано с процессом обслуживания (непосредственно обслуживается или стоит в очереди). Очевидно, система может находиться в одном из следующих состояний:

S_0 — все аппараты свободны (станки работают, рабочие не заняты);

S_1 — занят один аппарат, остальные свободны (занят один рабочий);

S_2 — заняты двое рабочих, остальные свободны;

...

S_m — занято m аппаратов (заняты все рабочие);

Очереди нет

S_{m+1} – занято m аппаратов, один элемент ждет очереди;

S_n — занято m аппаратов, $n + m$ элементов ждут очереди.

Вероятности этих состояний:

$$P_1 = \frac{n}{1!}\frac{\lambda}{\mu}P_0, \; P_2 = \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0, \; P_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0,$$

...

$$P_m = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m P_0,$$

$$P_{m+1} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-m)}{m!\,m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+1} P_0,$$

$$P_{m+2} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-m-1)}{m!\,m^2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+2} P_0,$$

....

$$P_n = \frac{n(n-1)...1}{m!\,m^{n-m}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} P_0,$$

$$P_0 = \left[1 + \frac{n}{1!}\frac{\lambda}{\mu} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + ... + \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)...(n-m)}{m!\,m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+1} + \frac{n(n-1)...1}{m!\,m^{n-m}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1}.$$

Через эти вероятности выражаются и остальные характеристики СМО.

Средняя длина очереди:

$$M_1 = \sum_{k=m+1}^{n} (k-m)\,P_к.$$

Коэффициент простоя обслуживаемого объекта: $\frac{M_1}{n}$.

Среднее число заявок, находящихся в системе:

$$M_2 = \sum_{k=0}^{m-1} (m-n)\,P_к.$$

Среднее число свободных обслуживающих аппаратов:

$$M_3 = \sum_{k=0}^{m-1} (m-n)\,P_к.$$

Коэффициент простоя обслуживающего аппарата равен $\frac{M_3}{m}$.

Основные термины и понятия

- математическое программирование;
- линейное программирование;
- нелинейное программирование;
- динамическое программирование;
- оптимальный план;
- критерий оптимальности;
- двойственные оценки;
- оптимизация производственной программы предприятия;
- оптимизация рецептуры смеси;
- оптимизация раскроя материалов;
- теория массового обслуживания;
- теория управления запасами.

Упражнения

Задача 1.

Промышленное предприятие располагает двумя видами ресурсов:

I вид – фонд времени работы оборудования, равный 18 нормо-часам, и II вид – 16 кг сырья.

Необходимо найти план производства продукции двух видов /А и Б/, при котором прибыль предприятия от ее реализации была бы максимальной.

Продукцию видов А и Б можно выпускать в любых соотношениях, сбыт ее не ограничен.

Нормы расхода ресурсов на производство единицы каждого вида продукции, а также прибыльность изделий заданы в таблице.

Номер ресурсов	Виды ресурсов	Единица измерения	Нормы затрат ресурсов на единицу продукции вида	
			А	Б
I	Оборудование /фонд времени/	Нормо-часы	3	2
II	Сырье	кг	1	4
Прибыльность единицы изделий		руб.	7	5

Требуется:

1. Составить математическую модель задачи, решить ее графическим методом.
2. Составить модель двойственной задачи, решить ее графическим методом.
3. Проанализировать полученные результаты.

Задача 2.

Выпускаемая предприятием продукция трех видов – А, Б, В – имеет практически неограниченный сбыт. Уровень выпуска лимитируется имеющимися в распоряжении предприятия ресурсами сырья, материалов и оборудования двух различных групп. Предприятие заинтересовано в определении такого уровня выпуска продукции, при котором ее общая стоимость достигает максимума. Числовые данные задачи приведены в таблице.

Требуется:

1. Сформулировать исходную и двойственную задачи и решить их симплексным методом.
2. Дать экономический анализ результатов решения исходной и двойственной задач.

Вид ресурсов	Объем ресурсов, которыми располагают	Нормы затрат на единицу продукции вида		
		А	Б	В
Сырье, кг	240	5	7	4
Материалы, кг	800	10	5	20
Оборудование I группы, час	100	5	2	1
Оборудование II группы, час	60	2	1	1
Стоимость единицы продукции, руб.	–	18	12	8

Задача 3.

На окладе предприятия имеется 10000 металлических прутков длиной 6 м и 15000 прутков длиной 4 м. Необходимо изготовить комплекты, состоящие из трех деталей: две детали – длиной 1,25 м и одна – 3,2 м.

Определить оптимальный план резки, при котором будет получено максимальное число комплектов.

Задача 4.

В справочное бюро вокзала поступает в среднем в дневное время два запроса в 1 мин. Средняя длительность разговора – 0,5 мин. Для правильной организации работы бюро нужно знать:

1) вероятность того, что при первом звонке абонент услышит короткие гудки – отказ;
2) среднюю долю времени, в течение которого справочное бюро вообще не загружено;
3) средний процент загрузки рабочего времени телефонисток.

Решить задачу для случая обслуживания тремя, двумя и одной телефонистками. Сравнить полученные результаты.

> **Примечание.** Поток требований считать простейшим, время обслуживания – распределенным по экспоненциальному закону.

Тесты

1. Каковы составные части модели задачи линейного программирования:

а) уравнения спроса и предложения;
б) целевая функция и система ограничений;
в) взаимосвязи экономического равновесия.

2. В чем состоит смысл двойственных оценок в линейном программировании:

а) в определении размеров прибыли или убытков в процессе производства;
б) в оценке целесообразности торгово-экономических мероприятий;
в) в определении сравнительной дефицитности различных видов ресурсов в отношении принятого в задаче показателя эффективности.

3. Основные разделы математического программирования:

а) линейное, нелинейное, динамическое программирование;

б) алгебра, геометрия, тригонометрия;

в) закономерности на монопольном, конкурентном и монополистически конкурентном рынке.

4. Модель оптимизации производственной программы предприятия:

а) задача качественного анализа;

б) задача из теории риска и неопределенности;

в) экономико-математическая задача.

5. Классификация систем массового обслуживания:

а) по времени ожидания и длине очереди;

б) с ожиданием, с потерями и смешанного типа;

в) со случайными характеристиками.

Контрольные вопросы

1. Охарактеризуйте сущность методов математического программирования.
2. В чем состоят математические методы и модели управления хозяйственной деятельностью предприятий?
3. Опишите сущность и содержание методов оперативно-календарного планирования на предприятиях.
4. Охарактеризуйте основы теории и приложений динамического программирования.
5. Дайте описание методов и моделей теории массового обслуживания.
6. Опишите методы и модели управления запасами в экономических системах.

Глава 3

БАЛАНСОВЫЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

3.1. Межотраслевой баланс производства и распределения продукции

Для анализа и планирования производства и распределения продукции на различных уровнях — от народного хозяйства до отдельного предприятия применяется межотраслевой балансовый метод. Он обеспечивает составление полностью сбалансированных, внутренне согласованных планов.

Межотраслевой баланс производства и распределения продукции, как составная часть системы баланса народного хозяйства, является инструментом анализа и планирования общеэкономических и межотраслевых пропорций в народном хозяйстве. Представляя собой развернутую схему баланса общественного продукта и национального дохода, межотраслевой баланс является экономико-математической моделью, отражающей объективно существующие в экономике структурные взаимосвязи между общеэкономическими пропорциями и пропорциями развития отдельных отраслей.

При разработке перспективных и текущих народнохозяйственных планов межотраслевой баланс используется для вариантных расчетов темпов, пропорций и отраслевой структуры развития экономики с учетом основных социально-экономических задач и важнейших тенденций научно-технического прогресса в отраслях народного хозяйства. На основе межотраслевого метода разрабатывают матричные экономико-математические модели. В матричных моделях балансовый метод, являющийся одним из важнейших методов планирования, получает строгое математическое выражение.

К матричным моделям относятся: межотраслевой и межрайонный баланс производства и распределения продукции в народном хозяйстве, матричные модели планов развития отраслей народного хозяйства, межотраслевые балансы производства и распределения продукции экономических районов, матричные модели бизнес-планов предприятий. Несмотря на специфику, эти модели объединяют общий формальный принцип построения, единство системы расчетов, аналогичность ряда экономических характеристик (в частности, коэффициентов полных и прямых затрат). Это позволяет рассмотреть содержание, структуру и основные зависимости матричных моделей на примере одной из них, допустим, межотраслевого баланса производства и распределения продукции в народном хозяйстве.

Межотраслевой народнохозяйственный баланс отражает производство и распределение общественного продукта в отраслевом разрезе, межотраслевые производственные связи, использование материальных и трудовых ресурсов, создание и распределение национального дохода. Принципиальная схема баланса приведена в таблице 3.1, в которой рассматривается отчетный баланс за один год в ценностном выражении.

Таблица 3.1

Математическая модель межотраслевого баланса

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли					Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3	...	n		
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1n}	y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2n}	y_2	X_2
			I			II	
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	...	x_{3n}	y_3	X_3
...	...	...	...	...	...	...	...
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	...	x_{nn}	y_n	X_n
Оплата труда	v_1	v_2	v_3	...	v_n	v_k	–
			III			IV	
Чистый доход	m_1	m_2	m_3	...	m_n	m_k	–
Валовая продукция	X_1	X_2	X_3	...	X_n	–	X

Основу баланса составляет совокупность всех отраслей материального производства (n отраслей). Каждая отрасль дважды фигурирует в балансе: как производящая и как потребляющая. Отрасли как производителю продукции соответствует определенная строка, как потребителю продукции — определенный столбец. Обозначим через i номер производящей отрасли, а через j — потребляющей отрасли. Величины x_{ij} показывают стоимость средств производства, произведенных в i-ой отрасли и потребленных в j-ой отрасли.

В столбцах баланса отражается структура материальных затрат (x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{nj}) и чистой продукции ($v_j + m_j$) j-ой отрасли.

Итог материальных затрат и чистой продукции равен валовой продукции отрасли:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + v_j + m_j. \qquad (3.1)$$

Формула (3.1) охватывает систему из n уравнений, отражающих стоимостной состав продукции всех отраслей материальной сферы. В строках межотраслевого баланса содержатся данные о распределении годового объема продукции каждой отрасли материального производства. Величины y_i — это затраты продукции вне сферы материального производства, т. е. для целей конечного (личного и общественного) потребления, а также для накопления, капиталовложений.

Для любой производящей отрасли имеем:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_j. \qquad (3.2)$$

Имеется n уравнений вида (3.2), они называются уравнениями распределения или использования продукции отраслей материального производства. Таким образом, рассмотрение данных баланса по отдельным отраслям показывает стоимостную структуру годовой продукции и распределение этой продукции по направлениям использования.

Рассмотрим схему баланса в разрезе его крупных составных частей. Выделяются четыре части, имеющие различное экономическое содержание, они называются квадрантами баланса. На схеме (табл. 3.1) каждый квадрант обозначен римской цифрой.

В I квадранте содержатся межотраслевые потоки средств производства. По форме он представляет собой квадратную матрицу, сумма всех элементов которой равняется годовому фонду возмещения затрат средств производства в материальной сфере. Он должен включать затраты предметов труда и стоимость износа средств труда (амортизационных отчислений). Данные I квадранта играют решающую роль в анализе структуры материальных затрат отраслей, пропорций и производственных связей между отраслями, потоков в системе материально-технического снабжения.

Во **II квадранте** представлена конечная продукция всех отраслей материального производства. Под конечной понимается продукция, входящая из сферы производства в область конечного использования – на потребление и накопление. В развернутой схеме баланса конечная продукция каждой отрасли показана дифференцированно по направлениям использования: на личное потребление населения, общественное питание, на накопление, возмещение потерь, экспорт и др. При отражении в I квадранте амортизационных отчислений конечная продукция не отличается от национального дохода. Таким образом, II квадрант характеризует отраслевую материальную структуру национального дохода, его распределение на фонды накопления и потребления, структуру потребления и накопления — по отраслям производства и потребления.

III квадрант также характеризует национальный доход, но со стороны его стоимостного состава – как сумму оплаты труда и чистого дохода всех отраслей материального производства. Данные III квадранта необходимы для анализа соотношений между вновь созданной и перенесенной стоимостью, между величиной необходимого и прибавочного продукта в целом по материальному производству и в отраслевом разрезе.

Просуммируем по всем отраслям уравнения (3.1):

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} v_j + \sum_{j=1}^{n} m_j .$$

Суммируя по i-му уравнения (3.2), имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} y_i .$$

Левые части обоих выражений дают одну и ту же величину — весь валовой общественный продукт. Первые слагаемые правых частей — итог I квадранта. Таким образом, соблюдается равенство:

$$\sum_{j=1}^{n} v_j + \sum_{j=1}^{n} m_j = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Левая часть этого уравнения — сумма III квадранта, правая часть – итог II квадранта. В целом уравнение показывает, что в межотраслевом балансе соблюдается важнейший принцип единства материально-вещественного и стоимостного состава национального дохода. Равенство справедливо лишь для всего материального производства в целом. В отдельных же отраслях конечная и чистая продукция не равны друг другу.

IV квадрант межотраслевого баланса находится на пересечении столбцов конечной продукции и строк доходов. Этим определяется его содержание: он отражает конечное распределение и использование национального дохода. В результате перераспределения первоначально созданного национального дохода образуются конечные доходы населения, предприятий, государства. Общий итог IV квадранта, так же как II и III, должен быть равен созданному национальному доходу.

В целом межотраслевой баланс в рамках единой экономико-математической модели объединяет балансы отраслей материального производства, баланс всего общественного продукта, балансы национального дохода, финансовый, доходов и расходов населения.

Наряду с межотраслевыми балансами в стоимостном исчислении разрабатываются **межпродуктовые балансы в натуральном выражении**. Натуральный баланс содержит перечень не отраслей, а самих продуктов материального производства. В качестве единиц измерения выступают специфические для каждого продукта количественные характеристики. В натуральном балансе **I и II квадранты** по содержанию аналогичны соответствующим квадрантам стоимостного баланса. Каждая строка содержит данные о ресурсах того или иного продукта и их распределение на производство других продуктов и на конечное потребление. В сущности, каждая строка представляет собой материальный баланс отдельного продукта.

В III квадранте отражаются в натуральных измерителях (например, человеко-часах) затраты труда на производство каждого вида продукции. Анализ столбцов баланса позволяет судить о структуре основных материальных и трудовых затрат на выпуск любого продукта из числа включенных в модель. Однако суммирование в столбцах не производится. Таким образом, основное значение межпродуктового баланса заключается в комплексном рассмотрении материальных балансов всех важнейших видов продукции.

Одним из решающих преимуществ межотраслевого метода, по сравнению с обычными методами построения и анализа балансов производства и распределения продукции, является возможность широкого применения математики. Это обусловлено тем, что все основные величины межотраслевых моделей находятся в определенной математической зависимости. Она характеризуется прежде всего уравнениями (3.1) и (3.2), отражающими реально существующие взаимосвязи отраслей в общественном производстве.

Технологические связи между отраслями измеряются с помощью коэффициентов прямых материальных затрат. По данным межотраслевого баланса (табл. 3.1), они могут быть рассчитаны путем деления величин межотраслевых потоков на валовую продукцию потребляющих отраслей:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}.$$

Коэффициенты прямых затрат показывают, сколько единиц продукции i-й отрасли непосредственно затрачивается на выпуск единицы продукции j-й отрасли. Они образуют квадратную матрицу a:

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right].$$

Из формулы следует, что $x_{ij} = a_{ij} x_j$. Поэтому выражение (3.2) может быть представлено в следующем виде:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i . \qquad (3.3)$$

Формула (3.3), охватывающая систему из n уравнений, является основным математическим соотношением как стоимостных, так и натуральных балансов, и служит исходным пунктом расчетов при разработке балансов на плановый период. Полагая известными на плановый период коэффициенты a_{ij}, имеем в системе (3.3) n уравнений и $2n$ неизвестных (x_i, y_i). Для нахождения решения системы необходимо задаться произвольными значениями любых n неизвестных величин, тогда значения остальных n неизвестных будут определяться однозначно решениями системы (3.3). Имея в виду экономический смысл показателей системы (3.3), можно говорить о трех вариантах расчета: либо мы задаем величины x_i; либо y_i; либо по одним отраслям x_i, а по другим y_j, так, что в сумме число заданных величин составляет n.

Первый вариант напоминает существующую практику планирования, когда на основе изучения резервов развития отраслей намечаются задания по валовому выпуску продукции, а величина и отраслевая структура национального дохода являются производными показателями. Такой метод легче осуществить на практике, он позволяет точнее учесть возможности капиталовложений в отрасли, их ресурсы, но он имеет принципиальные недостатки. Экономически более оправданным является планирование потребностей, когда намечается величина конечной продукции, а в качестве производного показателя рассчитывается уровень валовой продукции.

При планировании от валовой продукции реальной является опасность получения нерациональной структуры национального дохода, неоптимальных пропорций в развитии отдельных отраслей, неоправданного роста промежуточной продукции без соответствующего увеличения конечного продукта. Это позволяет говорить о его неприемлемости.

Второй вариант вполне обоснован теоретически, но его применение сталкивается с известными трудностями. Когда по заданным объему и структуре национального дохода будут рассчитаны уровни валовой продукции, они могут оказаться для отдельных отраслей чрезмерно высокими, не обеспеченными совокупностью материальных ресурсов этих отраслей. При этом в других отраслях незагруженными будут даже действующие производственные мощности. Это потребует пересмотра заданий по национальному доходу и повторных расчетов.

Третий вариант расчетов, когда в системе (3.3) по некоторым отраслям задается валовой выпуск, по другим – конечный, представляется наиболее приемлемым в практическом отношении. Валовой выпуск целесообразно задавать по отраслям, составляющим фундамент общественного производства: энергетической, топливной, металлургической промышленности. По отраслям, непосредственно удовлетворяющим общественные и личные потребности, намечается уровень конечной продукции. Решим систему (3.3) относительно X. В матричной форме имеем:

$$X = aX + Y,$$

где X — вектор валовых выпусков;

Y— вектор конечной продукции;

a — матрица коэффициентов прямых затрат.

Учитывая, что X = EX, где E — единичная матрица, получаем:

$$X - aX = EX - aX = (E - a)\,X = Y \text{ или } X = (E - a)^{-1}\,Y.$$

Таким образом, решение связано с обращением матрицы (E – a). Обратную матрицу обозначим через A, а ее элементы – A_{ij}. Тогда имеем: $A = (E - a)^{-1} = [A_{ij}]$. Окончательно в общем виде имеем:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, y_i\,. \qquad (3.4)$$

Валовая продукция выступает здесь как взвешенная сумма количеств конечных продуктов, причем весами являются некоторые коэффициенты A_{ij}, которые показывают, сколько всего нужно произвести продукции i-й отрасли для выпуска в сферу конечного использования единицы продукции j-й отрасли. В отличие от коэффициентов прямых затрат a_{ij}, коэффициенты A_{ij} называются коэффициентами полных материальных затрат. Они включают в себя как прямые, так и косвенные затраты всех порядков. Если прямые затраты отражают количество средств производства, израсходованных непосредственно при изготовлении данного продукта, то косвенные относятся к предшествующим стадиям производства и входят в продукт через другие средства производства.

Коэффициенты полных затрат в одних случаях лишь не намного превышают прямые затраты, в других — отличаются очень резко. Коэффициенты прямых и полных затрат возможно рассчитывать и по данным межпродуктовых натуральных балансов. Коэффициенты полных затрат являются глубоко содержательными экономическими показателями, дающими исчерпывающую характеристику сложных многозвенных производственных связей.

Расчеты в матричных моделях, сводимые в главной части к определению объема валовой продукции по заданной конечной продукции, могут осуществляться по соотношению (3.3) или (3.4). И хотя они взаимосвязаны, однако с точки зрения расчетов обе системы имеют самостоятельное значение.

Для определения валовой продукции n отраслей при заданной конечной продукции по формуле (3.3) необходимо решить систему n линейных уравнений с n неизвестными. Пользование формулой (3.4) более удобно. Каждое уравнение решается здесь элементарно и независимо от других. Если в задание по конечной продукции одной или нескольких отраслей вносятся изменения, пересчет валовой продукции заключается в добавлении (вычитании) определенных величин. В случае подобных изменений при использовании формулы (3.3) приходится заново решать всю систему уравнений.

Однако применение формулы (3.4) требует знания коэффициентов полных затрат. Расчет всей матрицы представляет собой решение n систем линейных уравнений с n неизвестными. При больших значениях n это довольно громоздкая задача.

Поэтому для практических расчетов на матричных моделях более рационально пользоваться соотношениями (3.3), особенно если просчитывается один или несколько вариантов. Если же расчет производится для ряда вариантов конечной продукции и возможны неоднократные последующие изменения, то целесообразнее один раз рассчитать коэффициенты полных затрат.

Рассмотрим пример расчета основных показателей межотраслевого баланса при условном делении экономики на три отрасли: промышленность, сельское хозяйство и прочие отрасли. На плановый период заданы матрица коэффициентов прямых затрат a и вектор конечной продукции y (цифры условные):

$$a = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}03 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}08 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 56 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Необходимо рассчитать плановые объемы валовой продукции, величину межотраслевых потоков, чистую продукцию отраслей и представить результаты в форме межотраслевого баланса. Для расчета валовой продукции составим систему уравнений:

$x_1 = 0{,}3\,x_1 + 0{,}25\,x_2 + 0{,}2\,x_3 + 56;$

$x_2 = 0{,}15x_1 + 0{,}12\,x_2 + 0{,}03\,x_3 + 20;$

$x_3 = 0{,}1\,x_1 + 0{,}05\,x_2 + 0{,}08\,x_3 + 12.$

Решив эту систему, получим:

$x_1 = 102{,}2;\ x_2 = 41{,}0;\ x_3 = 26{,}4.$

Для составления баланса рассчитаем межотраслеые потоки средств производства по формуле: $x_{ij} = a_{ij}\,x_j$. Получаем:

$x_{11} = 0{,}3 \cdot 102{,}2 = 30{,}6;\ x_{12} = 0{,}25 \cdot 41{,}0 = 10{,}3$ и т. д.

Величина чистой продукции определяется как разница между валовой продукцией отрасли и суммой межотраслевых потоков в каждом столбце. Так, для промышленности чистая продукция равна:

$102{,}2 — (30{,}6 + 15{,}3 + 10{,}2) = 46{,}1.$

Результаты вычислений представим в форме межотраслевого баланса (табл. 3.2).

Таким образом, получим полностью сбалансированный план общего производства продукции и ее распределения как между отраслями в качестве средств производства, так и для конечного использования.

Проиллюстрируем на том же примере другой путь расчета, основанный на предварительном определении коэффициентов полных затрат.

Таблица 3.2

Баланс производства и распределения продукции (условный)

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конеч-ная продукция	Валовая продукция
	Промышленность	Сельское хозяйство	Прочие отрасли		
Промышленность	30,6	10,3	5,3	56	102,2
Сельское хозяйство	15,3	4,9	0,8	20	41,0
Прочие отрасли	10,2	2,1	2,1	12	26,4
Чистая продукция	46,1	23,7	18,2	–	–
Валовая продукция	102,2	41,0	26,4	–	169,6

Для исчисления полных затрат можно воспользоваться соотношениями вида (3.3), если в качестве вектора конечной продукции принимать единичные векторы, обозначающие выпуск единицы конечной продукции лишь в одной из отраслей. Действительно, в этом случае система (3.3) определяет, сколько продукции всех отраслей необходимо произвести (и затратить), чтобы выпустить в сферу конечного потребления одну единицу продукции данной отрасли. В нашем примере требуется найти матрицу коэффициентов полных затрат для трех отраслей. Это требует решения трех систем уравнений, каждая из которых включает три уравнения с тремя неизвестными. Для расчета полных затрат на единицу продукции промышленности необходимо решить следующую систему уравнений:

$$x_1 = 0{,}3\,x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}2x_3 + 1;$$
$$x_2 = 0{,}15x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}03x_3;$$
$$x_3 = 0{,}1x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}08x_3.$$

Решив систему, получим значения трех коэффициентов полных затрат: $x_1 = A_{11} = 1{,}58$; $x_2 = A_{21} = 0{,}276$; $x_3 = A_{31} = 0{,}187$.

Аналогично определяются полные затраты для сельского хозяйства и прочих отраслей народного хозяйства. Окончательно имеем:

$$A = \begin{bmatrix} 1{,}58 & 0{,}469 & 0{,}363 \\ 0{,}276 & 1{,}22 & 0{,}103 \\ 0{,}187 & 0{,}117 & 0{,}132 \end{bmatrix}.$$

Все коэффициенты полных затрат по величине заметно превышают соответствующие коэффициенты прямых затрат. Наибольшее различие наблюдается между полными и прямыми затратами собственной продукции каждой отрасли: коэффициенты полных затрат здесь больше единицы, так как включают ту единицу продукции, которая входит в сферу конечного использования.

3.2. Модификации основной схемы межотраслевого баланса

Различные модификации рассмотренной выше основной модели межотраслевого баланса позволяют расширить круг показателей, охватываемых моделью, и лучше приспособить ее к отражению реальной экономической деятельности.

К числу важнейших аналитических возможностей межотраслевого метода относится определение прямых и полных затрат труда и разработка на этой основе балансовых продуктово-трудовых моделей. Исходной моделью будет служить отчетный межпродуктовый баланс в натуральном выражении. В строках баланса дается распределение каждого отдельного продукта на производство других продуктов и конечное потребление, а также распределение затрат живого труда в производстве всех видов продукции.

Предполагается, что трудовые затраты выражены в единицах труда одинаковой степени сложности.

Обозначим затраты живого труда в производстве j-го продукта через L_j, а объем производства этого продукта – через X_j. Тогда прямые затраты труда на единицу j-го вида продукции составят:

$$t_j = \frac{L_j}{X_j}.$$

Введем также понятие полных затрат труда T_j как суммы прямых затрат (живого труда) и затрат овеществленного труда, перенесенных на продукт через израсходованные средства производства. Формирование полных затрат труда в модели происходит по следующей схеме:

$$
\begin{array}{cccc}
a_{11}T_1 & a_{12}T_1 & \dots & a_{1n}T_1 \\
a_{21}T_2 & a_{22}T_2 & \dots & a_{2n}T_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1}T_n & a_{n2}T_n & \dots & a_{nn}T_n \\
t_1 & t_2 & \dots & t_n \\
T_1 & T_2 & \dots & T_n.
\end{array}
$$

Здесь для каждого j-го продукта T_j обозначает величину полных затрат труда на единицу продукции, t_j — величину прямых затрат труда, а произведения вида $a_{ij}T_j$ отражают затраты овеществленного труда, перенесенного на j-й продукт через i-е средство производства. Предполагается, что коэффициенты прямых материальных затрат a_{ij} выражены в натуральных единицах.

Полные трудовые затраты как сумма затрат овеществленного и живого труда равны:

$$T_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} T_i + t_j \qquad (3.5)$$

Система включает n уравнений. Если заданы матрица коэффициентов прямых материальных затрат межпродуктовой модели и вектор — строка коэффициентов прямой трудоемкости, то решением системы уравнений могут быть определены коэффициенты полных затрат труда на единицу каждого вида продукции.

Система может быть разрешена в общем виде относительно коэффициентов полных затрат труда. В матричной записи имеем: $T = Ta + t$, откуда $T - Ta = TE - Ta = T(E - a) = t$, окончательно получим:

$$T = t\,A.$$

Итак, для любого j-го продукта величина полных затрат труда T_j определяется как взвешенная сумма прямых затрат труда на все виды продукции, причем в качестве весов выступают коэффициенты полных материальных затрат:

$$T_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\, t_i.$$

Полная трудоемкость показывает, во что в среднем обходится обществу производство той или иной продукции. Показатели полных трудовых затрат, определяемые на основе межотраслевого баланса, не совпадают с показателями общественно необходимых затрат труда (для исчисления последних требуется построение более сложных оптимизационных моделей). Однако и показатели средней полной трудоемкости имеют существенное аналитическое значение.

На основе коэффициентов прямой и полной трудоемкости могут быть разработаны межотраслевые и межпродуктовые балансы затрат труда и использования трудовых ресурсов. Схематически балансы строятся по общему типу матричных моделей, однако все показатели в них (межотраслевые связи, конечный продукт, чистая продукция и др.) выражены в трудовых измерителях. Балансы исчерпывающим образом характеризуют распределение трудовых ресурсов между отраслями, объем и структуру совокупных затрат общественного труда. Особый интерес представляет анализ полных затрат труда в динамике. Их изменение дает объективную и полную картину роста производительности общественного труда, затрачиваемого на всех стадиях производства для выпуска конечной продукции того или иного вида.

На основе коэффициентов трудоемкости при разработке плановых межотраслевых балансов обеспечивается увязка планируемых объемов производства с трудовыми ресурсами общества.

При плановых уровнях производства X_j и коэффициентах прямой трудоемкости t_j общая потребность в затратах труда составит:

$$L = \sum_{j=1}^{n} t_j x_j + Lg.$$

где Lg — дополнительные затраты труда в материальном производстве (не пропорциональные объему продукции), а также трудовые затраты в непроизводственной сфере.

Сопоставление общей потребности с располагаемым плановым фондом рабочего времени (или плановой численностью трудящихся) покажет, насколько реален данный вариант планового баланса с точки зрения обеспеченности его ресурсами труда. Аналогичные расчеты могут производиться не только в целом, но и по категориям трудовых ресурсов, профессиям и т. п.

Если выделено m групп трудовых ресурсов и по каждой из них имеются отчетные данные о величинах затрат L_{kj} живого труда k-й группы в производстве j-го продукта, то образуется матрица трудовых затрат:

$$\left[L_{kj}\right]=\begin{bmatrix} L_{11}\ L_{12}\ \dots\ L_{1n} \\ L_{21}\ L_{22}\ \dots\ L_{2n} \\ L_{m1}\ L_{m2}\ \dots\ L_{mn} \end{bmatrix}.$$

На основе этой матрицы можно получить матрицу коэффициентов прямых затрат труда t_{kj}, определяемых по формуле:

$$t_{kj}=\frac{L_{kj}}{X_j}.$$

Коэффициенты t_{kj}, определенные на плановый период, позволяют рассчитать потребность в трудовых ресурсах на плановый объем производства по группам (категориям, профессиям) работающих.

Представляется возможность по тем же группам определить полную трудоемкость различных видов продукции. На базе коэффициентов a_{ij} прямых материальных затрат полные трудовые затраты T_{kj} труда k-й группы на единицу j-го продукта исчисляются в результате решения системы уравнений:

$$T_{kj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}T_{ki}+t_{kj}.$$

При известной матрице коэффициентов A_{ij} полных материальных затрат показатели полной трудоемкости определяются из соотношений:

$$T_{kj}=\sum_{i=1}^{n}A_{ij}\,t_{ki}.$$

Коэффициенты T_{kj} позволяют, в частности, легко установить дополнительную потребность народного хозяйства в трудовых ресурсах той или иной конкретной группы для обеспечения прироста производства той или иной продукции, например, определить, сколько потребуется занять дополнительно рабочих-станочников во всех отраслях народного хозяйства для обеспечения заданного увеличения выпуска автомобилей.

Развитие основной модели межотраслевого баланса достигается и за счет включения в нее **показателей фондоемкости продукции**. В I квадранте баланса отражаются лишь текущие затраты средств производства. Эти данные не дают представления об объеме занятых в разных отраслях производственных фондов и о фондоемкости различной продукции. Между тем показатели фондоемкости важны не только для анализа структуры и использования фондов в народном хозяйстве, но и для обоснования планов капиталовложений.

В простейшем случае модель дополняется отдельной строкой, в которой указаны в денежном исчислении объемы производственных фондов $Ф_j$, занятые в каждой j-й отрасли. На основании этих данных и объемов продукции отраслей определяются коэффициенты прямой фондоемкости продукции j-й отрасли:

$$f_j = \frac{Ф_j}{X_j}.$$

Коэффициент прямой фондоемкости показывает величину производственных фондов, непосредственно занятых в производстве в данной отрасли в расчете на единицу ее годовой продукции (выраженной в натуральных или денежных измерителях). Представляет интерес и показатель полной фондоемкости, отражающий объем фондов, необходимых во всех отраслях для выпуска единицы конечной продукции данной отрасли.

Если полную фондоемкость обозначить через F_j, то формирование этого показателя можно представить следующей схемой:

$$\begin{array}{cccc} a_{11}F_1 & a_{12}F_1 & \dots & a_{1n}F_1 \\ a_{21}F_2 & a_{22}F_2 & \dots & a_{2n}F_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}F_n & a_{n2}F_n & \dots & a_{nn}F_n \\ f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ F_1 & F_2 & \dots & F_n. \end{array}$$

Для каждого j-го столбца должно соблюдаться равенство:

$$F_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_i + f_j.$$

При заданных коэффициентах прямой фондоемкости f_j система содержит n уравнений с n неизвестными. Ее решение приводит к определению коэффициентов полной фондоемкости для всех отраслей (продуктов). С помощью преобразования можно выразить полную фондоемкость как явную функцию прямых фондоемкостей:

$$F_j = \sum_{i=1}^{n} F_{ij} f_i.$$

Прямая и полная фондоемкости продукции, рассчитанные на основе одного из межотраслевых балансов по некоторым отраслям материального производства, представлены в таблице 3.3.

Коэффициенты полной фондоемкости больше прямой от 1,3 раза в производстве электро- и теплоэнергии до 32,6 раза в мясной промышленности. Полная фондоемкость, как видно из таблицы, значительно менее изменчива, чем прямая.

Рассмотренные показатели дают лишь самое общее представление о фондоемкости продукции, т. к. фонды не разграничиваются по видам и группам. Для более глубокого анализа необходимо дифференцировать фонды на основные и оборотные; в пределах основных — на здания, сооружения, производственное оборудование, транспортные средства и т. д.; возможна и дальнейшая детализация, например, оборудование механическое, термическое, химическое и т. п. Предположим, что в целом все производственные фонды разделены на m групп. Тогда характеристика занятых в народном хозяйстве фондов дается матрицей показателей Φ_{kj}, отражающих объем фондов k-й группы, занятых в j-й отрасли:

$$\left[\Phi_{kj}\right] = \begin{bmatrix} \Phi_{11} \ \Phi_{12} \ \dots \ \Phi_{1n} \\ \Phi_{21} \ \Phi_{22} \ \dots \ \Phi_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_{m1} \ \Phi_{m2} \ \dots \ \Phi_{mn} \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты прямой фондоемкости также образуют матрицу, элементы которой равны:

$$f_{kj} = \frac{\Phi_{kj}}{X_j}.$$

Для каждой j-й отрасли могут быть вычислены коэффициенты полной фондоемкости F_{kj}, отражающие полную потребность в фондах k-й группы для выпуска единицы конечной продукции этой отрасли. Коэффициенты F_{kj} определяются из решения системы уравнений:

$$F_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} F_{kj} + f_{kj}.$$

Решение системы в общем виде позволяет представить полную фондоемкость как явную функцию коэффициентов прямой фондоемкости:

$$F_{kj} = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} f_{kj}.$$

Уравнения решаются отдельно для каждой k-й группы фондов, так что в целом приходится решать m систем, каждая из которых содержит n уравнений с n неизвестными.

Коэффициенты фондоемкости в плановом балансе позволяют увязать планируемый выпуск продукции с производственными мощностями. Потребность $\Phi_к$ в функционирующих фондах k-й группы на весь плановый объем материального производства составляет:

$$\Phi_к = \sum_{i=1}^{n} f_{ij} x_{kj}.$$

Величина $Ф_k$ сопоставляется с реально возможным среднегодовым наличием производственных фондов в плановом периоде.

Таблица 3.3

Коэффициенты полной и прямой фондоемкости продукции по отдельным отраслям народного хозяйства

Отрасль и производство	Фондоемкость, тыс. руб. на 1000 руб. валовой продукции		Соотношение полной и прямой фондоемкости
	прямая	полная	
Производство черных металлов	733,8	2 426,9	3,3
Угольная промышленность	1 020,0	2 346,2	2,3
Электро- и теплоэнергия	2 890,3	3 780,3	1,3
Производство станков металлорежущих и деревообрабатывающих	727,3	1 728,1	2,4
Автомобильная	447,2	1 544,1	3,5
Лакокрасочная	178,9	1 544,0	8,7
Мебельная	313,1	1 286,8	4,1
Цементная	1 197,1	2 615,8	2,2
Производство шерстяных изделий	72,8	1 147,9	15,8
Мясная	86,3	2 815,8	32,6
Строительство	305,9	1 337,9	4,4
Сельское хозяйство	982,2	1 763,5	1,8

Межотраслевой метод позволяет рассчитать сбалансированные цены единого уровня для всех продуктов. Построим систему цен исходя из следующей схемы:

$$
\begin{array}{ccc}
a_{11}P_1 & a_{12}P_1 & \dots\ a_{1n}P_1 \\
a_{21}P_2 & a_{22}P_2 & \dots\ a_{2n}P_2 \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\
a_{n1}P_n & a_{n2}P_n & \dots\ a_{nn}P_n \\
t_1P_t & t_2P_t & \dots\ t_nP_t \\
P_1 & P_2 & \dots\ P_n.
\end{array}
$$

Здесь коэффициенты прямых материальных a_{ij} и трудовых t_j затрат даны в натуральных единицах, величины $P_1, P_2, \ldots, P_n$ обозначают цены соответствующих продуктов, а P_t — денежный эквивалент новой стоимости, созданной в единицу рабочего времени. В балансе для каждого j-го продукта соблюдается равенство:

$$P_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} P_i + t_j P_t . \tag{3.6}$$

Это выражение образует систему n линейных уравнений с $n + 1$ неизвестными. Задавая значение одной из них, можно решить эту систему. Умножим систему уравнений (3.5) на величину P_t:

$$T_j P_t = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} T_i P_t + t_j P_t .$$

Сопоставляя последнее выражение с системой (3.6), видно, что

$$P_j = T_j P_t,$$

т. е. сбалансированные цены продуктов в межотраслевом балансе пропорциональны величинам полной трудоемкости.

Особый характер носит величина P_t. С ее помощью устанавливается в цене P_j стоимость чистой продукции $t_j P_t$.

Величина P_t включает в себя в расчете на единицу рабочего времени стоимость необходимого продукта, которую полагаем известной величиной, и стоимость прибавочного продукта, которая в общем случае нам не известна, но находится в постоянном отношении к заработной плате (в соответствии со стоимостной формулой ценообразования).

Если коэффициенты трудоемкости t_j выражены в человеко-часах простого труда, $V_н$ — нормативная ставка оплаты одного часа простого труда, α — норма прибавочного продукта по отношению к необходимому, то уравнение (3.6) может быть переписано следующим образом:

$$P_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} P_i + t_j V_н (1 + \alpha).$$

Для нахождения решения системы присоединим к ней $(n+1)$-е уравнение. При построении дополнительного уравнения отразим требование соответствия доходов населения и суммы цен товаров личного потребления, учитывая, что на плановый период определены объемы производства и конечная продукция по всем отраслям.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j t_j V_н + D = \sum_{j=1}^{n} P_j y_j.$$

Первое слагаемое представляет сумму доходов работников материального производства; величина D — сумму доходов населения, занятого в непроизводственной сфере, а также пенсий, пособий и стипендий; P_j и y_j — соответственно цены и объемы конечных продуктов, предназначенных для личного потребления.

Решение системы, таким образом, позволит получить цены, пропорциональные коэффициентам полных затрат труда, построенные по единому принципу, обеспечивающему соответствие денежных доходов населения и суммы цен товаров, поступающих в обращение.

Межотраслевой баланс позволяет рассчитывать систему цен и по другим формулам ценообразования. Однако цены межотраслевого баланса позволяют решить далеко не все проблемы планового ценообразования. Последние решаются полностью лишь в рамках моделей оптимального планирования народного хозяйства.

3.3. Динамическая модель межотраслевого баланса

Представленные модели разрабатываются лишь для отдельно взятых периодов, причем в рамках этих моделей не устанавливается связь с предыдущими или последующими периодами. Непрерывно развивающаяся экономика отображается, таким образом, рядом независимо рассчитанных моделей, что неизбежно вносит определенные упрощения и сужает возможности анализа. К числу таких упрощений, прежде всего, относится то, что в рамках статических моделей не анализируется распределение, использование и производственная эффективность капиталовложений. Капиталовложения отражаются с предметами потребления и непроизводственными затратами.

В отличие от статических схем, динамические модели призваны отразить не состояние, а процесс развития экономики, установить непосредственную взаимосвязь между предыдущими и последующими этапами развития и тем самым приблизить экономико-математический анализ к реальным условиям производства.

Рассмотрим динамическую модель, являющуюся развитием статической межотраслевой модели. Производственные капиталовложения выделяются из состава конечной продукции, исследуется их структура и влияние на рост объема производства. Математическая зависимость между величиной капиталовложений и приростом продукции служит основой построения динамической системы уравнений. Решение системы, как обычно, приводит к определению уравнений производства, однако в динамическом варианте, в отличие от статического, искомые уровни зависят от объемов производства предшествующих периодов. Принципиальная схема первых двух квадрантов динамического межотраслевого баланса приводится в таблице 3.4. Модель содержит две матрицы межотраслевых потоков. Матрица текущих затрат совпадает с соответствующей матрицей статического баланса. Элементы второй матрицы $\Delta\Phi_{ij}$ показывают количество продукции i-й отрасли, направляемое в текущем периоде в j-ю отрасль в качестве производственных вложений в ее основные фонды. Материально это выражается в приросте в потребляющих отраслях производственного оборудования, сооружений, площадей, транспортных средств и т. п.

В зависимости от учета фактора времени динамические балансы делятся на два вида:

а) модели, учитывающие лаг производственных вложений;

б) модели, не учитывающие лаг.

В статическом балансе потоки вложений не дифференцируются по отраслям-потребителям, а отражаются общей величиной в составе конечной продукции. В динамической схеме конечный продукт z_i включает продукцию i-й отрасли, идущую в личное и общественное потребление, накопление непроизводственной сферы, в прирост оборотных фондов, незавершенного строительства, на экспорт. Сумма потоков вложений и конечного продукта динамической модели равна конечной продукции статического баланса, т. е.

Таблица 3.4

Схема динамического баланса

Производящие отрасли	Межотраслевые потоки текущих затрат				Межотраслевые потоки производственных капиталовложений				Конечный продукт	Валовая продукция
	1	2	…	n	1	2	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	$\Delta\Phi_{11}$	$\Delta\Phi_{12}$	…	$\Delta\Phi_{1n}$	z_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	$\Delta\Phi_{21}$	$\Delta\Phi_{22}$	…	$\Delta\Phi_{2n}$	z_2	X_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	$\Delta\Phi_{n1}$	$\Delta\Phi_{n2}$	…	$\Delta\Phi_{nn}$	z_n	X_n

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta\Phi_{ij} + z_i = y_i.$$

Таким образом, уравнение распределения продукции вида (3.2) преобразуется в динамическом балансе в следующее:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \Delta\Phi_{ij} + z_i. \qquad (3.7)$$

Потоки текущих затрат, как и в статической модели, выразим через валовую продукцию отраслей с помощью коэффициентов прямых материальных затрат:

$$x_{ij} = a_{ij} X_j.$$

Если потоки текущих затрат связаны со всей величиной выпуска продукции, то потоки вложений обусловливают прирост продукции (в данном случае имеется в виду прирост за тот же период, когда произведены вложения). Если это период t, то прирост продукции Δx_j равен разнице абсолютных уровней производства в период t и в предшествующий $(t-1)$-й период:

$$\Delta X_j = X_j^t — X_j^{t-1}.$$

Полагая, что прирост продукции пропорционален приросту фондов, можно записать:

$$\Delta\Phi_{ij} = в_{ij} \Delta X_j.$$

Представляют интерес коэффициенты пропорциональности $в_{ij}$.

Поскольку

$$в_{ij} = \frac{\Delta\Phi_{ij}}{\Delta X_j},$$

то их экономический смысл вполне ясен: они показывают, сколько продукции i-й отрасли должно быть вложено в j-ю отрасль для увеличения производственной мощности последней на единицу продукции. Здесь и далее предполагается, что производственные мощности используются полностью и, следовательно, прирост продукции равен приросту мощности.

Коэффициенты $в_{ij}$ называются коэффициентами вложений, или коэффициентами приростной фондоемкости. С помощью коэффициентов текущих затрат и коэффициентов вложений выражение можно представить в следующем виде:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + \sum_{j=1}^{n} в_{ij} \Delta X_j + z_i.$$

Система представляет собой систему так называемых **линейных разностных уравнений**, если исходить из того, что все объемы производства и конечная продукция относятся к некоторому периоду t, а прирост продукции определен в сравнении с $(t-1)$-м периодом. Тогда имеем:

$$X_i^t = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j^t + \sum_{j=1}^{n} в_{ij} (X_j^t - X_j^{t-1}) + z_i^t.$$

Отсюда следует:

$$X_i^t = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + в_{ij}) X_j^t - \sum_{j=1}^{n} в_{ij} X_j^{t-1} + z_i. \qquad (3.8)$$

Предположим, что нам известны уровни производства всех отраслей в предыдущем периоде (величины X_j^{t-1}) и конечный продукт t-го периода. Тогда очевидно, что выражение (3.8) представляет собой обычную систему n линейных уравнений с n неизвестными (ими являются уровни производства t-го периода). Решение динамической системы уравнений позволяет определить выпуск продукции в последующем периоде. Связь между периодами устанавливается через коэффициенты вложений, характеризующие фондоемкость единицы прироста продукции.

В динамической модели особую роль играют коэффициенты приростной фондоемкости $в_{ij}$. Они образуют квадратную матрицу, содержащую n^2 элементов:

$$\left[в_{ij}\right] = \begin{bmatrix} в_{11} & в_{12} & \dots & в_{1n} \\ в_{21} & в_{22} & \dots & в_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ в_{n1} & в_{n2} & \dots & в_{nn} \end{bmatrix}.$$

Каждый столбец коэффициентов характеризует для соответствующей отрасли величину и структуру фондов, необходимых для увеличения на единицу ее производственной мощности (выпуска продукции). Понятно, что даже сама по себе матрица коэффициентов приростной фондоемкости представляет немалый интерес для экономического анализа и планирования капиталовложений.

Коэффициенты приростной фондоемкости $в_{ij}$ определенным образом связаны с некоторыми ранее рассмотренными показателями и прежде всего с валовыми коэффициентами фондоемкости продукции f_{kj}. Коэффициенты f_{kj} показывают, сколько всего фондов данного вида приходится на единицу валового выпуска продукции. Коэффициенты $в_{ij}$ отражают прирост фондов на единицу прироста продукции. Если бы технический прогресс в отраслях производства отсутствовал, то на единицу прироста продукции потребовалось бы столько же новых фондов, сколько их уже занято на единицу выпускаемой продукции. Тогда коэффициенты приростной и полной фондоемкости были бы равны между собой.

Практически они различаются по величине за счет того, что новые вложения производят на современном уровне, в то время как объем и структура действующих фондов складывались за целый ряд лет и отражают в усредненном виде как современную, так и относительно устаревшую технику и технологию.

Однако связь между двумя этими группами коэффициентов безусловно существует, и это используется при разработке динамических моделей, особенно в связи с тем, что достоверные данные о полной фондоемкости продукции получить легче, чем непосредственно рассчитать коэффициенты вложений.

В рассмотренной динамической модели предполагается, что прирост продукции текущего периода обусловлен вложениями, произведенными в этом же периоде. Для сравнительно коротких периодов это предположение может оказаться нереальным, так как обычно существуют известные отставания во времени (так называемые лаги) между вложением средств в производственные фонды и приростом выпуска продукции.

Поэтому особую группу динамических моделей межотраслевого баланса составляют модели, так или иначе учитывающие лаг капитальных вложений. От рассмотренной схемы отличаются также динамические межотраслевые модели, в которых в качестве параметров выступают коэффициенты не приростной, а полной фондоемкости.

3.4. Межотраслевые региональные балансы

Неотъемлемой частью системы матричных моделей являются межотраслевые региональные балансы. Они позволяют дополнить отраслевой анализ производства и распределения продукции территориальным анализом, выступают связующим звеном между моделями бизнес-планов предприятий и межотраслевым балансом всего общественного продукта, служат основой построения межрайонного баланса производства продукции во всем народном хозяйстве.

Межотраслевая модель экономического района по своей схеме, характеристикам и математическим соотношениям принципиально не отличается от общей модели межотраслевого баланса, но имеет некоторые специфические особенности. Если в балансе всего народного хозяйства внешние связи имеют сравнительно небольшой удельный вес, то для экономического района взаимоотношения по ввозу и вывозу продукции с другими районами глубоко воздействуют на производство и распределение продукции большинства его отраслей.

Рассмотрим **общую схему межотраслевого баланса экономического района** (табл. 3.5). В таблице приведены первые три квадранта баланса, играющие основную роль в характеристике производства и распределения продукции и построении математических зависимостей модели. Схема соответствует отчетному межотраслевому балансу в стоимостном выражении.

В I квадранте межотраслевого баланса экономического района отражаются потоки промежуточной продукции, произведенной в данном районе и потребленной в этом же районе отраслями производственной сферы в качестве средств производства.

Во II квадранте дается характеристика конечной продукции района с точки зрения ее отраслевой структуры и направлений использования (потребление и накопление в самом районе и вывоз в другие районы). В составе вывозимой продукции содержатся и средства производства, которые будут потреблены в других районах в качестве текущих материальных затрат.

В III квадранте межотраслевого баланса экономического района наряду с обычной характеристикой чистой продукции

Таблица 3.5

Схема межотраслевого баланса экономического района

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли					Конечный продукт			Валовая продукция
	1	2	...	n	итого	потреб-ление	накоп-ление	вывоз	
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	Σx_{1j}	c_1	k_1	e_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	Σx_{2j}	c_2	k_2	e_2	X_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	Σx_{nj}	c_n	k_n	e_n	X_n
Итого	Σx_{j1}	Σx_{j2}	...	Σx_{jn}	$\Sigma\Sigma x_{ij}$	Σc_i	Σk_i	Σe_i	X
Ввоз									
1	u_{11}	u_{12}	...	u_{1n}	U_1				
2	u_{21}	u_{22}	...	u_{2n}	U_2				
...	...	...	...	...	...				
n	u_{n1}	u_{n2}	...	u_{nn}	U_n				
Оплата труда	V_1	V_2	...	V_n	ΣV_j				
Чистый доход	m_1	m_2	...	m_n	Σm_j				
Валовая продукция	X_1	X_2		X_n	X				

(оплата труда работников материального производства и чистый доход производственной сферы) важное место занимает отражение объема и структуры ввозимой из других районов продукции. Величина U_{ij} показывает, сколько ввозимой продукции i-й отрасли затрачено в качестве средств производства в j-й отрасли данного района.

Ввозимая продукция классифицируется по той же номенклатуре отраслей, что и продукция, производящаяся в данном районе. В III квадранте содержится только та часть ввозимой продукции, которая производительно потреблена в текущем производстве.

В район могут ввозиться и продукты конечного использования: предметы потребления и элементы капиталовложений. В модели они показываются в IV квадранте, на пересечении строк ввоза со столбцами «потребление» и «накопление».

В IV квадранте в целом отражается конечное распределение национального дохода в данном районе. Как развитие модели межотраслевого баланса экономического района разрабатываются дополнительные матрицы, дающие более глубокую и всестороннюю характеристику экономики района и его связей с другими районами. Эти матрицы либо присоединяются к основной схеме в виде добавочных блоков, либо прилагаются к схеме в виде отдельных таблиц.

Наибольшее значение имеют четыре дополнительные матрицы:

1) матрица, отражающая районную структуру ввозимой продукции; эта матрица содержит перечень всех районов-поставщиков и всех отраслей по принятой номенклатуре;
2) матрица, дающая структуру вывоза в разрезе районов-потребителей; как и первая матрица, эта дополнительная матрица важна для характеристики межрайонных связей;
3) матрица фондов, отражающая состав основных и оборотных средств, занятых в производственных отраслях данного района;
4) матрица потоков вложений, характеризующая структуру капиталовложений как по отраслям, которые их создают, так и в разрезе отраслей, в которые они направляются.

В модели межотраслевого баланса экономического района различают две группы коэффициентов прямых затрат.

Первую группу составляют коэффициенты прямых затрат собственной продукции (производимой в регионе) на единицу валового выпуска. Эти коэффициенты определяются на основе данных I квадранта межотраслевого баланса экономического района:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}.$$

Во вторую группу входят коэффициенты затрат ввозимой продукции на единицу валового выпуска районных отраслей.

Матрица этих коэффициентов (d_{ij}) рассчитывается по данным III квадранта, содержащего межотраслевые потоки ввозимой продукции:

$$d_{ij} = \frac{U_{ij}}{X_j}.$$

Схема межотраслевого баланса экономического района и формулы коэффициентов затрат позволяют составить для межотраслевой районной модели систему уравнений стоимостной структуры продукции:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_i + \sum_{i=1}^{n} d_{ij} X_i + V_j + m_j$$

и систему распределения местных отраслей:

$$X_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_i + c_i + k_i + e_i.$$

На основе матрицы коэффициентов прямых затрат a_{ij} определяются коэффициенты полных затрат A_{ij} районной продукции на единицу конечного выпуска. Эти коэффициенты позволяют рассчитывать производственную программу отраслей района по заданным величинам планового выпуска продукции в фонд потребления, накопления и межрайонных поставок:

$$X_i = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} (c_j + k_j + e_j).$$

С помощью коэффициентов полных затрат собственной продукции и коэффициентов прямых затрат ввозимой продукции исчисляются коэффициенты D_{ij} полных затрат ввозимой в район продукции i-й отрасли на единицу конечной продукции j-й отрасли района:

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{kj} \alpha_{ik}.$$

Коэффициенты D_{ij} позволяют по заданной конечной продукции района определять плановую потребность U_i во ввозе продукции i-й отрасли:

$$U_i = \sum_{k=1}^{n} D_{ij} (c_j + k_j + e_j).$$

По этой формуле рассчитывается потребность во ввозе продукции только для целей текущего производственного потребления. Ввоз из других районов продукции конечного использования определяется особым расчетом вне рамок модели. Приведенные формулы составляют основу плановой экономико-математической модели производства и распределения продукции экономического района.

Для различных возможных вариантов выпуска продукции в собственные фонды потребления и накопления и на вывоз могут быть определены соответствующие объемы производства и ввоза продукции. Для района варианты конечной продукции еще более разнообразны, чем в целом для народного хозяйства, так как шире возможности внешнего обмена.

Рассмотренная модель межотраслевого баланса экономического района характеризуется неустойчивостью коэффициентов затрат в строках тех отраслей, производственная потребность которых удовлетворяется частично за счет районного производства и частично за счет ввоза из других районов. Изменение соотношения в потреблении собственной и ввозимой продукции приводит к заметным колебаниям коэффициентов затрат.

Для устранения влияния этого фактора необходимо, чтобы в поставках одноименных средств производства доли местных отраслей и внешних поставщиков были неизменными. На практике это предположение выполняется редко. Кроме того, существующая система учета и отчетности не позволяет определить в разрезе отраслей-потребителей, какая часть потребленных средств производства произведена в данном районе и какая часть ввезена из других районов. Для плановых балансов такое разделение произвести еще сложнее.

Поэтому практически при построении региональных балансов чаще пользуются схемами, в которых продукция собственного производства и ввозимая объединяются в рамках единых производящих отраслей и исчисляется единственная матрица коэффициентов затрат.

В этом случае схема регионального баланса и система расчетов аналогичны общей модели межотраслевого баланса народного хозяйства. При объединении собственной и ввозимой продукции в I квадранте районного межотраслевого баланса облегчается получение необходимой статистической и плановой информации, повышается устойчивость коэффициентов затрат, однако сужаются аналитические возможности исследования структуры производства и использования продукции в экономическом районе.

3.5. Матричная модель на уровне предприятий

Управление производственно-финансовой деятельностью предприятия требует обработки огромного объема информации, трудоемких расчетов, согласования сотен и тысяч отчетных показателей и плановых величин. Обычные методы составления техпромфинплана, основанные фактически на ручном труде, почти неизбежно приводят к ряду отрицательных явлений: неполному использованию имеющейся информации, неточности отдельных плановых показателей и несогласованности их между собой, дублированию одних данных и недостаточной разработанности других статистических показателей. Аналогичные трудности возникают и при сведении низовых планов в вышестоящих звеньях управления и планирования.

Матричная модель производственно-финансового планирования (матричная модель промфинплана) относится к сравнительно простым и рациональным формам производственного планирования на предприятии. В основе матричных моделей промфинплана лежат те же принципы, на которых построены межотраслевые балансы, и прежде всего принцип строго взаимосвязанного в рамках единой модели рассмотрения затрат и выпуска, производства и распределения продукции. Вместе с тем матричный промфинплан имеет и ряд отличительных особенностей. В нем, естественно, не фигурируют отрасли производства, а отражается характерная для данного предприятия производственная структура: основные и вспомогательные цехи и производимая ими промежуточная и конечная продукция. На предприятиях машиностроения, приборостроения эта продукция выступает в виде узлов, отдельных деталей, готовых изделий; на предприятиях химической, легкой и других отраслей промышленности, а также сельского хозяйства – непосредственно в форме продуктов как перерабатываемых в процессе производства, так и конечных, реализуемых за пределы предприятия.

В матричных моделях промфинплана особое значение приобретает III квадрант, где отражается использование трудовых ресурсов и основных фондов предприятия, а также плановая потребность в поступающих со стороны полуфабрикатах, материалах, сырье, топливе, энергии.

Примерная схема матричного промфинплана (применительно к машиностроительному предприятию) приводится в таблице 3.6.

Матричный промфинплан включает четыре квадранта.

В I квадранте матричного промфинплана отражаются производственные связи между всеми цехами предприятия (как основными, так и вспомогательными). В основу классификации в I квадранте положен поузловой принцип, который при необходимости может сочетаться с подетальной и продуктовой классификацией (в частности, продукция выпускающих цехов представлена наименованиями готовых изделий). Как видно из схемы, принцип шахматного построения матрицы I квадранта соблюдается и в данной модели.

Во II квадранте матричного промфинплана отражены основные итоговые показатели деятельности предприятия: товарная (конечная) продукция и валовой оборот – как сумма товарной продукции и внутризаводского оборота (промежуточной продукции цехов).

Таблица 3.6

Схема матричной модели производственного планирования на предприятии

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">Затраты
Выпуск</td><td colspan="9">Основные цехи и производимая ими продукция</td><td rowspan="3">Услуги вспомогательных цехов</td><td rowspan="3">Косвенные расходы</td><td rowspan="3">Внутризаводской оборот</td><td rowspan="3">Товарная продукция</td><td rowspan="3">Валовой оборот</td></tr>
<tr><td colspan="4">цех А</td><td colspan="4">цех Б</td><td rowspan="2">…</td></tr>
<tr><td>узел 1</td><td>узел 2</td><td>…</td><td>узел n</td><td>узел 1</td><td>узел 2</td><td>…</td><td>узел n</td></tr>
<tr><td colspan="2">Основные цехи и производимая ими продукция</td><td colspan="12" rowspan="6">I квадрант</td><td colspan="2" rowspan="6">II квадрант</td></tr>
<tr><td>Цех А</td><td>узел 1
узел 2
……..
узел n</td></tr>
<tr><td>Цех Б</td><td>узел 1
узел 2
……..
узел n</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Услуги вспомогательных цехов</td></tr>
<tr><td colspan="2">Косвенные расходы</td></tr>
<tr><td colspan="2">Сырье, материалы, топливо, энергия со стороны</td><td colspan="12" rowspan="3">III квадрант</td><td colspan="2" rowspan="3">IV квадрант</td></tr>
<tr><td colspan="2">Затраты труда по профессиональным группам рабочих</td></tr>
<tr><td colspan="2">Основные фонды и производственные мощности</td></tr>
</table>

Данные **III квадранта** матричного промфинплана характеризуют производственные ресурсы предприятия. Здесь четко выделяются три группы ресурсов: ресурсы предметов труда, включающие все виды сырья, полуфабрикатов, комплектующих изделий и другие, которые предприятие получает со стороны для производственных затрат; трудовые ресурсы (по профессиональным группам рабочих); ресурсы средств труда (время работы оборудования по группам, производственные площади и т. д.). Номенклатура показателей III квадранта (особенно по предметам труда) может включать сотни и тысячи наименований.

В IV квадранте модели отражаются в основном операции по прямой реализации на сторону или передаче своим непроизводственным службам покупных материалов, изделий, полуфабрикатов.

В основе плановых расчетов лежит нормативная модель, т. е. система плановых нормативов (коэффициентов) затрат на единицу продукции (на деталь, узел, изделие и т. п.). Нормативная модель составляется по той же схеме, что и сам матричный промфинплан (табл. 3.6).

В каждом столбце нормативной модели показаны в расчете на один узел (или на другую единицу продукции) затраты деталей и узлов собственного производства, продукции и услуг вспомогательных цехов, покупных материалов, сырья, энергии, трудовые затраты, затраты времени производственного оборудования. Строки нормативной модели показывают, где используется данный узел (т. е. в какой цех поступает, на какую продукцию и в каком количестве затрачивается).

Нормативы затрат на единицу продукции по содержанию аналогичны коэффициентам прямых затрат межотраслевых балансов.

Имея нормативную модель и плановое задание на выпуск товарной продукции, можно рассчитать все показатели матричного промфинплана, т. е. получить сбалансированный план производства и распределения продукции и материального обеспечения производства.

Расчет производится на основе следующей системы уравнений:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + y_i,$$

где X_i – выпуск отдельных деталей, узлов и изделий в соответствии с номенклатурой модели;

a_{ij} – нормативы затрат промежуточной продукции;

y_i – плановые задания по выпуску отдельных видов товарной продукции.

Если для производственного процесса предприятия не характерны обратные связи и нормативная матрица I квадранта может быть представлена в треугольной форме, то расчет плана производства не требует решения системы уравнений, а выполняется элементарно путем последовательного умножения.

Исчисление и использование в матричных заводских моделях коэффициентов полных затрат целесообразно в основном для предприятий с разветвленными затратами обратной связи.

Матричный промфинплан предприятия составляется обычно в двух формах: в натуральных единицах и в ценностном (денежном) исчислении. Первые два квадранта натуральной и стоимостной моделей промфинплана отличаются по сути лишь единицами измерения, а в III квадранте стоимостной модели на месте трудовых затрат и показателей загрузки оборудования приводятся данные о заработной плате и начислениях, амортизации и финансовых результатах деятельности (прибыль или убытки). Большинство величин стоимостной модели может быть получено умножением данных натуральной модели на соответствующие цены.

Модель промфинплана производственного предприятия в натуральных единицах определяет:

- план производства деталей, узлов, изделий (в целом по предприятию и в разрезе отдельных цехов);
- план межцеховых поставок;
- план материально-технического обеспечения производства и отдельных цехов сырьем, материалами, комплектующими изделиями, топливом, энергией;
- плановую трудоемкость продукции в разрезе цехов и отдельных узлов и изделий;

- плановую загрузку производственного оборудования, площадей и плановое использование других основных средств (по каждому цеху и виду продукции).

Показатели модели промфинплана в ценностном выражении характеризуют:

- объем продукции цехов и предприятий в целом;
- величину и структуру затрат на промежуточную и конечную продукцию каждого вида;
- затраты предприятия по материально-техническому обеспечению производства;
- плановый фонд заработной платы в цеховом разрезе;
- сумму амортизации основных средств;
- прибыльность или убыточность отдельных видов продукции и всего производства в целом.

Данные матричной модели промфинплана предприятия служат основой для разработки других разделов и показателей техпромфинплана, непосредственно не входящих в рассматриваемую схему (плана по себестоимости, финансового плана и т. д.).

В целом как на предприятиях промышленности, так и сельскохозяйственных предприятиях матричная модель представляет собой рациональную форму планирования производства и распределения продукции. Модель обеспечивает внутреннюю согласованность, сбалансированность плана, облегчает проверку правильности расчетов, а также осуществление соответствующих пересчетов при изменении отдельных плановых показателей. Разработка матричного промфинплана способствует упорядочению нормативной базы на предприятии, тщательному изучению производственных связей, располагаемых ресурсов, составлению единой классификации производимой продукции и услуг.

Важным преимуществом матричных моделей является возможность полной автоматизации расчетов на базе современной вычислительной техники. Модели промфинплана в натуральном и стоимостном выражении рассчитываются на электронных вычислительных машинах на основе заданных нормативных матриц, вектора цен и плана выпуска товарной продукции.

Разработка матричных моделей на предприятиях не означает коренного изменения существующей системы планирования, но предъявляет повышенные требования к организации экономической работы. Прежде всего, необходимо тщательно обосновывать нормативы всех видов затрат и постоянно следить за возможным изменением этих нормативов. Особую трудность представляет вопрос о нормировании и распределении в модели косвенных затрат, так как в основной своей части они не пропорциональны выпуску продукции или вообще практически с ним не связаны (значительная доля административно-управленческих расходов, отопление и освещение производственных помещений и др.). В связи с этим представляет интерес исследование факторов, действительно влияющих на величину различных условно постоянных затрат, и измерение этого влияния – прямое или с помощью корреляционных методов. Отдельные виды затрат приходится указывать в модели общей суммой без распределения между производственными подразделениями и видами продукции.

Матричные промфинпланы на предприятиях, разрабатываемые по единой схеме и общепринятой классификации продукции и ресурсов, призваны стать важнейшим документом для формирования плановых моделей отраслей и экономических районов, а на их основе – межотраслевого баланса производства и распределения всего общественного продукта. Такую единую систему моделей можно пока представить лишь схематично, а ее построение потребует преодоления многочисленных методологических и практических трудностей.

☞ Основные термины и понятия

- межотраслевой баланс производства и распределения продукции;
- квадранты межотраслевого баланса;
- коэффициенты прямых и полных затрат;
- динамическая модель межотраслевого баланса;
- межотраслевой региональный баланс;
- матричная модель техпромфинплана предприятия.

Упражнения

Задача 1.

Имеются следующие данные о прямых затратах сырья и затратах труда в процессе последовательных технологических переделов:

Продукция	Хлопко-сырец	Хлопок-волокно	Пряжа	Суровье	Ткань	Одежда
Хлопок-сырец	–1	1,5				
Хлопок-волокно		–1	1,3			
Пряжа			–1	1,2		0,1
Суровье				–1	1,1	0,2
Ткань					–1	3,5
Одежда						–1
Труд. чел.-ч.	0,5	0,2	0,2	0,3	0,1	0,4

Рассчитать и построить таблицу полных затрат сырья и полных затрат труда на единицу конечного выпуска одежды.

Задача 2.

На основе отчетного межотраслевого баланса построить плановый баланс, если известно, что в плановом периоде промышленность должна выпустить конечный продукт на 70 млрд руб., сельское хозяйство – на 33 и прочие отрасли – на 15 млрд руб. Во втором варианте: промышленность – 60, сельское хозяйство – 40, прочие отрасли – 12 млрд руб.

Межотраслевой баланс за отчетный период

Отрасли	Промышленность	Сельское хозяйство	Прочие отрасли	Конечный продукт	Валовой продукт
Промышленность	12	20	10	78	120
Сельское хозяйство	36	10	20	34	100
Прочие отрасли	24	40	10	26	100
Чистый продукт	48	30	60	138	–
Валовой продукт	120	100	100	–	320

Тесты

1. Что отражает I квадрант межотраслевого баланса?
а) оплату труда по отраслям производства;
б) валовую продукцию отраслей народного хозяйства;
в) межотраслевые потоки средств производства.

2. Экономическое содержание II квадранта межотраслевого баланса:
а) чистый доход всех отраслей материального производства;
б) конечная продукция всех отраслей материального производства;
в) стоимость износа основных средств труда.

3. Что представляют собой коэффициенты полных затрат труда?
а) отчетные показатели отраслей материального производства;
б) функции конечной продукции отраслей баланса;
в) сумму затрат овеществленного и живого труда.

4. Дополнительные коэффициенты в динамической модели межотраслевого баланса:
а) коэффициенты приростной фондоемкости продукции;
б) нормы прямых затрат живого труда;
в) размеры международных поставок продукции.

5. Что представляют собой составные части матричной модели производства и распределения продукции предприятия?
а) плановые и отчетные балансы;
б) четыре взаимосвязанных квадранта;
в) систему зависимых уравнений.

Контрольные вопросы

1. Изобразите и разъясните схему межотраслевого баланса народного хозяйства.

2. Приведите основные математические зависимости межотраслевого баланса.
3. Разъясните сущность и область применения коэффициентов прямых и полных материальных затрат в межотраслевом балансе.
4. В чем смысл и область применения коэффициентов прямой и полной трудоемкости и фондоемкости продукции в межотраслевом балансе?
5. Охарактеризуйте экономико-математические основы динамической модели межотраслевого баланса.
6. Опишите и объясните схему межотраслевого баланса экономического района.
7. Охарактеризуйте балансовую экономико-математическую модель производства и распределения продукции отдельного предприятия.

Глава 4

АНАЛИЗ ПРЕДЛОЖЕНИЯ, СПРОСА, ПОТРЕБЛЕНИЯ, ЦЕН В УСЛОВИЯХ РЫНКА

4.1. Общие положения социального анализа и прогнозирования

Социальный анализ и прогнозирование занимаются исследованием многосторонних социальных процессов на всех уровнях общественной жизни. Они охватывают социальную структуру общества, образ жизни и потребности людей, социальных групп, общества в целом, социальные аспекты экономики, здравоохранения, образования, культуры. Роль социального анализа и прогнозирования резко возросла в последние годы, в условиях перехода к рыночной экономике, поскольку социальные проблемы с «остаточных» подходов времен застоя переносятся на уровень неотложных первоочередных задач всего развития общества.

Изучению и прогнозированию подвергается, прежде всего, образ жизни как широкий комплекс трудовых, бытовых, общественных условий существования индивида, коллектива, социальной группы, всего общества.

Этот комплекс включает в себя следующие основные проблемы:

- ускоренный рост производительности труда во всех отраслях производства;
- активизацию работника, его широкое участие в управлении, развитие самоуправления;
- установление полной социальной справедливости, равного права каждого на вознаграждение за труд, равных прав на удовлетворение потребностей;
- выравнивание условий труда и обеспечение высокой его содержательности;

- ликвидацию существенных различий в условиях труда и быта между городом и деревней;
- повсеместное обеспечение населения максимально широким ассортиментом продовольственных товаров;
- обеспечение полным набором высококачественных промышленных товаров;
- предоставление населению всесторонних бытовых услуг;
- совершенствование системы общественного питания;
- обеспечение каждой семьи отдельной благоустроенной квартирой или домом;
- совершенствование системы общественного транспорта и связи;
- увеличение свободного времени, повышение культуры быта и досуга;
- удовлетворение потребностей в печатной информации, в ознакомлении с новинками театрального, изобразительного и других искусств;
- обеспечение всех потребностей в здравоохранении, в медицинском обслуживании населения;
- совершенствование системы массовой физической культуры и спорта, туризма;
- повышение эффективности образования от начального до высшего;
- всестороннюю охрану материнства и детства;
- заботу о лицах пожилого возраста, трудоустройство желающих работать пенсионеров;
- эффективную продуманную охрану окружающей среды;
- ликвидацию антиобщественных явлений, искоренение преступности, наркомании, пьянства.

Исследование этих проблем, анализ их динамики практически завершается разработкой системы социальных прогнозов, включая прогнозы развития жилищно-коммунального хозяйства, розничного товарооборота, общественного питания, бытового обслуживания населения, пассажирского транспорта, связи, народного образования и подготовки кадров, здравоохранения, санаторно-курортного дела, культуры и искусства, физической культуры и спорта, туризма.

Эти прогнозы не охватывают, однако, все аспекты такой категории, как образ жизни. Образ жизни — понятие чрезвычайно широкое, многие его показатели носят только качественный характер, количественные их прогнозы невыполнимы. Более узким и доступным для математической формализации является понятие уровня жизни как степени удовлетворения всевозможных потребностей членов общества. Естественно, чтобы можно было оценивать степень удовлетворения потребностей, важно изучить и знать сами потребности как комплекс условий, необходимых биологически и социально для нормального функционирования личности. Потребности допускают несколько классификаций, но наиболее существенным является их разделение на потребности материальные и духовные. К материальным относят потребность в продуктах питания, одежде, обуви, жилье и его обстановке, в различных услугах, к духовным — потребность в содержательном труде, общественной деятельности, познании, эстетических наслаждениях, самоутверждении, приятном досуге и др.

Материальные потребности определяются сочетанием биологических и социальных факторов жизнедеятельности, потребности духовные складываются под воздействием социальной среды.

Исследовать и прогнозировать потребности довольно сложно, особенно за пределами физиологических потребностей: здесь трудно обойтись без систематического изучения общественного мнения. Но и это не всегда приносит четкую информацию, ведь многие потребности кажутся безграничными и для самих потребителей. Возникает необходимость обращаться к другим показателям. При разработке социальных прогнозов используются различные методы прогнозирования. Эффективные результаты дают опросы, причем не только экспертов, но и массовые опросы населения. Органы статистики систематически ведут обследования бюджетов десятков тысяч семей рабочих, служащих, крестьян. Практикуются и разовые массовые опросы населения.

В социальном анализе и прогнозировании находят свое применение и методы моделирования, причем для разработки как поисковых, так и нормативных прогнозов. Поисковый подход реализуется в построении и анализе уравнений трендов для спроса, потребления, других показателей; в составлении для них экономических факторных моделей. При разработке нормативных прогнозов необходимо располагать данными о рациональных нормах потребления различных товаров и услуг. Физиологически необходимые, научно обоснованные нормы потребления продуктов питания устанавливаются специалистами достаточно точно и мало меняются во времени. Гораздо труднее сформировать нормы потребления непродовольственных товаров и различных видов услуг, а еще сложнее нормировать духовные потребности.

4.2. Уравнения для спроса и потребления

Как уже отмечалось, в социально-экономическом анализе очень важным является понятие уровня жизни как степени удовлетворения всевозможных потребностей членов общества — потребностей как материальных, так и духовных. Потребности конкретизируются в потребительском спросе на всевозможные товары и услуги. Под спросом понимается обычно реальный платежеспособный спрос, т. е. такой спрос на товары и услуги, который фактически может быть реализован потребителем за счет имеющихся у него денежных средств.

Потребности и спрос находят свое конечное выражение в потреблении. **Потребление** представляет собой действительное использование потребителем всевозможных благ для удовлетворения своих нужд. Категории спроса и потребления достаточно близки, хотя между ними и существуют определенные различия. Во-первых, в потребление входят блага, распределяемые бесплатно, выдаваемые за труд в натуре (скажем, в колхозах), получаемые из личного подсобного хозяйства. К платежеспособному спросу эти блага не относятся, значит, такое различие приводит к определенному превышению потребления над спросом. Во-вторых, весь платежеспособный спрос может быть реализован в потреблении лишь при том условии, что потребитель всегда находит в продаже необходимый ему товар с желаемым качеством и свойствами в нужном ему месте и в нужное время. Известно, что эти условия в силу дефицитности ряда товаров, недостатков в работе торговой сети далеко не всегда выполняются. Это приводит к тому, что часть спроса остается неудовлетворенной и здесь спрос превышает предложение.

Изучение спроса и потребления играет существенную роль в социально-экономических исследованиях. Величина и структура спроса и потребления непосредственно характеризуют уровень жизни на данном этапе общественного развития. Исследования в этой области очень важны для планирования и прогнозирования производства и товарооборота. Нет сомнения, что производство активно влияет на спрос и потребление, но нельзя не учитывать и обратного влияния потребностей на всю систему общественного производства. Торговля должна предлагать потребителям товары такого ассортимента, количество и качество которых покрывают платежеспособный спрос; этим определяются на будущее номенклатура и объемы производства потребительских товаров.

Наиболее распространенными моделями спроса и потребления являются **уравнения регрессии**, которые отражают зависимость потребления (спроса) от времени или от влияющих на них факторов. Применение уравнений трендов не отличается от общих принципов экстраполяции. Ведущим направлением моделирования является исследование влияния различных факторов на уровень и структуру спроса и потребления. На них влияет множество факторов социально-экономического, демографического, природно-географического, психологического характера. Естественно, что сила влияния различных факторов неодинакова, кроме того, одни факторы влияют на потребление практически всех видов товаров и услуг, другие — не носят такого всеобщего характера.

К числу **важнейших факторов**, имеющих всеобъемлющее значение для формирования спроса и потребления, относятся следующие:

1. Уровень доходов потребителей. Доходы, несомненно, являются решающим фактором, который обусловливает складывающуюся величину и структуру как платежеспособного спроса, так и потребления. Наряду с текущими денежными доходами, в исследованиях нередко учитывают и такой фактор, как имеющиеся у населения сбережения.

2. Уровень и соотношение цен на товары и услуги. Структура и величина спроса и потребления во многом определяются действующими ценами, и изменение последних может заметно повлиять на общую картину потребления.

3. Количественный и половозрастной состав семей, поскольку в качестве первичной потребляющей единицы выступает, как правило, не отдельный индивидуальный потребитель, а семья.

4. Производство и состояние рынка предложения товаров. Влияние этого фактора слабее, если предложение товара повсеместно покрывает спрос, тогда фактически спрос и потребление товара совпадают. Сильнее фактор предложения действует на уровень потребления дефицитных товаров. По таким товарам динамика потребления полностью определяется динамикой предложения, а спрос может превышать потребление во много раз.

5. Потребление во многом зависит от географического размещения потребителей, условий климата, от национальных и местных традиций и обычаев, вкусов и моды. В отличие от предыдущих четырех, эта группа факторов труднее поддается выявлению, а в особенности — количественной конкретизации.

Для анализа и прогнозирования строятся однофакторные и многофакторные модели спроса и потребления. В однофакторных уравнениях в качестве независимой переменной чаще всего выступают доходы потребителей или расходная часть доходов. Наряду с текущими доходами в модели нередко включаются и сбережения, а иногда и ожидаемые будущие доходы. Функции спроса в зависимости от доходов рассчитывают обычно для отдельных групп товаров.

С изменением уровня доходов заметно меняется вся структура потребления. Наиболее общая закономерность, подмеченная еще в прошлом столетии, заключается в том, что с увеличением доходов уменьшается удельный вес расходов на питание (хотя абсолютно они обычно растут) при одновременном увеличении доли расходов на одежду, обувь, мебель, гигиену, культурно-просветительные нужды. Математическая форма функций спроса от доходов может быть различной. Расчеты по данным семейных бюджетов и торговой статистики показали, что по большинству товарных групп зависимость спроса от расходной части доходов хорошо описывает степенная зависимость вида: $y = a_0 x^{a_1}$, которая в логарифмах линейна:

$$\log y = \log a_0 + a_1 \log x.$$

Покажем несколько вычисленных по данным розничного товарооборота функций спроса от расходной части доходов по товарным группам:

мука, хлеб, хлебобулочные изделия —

$$\log y = 3{,}838 + 0{,}453 \log x;$$

мясо и мясопродукты —

$$\log y = 2{,}642 + 1{,}007 \log x;$$

одежда и белье —

$$\log y = -2{,}762 + 1{,}028 \log x;$$

ювелирные изделия —

$$\log y = -39{,}510 + 3{,}828 \log x.$$

Уже упоминалось (глава 2) о показателях эластичности в аналогичных производственных функциях. Значительный интерес представляют и коэффициенты эластичности спроса (потребления). Коэффициент эластичности отражает относительное изменение спроса (потребления) на единицу относительного изменения фактора, т. е. показывает, на сколько процентов изменяется спрос или потребление при изменении величины фактора на 1%.

Отмечалось и то, что в степенной функции коэффициенты эластичности постоянны и равны коэффициентам регрессии. Иными словами, в приведенной выше функции спроса коэффициент эластичности от дохода равен a_1. Этот коэффициент дает содержательную характеристику различных товаров. В частности, в зависимости от его величины принято делить товары на четыре группы:

- малоценные товары, для них коэффициент эластичности отрицателен, т. е. с ростом доходов спрос на них уменьшается; это отдельные продукты со сравнительно низкими потребительскими свойствами (например, маргарин в сравнении со сливочным маслом);
- товары с малой, но положительной эластичностью (меньшей единицы); в приведенном примере к этой группе относятся мука, хлеб, хлебобулочные изделия, для которых коэффициент эластичности спроса равен 0,453;
- товары со средней эластичностью, для которых коэффициент эластичности близок к единице, т. е. спрос растет

примерно такими же темпами, как доходы; в нашем примере к третьей группе следует отнести мясо и мясопродукты, а также одежду и белье;

- товары с высокой эластичностью (большей единицы); в приведенном примере это ювелирные изделия, коэффициент эластичности равен 3,828, т. е. при росте доходов на 1% спрос на них возрастет почти на 4% .

Нужно учитывать, что потребительские расходы на товары и величина коэффициента эластичности определяются не только количеством приобретаемых товаров, но и их ценами. В нашем примере положительная эластичность спроса на муку и хлебопродукты обусловлена скорее всего не увеличением их покупаемого количества с ростом доходов, а повышением качества, сортности, а значит, и цен.

В многофакторные модели потребления может включаться целый ряд факторов: уровень доходов и сбережений, размер и состав семей, миграция населения, уровень цен данных и других товаров, достигнутая величина потребительских запасов (особенно по товарам длительного пользования), сдвиги в объеме и структуре предложения, потребление из личного подсобного хозяйства и др. Практически в большинстве многофакторных моделей фигурируют два наиболее сильных по воздействию и заметно колеблющихся фактора: доходы и размер семьи. Вот для примера уравнение, полученное по данным:

$$y = 9{,}01 + 0{,}2003x_1 + 6{,}93\ x_2,$$

где y — расходы семьи на питание (шиллингов в неделю);

x_1 — общая расходная сумма от доходов (шиллингов в неделю);

x_2 — средний размер семьи.

Как видим, при росте общей суммы семейных расходов (x_1) примерно 20% этого роста уйдет на продукты питания.

Большее количество факторов входит в предложенную Д. Тобиным модель спроса на продукты питания; в нее, кроме доходов и размеров семьи, входят еще индексы цен:

$$y_t = k\ x_t^{a_1}\ x_{t-1}^{a_2}\ P_t^{a_3}\ Q_t^{a_4}\ h_t^{a_5}.$$

В этом уравнении y_t — потребление семьей продуктов питания в году t, x_2 — доход семьи в году t, x_{t-1} — доход семьи за предыдущий год, P_t — индекс цен на продукты питания в среднем за год по сравнению с предыдущим годом, Q_t — индекс цен на другие потребительские товары в среднем за год по сравнению с предыдущим годом, h_t — число членов семьи в году t.

По каждому из факторов могут определяться коэффициенты эластичности. Наряду с эластичностью от дохода представляют интерес коэффициенты эластичности спроса от цен. Такой коэффициент показывает, на сколько процентов изменяется спрос при изменении цены товара на 1%. Этот коэффициент является, как правило, величиной отрицательной: с повышением цены товара спрос на него уменьшается, а с понижением цены — растет.

Теоретически спрос на какой-либо товар зависит не только от цены этого товара, но и от всех других цен. Для мало связанных друг с другом товаров эта зависимость может быть весьма слабой. Вряд ли кто-нибудь возьмется исследовать зависимость спроса на хлеб от изменения цен на автомобили. Иное дело, когда речь идет о товарах взаимозаменяемых или взаимодополняющих друг друга. Если, например, повышаются цены на свинину, то можно ожидать заметного увеличения спроса на говядину. Приведем для примера полученное в одном из исследований уравнение спроса на говядину:

$$y = 3{,}4892 - 0{,}0899\,p_1 + 0{,}0637\,p_2 + 0{,}0187\,I,$$

где p_1 — цена говядины,

p_2 — цена свинины,

I — индекс доходов потребителей.

Говядина и свинина — взаимозаменяемые продукты. Бензин и автомобили являются примером взаимодополняющих товаров; есть убедительная статистика о том, как в ряде стран, в частности в США, при росте цен на бензин заметно сокращался спрос на автомобили.

Коэффициент эластичности спроса на какой-либо товар от цены другого товара называют **коэффициентом перекрестной эластичности** спроса. Из предыдущих рассуждений ясно, что для взаимозаменяемых товаров коэффициент перекрестной эластичности является положительной величиной (с ростом цены одного из взаимозаменяемых товаров растет спрос на другой товар), а для товаров взаимодополняющих этот коэффициент отрицателен.

Своеобразным показателем является коэффициент эластичности спроса на те или иные группы товаров от общего объема товарооборота. Зная такие коэффициенты, можно по ожидаемым изменениям общего товарооборота прогнозировать товарооборот по группам товаров.

Спрос и потребление моделируют, прогнозируют не только по различным вещественным товарам, но также по всевозможным услугам и некоторым духовным потребностям. Можно привести несколько примеров проводившихся в нашей стране исследований. Общий объем бытовых услуг по районам области изучался в зависимости от величины дохода на одного жителя, доли населения в возрасте от 19 до 40 лет и доли служащих в общем составе населения. Производственная функция объема услуг химчистки в стране включала в качестве факторов производственную мощность предприятий химчистки и численность работающих на этих предприятиях. Для прогноза розничного товарооборота предприятий общественного питания независимыми переменными брались реальные доходы населения, число мест предприятий общественного питания на 1 тыс. жителей, индексы цен на продукцию предприятий общественного питания. Объем услуг городского пассажирского транспорта прогнозировался в зависимости от изменения численности населения и реальных его доходов. Выпуск специалистов из высшей школы ставился в зависимость от числа учащихся общеобразовательных дневных школ, числа окончивших ПТУ и ГПТУ, среднегодовой численности рабочих и служащих. Как видим, выбор факторов в моделях настолько многообразен, что какие-либо упорядоченные рекомендации здесь исключаются.

4.3. Взаимосвязь предложения, спроса, рыночных цен

В условиях рынка цены большинства товаров и услуг не планируются «сверху», не регулируются государством, а свободно устанавливаются и изменяются на самом рынке. Но это не значит, что величина свободно определяемых цен совершенно произвольна, не зависит ни от каких факторов. Основными факторами, управляющими движением цен на рынке, являются спрос и предложение товаров.

Допустим вначале, что спрос и предложение данного товара являются функциями его цены. Естественно предположить, что спрос есть убывающая, а предложение — возрастающая функция от цены. Иными словами, спрос с ростом цены падает, а с уменьшением цены — растет; предложение, наоборот, возрастает с увеличением цены и снижается с ее уменьшением.

Предположим, рыночная экономика функционирует в условиях так называемой **совершенной конкуренции**: производителей товара много, а производит каждый не слишком много, значит, монополизировать цену никто не может; потребителей тоже много, диктовать цену никому не удастся. Сначала цена устанавливалась довольно высокая. Что будет происходить дальше? При высокой цене предложение может превышать спрос, цена станет падать, в связи с чем предложение будет уменьшаться, а спрос расти — процесс этот в условиях совершенной конкуренции будет длиться до той поры, когда спрос и предложение сравняются при некоторой равновесной цене. Вот эта цена нас и интересует с научно-методической точки зрения.

Построим график и математическую модель для описанной процедуры образования равновесных цен. Обозначим величину спроса через D, объем предложения — через S, цену — через P.

На графике (рис. 4.1) представлены функции предложения S и спроса D в зависимости от цены $\overline{P}$. Точке равенства спроса и предложения x_0 соответствует равновесная цена $\overline{P}$.

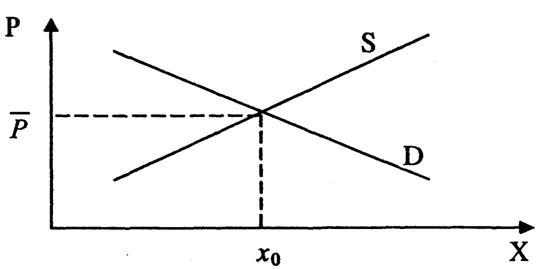


Рис. 4.1. Функции спроса и предложения

Получив на основе обработки статистических данных уравнения зависимости предложения S и спроса D от цены P, т. е. функции $S(P)$ и $D(P)$, можно приравнять обе эти функции (положив равными предложение и спрос) и получить уровень цены равновесия $\bar{P}$:

$$S(\bar{P}) = D(\bar{P}).$$

Покажем это на примере рынка пшеницы США. По статистике, предложение пшеницы на 1991 г. соответствовало уравнению:

$$S(P) = 1\,800 + 240P,$$

где величина предложения $S(P)$ — в миллионах бушелей, по цене P — в долларах за бушель.

Функция спроса на 1991 г. определена уравнением:

$$D(P) = 3\,550 - 266\,P.$$

Приравняем предложение к спросу:

$$1\,800 + 240\bar{P} = 3\,550 - 266\,\bar{P}.$$

Отсюда получим равновесную цену

$$\bar{P} = 3,46 \text{ долл.}$$

Отметим, что в действительности цена пшеницы в США в 1991 г. составила 3,7 долл., что не совпадает с равновесной ценой, но отличается ненамного. Процесс формирования равновесной цены можно проследить с помощью так называемой паутинообразной модели. Будем предполагать, что в некоторый отрезок времени t спрос есть функция цены этого же периода, а предложение — функция цены предыдущего периода t–1, то есть

$$D_t = D(P_t),$$

$$S_t = S(P_{t-1}).$$

При равенстве спроса и предложения в период t имеем уравнение:

$$D_t = D(P_t) = S(P_{t-1}) = S_t.$$

Совпадение спроса и предложения приводит к появлению равновесной цены, при которой

$$D(\bar{P}) = S(\bar{P}).$$

Модель функционирует следующим образом. При цене P_0 некоторого начального для расчета периода определяется объем предложения как $S_1 = S(P_0)$. Тогда из уравнения $D(P_1) = S_1$ можно определить величину P_1. Затем следуют расчеты $S_2 = S(P_1)$ и $D(P_2) = S_2$ для нахождения P_2 и т. д.

Рассмотрим пример, предположив, что спрос и предложение являются линейными функциями цен:

$$D_t = a_0 + a_1 P_t;$$

$$S_t = b_0 + b_1 P_{t-1};$$

$$S_t = D_t.$$

Поскольку функция спроса — убывающая, то $a_1 < 0$; функция предложения — возрастающая, значит $b_1 > 0$.

Из приведенных соотношений имеем для равновесной цены p:

$$D(\overline{P}) = a_0 + a_1, \quad \overline{p} = b_0 + b_1 \overline{p} = S(\overline{P}),$$

$$\overline{p} = \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1}.$$

Знаменатель этого выражения положителен (так как $b_1 > 0$ и $a_1 < 0$), значит, для положительности равновесной цены необходимо, чтобы $a_0 > b_0$.

Приведем численный пример постепенного итерационного расчета цены равновесия. Допустим, что определены следующие уравнения зависимости предложения и спроса от цен:

$$S_t = 15{,}0 + 0{,}1\ P_{t-1},$$

$$D_t = 18{,}6 - 0{,}2\ P_t.$$

В начальный период было $P_0 = 8$.

Рассчитываем: $S_1 = 15 + 0{,}1 \times 8 = 15{,}8$.

Приравниваем S_1 и D_1: $15{,}8 = 18{,}6 - 0{,}2\ P_1$.

Отсюда имеем $P_1 = 14$.

На следующей итерации определяем S_2:

$S_2 = 15 + 0{,}1 \times 14 = 16{,}4$.

Приравниваем S_2 и D_2: $16{,}4 = 18{,}6 - 0{,}2\ P_2$.

Находим: $P_2 = 11$.

С помощью аналогичных расчетов получим:

$P_3 = 12{,}5$; $P_4 = 11{,}75$; $P_5 = 12{,}125$; $P_6 = 12$; $P_7 = 12$.

Дальнейшие итерации излишни: цена будет неизменно оставаться на равновесном уровне, т. е. 12.

Эта процедура интересна методически, но для практического расчета проще использовать приведенную выше формулу:

$$\bar{p} = \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1} = \frac{18{,}6 - 15}{0{,}1 + 0{,}2} = 12.$$

Предлагались различные изменения рассмотренной паутинообразной модели. В частности, можно предположить, что в период t от цены предыдущего периода зависит не предложение, а спрос, следовательно:

$$D_t = D(P_{t-1}),$$

$$S_t = S(P_t).$$

Нетрудно получить равновесную цену и по этой модели. В моделях, описанных выше, цена являлась независимой переменной, то есть в математическом понимании случайной величиной, а зависимыми переменными выступали спрос и предложение. Более соответствующим действительности можно считать подход, при котором цена не рассматривается как независимая случайная величина, а определяется как функция некоторых факторов, прежде всего предложения S данного товара. Имеем функции:

$$P_d = P_d(S);$$

$$P_s = P_s(S).$$

Здесь P_d – это цена, которую готов платить потребитель товара. Чем выше предложение, тем эта цена ниже, т. е. P_d есть убывающая функция. Величина P_s – это цена, которую требует производитель товара. С ростом предложения эта цена растет, так как приходится изготовлять продукцию и в менее благоприятных условиях, значит, P_s – это функция возрастающая. Можно считать, что когда предлагаемая покупателем **цена P_d оказывается равной** требуемой продавцом **цене P_s**, наступает равновесие — предложение не имеет тенденции ни расти, ни снижаться, и цена стабилизируется. Но возникает вопрос: чем же определяются размеры цен, предлагаемых как производителями товара, так и его потребителями?

Производитель товара стремится продать его на рынке по такой цене, которая полностью возместила бы все затраты производства и принесла бы еще некоторую прибыль.

Производитель не обанкротится, даже если цена сравнялась с затратами, но если она ниже издержек – это уже прямые убытки. Итак, производитель в вопросах ценообразования ориентируется на свои издержки. Как же меняются издержки с увеличением производства товара? Отметим, что нас будут интересовать не общие суммы затрат и не средние затраты на единицу продукции, а предельные издержки, т. е. дополнительные затраты на дополнительную, «последнюю» единицу производимого товара.

Если товара производится мало, то издержки сравнительно высоки в связи с невысокой эффективностью индивидуального или мелкосерийного производства. С ростом выпуска начинают сказываться преимущества крупносерийного и массового производства, и величина предельных издержек будет снижаться. Но это лишь до некоторого минимума, после чего с ростом объема выпуска предельные издержки постоянно растут. Ведь почти для любого продукта оказывается, что для дальнейшего расширения его производства придется применять уже не самые прогрессивные технологии, менее производительное оборудование и другие средства труда, более дорогостоящие и не очень эффективные виды сырья, материалов, менее квалифицированные рабочие руки и т. д. Особенно это заметно применительно к добывающей промышленности, сельскому хозяйству: рост добычи топлива, металлических руд требует перехода к шахтам, штрекам с большей глубиной залегания и падающим качеством сырья, со значительным расстоянием от потребителей и сложной, дорогой транспортировкой; в сельском хозяйстве издержки растут из-за необходимости выращивать нужные культуры на все более отдаленных и менее плодородных землях, растущей нехватки техники, рабочих рук, удобрений. Итак, при большом выпуске какого-то продукта каждая последующая его единица обходится все дороже и дороже.

По каждому виду продукции можно для масштабов страны, региона, отрасли обработать статистические данные и получить корреляционное уравнение зависимости общих издержек производства этого продукта от объема x его производства, т. е. функцию $c = f(x)$. Отсюда нетрудно определить и кривую предельных издержек как производную

$$\frac{dc}{dx}.$$

Если, например функция общих издержек определилась как парабола $c = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, то функция предельных издержек будет равна:

$$\frac{dc}{dx} = a_1 + 2 a_2 x \text{, т. е. окажется линейной.}$$

Описанная зависимость предельных издержек от объема производства, а значит и предложения на рынке определенного товара, может быть представлена на графике кривой, изображенной на рисунке 4.2. Как видим, с ростом объема продукции x предельные издержки в рублях Р вначале могут снижаться, но затем постоянно растут.

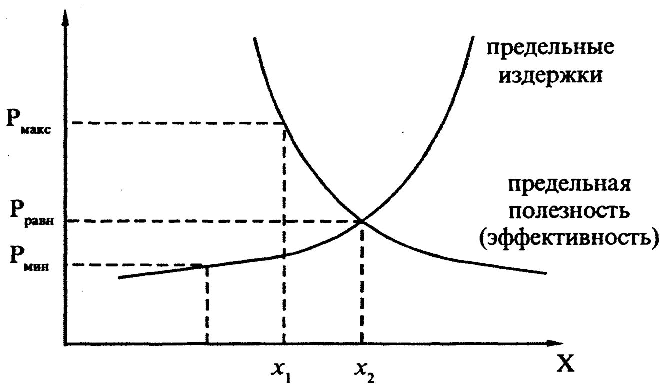


Рис. 4.2. График формирования рыночных цен

Потребительская оценка товара определяется его полезностью для потребителя. При этом и здесь ориентироваться нужно на предельную полезность, а она с ростом количества товара имеет тенденцию к снижению. Ведь для каждого потребителя очень велика полезность приобретаемых первых единиц продуктов питания, одежды, обуви, полезность вторых единиц уже меньше, каждой последующей — еще ниже (видимо, для многих из нас полезность, скажем, пятой или шестой пары обуви приближается к нулю). На рынке цену определяет, конечно, не один покупатель, но и для массы потребителей образуется некоторая кривая предельной полезности (в рублях), как показано на рисунке 4.2.

По законам рынка будут определяться цены не только предметов потребления, но и средств производства. Их отдачу, производительность мы называем обычно не полезностью, а эффективностью.

Но и предельная эффективность средств производства, как и предельная полезность предметов потребления, с увеличением их объема снижается. Скажем, в растениеводстве очень велика эффективность первых вносимых в почву единиц влаги или удобрений, но предельная отдача сильно падает или даже становится отрицательной при чрезмерном орошении или удобрении почвы.

Кривую предельной эффективности средства производства (типа кривой на рис. 4.2) в принципе можно получить в результате экономико-статистического исследования производства. Уже описаны производственные функции, представляющие собой математическое уравнение зависимости результатов производства от воздействующих факторов, в частности, объемов ресурсов. На основе производственной функции определяются показатели предельной производительности труда, предельной фондоотдачи, предельной эффективности других ресурсов.

По сравнению с предельной эффективностью исследование кривых предельной полезности предметов потребления гораздо сложнее. Ведь кривая общей, «коллективной» предельной полезности для покупателей на рынке складывается из множества индивидуальных, «личных» кривых предельной полезности, а они весьма субъективны и с трудом поддаются формализации. Выше упоминалось, например, о полезности для человека той или иной дополнительной пары обуви: для какой-то пары полезность, конечно, очень близка к нулю, но вот для какой именно – это сильно зависит от того, определяется ли предельная полезность обуви для пожилого пенсионера или для молодой женщины.

Однако имеются определенные подходы и к построению кривых предельной полезности. В экономико-статистических разработках известно и описано в начале этой главы построение и анализ функции спроса и потребления. В общем случае прослеживается зависимость уровня и структуры спроса и потребления от ряда воздействующих на них факторов: доходов потребления, уровня и соотношения цен на товары и услуги, количественного и половозрастного состава семей, состояния рынка товара и др. Выделим зависимость спроса на товар от его цены.

Если имеются (обычно многолетние) статистические данные о величинах спроса (или потребления) товара и его цене, то можно получить важные количественные характеристики, в частности, коэффициент эластичности спроса от цены.

Если для товара известна функция, описывающая зависимость величины спроса x от цены товара p, т. е. функция спроса $x = f(p)$, то от нее легко перейти к функции и кривой убывающей предельной полезности типа кривой на рисунке 4.2. Отметим, что для товаров с неэластичным спросом эта кривая будет ближе к вертикальной линии, а для товаров эластичного спроса — к горизонтальной.

4.4. Поверхности безразличия

Сначала будем анализировать потребление только двух видов продукции: потребительских благ А и Б. Продукты эти взаимозаменяемы. Можно допустить существование равноценных, или безразличных, наборов этих продуктов — в одном наборе столько-то продукта А и столько-то продукта Б, в другом наборе продукта А больше, а блага Б — меньше, но так, что первый и второй наборы имеют для потребителя одинаковую общую полезность. Построим так называемые **кривые безразличия**.

На рисунке 4.3 **кривая I** — это геометрическое место точек, координаты которых $X_А$ и $X_Б$ характеризуют наборы продуктов А и Б, имеющие одинаковую общую полезность, т. е. безразличные для потребителя. В точке К продукта А меньше, чем продукта Б, в точке М — наоборот, но оба набора равноценны,

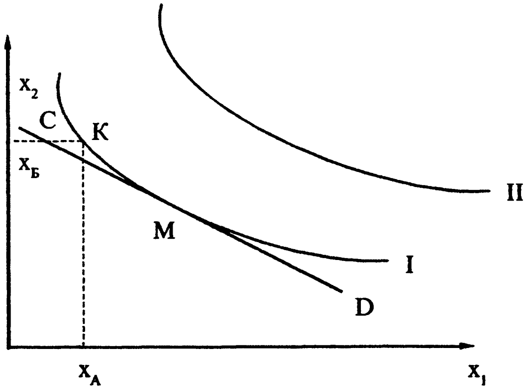


Рис. 4.3. Кривые безразличия

т. к. лежат на одной кривой безразличия. **Кривая безразличия II** содержит множество других наборов продуктов А и Б, тоже равноценных между собой, но имеющих более высокую полезность, чем наборы кривой I. Ясно, что можно построить множество кривых безразличия типа I и II для разных величин общих полезностей наборов. Экономико-математический анализ доказывает, что каждая из этих кривых выпукла по отношению к началу координат и пересекаться между собой они не могут (в случае пересечения кривых один и тот же набор продуктов оценивался бы разными полезностями).

Теоретически, конечно, для потребителя кривая безразличия тем более предпочтительна, чем дальше от начала координат она расположена, — выше будет ее общая полезность. Но практически спрос на товары зависит от их цен и от платежеспособности потребителя. Допустим, что нам известны цены продуктов А и Б — это p_1 и p_2 и величина доходов F потребителя. Тогда его платежеспособный спрос будет на графике представлен прямой с уравнением:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = \mathrm{F}. \qquad (4.1)$$

Это прямая CD на рис. 4.3, координаты ее точек характеризуют наборы продуктов А и Б, т. е. величины x_1 и x_2, приобрести которые можно при доходах F. Какой же из многих этих наборов выберет потребитель? Он попытается определить набор, более других для него полезный. Это будет **набор в точке М** — здесь прямая CD касается наиболее отдаленной от начала координат кривой безразличия, т. е. кривой с наибольшей при заданных доходах и ценах величиной общей полезности набора.

Точка М есть точка равновесия спроса, предложения, цен для случая потребления двух видов продукции. Из уравнения (4.1) легко определить x_2 как функцию x_1:

$$x_2 = \frac{F}{P_2} - \frac{P_1}{P_2} x_1.$$

Найдем производную этой функции:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{P_1}{P_2}. \tag{4.2}$$

По своему экономическому содержанию $\frac{dx_2}{dx_1}$ есть предельная норма замещения продукта А продуктом Б. Она равна обратному соотношению их цен: если цена продукта А в два раза выше цены продукта Б, то сокращение в наборе на одну единицу продукта А компенсируется добавлением двух единиц продукта Б.

Точка М принадлежит также кривой безразличия, где набор оценивается его полезностью. Норма замещения определяется соотношением в точке М предельных полезностей двух наших продуктов — предельной полезности U_1 продукта А и предельной полезности U_2 продукта Б:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{U_1}{U_2}. \tag{4.3}$$

Из сопоставления (4.2) и (4.3) получим:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{U_1}{U_2} \text{ и } \frac{U_1}{P_1} = \frac{U_2}{P_2}. \tag{4.4}$$

Итак, в условиях равновесия отношение между предельными полезностями двух продуктов равно соответственно отношению между их ценами. Предельная полезность блага, деленная на его цену, носит название взвешенной предельной полезности. Таким образом, выражение (4.4) показывает, что при ориентации потребителя на максимум его благосостояния взвешенные предельные полезности различных продуктов становятся равными между собой.

Переход от анализа спроса, предложения, цены одного продукта к кривым безразличия для двух продуктов вносит существенное изменение в содержание требуемой информации. При одном продукте для определения равновесной цены нужно было иметь кривую предельной полезности, а значит, располагать данными для достаточно точного исчисления абсолютных величин предельной полезности. Но уже отмечалось, что предельная полезность — понятие весьма субъективное и исчислять ее для массы потребителей трудно (многие авторы утверждают еще более строго — количественный расчет предельной полезности невозможен). Для цен на основе кривых безразличия фактор общей и предельной полезностей не исчезает, но очень полезно с практической точки зрения модифицируется: в выражениях (4.3) и (4.4) нужно знать лишь соотношение предельных полезностей, трудно получаемыми данными об абсолютных их величинах можно и не располагать.

Кривые безразличия позволяют анализировать и влияние на спрос изменений цен. Допустим, цена второго продукта P_2 остается неизменной, а цена первого принимала три значения:

$$P_{A1} > P_{A2} > P_{A3}.$$

Доходы F не менялись. Тогда уравнению (4.1) на графике будут сопутствовать три прямые: NP_1 — для цены P_{11}, NP_2 — для цены P_{12} и NP_3 — для цены P_{13} (рис. 4.4). Все эти прямые выходят из точки N – это количество продукта Б, которое купит потребитель при цене P_2, если истратит на этот продукт весь доход. Если он будет покупать только продукт А, то точки P_1, P_2, P_3 покажут его количество при ценах:

$$P_{11} > P_{12} > P_{13}.$$

Но потребитель максимизирует благосостояние, покупая оба продукта с наибольшей общей полезностью. Ее характеризуют кривые безразличия, показанные на рисунке 4.4. Значит, при цене P_{11} объемы покупок определяются точкой M_1 при цене P_{12} — точкой M_2, при цене P_{13} — точкой M_3. Соединяя эти точки кривой, начинающейся в точке N, получим кривую ND — это кривая возрастания спроса на товар A в зависимости от снижения его цены.

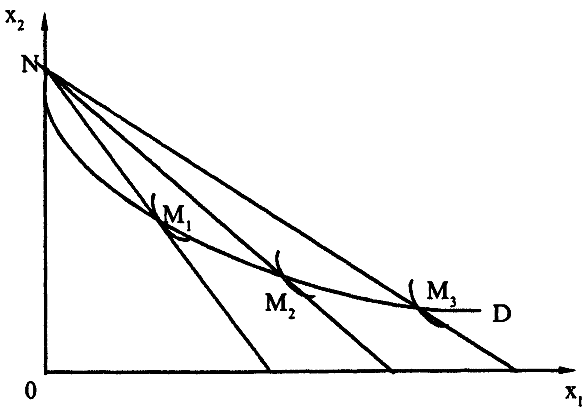


Рис. 4.4. Кривые безразличия

Рассмотренные кривые безразличия строятся лишь для двух товаров, что может рассматриваться как нереальность – ведь предложение, спрос, цены охватывают множество различных товаров. Но совсем отбрасывать из практики применения двухпродуктовые функции безразличия не следует – можно ведь анализировать спрос по укрупненным группам товаров, например, продовольственным и непродовольственным товарам. Однако более общий подход к реальности требует, конечно, исследовать спрос и предложение для множества товаров и услуг.

Для n товаров и услуг будет определяться поверхность безразличия. Ее характеризует функция $U(x) = K$, для разных постоянных K имеем семейство кривых безразличия. Функция $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – это целевая функция потребления для n видов товаров и услуг. Для каждого значения $U(x) = K$ определяется поверхность равноценных, безразличных наборов товаров, т. е. поверхность безразличия. Таких поверхностей, как и кривых безразличия, будет множество для разных значений K.

Будем считать известными цены всех товаров $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и общий объем F доходов потребителей, предназначаемых для приобретения этих товаров. Тогда можно сформировать общую модель:

максимизировать: $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

при условии: $\mathbf{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n \leq F}$. (4.5)

Это задача линейного программирования с одним ограничением. Поэтому в двойственной задаче будет только одна переменная λ — это двойственная оценка доходов потребителей, она покажет на сколько единиц возрастает целевая функция потребления, т. е. общая полезность всей массы товаров при увеличении доходов на одну единицу.

Экономико-математическое исследование задачи (4.5) и двойственной задачи приводит к выводу, что в приведенной модели взвешенные предельные полезности всех товаров равны между собой и равны оценке доходов λ, т. е. справедливо соотношение:

$$\frac{U(x_1)}{P_1} = \frac{U(x_2)}{P_2} = \ldots = \frac{U(x_n)}{P_n} = \lambda. \qquad (4.6)$$

Отсюда можно вывести и другую форму зависимости – соотношение предельных полезностей различных продуктов равно соотношению их цен:

$$U(x_1) : U(x_2) : \ldots : U(x_n) = P_1 : P_2 : \ldots : P_n. \qquad (4.7)$$

И здесь, как и в случае двух продуктов, выявление закономерностей для равновесия спроса, предложения, цен требует знания не абсолютных величин предельной полезности, а лишь соотношения последних.

Но если речь у нас идет об определении равновесных цен, то модель (4.5) может показаться для этого непригодной: ведь в ней цены предполагаются заданными, известными.

Однако из модели (4.5), соотношений (4.6) можно вывести систему уравнений, где цены являются неизвестными величинами. Будем считать заданным вектор x^0 — набор предлагаемых на рынке количеств товаров $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$. Возникает вопрос: при каких ценах спрос на эти товары уравновесится с их предложением? Из выражений (4.5) и (4.6) выводится следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} &U(x_1^0) = \lambda p_1; \\ &U(x_2^0) = \lambda p_2; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &U(x_n^0) = \lambda p_n; \\ &p_1 x_1^0 + p_2 x_2^0 + \dots + p_n x_n^0 = F. \end{aligned} \tag{4.8}$$

В системе (4.8) содержится $(n+1)$ уравнение и $(n+1)$ неизвестная – это цены $p_1, p_2, \dots, p_n$ и оценка l. При выполнении некоторых формально-математических требований система имеет решение и дает равновесные цены всех товаров.

Самой большой трудностью для реализации и практического использования зависимостей (4.5), (4.6), (4.8) является определение конкретного вида целевой функции потребления, позволяющей оценивать максимально возможный уровень материального благосостояния. Задача сложная, но не безнадежная. Функцию предпочтения можно построить на основе изучения реального поведения массы потребителей.

Считается, что при данных ценах и доходах набор потребительских благ, приобретаемый всей массой потребителей, является наиболее предпочтительным, т. е. максимизирует для потребителей общую полезность всех благ. Это предположение позволяет в принципе вывести функцию общественного предпочтения из функций спроса, выражающих статистическую зависимость спроса и потребления от доходов и цен.

Потребительские предпочтения могут выявляться и на основе обработки данных семейных бюджетов. Наконец, в построении целевой функции потребления может сыграть свою роль нормативный метод, позволяющий формировать наборы потребительских благ, наиболее рациональные с точки зрения научно обоснованных норм потребления. Плодотворным окажется, по-видимому, и сочетание статистического и нормативного подходов.

4.5. Нормативные модели потребления

Анализ проблем потребления был бы не полным, если бы все выводы, рекомендации, прогнозы в этой области опирались только на статистические данные о фактических объемах и структуре спроса и потребления. Фактическое потребление не всегда и не во всем является рациональным, соответствующим научно обоснованным рекомендациям (примерами могут служить потребление табака, злоупотребление спиртными напитками и т. д.).

Кроме того, из статистики могут выпасть некоторые нетоварно распределяемые блага, возникающие новые потребности, переоценка предпочтений. Поэтому наряду со статистическими, поисковыми моделями разрабатываются нормативные модели потребления, основанные на научных рекомендациях.

Основными представителями нормативных моделей потребления могут выступать нормативные бюджеты семей. **Нормативный бюджет** – это комплекс товаров и услуг, составленный с ориентацией на определенный размер, состав и материальную обеспеченность семей. Полный нормативный бюджет охватывает продовольственные товары, непродовольственные промышленные товары и услуги. Составляются также нормативные бюджеты, включающие только продукты питания.

Различают **нормативные бюджеты трех основных видов**: прожиточный минимум, бюджет достатка и рациональный бюджет.

Прожиточный минимум – это нормативный бюджет с минимальной суммой жизненных благ, необходимых для существования взрослого рабочего и его семьи. Это нижняя нормативная граница потребления, обеспечивающая воспроизводство рабочей силы. **Бюджет достатка** характеризует более высокий уровень потребления, соответствующий в данных конкретно-исторических условиях понятию достатка в семье. **Рациональный бюджет** представляет собой комплекс товаров и услуг, обеспечивающий практически полное удовлетворение различных, научно обоснованных потребностей человека. Это верхняя нормативная граница потребления, дающая возможность полного и всестороннего физического и духовного развития членов общества.

Расчеты нормативных бюджетов систематически ведутся во многих странах. К сожалению, в нашей стране этой работе в годы застоя не уделялось должного внимания, как и многим другим социальным проблемам. А ведь для правильной ориентации всех социально-экономических процессов очень важно располагать нормативной информацией как о прожиточном минимуме, так и о рациональном бюджете.

Наиболее обоснованными в настоящее время являются нормативные расчеты бюджетов по продуктам питания. Это связано с тем, что в силу ведущей роли продовольственных товаров в общем бюджете семей потребление этой группы товаров исследовалось более широко и тщательно. Имеется еще одно важное обстоятельство, повышающее обоснованность нормативных расчетов по питанию: наука устанавливает оптимальные физиологические нормы различных питательных веществ, необходимых человеческому организму.

Модель определения набора продуктов, содержащего нормативные количества питательных веществ, может быть представлена в форме задачи линейного программирования.

Составим список продуктов питания, которые могут войти в нормативный набор; предположим, число этих продуктов равно n. Составим также перечень питательных веществ, необходимых организму; это калории, белки, углеводы, жиры, витамины, аминокислоты общим количеством m веществ. В модели предполагаются известными величины: a_{ij} — количество i-го питательного вещества, содержащееся в единице j-го продукта питания; $в_i$ — физиологическая норма потребления j-го питательного вещества; p_j — цена единицы j-го продукта питания.

Неизвестными величинами x_j являются количества различных продуктов питания в нормативном наборе. Задача состоит в определении такого набора продуктов, который содержит в необходимых количествах все виды питательных веществ и имеет при этом минимальную общую цену. При построении модели не имеет принципиального значения, ведется ли расчет на одного человека или на семью, на сутки или на месяц, год и т. п.

Математически модель формулируется так:

минимизировать: $p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$

при условиях:

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \ge b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \ge b_m \\
x_j \ge 0.
\end{gathered}$$

Полученный в результате решения этой задачи набор продуктов будет удовлетворять всем требованиям по содержанию питательных веществ и иметь минимальную стоимость, но скорее всего будет обладать и существенным недостатком – ограниченностью, «бедностью» набора, так как основное преимущество в оптимальном решении получит небольшое число питательных и недорогих продуктов.

Поэтому предпринимались усилия по совершенствованию приведенной модели с тем, чтобы обеспечить в наборе достаточное разнообразие продуктов. Один из простых способов заключается в том, что по ряду продуктов, которые фактически обычно присутствуют в рационах питания (например, мясо, рыба и т. п.), в условия задачи вводятся требования минимального их содержания в нормативном наборе.

Если по j-му продукту нижняя граница нормируемого потребления определяется величиной q_j, то в условия приведенной модели добавляются ограничения: $x_j \geq q_j$.

С помощью таких условий можно обеспечить любое разнообразие набора, но практически стремятся вводить не слишком много таких ограничений, иначе искомый набор продуктов окажется, по существу, заранее предрешенным. Кроме того, отметим, что получаемая «диета», поскольку она имеет минимальную стоимость, пригодна, в основном, для определения прожиточного минимума, а никак не рационального бюджета. По всем этим причинам модель играет лишь вспомогательную роль в расчетах нормативных бюджетов.

В полный нормативный бюджет, помимо продуктов питания, входят также промышленные товары и услуги. Нормативные расчеты потребления непродовольственных товаров осложняются тем, что для этих товаров отсутствуют нормы, аналогичные физиологическим научным нормам по питанию. Расчеты по непродовольственным группам товаров ведутся исходя из рациональных нормативных оценок потребления, определяемых, в частности, экспертными методами. Используют также статистические данные о фактически сложившемся потреблении этих товаров, в том числе (для рациональных бюджетов) о структуре потребления в хорошо обеспеченных семьях.

Представляет интерес разработка нормативных бюджетов для семей различного численного и половозрастного состава.

Расчет семейных бюджетов позволяет учесть нормы как индивидуального, так и общественного потребления. Если определены нормы c_{ij} индивидуального потребления (в натуре) i-го товара j-й половозрастной группой, нормы q_i затрат на общественное потребление товаров или услуг i-го вида, известны цены p_i товаров (услуг) по видам, то расходная часть Н нормативного бюджета семьи определенной численности и половозрастного состава формируется следующим образом:

$$\text{Н} = \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} c_{ij} p_{\text{i}} + \sum_{i}^{n} q_{\text{i}}.$$

Основные термины и понятия

- методы социального анализа и прогнозирования;
- уравнение для спроса и потребления;
- показатели эластичности спроса;
- коэффициент эластичности спроса;
- кривые и поверхности безразличия;
- нормативные модели потребления;
- нормативные бюджеты семей.

Упражнения

Задача 1.

Имеются следующие данные об объеме спроса на товар, в зависимости от его цены для трех потребителей (таблица).

На основе этих данных выполните следующие задания:

а) нарисуйте кривые спроса для потребителей X, Y, Z;

б) нарисуйте кривые рыночного спроса в зависимости от цен;

в) предположим, что спрос на этот товар со стороны потребителей X и Y удвоится, но наполовину сократится со стороны Z. Соответственно измените кривые спроса X, Y, Z и кривую рыночного спроса.

Потребитель X		Потребитель Y		Потребитель Z	
Цена (руб.)	Объем спроса (ед.)	Цена (руб.)	Объем спроса (ед.)	Цена (руб.)	Объем спроса (ед.)
10	0	10	0	10	0
9	0	9	3	9	1
8	0	8	5	8	5
7	1	7	7	7	8
6	2	6	9	6	11
5	4	5	12	5	12
4	6	4	15	4	15
3	10	3	18	3	18
2	15	2	21	2	20
1	21	1	24	1	23
0	25	0	25	0	25

Задача 2.

На рынке электродрелей зафиксированы следующие зависимости:

Объем (тыс. шт.)	Цена (руб.)						
	10	20	30	40	50	60	70
Спроса	32	28	24	20	16	12	8
Предложения	4	24	10	13	16	19	22

Необходимо ответить на вопросы:

1. Какова равновесная цена на рынке электродрелей?

2. Каков равновесный объем купли/продажи электродрелей?

3. Если цена электродрели составит 30 руб., какова величина дефицита на этом рынке?

4. Если цена электродрели повысится до 60 руб., какова величина избытка на этом рынке?

Тесты

1. Перечень факторов, влияющих на величину спроса и потребления:

а) доходы потребителей, цены на товары и услуги, величина семей;

б) величины экспорта и импорта различных видов продукции;

в) природно-географические факторы.

2. Что характеризуют коэффициенты эластичности спроса от доходов потребителей?

а) влияние доходов на жизненный уровень населения;
б) относительное изменение спроса на единицу относительного изменения доходов;
в) динамику потребностей семей потребителей.

3. От чего зависит формирование цен равновесия на рынке товаров и услуг?

а) от рыночных условий конкуренции;
б) от факторов внешнеэкономического характера;
в) от условий выравнивания спроса и предложения.

4. Что определяется кривой безразличия в теории спроса и потребления?

а) статистические зависимости в условиях неопределенности;
б) сроки удовлетворения потребностей покупателей;
в) равновесие предельной полезности наборов потребительских товаров.

Контрольные вопросы

1. Раскройте экономико-математические зависимости предложения, спроса, потребления, цен в условиях рынка.
2. Опишите уравнение для характеристики спроса и потребления.
3. Разъясните понятие эластичности спроса и потребления.
4. В чем сущность поверхностей безразличия в теории спроса и потребления?
5. Дайте описание нормативных моделей потребления.

Глава 5

УПРАВЛЕНИЕ СЛОЖНЫМИ СИСТЕМАМИ

5.1. Прогнозирование в системе управления

Необходимость системного подхода к проблеме оптимального управления экономикой диктуется как практическим опытом, так и достижениями получивших развитие в последние десятилетия наук, прежде всего кибернетики.

Кибернетика — это наука об управлении сложными динамическими системами, их свойствах, поведении, развитии и воспроизведении.

Под **системой** в кибернетике понимается любой комплекс взаимосвязанных и динамически взаимодействующих элементов. Изучая процессы управления, процессы формирования, передачи, хранения и переработки информации (что отражает специфический для кибернетики информационный подход к процессам управления), кибернетика, как правило, отвлекается от реальной природы системы. Поэтому в кибернетическом смысле системой является и автомобиль, и человек, и общество. Можно назвать и более простые системы, например, ножницы, мясорубка.

В отличие от последних, ранее названные системы являются сложными, так как включают очень большое число элементов с разветвленными внутренними связями (число связей обычно во много раз превышает число элементов системы). Объектом изучения кибернетики являются именно сложные системы.

Очевидно, что и сами сложные системы неравноценны. Как ни сложны автомобиль или компьютер, однако их структура и взаимодействие составляющих элементов могут быть описаны полностью.

Системы типа «человек», «общество» имеют необозримое число элементов и связей, и их полное описание невозможно не только с точки зрения практических трудностей, но и в принципе. Для отличия таких систем их нередко называют очень сложными.

Системы различаются и по другому признаку. Определенное управляющее воздействие, например, на автомобиль приводит к вполне определенным и точно предвидимым результатам. Такие системы называются **детерминированными**. Если же исход воздействия на систему точно предвидеть нельзя, а можно судить о нем лишь с некоторой вероятностью, то система соответственно называется **вероятностной**. К вероятностным относятся все очень сложные системы.

Математические основы кибернетики составляют прежде всего различные вероятностные методы (теория вероятностей и математическая статистика), теория информации и кодирования, методы оптимизации, методы дискретной математики.

Объекты изучения экономической кибернетики – народное хозяйство и его звенья (отрасль, регион, предприятие) являются очень сложными вероятностными динамическими системами. Основным свойством экономической системы является ее сложность. Сложность экономики определяется огромным числом составляющих компонентов экономической системы, связей между ними и качественными особенностями экономических явлений и процессов. Как правило, все экономические явления и процессы следует считать динамическими. С другой стороны, течение этих процессов в каждый момент существенно зависит от их предшествующего состояния. Как динамизм, так и устойчивость экономических процессов и явлений оказывают значительное влияние не только на качественную структуру народнохозяйственных связей, но и существенно изменяют их количественные характеристики, увеличивая число элементов системы, подлежащих исследованию и определению. Значение любой переменной величины должно быть определено для каждого момента времени в будущем, причем это значение должно быть наилучшим из всех возможных и обычно определяется с учетом его предыдущей динамики развития.

Большое значение для управления экономической системой играет наличие в ней отдельных подсистем. Под экономической подсистемой понимается такая совокупность элементов, теснота связи между которыми существенно превышает тесноту связи между выделенной совокупностью и окружающей средой. Всю систему можно представить в виде упорядоченной последовательности элементов, каждый из которых является самостоятельной подсистемой по отношению к элементам, расположенным по одной горизонтали с данным, элементы одной и той же горизонтали являются составляющими по отношению к подсистеме более высокого порядка, расположенной выше по вертикали.

Специфической особенностью экономической системы и ее подсистем является их принадлежность к классу управляемых систем; с другой стороны, в них самих могут происходить процессы, развивающиеся по принципу саморегулирования. Это свойство тесно связано с динамичностью и устойчивостью. Функционирование больших экономических систем носит стохастический характер, который обусловлен суммарным влиянием огромного количества факторов, порою искажающих общую картину экономических процессов.

Именно эти особенности народнохозяйственных связей обусловливают необходимость применения системного подхода к изучению экономики, который заключается в исследовании способа объединения элементов производства в единое целое и взаимодействия процессов функционирования системы.

Управление можно кратко определить как целенаправленное воздействие на управляемую систему. Неуправляемая сложная система обладает огромным числом степеней свободы, характеризуется высокой неопределенностью. Управление призвано ограничить число степеней свободы, уменьшить неопределенность, для того чтобы результат функционирования системы возможно полнее соответствовал поставленной цели. Нередко целью управления является поддержание некоторых характеристик системы (например, скорости работы машины, температуры воздуха и т. п.) на определенном заданном уровне. В других случаях цель управления заключается в достижении экстремального значения некоторой функции переменных величин системы — критерия управления. Тогда имеет место оптимальное управление системой. Рассмотрим принципиальную схему системы управления и ее основных информационных связей (рис. 5.1). Управляемая система испытывает воздействие от внешней среды — полезный сигнал на входе, на который накладываются помехи (возмущения). Через выход объект воздействует на внешнюю среду, причем выходные данные характеризуют поведение, режим функционирования управляемой системы. Остальные стрелки на рисунке 5.1 относятся непосредственно к управлению объектом: **X** – информация о внешнем воздействии на управляемый объект, в том числе о помехах; **У** – информация о состоянии выхода, о текущем поведении системы; **Z** – задающее воздействие (задание), определяющее требуемый режим функционирования системы; **U** – управляющее воздействие на управляемый объект. По наличию тех или иных связей различают типы систем управления.

В разомкнутых системах управления связь У отсутствует, т. е. выходные характеристики объекта не учитываются в про-

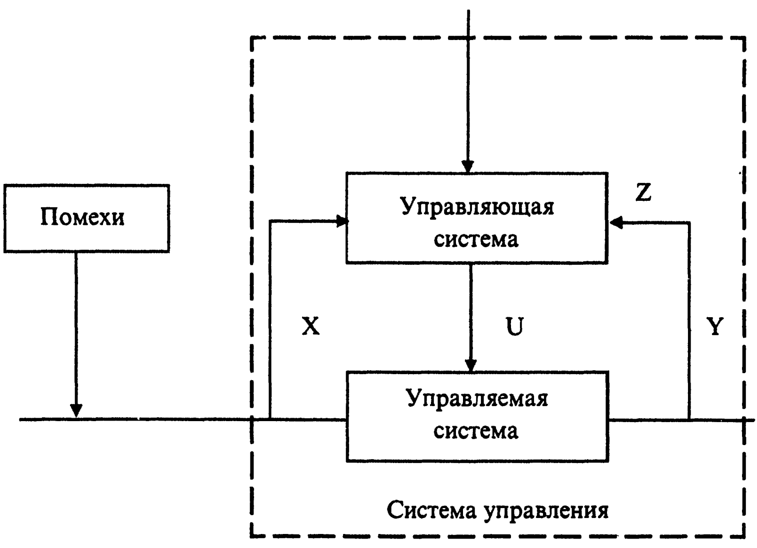


Рис. 5.1. Общая структура системы управления

цессе управления. В простейшей из них осуществляется управление по задающему воздействию. Связь X здесь также отсутствует, а на вход управляющей системы поступает лишь задающее воздействие Z. Такие системы могут быть эффективными лишь при условии высокой стабильности параметров объекта управления и незначительном или постоянном уровне помех. При управлении по внешнему воздействию управляющая система получает информацию только по связи X, задающее воздействие Z отсутствует. Это возможно тогда, когда на выходе управляемой системы должен поддерживаться какой-то строго постоянный по величине и неизменный во времени уровень.

Гораздо чаще в разомкнутых системах применяется управление по задающему и внешнему воздействиям — функционируют связи X и Z. При выработке управляющих воздействий U управляющая система стремится реализовать задание Z, обеспечивая при этом компенсацию возмущений. В замкнутых системах управления наряду с заданием Z управляющая система получает информацию по связи У, которая называется обратной связью. Связи Y и U образуют при движении по направлению стрелок замкнутый контур. Управляющая система должна ликвидировать отклонение от заданного режима функционирования объекта независимо от вызвавших его причин.

Недостатком управления по отклонениям является ликвидация отклонений после их возникновения. Наиболее совершенными следует считать комбинированные системы управления, объединяющие управление по внешнему воздействию и по отклонениям. В результате получения информации о возмущениях по связи X значительная их часть компенсируется раньше, чем они скажутся на состояниях выхода управляемого объекта. Одновременно по обратной связи У происходит контроль за отклонениями, возникающими из-за неблокированных возмущений.

Для многих систем, в том числе экономических, особое значение приобретает оптимальное управление. В этом случае задающее воздействие Z определяет, прежде всего, цель функционирования системы, дает критерий, по которому следует оценивать ее деятельность. Итак, с точки зрения кибернетики управление — это информационный процесс, сводящийся к получению, накоплению, переработке и передаче информации.

Составной частью научной методологии управления выступают прогнозы политических, социальных, экономических, экологических и других последствий принимаемых решений. Без разработки прогнозов, в том числе и на достаточно отдаленную перспективу, нельзя правильно оценивать полезность, целесообразность, эффективность проводимых текущих мероприятий, особенно в условиях реформации, перестройки.

В чрезвычайно многогранной умственной деятельности человека одним из существенно важных и интересных направлений является предвидение будущего.

Сегодня параллельно существуют обе разновидности предвидения — как предвидение научное, так и научно не обоснованное. К последнему относятся и всевозможные предугадывания, основанные на догадках и предчувствиях, исходящие из подсознания, интуиции, и религиозные предсказания вплоть до астрологии. Принципиальное отличие научного предвидения состоит в том, что оно позволяет получить достаточно надежные знания о будущих событиях, гораздо более достоверные, чем дают псевдопредсказания. А отсюда следует другое существенно важное преимущество: научно обоснованное предвидение дает необходимую информацию для принятия в настоящем конкретных решений и целенаправленной практической деятельности. Одной из наиболее распространенных разновидностей научного предвидения является прогнозирование.

Прогноз фиксирует в терминах какой-либо языковой системы ненаблюдаемое вероятностное событие, состояние какого-либо объекта, процесса, явления для более или менее отдаленного будущего. Он должен удовлетворять некоторым условиям. О прогнозируемом событии не должно быть заранее известно, что его вероятность равна единице (скажем, «предвидение» о полете человека на другие планеты) или нулю (предсказание о возможном изобретении вечного двигателя). Помимо качественной определенности, прогноз, как правило, должен содержать количественные оценки, характеристики, прежде всего — сроки ожидаемого его осуществления. Например, заключение: «люди будут летать на другие планеты» прогнозом считать нельзя, а вот такое утверждение: «Человек ступит на планету Марс в период между 2000 и 2020 годами» — это уже прогноз, ведь здесь место и время вполне конкретизированы.

При разработке прогноза должен быть использован проверенный, строгий и непротиворечивый метод прогнозирования, ведь только тогда прогноз можно отнести к предвидению научному, а не чисто интуитивному и волюнтаристскому. Должен быть известен также способ проверки в будущем реализации прогнозируемого события.

Итак, **прогноз** — это обоснованное научной методикой суждение о вероятностных направлениях и результатах развития объекта, явления или процесса в определенном периоде времени в будущем.

Сферы прогнозирования весьма широки и многообразны. Выделяются географическое, геологическое, экологическое, биологическое, медицинское прогнозирование, прогнозы науки и техники, экономическое, социологическое прогнозирование, военное, внешнеполитическое, юридическое, культурно-эстетическое и др. Все эти сферы необходимы и важны, однако следует отметить, что по степени влияния на решение перспективных народнохозяйственных проблем ведущую роль играет социально-экономическое прогнозирование.

Социально-экономическое прогнозирование охватывает развитие народного хозяйства в целом и по отраслям, регионам, научно-технический прогресс, народонаселение и уровень жизни, ресурсы и потребление, внешнеэкономическую конъюнктуру и экологию и т. д. Остановимся на функциональных особенностях прогнозирования в системе управления производством. На рисунке 5.2 представлена принципиальная схема осуществления процесса производства и управления с учетом сопоставления целей и ресурсов.

Первым этапом в описываемом процессе является прогнозирование. Прогноз выявляет возможные пути развития экономики с ориентацией как на целевые установки удовлетворения потребностей общества, так и на расширение и использование ресурсной базы народного хозяйства. К числу основных задач, функций прогнозирования относятся: научный анализ сложившихся экономических, социальных, научно-технических

Рис. 5.2. Принципиальная схема процесса производства и управления

процессов и тенденций; вероятностное и многовариантное предвидение проблем, ситуаций, тенденций будущего развития; отбор в оценке возможностей и результатов активного управляющего воздействия на эти процессы.

Прогнозная информация о рациональных, эффективных вариантах социально-экономического развития кладется в основу при разработке проектов комплексных программ, которая базируется на программно-целевом методе. Как прогнозы, так и программы с учетом конкретного сопоставления целей и ресурсов обеспечивают обоснованное составление планов с их последующим доведением до производственных комплексов.

Приведенная схема может привести к суждению о прогнозе только как о предплановом материале, не имеющем самостоятельного значения.

На схеме процесса производства и управления (рис. 5.2) между прогнозами и планами размещены программы, которые и по сути своей носят как бы промежуточный характер. По директивности они приближаются к планам, но по широте и отдаленности во времени — к прогнозам. Программы чаще бывают межотраслевыми, межрегиональными, многолетними.

Классификация прогнозов осуществляется по ряду признаков в зависимости от целей, задач, объектов прогнозирования, времени упреждения, научно-методических основ и организации прогнозирования, формы его конечных результатов. Рассмотрим типологию социально-экономических прогнозов по основным критериям.

По масштабам прогнозируемой системы дифференциация очень велика от прогнозов мирового хозяйства до прогнозов предприятий и отдельных производств. Здесь можно выделить следующие группы прогнозов:

- прогнозы международной экономики, включая конъюнктуру мирового рынка и внешней торговли;
- прогнозы экономики страны в целом как укрупненные однопродуктовые, так и межотраслевые;
- прогнозы народнохозяйственных комплексов, таких как топливно-энергетический комплекс, агропромышленный комплекс и др.;
- прогнозы отраслей народного хозяйства, однопродуктовые или многопродуктовые;
- прогнозы регионов, охватывающие по возможности всю региональную социально-экономическую систему;
- прогнозы первичных звеньев народного хозяйства, имея в виду объединения, предприятия, отдельные производства.

Классификация прогнозов представлена на рисунке 5.3 (левая сторона), здесь же (справа) приводится типология прогнозов по объектам прогнозирования. Выделено 10 групп таких прогнозов, относящихся полностью или почти полностью (как демографические, экологические) к социально-экономическому прогнозированию.

Все эти 10 групп выделенных прогнозов существенно необходимы для анализа и управления социально-экономическими

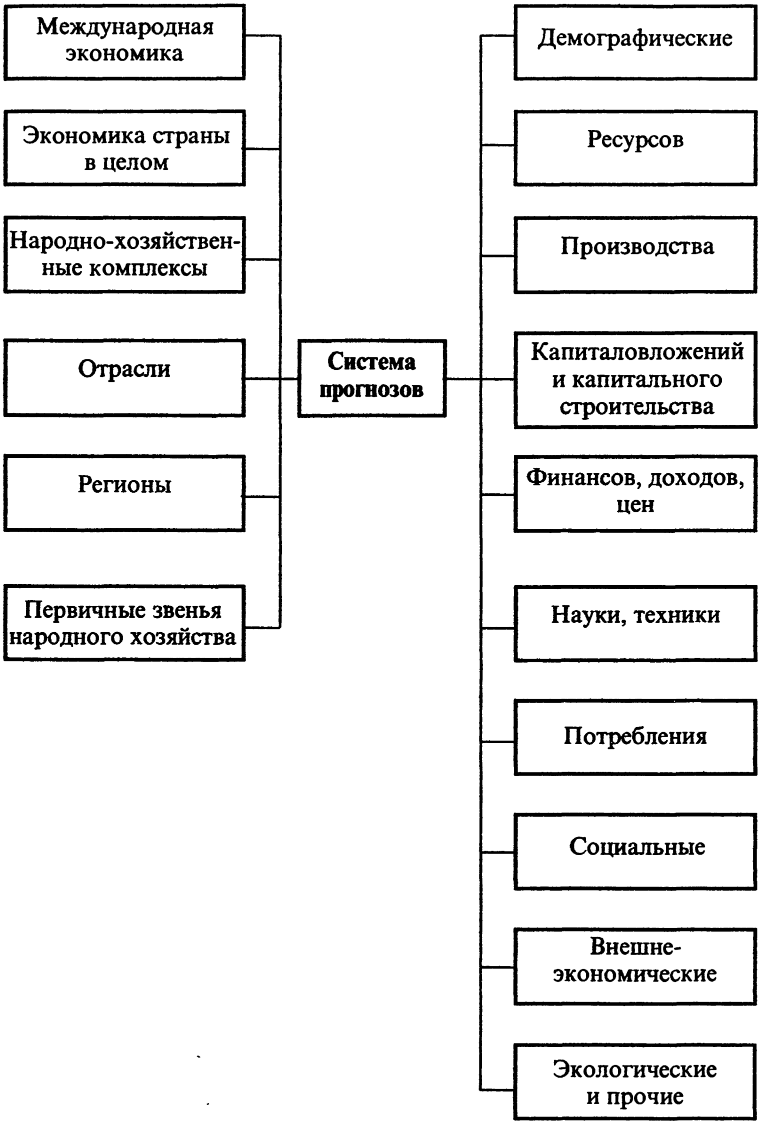


Рис. 5.3. Схема классификации прогнозов

процессами развития общества. Конкретизируется и определенная самостоятельная специфика прогнозов по сравнению, например, с планами. Ведь из 10 указанных на рисунке 5.3 групп только по трем возможно полное, всеохватывающее планирование: это группы «Производства», «Капиталовложений и капитального строительства», «Финансов, доходов, цен». Семь остальных групп относятся к неполностью управляемым явлениям и процессам: планирование по этим группам возможно лишь частичное, целиком охватывают их только прогнозы.

Быстрое развитие прогностики в последние десятилетия ведет к возникновению все новых и новых методов прогнозирования.

Большое число и разнообразие методов прогнозирования привело к тому, что единая общепринятая классификация пока отсутствует; в каждой работе по прогностике, включая и учебные пособия, предлагается своя классификация, заметно отличная от других. Приводимая здесь (рис. 5.4) классификация методов прогнозирования также не совпадает с другими; ближе она соотносится с делением этих методов на интуитивные и формализованные.

Как следует из рисунка 5.4, методы прогнозирования можно разделить на две большие группы – логико-эвристические и методы моделирования. Логико-эвристические методы базируются на широко известной общенаучной теории логики и на эвристике, которая определяется словарями как «искусство нахождения истины». Отличие этой группы методов состоит в том, что она опирается в основном на качественные приемы анализа, на логику, рассуждение, здравый смысл, на знания и опыт специалистов, не исключая притом их интуиции и догадки. Ведь не случайно эвристику определяют как «искусство», но вместе с тем наименование этой группы методов требует тесного сочетания искусства, интуиции со строгой логичностью прогнозируемых положений. В этой группе выделяем четыре подгруппы методов; это методы формальной логики, аналогии, экспертных оценок и специальные эвристические.

Методы моделирования основаны прежде всего на количественных, математических и статистических исследованиях, на выявлении формальных зависимостей и тенденции развития, на

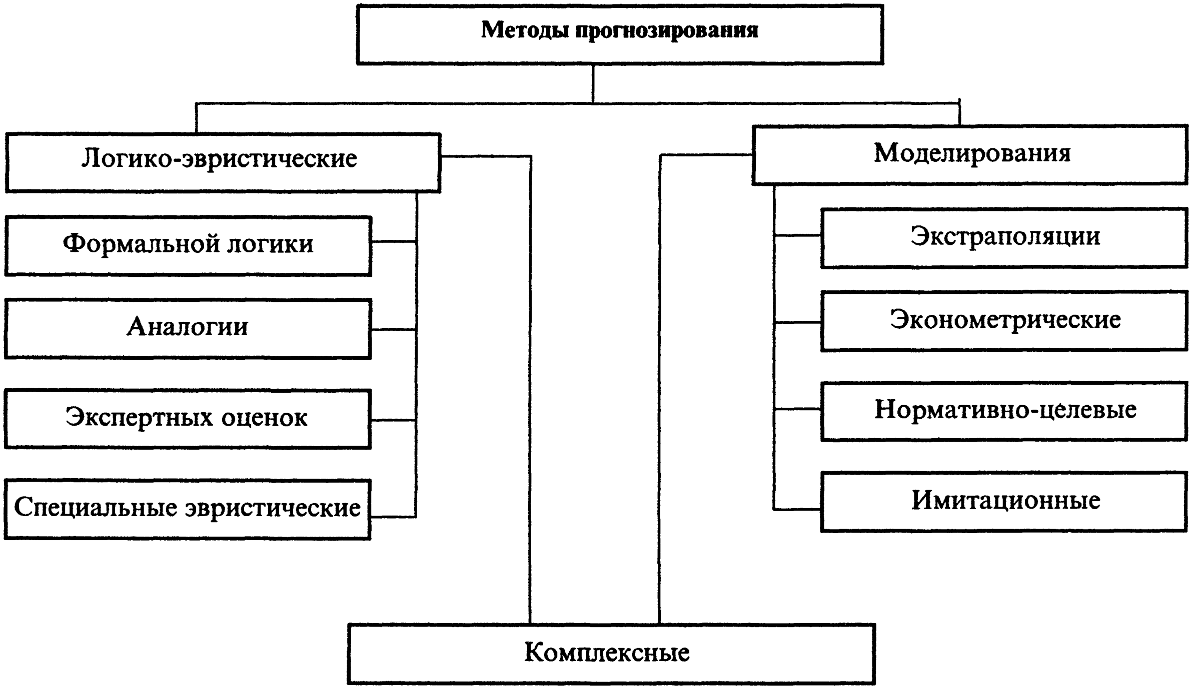


Рис. 5.4. Классификация методов прогнозирования

построении прогностических моделей и экспериментировании с ними на базе компьютерной техники.

Отдельно в классификации представлены комплексные методы, в которых сочетаются как логико-эвристические подходы, так и моделирование.

Прогнозирование как процедура предвидения существует, конечно, столетия, но фактически до последнего времени оно ориентировалось только на одну группу методов — на логико-эвристические. И логика, и эвристика тоже существуют ряд столетий, чего о моделировании сказать нельзя. Развитие примерно с середины XX века математических моделей в сочетании с ЭВМ вначале породило у ученых, специалистов большие надежды на существенное усиление глубины и надежности всевозможных исследований в области гуманитарных наук, включая и прогностику. По сравнению с неопределенным, неформализованным качественным анализом, опытом и интуицией специалистов, внедрение в прогнозирование методов таких точных наук, как математика, кибернетика должно было принести поразительно эффективные результаты.

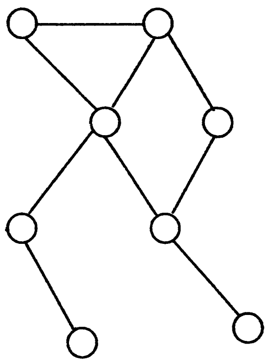
Однако этого не произошло. Конечно, моделирование намного усовершенствовало методические основы прогнозирования, но все вопросы далеко не решило. Объекты прогнозирования, включающие человека, настолько сложны, что полное описание и предвидение их функционирования оказывается не по силам даже высшей математике. Иными словами, реальные возможности моделирования отнюдь не безграничны, хотя и весьма велики.

5.2. Основы теории графов

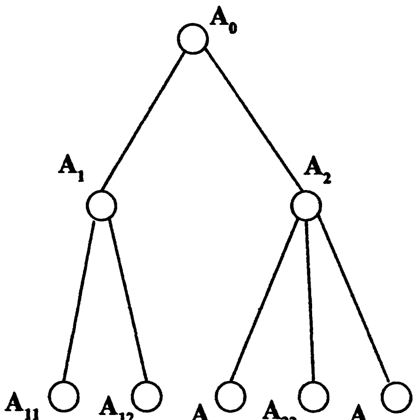
Одним из разделов прикладной математики является теория графов, которая оказалась весьма полезной для решения широкого круга практических задач, в том числе и задач принятия решений.

Можно назвать задачи календарного планирования, оптимизации работы транспорта, сетевого и многоэтапного планирования, задачи о назначениях замены оборудования, распределения капиталовложений, обеспечения системного подхода к анализу и управлению экономикой и др. Теория графов имеет большое значение для других научных дисциплин, так как ее язык удобен для исследования и интеграции различных проблем в области кибернетики, в том числе экономической, информатики, теории игр, теории алгоритмов, теории автоматов.

Граф представляет собой геометрическую схему, состоящую из системы линий, которые соединяют некоторые заданные точки. Эти точки, элементы называют вершинами графа; линии, характеризующие соответствие (связку) между той или иной парой вершин, называются ребрами графа. Вот, собственно говоря, краткое, но достаточно полное определение любого абстрактного графа. Поскольку граф — схема геометрическая, то его всегда изображают графически, не зря ведь слова «граф» и «график» имеют один корень. На рисунке 5.5 а представлен общий граф.



а



б

Рис. 5.5. Примеры графов

Граф можно использовать как модель упорядочения, систематизации, иерархической взаимосвязи и зависимости решаемых проблем управления. Проблемы размещаются на графе по уровням, начиная с нулевого уровня, где представляются наиболее основополагающие проблемы.

Приведем в качестве примера один из графов комплекса базовых проблем совершенствования управления, разработанных для машиностроительного завода. Проблемы выявились по таким направлениям деятельности предприятия, как научно-техническая, производственная, финансово-экономическая деятельность, социальное развитие коллектива, капитальное строительство. Всего было выявлено 97 проблем совершенствования управления, которые распределялись по пяти графам: проблем совершенствования организационной структуры управления; совершенствования методов управления; кадровой работы; совершенствования подготовки, принятия и реализации решений; применения технических средств в управлении.

На рисунке 5.6 изображен граф проблем совершенствования подготовки, принятия и реализации решений. Граф включает 11 проблем, из которых к научно-технической деятельности была отнесена 1 проблема, к производственной — 3, к социальному развитию коллектива — 5 и к капитальному строительству — 2 проблемы.

Перечислим проблемы, взаимосвязь которых представлена на графе.

1. Отсутствуют отработанные процедуры принятия и реализации управленческих решений.
2. Не отработана технология подготовки решений в области капитального строительства.
3. Отсутствует четкая система контроля за выполнением мероприятий.
4. Недостаточно информации, необходимой для принятия решений на разных уровнях управления.
5. Допускается дисбаланс между задачами капитального строительства и ресурсами.
6. Низкая эффективность работы группы системного анализа в отделе НОТ.
7. Низкая исполнительская дисциплина работников заводоуправления.
8. Слабо практикуется экспертная подготовка проблемных вопросов.
9. Ослаблена работа ОТК при отгрузке готовой продукции.

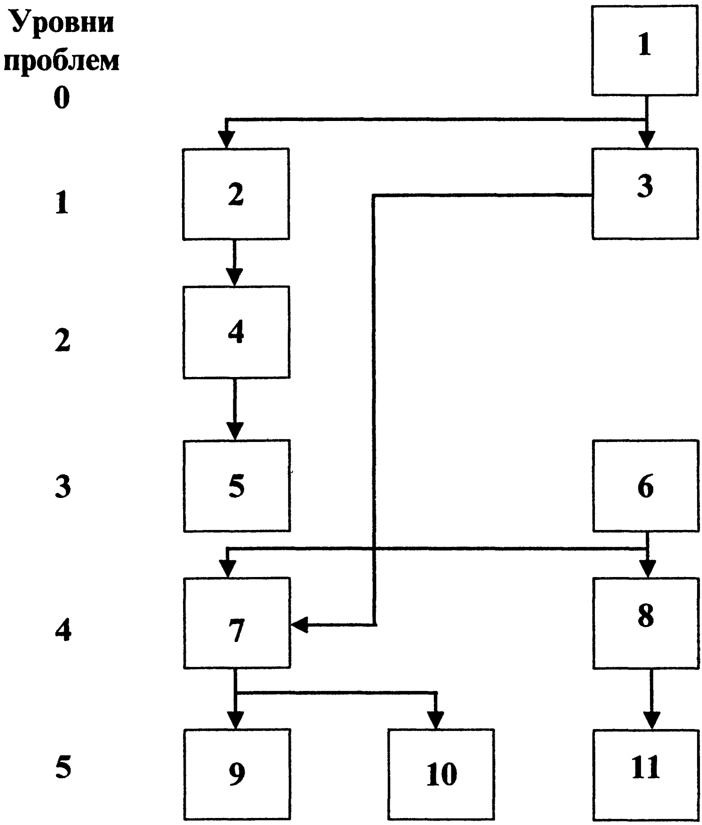


Рис. 5.6. Граф проблем совершенствования подготовки, принятия и реализации решений

10. Нарушается срок корректировки чертежей и техпроцессов.
11. Слабо развита гласность в процессе подготовки решений.

Как видим, граф на рисунке 5.6 представляет четкую взаимозависимость указанных проблем, начиная с наиболее существенной, кардинальной проблемы – отсутствия тщательно отработанных процедур принятия и реализации решений.

Многоцелевой характер большинства задач управления экономикой создает определенные трудности при выборе наилучшей альтернативы. Довольно редко удается несколько целей привести к единству, выразить одной обобщенной целью, одним критерием. Но почти всегда возможны подходы, которые обеспечивают иерархическую систематизацию многих целей. Один из таких подходов – это построение дерева целей.

Дерево целей выступает как систематизированная иерархия целей, отражающая их соподчиненность и взаимообусловленность. Предположим, что рисунок 5.5 б) изображает некоторое дерево целей. Что будут тогда характеризовать его вершины? К вершине A_0 отнесем генеральную цель, обобщенно сформулированное желаемое состояние результата деятельности в исследуемой системе. Конкретизируя любую генеральную цель, можно выделить несколько ведущих, но более конкретных подцелей, которые достаточно самостоятельны, однако, вместе необходимы для обеспечения генеральной цели. Это будут цели первого уровня, или первого ранга; у нас они обозначены через A_1 и A_2. Каждая из целей первого уровня детализируется на свои подцели, они образуют цели второго уровня, второго ранга. На рис. 5.5. б) их пять: две подцели A_{11} и A_{12} относятся к цели A_1 и три подцели A_{21}, A_{22}, A_{23} — к цели A_2. На нашем простом рисунке второй уровень завершает дерево целей, но в реальных моделях оно содержит до пяти и более уровней.

При построении дерева целей важно исходить из требований уже описанного системного подхода. Генеральная цель носит обычно достаточно обобщенный характер, но так или иначе отражает главную цель всего производства — удовлетворение потребностей общества. Подцели любого уровня обеспечивают достижение своей вышестоящей цели и в то же время сами являются целями для следующего, более низкого, уровня иерархии. Но это не означает, что цели высшего ранга сводятся к простой сумме целей более низко расположенного уровня. При переходе вниз от уровня к уровню цели приобретают все более конкретный и детализированный характер. Для генеральной цели обычно нельзя точно указать, что, где, как и когда сможет ее выполнить. Для целей низшего уровня вполне допустимо определять, каким организациям их поручить, какие по-

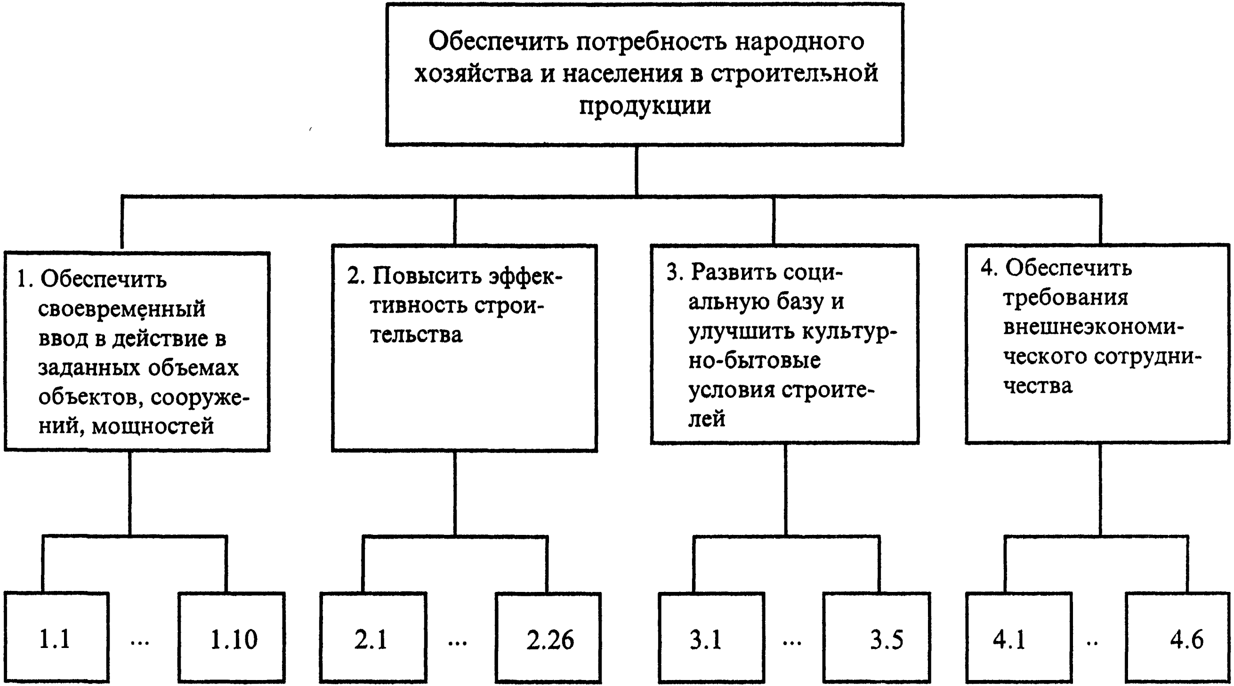


Рис. 5.7. Фрагмент дерева целей отрасли строительства (верхние три уровня)

требуются трудовые, материальные, денежные ресурсы, а также сроки исполнения.

Рассмотрим для примера представленный на рисунке 5.7 фрагмент дерева целей строительной отрасли. Общая цель системы (нулевой уровень) определяется как обеспечение потребности народного хозяйства и населения в строительной продукции. Четыре ее основные подцели – это обеспечение потребности по объемам, срокам и качеству строительной продукции; обеспечение экономической эффективности капиталовложений и строительного производства; обеспечение охраны труда, техники безопасности, нормальных социально-бытовых и культурных условий и быта строителей; обеспечение в строительстве внешнеэкономического сотрудничества.

При четырех целях первого уровня целей второго уровня намного больше – всего их 48. К обеспечению ввода в действие объектов относятся подцели от 1.1 до 1.10, это в основном конкретизация отраслей-потребителей: от промышленного строительства (1.1), энергетического строительства (1.2) до производства ремонтно-строительных работ (1.10).

На повышение эффективности строительства «работают» 26 подцелей, дифференцированных по стадиям: на стадии разработки долгосрочных строительных программ — от 2.1 до 2.3; на стадии капитальных вложений — от 2.4 до 2.9; на стадии проектирования объектов строительства от 2.10 — до 2.18; на стадии строительного производства — от 2.19 до 2.26.

Социальная цель 3 конкретизируется на пять подцелей: от 3.1 (улучшить охрану труда и технику безопасности) до 3.5 (обеспечить детскими учреждениями). Шесть подцелей выделяется для внешнеэкономического сотрудничества.

Построение дерева целей представляет собой довольно сложную и трудоемкую работу. Ее целесообразно начинать с составления консультантами или экспертами так называемого сценария, в котором отражаются происходящие в системе и окружающей среде основные процессы, делаются прогнозы ожидаемого развития, влияния научно-технического прогресса, изменений других более или менее важных факторов.

Исходя из сценария, разрабатывается первый вариант дерева целей, начиная с формулировки общей цели нулевого уровня и перемещаясь по уровням сверху вниз. На каждом очередном уровне цели определяются таким образом, чтобы полностью обеспечивать достижение целей предшествующего уровня. Пусть при этом будут сформулированы и включены даже «избыточные» цели, лишь бы не упустить каких-либо действительно необходимых.

В качестве подцелей могут выступать не только взаимно дополняющие, но и альтернативные варианты. Тогда первые варианты дерева целей представляют собой графы с логикой «и/или», в которых необходим выбор альтернатив, как в любых процессах принятия решений.

Таким образом, начальный вариант дерева может содержать избыток целей, и его необходимо оценить, уточнить, желательно обработать количественно. Анализируются на всех уровнях цели и связи между ними, определяются весовые коэффициенты, выполняются расчеты. Весовые коэффициенты должны оценивать значимость, важность тех или иных целей данного уровня относительно достижения вышестоящей цели. Коэффициенты важности определяются экспертами по 10-балльной шкале в долях единицы.

Кроме того, не только качественно, но и количественно должны быть определены мероприятия и материально-технические средства, обеспечивающие достижение конкретных целей последнего, низшего уровня. Во многих случаях, помимо стоимости, оценивают и ожидаемый эффект, чтобы выбор лучших вариантов обосновывался сопоставлением затрат и эффекта. Итак, осуществляется процедура «усечения» дерева целей, состоящая в исключении тех целей, которые по коэффициентам важности стремятся к нулю или не обеспечены располагаемыми ресурсами.

После такого исключения в дереве уже не должны фигурировать альтернативные, конкурирующие варианты; от графа с логикой «и/или» переходим к графу с логикой «и». Образуется окончательная структура дерева целей.

Описанные подходы несколько расширяют, усложняют простую схему взаимозависимости четко выраженных целей, поэтому в литературе, помимо термина «дерево целей», встречаются и такие названия, как «дерево проблем», «дерево задач», а также и «дерево решений», последнее в особенности применимо к графам с логикой «и/или».

5.3. Сетевые графики

В области экономики, технологии, проектирования, научно-исследовательских работ особую сложность представляет собой планирование и создание новых систем, например, конструирование и освоение производства новой машины, проектирование и возведение инженерных и архитектурных комплексов, планирование и проведение космических исследований и т. п. Аналогичные трудности вызывает осуществление некоторых периодически повторяющихся разработок (например, ежегодное составление бизнес-плана). Во всех указанных случаях выполняется огромное количество взаимосвязанных операций, в работу вовлекается множество людей, предприятий, организаций. Управление комплексом, принятие оперативных и перспективных решений осложняется, как правило, новизной разработки, трудностью точного определения сроков и предстоящих затрат. В планировании и управлении сложными комплексами работ высокоэффективными оказались сетевые методы и модели. Основу сетевой модели составляет сетевой график — наглядное отображение плана работ. С точки зрения графов сетевой график представляет собой сеть, т. е. связный ориентированный граф без контуров и петель.

Основными элементами сетевого графика являются события и работы. События соответствуют вершинам сети, а работы — ее дугам. Событие – это результат, состояние системы в момент достижения некоторой исходной, промежуточной или конечной цели разработки. Событие не имеет протяженности во времени.

Работа – это протяженный во времени процесс, необходимый для совершения события. Иными словами, работой на графике может быть любая необходимая производственная, инженерно-конструкторская или иная операция, требующая затрат времени, трудовых и материальных ресурсов. Скажем, в плане возведения производственного объекта могут быть выделены такие работы, как кирпичная кладка, монтаж стеновых панелей, монтаж трансформаторной подстанции, монтаж оконных и дверных блоков, монтаж кровельных плит, штукатурные работы, монтаж технологического оборудования, устройство полов, устройство кровли, отделочные работы и т. п.

Предположим, что при составлении плана разработки выделено 10 различных работ, обозначенных буквами в таблице 5.1. Для каждой работы указано, какие другие работы должны непосредственно ей предшествовать в соответствии с условиями и требованиями технологии. Так, работы А, Б и В в данном комплексе не имеют предшествующих работ, следовательно, все эти три работы можно начинать параллельно от нулевой точки отсчета времени. Работа Г может начинаться лишь после окончания работы А, работы Д и Е – после завершения работы Б и т. д. Изобразим указанную последовательность работ графически, обозначая каждую работу стрелкой, соблюдая условия таблицы 5.1 и вводя кружочки – события так, чтобы каждая работа от некоторого события начиналась и некоторым событием завершалась. Имея в виду, что на сетевых графиках время «течет» слева направо, поместим исходное событие в левой части графика, выведем из этого события три стрелки для работ А, Б, В, замкнем каждую на свое конечное событие и да-

Таблица 5.1

Исходные данные сетевого графика

Наименование работы	Непосредственно предшествующие работы	Продолжительность работ, дни	События	
			начальное	конечное
А	–	3	1	2
Б	–	8	1	3
В	–	5	1	4
Г	А	9	2	5
Д	Б	11	3	4
Е	Б	6	3	6
Ж	Б, Д	7	4	5
З	В, Д	4	4	6
И	Г, Ж	12	5	7
К	Е, З	10	6	7

лее разместим последующие работы и события с учетом зависимости работ, представленной в таблице 5.1. Полученный график изображен на рисунке 5.8. Он содержит 7 событий, которые по-следовательно пронумерованы (слева направо и сверху вниз). Номера начального и конечного событий для каждой работы проставлены в двух последних графах таблицы 5.1. В дальнейшем откажемся от буквенного обозначения работ и будем обозначать их по номерам начального и конечного событий. Так, работа А — это работа 1–2 , работа Б — работа 1—3 и т. д.

После первоначального составления графика необходимо проверить его соответствие некоторым обязательным требованиям: каждая работа должна иметь начальное и конечное события; любые два события должны быть непосредственно связаны не более чем одной работой; только исходное (первое) событие не имеет входящих стрелок, только завершающее — выходящих; не должно быть изолированных участков, не связанных с остальной частью графика; не должно быть контуров и петель. На нашем графике (рис. 5.8) все эти требования соблюдены.

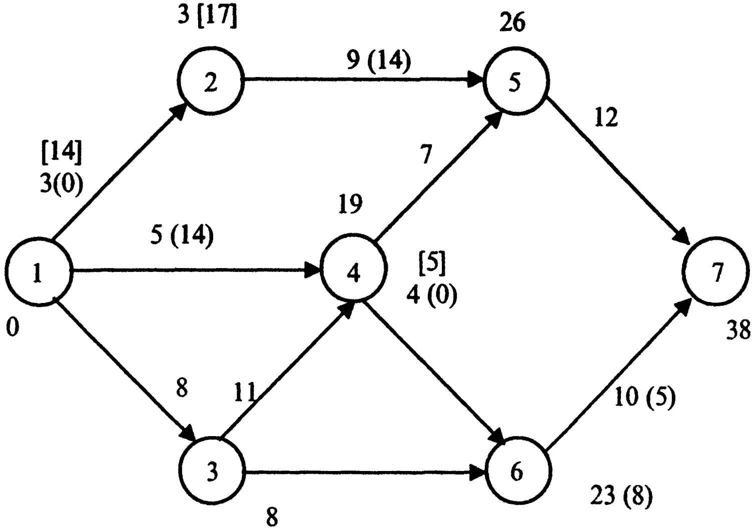


Рис. 5.8. Сетевой график

Важнейшим этапом сетевого планирования является анализ сетевого графика по критерию времени. Рассмотрим основные принципы этого анализа. Ожидаемая продолжительность каждой работы в днях указана в таблице 5.1. Эти данные проставлены у стрелок — работ (рис. 5.8). Отметим, что сетевые графики совершенно не требуют соблюдения масштаба, т. е. длина стрелок никак не соответствует продолжительности работ.

Определим, прежде всего, ожидаемые сроки наступления событий. Срок для исходного события будем считать нулевым. Поскольку работа 1–2 продолжается 3 дня, событие 2 наступит через 3 дня после начала работ. Аналогично определяем, что для наступления события 3 потребуется 8 дней (сроки наступления событий указаны около их кружочков). Для события 4 входящими являются две работы: 1–4 и 3–4. Первая из них заканчивается через 5 дней после начала всего комплекса работ. Работа 3–4 может начаться после наступления события 3, т. е. через 8 дней после исходного события, и сама требует для своего выполнения 11 дней. Всего от события 1 до завершения работы 3–4 проходит 8 + 11 = 19 дней. Значит, ожидаемым сроком наступления события 4 нужно считать 19 дней.

Перейдем к событию 5. Оно наступает после завершения работ 2–5 и 4–5. Первая из них завершается через 3 + 9 = 12 дней, вторая через 19 + 7 = 26 дней. Больший из сроков — 26 дней — и есть ожидаемый срок наступления события 5. Аналогично определяем сроки наступления событий 6 и 7. Завершающее событие 7 наступает через 38 дней после начала всего комплекса работ.

Заметим, что уже на первом этапе расчета сетевого графика получена очень важная количественная характеристика – ожидаемая продолжительность всего комплекса планируемых работ (38 дней). Эта величина, очевидно, не следует непосредственно из данных о длительности отдельных работ (табл. 5.1), а может быть определена лишь на основе сетевого графика, учитывающего взаимосвязь и последовательность всех намечаемых работ.

Возвращаясь теперь от завершающего события к исходному, проследим, как образовался этот срок — 38 дней. Из двух работ, входящих в событие 7, определила этот срок работа 5–7, которая начинается с наступлением события 5 (26 дней) и продолжается 12 дней. В свою очередь, срок наступления события 5 определила работа 4–5 (19 + 7 = 26 дней). Срок наступления события 4 непосредственно связан с работой 3–4, а события 3 – с работой 1–3.

Как видим, существует некоторая цепочка работ, ведущая от исходного события к завершающему, которая определяет общую ожидаемую продолжительность всего комплекса работ сетевого графика. От исходного события к завершающему можно построить множество последовательных цепочек работ (путей) различной общей продолжительности. Например, на рисунке 5.8 такими путями являются: 1–2–5–7 продолжительностью 3 + 9 + 12 = 24 дня; путь 1–4–6–7 продолжительностью 5 + 4 + 10 = 19 дней и др. Из всех возможных путей наибольшую протяженность во времени — 38 дней имеет путь 1–3–4–5–7, который мы нашли на графике, двигаясь поэтапно от завершающего события к исходному.

Последовательность работ между исходным и завершающим событиями сети, имеющая наибольшую общую протяженность во времени, называется **критическим путем**. События и работы, расположенные на этом пути, также называются критическими.

Критический путь является центральным понятием сетевого планирования и управления. Естественно, что важнейшей целью анализа сетевого графика по критерию времени является установление общей продолжительности всего планируемого комплекса работ. Оказывается, что эта общая продолжительность определяется далеко не всеми работами сети, а только работами, лежащими на критическом пути. Увеличение времени выполнения любой критической работы ведет к отсрочке завершения всего проекта, в то время как задержка с выполнением некритических работ может никак не отразиться на сроке наступления завершающего события.

Отсюда следуют важные выводы для принятия практических решений. Руководители разработки должны уделять первоочередное внимание своевременному выполнению критических работ, обеспечению их необходимыми трудовыми и материальными ресурсами, чтобы не сорвать срок завершения всего проекта. Если сам этот срок по первоначально составленному графику оказался выше производственной мощности предприятия, то для его уменьшения необходимо изучить возможность сокращения именно критических, а не любых работ. Если учесть, что в реальных сетевых графиках критические работы составляют лишь 10–15% общего числа работ, то становится ясно, каким ценным орудием эффективного управления, принятия лучших решений является метод критического пути в руках руководителей сложных разработок. Ведь одно дело – пытаться постоянно держать в поле зрения и непрерывно контролировать все множество выполняемых работ, и совсем другое – сосредоточить внимание и усилия на выполнении примерно десятой их части.

Если для критических работ никакие отсрочки их выполнения недопустимы без угрозы срыва продолжительности всего проекта, то для некритических работ такие отсрочки возможны. Возьмем, например, работу 3–6. Начальное для нее событие 3 наступает через 8 дней, а конечное событие – через 23 дня после начала всех работ. Очевидно, срок наступления события 6 не был бы нарушен, если бы работа 3–6 продолжалась 15 дней – на 9 дней дольше ее продолжительности по графику. Эти 9 дней составляют так называемый свободный резерв времени работы 3–6. Свободный резерв времени работы 6–7 составляет 5 дней (38–10–23 = 5), свободный резерв для работы 1–4 равен 19 — 5 — 0 = 14 дней. Некритические работы 1–2 и 4–6 свободных резервов времени не имеют (свободные резервы времени указаны в круглых скобках у стрелок – работ на рис. 5.8). Знание резервов времени имеет важное значение для принятия конкретных решений в ходе выполнения проекта. Допустим, что в ходе работ по графику (рис. 5.8) обнаружились трудности в комплектовании исполнителей после 8-го дня, когда должны начинаться работы 3–4 и 3–6 и продолжается работа 2–5. Тогда для устранения дефицита исполнителей можно отсрочить начало работы 3–6, имеющей значительный свободный резерв времени.

Возможно определение и так называемых **полных резервов времени**. Сначала определим для нашего графика наиболее поздние допустимые сроки наступления некритических событий. На рисунке 5.8 это события 3 и 6. Для события 3 наиболее поздний срок составляет 17 дней: если к 17 добавить продолжительность работы 2–5, т. е. 9 дней, то наступление критического события 5 не превысит своего первоначально определенного срока в 26 дней. Для события 6 наиболее поздний допустимый срок определится разницей: 38–10 = 28.

При определении полных резервов времени будем исходить из наиболее поздних сроков наступления событий. Тогда имеем полные резервы: для работы 1–2: 17 – 3 — 0 = 14; для работы 3 – 6: 28 – 6 – 8 = 14. Полные резервы на рисунке 5.8 приведены у работ в квадратных скобках.

Опишем в общем виде процедуру расчета сетевых графиков по критерию времени. Заданной заранее является продолжительность t_{ij} работы i-j, выходящей из своего начального события i и входящей в конечное событие j. На сети, включающей все работы i-j, уже расчетным путем находится ряд числовых характеристик.

Сначала определяются **ожидаемые (ранние) сроки наступления всех событий**. Ранний срок $t_j^{р}$ наступления некоторого конечного события j равен сумме раннего срока $t_i^{р}$ наступления начального события i и продолжительности самой работы $i-j$. Если для события j входящим являются несколько работ, то из всех указанных сумм берут наибольшую. Таким образом,

$$t_j^{р} = \max\,(t_i^{р} + t_{ij}).$$

Для первого события принимается $t_i^{р} = 0$. Значение $t_j^{р}$ для самого последнего, заключительного, события графика характеризует ожидаемый общий срок всего комплекса работ сетевого графика, продолжительность критического пути.

Определяются также поздние допустимые сроки наступления событий. Поздний срок $t_i^{п}$ наступления события i равен разности между поздним сроком $t_j^{п}$ наступления события j и продолжительностью работы $i-j$. Если из события i выходит несколько работ, то берут наименьшую из указанных разностей, следовательно:

$$t_i^{п} = \min\,(t_i^{п} — t_{ij}).$$

При этом для завершения события крайний и поздний сроки равны:

$$t_k^{р} = t_k^{п}.$$

Начав от завершающего события, можно по приведенной формуле последовательно найти сроки для всех некритических событий.

Можно найти также **резервы времени наступления событий**. Резерв времени R_i наступления события i определяется как разность между поздним и ранним сроками, т. е.

$$R_i = t_i^{п} - t_i^{р}.$$

Известные резервы времени своего выполнения могут иметь и некритические работы. Различают свободные и полные резервы времени работ. Свободный резерв времени $R_{ij}^{п}$ работы $i-j$ находится вычитанием продолжительности работы $i-j$ и раннего срока наступления начального события i из раннего срока наступления конечного события j. Таким образом,

$$R_{ij}^{с} = t_j^{р} - t_{ij} — t_i^{р}.$$

Полный резерв времени $R_{ij}^{п}$ работы $i-j$ определяется вычитанием продолжительности работы $i-j$ и раннего срока наступления события i из позднего срока наступления события j. Следовательно, имеем

$$R_{ij}^{п} = t_j^{п} - t_{ij} — t_i^{р}.$$

Определение резервов времени событий и работ сетевого графика имеет важное значение не только для этапа его разработки и корректировки, но и в ходе выполнения проекта.

Мы пока предполагали, что на сетевом графике время выполнения каждой работы точно известно – детерминировано. При прогнозировании это предположение выполняется довольно редко, поскольку основное направление использования сетевых методов – это прогнозы новых сложных разработок, зачастую не имевших в прошлом вообще никаких аналогий. Поэтому чаще всего продолжительность выполнения работы сетевого графика является неопределенной, в математическом понимании – случайной величиной.

Если известен закон распределения случайной величины, то нетрудно найти две ее важнейшие характеристики – среднее значение (математическое ожидание) и дисперсию. Однако, применительно к работам сетевого графика, уверенно судить о законе распределения времени конкретных работ обычно не удается. Практика сетевого планирования выработала для анализа сетевого графика со случайными длительностями работ определенную общую методику, которая достаточно рациональна и удобна, хотя с точки зрения строгой теории, возможно, и не во всем безупречна. Рассмотрим основные положения этой методики.

По каждой работе $i-j$, точную продолжительность которой установить нельзя, на основании опроса исполнителей и экспертов определяются три временные оценки:

а) минимального времени a_{ij}, за которое может быть выполнена работа при самом благоприятном стечении обстоятельств (оптимистическая оценка);

б) максимального времени $в_{ij}$, которое потребуется на выполнение работы при самых неблагоприятных условиях (пессимистическая);

в) наиболее вероятного времени m_{ij}, выполнения работы при самых нормальных условиях.

Указанные три оценки являются основой для расчета средней ожидаемой продолжительности работы и ее дисперсии. При этом используется гипотеза о том, что распределение длительностей работ подчиняется определенному закону (так называемое **β-распределение**). Теоретически строго обосновать эту гипотезу довольно трудно, однако, в эмпирическом смысле она даст возможность построить простые формулы для определения средней ожидаемой продолжительности $\bar{t}_{ij}$ и дисперсии σ^2_{ij} при заданных a_{ij}, $в_{ij}$ и m_{ij} для каждой работы:

$$\bar{t}_{ij} = \frac{1}{6}(a_{ij} + 4m_{ij} + в_{ij});$$

$$\sigma^2_{ij} = \left(\frac{в_{ij} - a_{ij}}{6}\right)^2.$$

Величины $\bar{t}_{ij}$ определяют продолжительность выполнения работ на сетевом графике. На их основе рассчитываются сроки наступления событий и резервы времени.

Наряду с задачей достаточно точного определения временных оценок, в экономических прогнозах особое значение приобретают вопросы анализа сетевых моделей с точки зрения затрат трудовых, материальных, денежных ресурсов и их эффективного распределения и использования. Существующие методы позволяют обеспечить и такой комплексный подход, как «время — стоимость – ресурсы», подход к сетевому анализу и планированию. Реальные (обычно достаточно сложные) сетевые графики рекомендуется обрабатывать на ЭВМ. На базе пакета прикладных программ ЭВМ проверяет правильность составления графика, рассчитывает критический путь и резервы времени, распределяет по работам ограниченные ресурсы и т. д. В ходе выполнения проекта на основе уточненной дополнительной информации ЭВМ корректирует и перерассчитывает сетевую модель и выдает на печать скорректированные характеристики оставшейся части графика.

Нужно отметить особое значение последней операции. Первоначально составленный вариант сетевого графика на практике довольно быстро устаревает. По истечении времени возникают различные отклонения: изменилось против плана время проведения уже выполненных или выполняемых работ; внесены поправки в оценки продолжительности некоторых будущих работ; отпала необходимость выполнения отдельных запланированных работ, в то же время появились новые работы, ранее не предусмотренные; изменилась взаимосвязь, последовательность некоторых работ и событий.

Если не принимать во внимание эти изменения и ориентироваться на первоначальный вариант графика, то вместо эффективного средства управления он вскоре будет только дезориентировать исполнителей. В некоторых случаях это происходит на практике, особенно при использовании ручных расчетов графиков: постоянные пересчеты сетей вручную могут потребовать чрезмерных трудовых затрат.

При использовании ЭВМ группа сетевого планирования периодически (еженедельно, ежедневно, а иногда и ежесуточно) в точно установленные сроки получает от исполнителей информацию об отклонениях, эта информация вводится в ЭВМ, машина вычисляет новые числовые характеристики, а при необходимости перестраивает и сам график, составляются уточненные календарные планы-графики и доводятся до исполнителей. Только при таком подходе сетевой график остается практически эффективным в управлении, принятии решений в течение всего срока осуществления проекта.

5.4. Неопределенность, риск

Задачи управления, принятия решений по степени определенности используемой информации делятся на три группы: задачи в условиях определенности (детерминированные), задачи в условиях вероятностной определенности, задачи в условиях неопределенности.

В задачах детерминированных вся исходная информация определена полно и однозначно, отсюда возможно и принятие единственно правильного решения и точное его выполнение. Но избежать случайностей удается не во всех задачах. И речь идет о случайности не в смысле появления чего-то совершенно неопределенного, неожиданного, а о вполне «узаконенном» математическом понятии случайной величины. Изучением случайных величин заняты важнейшие разделы математической науки, например, теория вероятностей. Случайные события могут быть характерны для самых простых процедур, например, для выпадения «герба» или «цифры» при бросании монеты.

Предположим, нам рассказали о такой ситуации принятия решений. Один молодой человек живет не очень далеко от места своей работы: на троллейбусе он доезжает за десять минут, да и пешком затрачивает примерно полчаса. Он считает, что каждый из двух способов имеет свои плюсы: троллейбус экономит время, проще с выбором и содержанием одежды и обуви, особенно при ненастной или холодной погоде, а пеший переход дает некоторую физическую тренировку, важную при его сидячей работе, да и деньги экономятся. Наш молодой человек не любит очень строгих решений, скажем, всегда ездить или всегда ходить, либо в июне только пешком, а в октябре только троллейбусом. Чтобы больше разнообразить свое ежедневное поведение, он принимает такую стратегию: каждое утро бросать монету; если выпал «герб», то сегодня на работу и с работы идет пешком, если «цифра», то туда и обратно троллейбусом.

Это пример задачи принятия решений в условиях вероятностной определенности, или в условиях риска (другое встречающееся название таких задач). Почему «вероятностной определенности»? Потому что, например, при бросании монеты вероятность выпадения «герба» или «цифры» вполне определена, она равна 0,5. При большом количестве испытаний с уверенностью можно ожидать, что в целом в половине случаев монета выпадает одной стороной, а в половине – другой стороной. Предположим, наш молодой человек абонементные талоны для проезда в троллейбусе покупает всегда надолго вперед. Теперь он посчитал, что до его ухода в отпуск осталось ровно 50 рабочих дней; сколько купить талонов, если добираться до работы и обратно он будет в соответствии с утренним выпадением монеты? Исходя из теории вероятностей, следует ожидать, что за 50 дней «цифра» на монете (проезд троллейбусом) выпадет 25 раз, значит купить следует 50 талонов – ведь ехать на работу и обратно. Конечно, не исключено, что ближе к отпуску парочки – другой талонов не хватит или, наоборот, останется, но на то уж и вероятность, в отличие от проблем, строго детерминированных.

Почему же другое название у этого типа задач – задачи в условиях риска? Потому, что каждый отдельный исход операции заранее совершенно неизвестен, вполне случаен, а это приводит оперирующего субъекта к известному риску. Можно с достаточной уверенностью говорить, что за 50 дней «герб» выпадет 25 раз, но нельзя абсолютно ничего сказать о том, выпадет ли «герб» или «цифра» завтра. Если вечером наш молодой человек сильно увлекся телепередачами, утром позволил себе немного проспать против обычного (уже два предыдущих дня были «гербы», появится же «цифра»), то вполне можно сказать, что молодой человек рискует. Вот отсюда и другие названия этих задач.

Итак, в задачах с вероятностной определенностью в числе факторов фигурируют такие, которые представляют собой случайные величины, но с известными их вероятностными характеристиками – законами распределения, средними значениями и т. п. Зная эти характеристики, можно находить для таких задач искомые решения, в том числе и оптимальные. При этом наиболее легкий подход состоит в следующем: заменяем все случайные величины в задаче их средними значениями, тогда задача переходит в класс детерминированных и может быть решена одним из применяемых для этого класса методов, например, методом линейного программирования.

Но при этом не следует забывать, что задача все-таки вероятностная, в условиях риска. Не всегда разумно пренебрегать случайностью. Предположим, мы ведем расчеты по организации в городе службы «скорой помощи». Ясно, что число вызовов и время обслуживания — случайные величины. Заменив их средними значениями, мы определили, сколько требуется машин, врачей, сотрудников, чтобы прибытие на вызов в среднем составило не более 15 минут. Но это же «в среднем», а где гарантия, что к тому или другому больному «скорая помощь» не прибудет лишь через час после вывоза, когда, к сожалению, будет уже поздно? Гарантии нет, есть лишь условия риска.

В таких случаях математическую модель задачи нужно усложнить. Скажем, в схеме нашей задачи служба «скорой помощи» должна соответствовать не только допустимому среднему времени ожидания, но и еще одному условию, например, такому: максимальное время прибытия на вывоз не превысит 25 минут с вероятностью 0,99. Такое требование математически заметно повышает трудность решения задачи, но зато лучше согласовывается с условиями риска.

Перейдем к третьей группе — **задачам в условиях неопределенности**. В этих задачах располагаемая информация не только не детерминирована, но отсутствуют и ее вероятностные характеристики. Такая ситуация возникает, в основном, по двум причинам. Во-первых, в изучаемых процессах могут участвовать случайные величины, для которых какое-то распределение вероятностей существует, но решающему задачу лицу, консультанту, это распределение неизвестно или известно слишком приблизительно. Во-вторых, в задаче действуют такие случайные факторы, которые математическому вероятностному описанию вообще не поддаются. Эта неопределенность информации порождает и некоторую неопределенность в принимаемых решениях. И ничего не поделаешь. Нельзя же пытаться, например, посуточно четко расписать на предстоящий месяц деятельность городской службы пожаротушения.

В условиях неопределенности оказываются не только подобные пожаротушению частные задачи, но и весьма солидные общие задачи, скажем, планирования и управления народным хозяйством.

Задачи в условиях неопределенности не позволяют получать строгие и однозначные оптимальные решения, как в детерминированных задачах. Но это не значит, что методы их решения вообще отсутствуют. Рекомендуемые подходы зависят, однако, от самой постановки задачи, с чего мы и начнем.

Первая ситуация — полная неопределенность. Это не означает, что в задаче вообще ничего не известно. Должна, конечно, существовать и быть сформулирована проблема, требующая решения. Предполагаются выясненными и возможные варианты решения проблемы, способы действия, которые мы называем альтернативами, или стратегиями. Поскольку мы хотим найти лучшую альтернативу, стратегию, то по каждой из них должен быть известен приносимый эффект, выигрыш. Этот выигрыш часто зависит не только от нашей стратегии, но и от того, в каких внешних условиях она осуществляется. Будем выделять несколько возможных в нашей задаче внешних условий, называя их состояниями (стратегиями) природы, состояниями среды. Этот тип задачи зависит как раз от нашей информации о состоянии природы: в задачах с полной неопределенностью нам ничего не известно о том, какого из возможных состояний природы следует ожидать.

Рассмотрим пример. В таблице 5.2 выделены 4 допустимых альтернативы, стратегии – A_1, A_2, A_3, A_4. Возможны 3 состояния природы – $П_1$, $П_2$, $П_3$.

Цифры в таблице означают величину выигрыша при каждой стратегии для каждого из состояний природы. Попробуем конкретизировать наш пример. Предположим, что принимается решение о том, какое из четырех сельскохозяйственных культур целесообразнее всего вырастить в следующем году на арендованном участке земли.

Таблица 5.2

Стратегии и выигрыши

Природа / Стратегия	$П_1$	$П_2$	$П_3$
$А_1$	15	11	7
$А_2$	12	16	10
$А_3$	9	14	13
$А_4$	8	15	18

Ожидаемый «выигрыш» — это величина урожайности или дохода, прибыли с гектара. Выигрыши зависят не только от выбранной культуры, но и от состояния природы — погоды в предстоящем году.

Стратегий природы у нас три: допустим, что $П_1$ обозначает сезон с максимумом солнечных дней и минимумом осадков, $П_3$, наоборот, — минимум солнца и максимум дождей, $П_2$ — средние уровни жары и влаги.

Наши культуры на погодные условия реагируют по-разному: первая предпочитает побольше тепла и поменьше влаги (наибольший выигрыш она дает при состоянии природы $П_1$); вторая и третья культуры наибольший результат дают при средних погодных условиях; четвертая культура предпочитает максимум влаги. Для соответствующей заблаговременной подготовки почвы, семян, удобрений мы должны выбрать культуру задолго до начала посевной, когда никакими прогнозами о погоде в следующем году мы не располагаем. Значит, будем считать, что даже приблизительные вероятности состояний природы $П_1$, $П_2$ или $П_3$ неизвестны. Это и есть в нашей задаче условия полной неопределенности.

Как же в этих условиях найти решение? Для других задач мы уже обращались к различным теориям – теории графов, линейному программированию, теории массового обслуживания. Есть теория и для описанных теперь ситуаций – она называется теорией статистических решений. Рассмотрим основные ее подходы и рекомендации.

Наряду с выигрышами будем пользоваться еще и величинами риска. Определим их, исходя из следующих соображений. Если мы выбрали первую культуру, т. е. стратегию A_1, а погода окажется в состоянии $П_1$, то получим по этой культуре максимальный выигрыш – 15 единиц (табл. 5.2), риск равен нулю. Ну, а если природа «выдаст» нам состояние $П_3$? Тогда A_1 даст всего 7 единиц, а вырастили бы A_4 — было бы 18 единиц, значит, риск для ситуации $A_1 - П_3$ можно оценить в $18 - 7 = 11$ единиц.

Для стратегии A_4 в состоянии природы $П_3$ риска нет совсем, но при состоянии $П_1$ четвертая культура дает 8 единиц, а первая дала бы 15, т. е. риск для $A_4 - П_1$ нужно оценивать в $15 - 8 = 7$ единиц. Аналогично определим все величины риска для нашей задачи: вычтем размеры выигрышей в каждом столбце таблицы 5.2 из максимального в данном столбце выигрыша. Риски представлены в таблице 5.3.

Теория статистических решений содержит целый ряд подходов или критериев для выбора в таких задачах как бы лучшего решения. Оговорка «как бы» связана с тем, что однозначного «абсолютно» лучшего решения в задачах с полной неопределенностью установить нельзя.

Таблица 5.3

Стратегии и риски

Природа / Стратегия	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	0	5	11
A_2	3	0	8
A_3	6	2	5
A_4	7	1	0

Находим несколько как бы лучших решений, а одно-единственное из них пусть выбирает исполнитель – теперь уже с помощью не математики, а здравого смысла. Пока пронумеруем и рассмотрим различные критерии.

1. Критерий максимального выигрыша (крайнего оптимизма). Это пожалуй, самый простой подход: смотрим таблицу

выигрышей, из всех цифр выбираем наибольшую, соответствующая ей стратегия и будет наилучшей. Максимальная цифра выигрыщей у нас 18, она отвечает стратегии A_4, ее и выбираем. Критерий относят к крайнему оптимизму по понятной причине: никаких рисков он во внимание не принимает.

2. Критерий максимального среднего выигрыша (критерий Лапласа). Он учитывает все природные ситуации. Находим средние выигрыши для всех стратегий. Для стратегии A_1 средний выигрыш составляет:

$$\frac{15+11+7}{3}=11,$$

для стратегии A_2 он равен

$$\frac{12+16+10}{3}=12,7;$$

для A_3 получим 12; для A_4 — 13,7. Наибольший средний выигрыш приходится на A_4, ее по этому критерию и надо выбирать.

3. Максимальный критерий Вальда. По каждой стратегии, т. е. строке таблицы 5.2, находим наименьший, минимальный выигрыш. Это будут величины 7; 10; 9; 8. Из них находим максимальную величину, она определит лучшую стратегию. У нас наибольший из минимальных выигрышей — это 10, соответствующая стратегия — A_2. Критерий Вальда нужно отнести к крайнему пессимизму, ведь выбираем лучшее из худших. Ну что ж, это критерий для очень осторожного исполнителя.

4. Критерий минимаксного риска (критерий Сэвиджа). Теперь обратимся к таблице 5.3, найдем по каждой ее строке, т. е. каждой ее стратегии, максимальный риск. Это будут величины 11; 8; 6; 7. Среди максимальных рисков находим наименьшую величину, это 6, ей и отвечает оптимальная альтернатива — стратегия A_3. Критерий Сэвиджа стремится избежать большого риска, это тоже пессимистический критерий, как и предыдущий.

5. Критерий компромисса по Гурвицу (критерий оптимизма — пессимизма). Этот критерий рекомендует некоторый компромисс между выбором решений на основе крайнего оптимизма и крайнего пессимизма. При крайнем оптимизме (критерий 1) мы

ориентировались на максимальные по каждой строке таблицы 5.2. выигрыши, при пессимизме — на минимальные. Включим теперь в расчет и те, и другие. Для компромисса максимальные и минимальные выигрыши будем взвешивать с помощью коэффициента α — произвольного коэффициента, выбираемого между нулем и единицей. В таблице 5.4. показаны результаты расчетов для значений коэффициентов: $\alpha = 0{,}5$; $\alpha = 0{,}8$ и $\alpha = 0{,}4$.

Таблица 5.4

Расчеты по критерию Гурвица

Стратегия	Максимальный выигрыш	Минимальный выигрыш	Компромисс при		
			$\alpha = 0{,}5$	$\alpha = 0{,}8$	$\alpha = 0{,}4$
A_1	15	7	11,0	13,4	10,2
A_2	16	10	**13,0**	14,8	**12,4**
A_3	14	9	11,5	13,0	11,0
A_4	18	8	**13,0**	**16,0**	12,0

Поясним расчет на примере стратегии A_1.
Для $\alpha = 0{,}5$ имеем компромисс $0{,}5 \cdot 15 + 0{,}5 \cdot 7 = 11{,}0$;
для $\alpha = 0{,}8$ имеем $0{,}8 \cdot 15 + 0{,}2 \cdot 7 = 13{,}4$;
для $\alpha = 0{,}4$ получим $0{,}4 \cdot 15 + 0{,}6 \cdot 7 = 10{,}2$.
Для стратегии A_2
при $\alpha = 0{,}5$ имеем $0{,}5 \cdot 16 + 0{,}5 \cdot 10 = 13{,}0$ и т. д.

Для каждого значения коэффициента α таблица 5.4 дает 4 числа, из которых наибольшее и указывает на лучшее решение. Эти наибольшие числа подчеркнуты; следовательно, при $\alpha = 0{,}5$ лучшим надо считать две стратегии — A_2 и A_4, при $\alpha = 0{,}8$ оптимальна стратегия A_4, при $\alpha = 0{,}4$ — стратегия A_2.

Величина коэффициента выбирается субъективно. Чем ближе он к единице, тем сильнее на принятие решения влияют максимальные значения выигрышей, т. е. субъекта можно отнести к оптимистам. Кстати, при $\alpha = 1{,}0$ критерий Гурвица превращается в первый наш критерий — крайнего оптимизма. Там лучшей считалась стратегия A_4, она остается и при оптимистичном коэффициенте $\alpha = 0{,}8$ (табл. 5.4).

При большей склонности к осторожности, пессимизму коэффициент α приближается к нулю, усиливается ориентация на минимальные выигрыши. В таблице 5.4 самый «осторожный» коэффициент $\alpha = 0{,}4$, он рекомендует стратегию A_2. Эта же стратегия A_2 оптимальна и при критерии Вальда (крайнего пессимизма), кстати, в него и переходит критерий Гурвица при $\alpha = 0$. Итак, мы использовали пять критериев для решения задачи в условиях неопределенности.

Результаты получились следующие:

Критерий	1	2	3	4	5
Лучшее решение	A_4	A_4	A_2	A_3	A_2 и A_4

Как видим, по разным критериям в числе лучших оказались три из четырех наших стратегий. Окончательное решение остается за оперирующей стороной, хотя, возможно, и будет учтено, что чаще всего в числе лучших оказывалась стратегия A_4.

Рассмотрим устранение неопределенности. Неопределенность в задаче будет уменьшаться, если состояние природы перестанет быть полностью непредсказуемым. В нашем примере речь идет о трех возможных погодных ситуациях в следующем году. Пусть в период выработки решения прогноза погоды на предстоящий год еще нет. Но ведь можно изучить фактические погодные условия за ряд предыдущих лет, вычислить действительные доли или проценты состояний природы $П_1$, $П_2$, и $П_3$ в прошлом и приравнять к ним ожидаемые вероятности этих состояний на будущий год. Эти вероятности называются априорными, поскольку исходят только из прошлых данных, а не из текущего опыта, эксперимента.

Предположим, по информации за последние 20 лет оказалось, что состояние природы, обозначенное у нас $П_1$, наблюдалось в течение 5 лет, т. е. заняло 25%, погода $П_2$ была 12 лет — 60%, состояние $П_3$ — 3 года, или 15%. Вот теперь априорно предположим, что на следующий год имеем такие вероятности состояний природы: $П_1$ — 0,25, $П_2$ — 0,60, $П_3$ — 0,15. Все остальные наши данные остались неизменными. Будем принимать решение.

Теперь для каждой стратегии мы можем оценить величину ожидаемого выигрыша. Возьмем стратегию A_1. Если состояние природы будет $П_2$, то выигрыш составит 15 единиц, но вероятность этой погоды равна 0,25, значит ожидаемый выигрыш составит $15 \cdot 0{,}25$. Всего ожидаемый выигрыш при стратегии A_1 составит $15 \cdot 0{,}25+11 \cdot 0{,}60+7 \cdot 0{,}15=11{,}40$. Для стратегии A_2 ожидаемый выигрыш равен $12 \cdot 0{,}25+16 \cdot 0{,}60+10 \cdot 0{,}15=14{,}10$, для стратегии A_3 — $9 \cdot 0{,}25+14 \cdot 0{,}60+ 13 \cdot 0{,}15=12{,}60$, для стратегии A_4 — $8 \cdot 0{,}25+15 \cdot 0{,}60+18 \cdot 0{,}15=13{,}70$.

Наибольшее математическое ожидание выигрыша, 14,1 единицы, дает стратегия A_2, ее и нужно считать оптимальной стратегией.

С помощью тех же вероятностей состояний природы можно оценить не только ожидаемые выигрыши, но и средние риски. С помощью данных таблицы 5.3 получим математическое ожидание риска при стратегии A_1: $0 \cdot 0{,}25+5 \cdot 0{,}60+11 \cdot 0{,}15=4{,}65$; аналогично имеем для стратегии A_2 средний риск 1,95; для A_3 — 3,45; для A_4 — 2,35. Лучшим надо считать, конечно, решение с минимальным средним риском, это стратегия A_2.

В новой ситуации мы применили два критерия — максимального среднего выигрыша и минимального среднего риска. Оба рекомендуют одну стратегию, и это не случайно: в такой постановке задачи названные критерии всегда приводят к одинаковому решению. Это вполне понятно — где максимизируется ожидаемый выигрыш, там же минимизируется риск. Значит, в новой постановке задачи фактически используется один критерий выбора лучшего решения (вспомним, что в условиях полной неопределенности различных критериев мы применили пять).

Использование априорной вероятности — это лишь первый шаг на пути устранения неопределенности. В нашем примере достаточно ясен и второй шаг: нужно привлечь информацию со стороны синоптиков, т. е. подробно узнать прогноз для нашего района на следующий год, особенно на весь период сельхозработ.

Предположим, прогноз вполне близок к состоянию природы $П_р$. Тогда исполнитель, если он полный оптимист, сделает вывод: избираем стратегию A_1, дающую при $П_1$ наибольший выигрыш. Оптимист «неполный» поступит осторожнее. Он узнает, что по статистике прогнозы погоды на следующий год выполнялись в 85% случаев. Поэтому он вернется к вероятностям, но уже придаст состоянию $П_1$ вероятность 0,85, а оставшиеся 0,15 разделит между $П_2$ и $П_3$; затем рассчитает ожидаемые средние выигрыши, как мы уже делали для априорных вероятностей, и выберет наиболее выигрышную стратегию. Этот выбор будет надежнее, чем априорный, потому, что неопределенность у нас заметно уменьшилась.

Необходимо учитывать, что понятие «состояние природы» далеко не во всех задачах надо понимать буквально, как в нашем примере; оно просто обозначает состояние среды, условия, значения некоторых факторов, влияющих на изучаемые процессы. Например, на промышленном предприятии стратегии определены как выпуск различных наборов продукции, а зависит он от качественных характеристик поступающего сырья; последние будут выступать как состояния природы.

Для получения как можно большей информации о состоянии природы (в широком смысле) не исключено проведение специальных экспериментов. Предприятие интересует, например, сколько сырья различного качества будет получено. Априорно можно, конечно, обобщить фактические данные за прошлые годы. Но решили еще провести эксперимент. Начали с опроса поставщиков по почте или телефону. Окончили эксперимент командированием своих специалистов, которые так детально выяснили ситуацию, что предстоящее состояние природы можно определить уже однозначно. Такой эксперимент, который полностью устраняет неопределенность в оценке состояния природы, называется идеальным.

Проведение экспериментов по устранению неполноты и недостоверности информации – один из существенных разделов теории статистических решений. Анализируется возможность проведения последовательных экспериментов с постепенным уточнением информации. На разных этапах следует решать вопрос о прекращении или продолжении эксперимента. Казалось бы, почему не продолжать его до идеального результата? Но ведь эксперимент обычно требует затрат и надо доказать их целесообразность.

Рекомендуется такой подход. Оценивается величина ожидаемого среднего выигрыша при принятии решения до эксперимента с использованием, к примеру, априорных вероятностей.

Оценивают также возможный выигрыш после проведения эксперимента и стоимость самого эксперимента. Если ожидаемое приращение выигрыша после проведения эксперимента выше его стоимости, то эксперимент целесообразен, в противном случае — нет. Конечно, идеальный эксперимент не всегда осуществим даже при высоких затратах, например, абсолютно точное предсказание погоды на следующий год пока невозможно.

Рассмотренные задачи в условиях неопределенности и риска решать было не так легко даже при сравнительно простом допущении, что альтернативы отбираются по одному административному критерию — максимуму выигрыша. Но многие задачи управления принятия решений, как уже отмечалось, являются многоцелевыми, многокритериальными. Иногда удается несколько целей свести к одному обобщающему критерию. Упоминался, например, применительно к производственно-транспортным задачам критерий минимума приведенных затрат, объединяющий три цели: снижение текущих затрат на производство, капитальных вложений и транспортных расходов. Но это удается далеко не всегда.

Если не уходить от транспортных проблем, то возьмем такой пример. Надо принять решение о выборе одного из нескольких проектных вариантов нового самолета для грузоперевозок.

Качество самолета решено оценивать с помощью таких параметров: коммерческая грузоподъемность, крейсерская скорость, дальность полета без дозаправки, стоимость летного часа, стоимость проектирования и изготовления самолета. Совершенно ясно, что эти целевые показатели к одному критерию никак не приведешь. Они и качественно не совмещаются и количественно не суммируются, ведь у них различные единицы измерения — тонны, километры в час, просто километры, рубли. И проводить оценку вариантов по какому-либо одному из пяти параметров, отбросив остальные, тоже, конечно, недопустимо.

При нескольких целях к выбору лучшего решения можно двигаться следующим путем. Формулируются все допустимые решения (альтернативы, стратегии). По каждому из них определяем уровень достижения всех поставленных целей — если можно, количественно, если нет, то качественно. Затем целесообразно по каждой цели перейти от количественного (качественного) уровня к ранжированию наших альтернатив. Скажем, по четырем предложенным моделям — вариантам самолета зафиксированы коммерческие грузоподъемности; ранжирование выполняется просто — варианту с наибольшей грузоподъемностью присваиваем номер один, следующему по грузоподъемности — номер два и т. д. Аналогично ранжируем варианты самолетов по другим целям. Предположим, получены результаты, приведенные в таблице 5.5. Заметим, что по некоторым целям варианты могут совпадать, тогда им присуждается одинаковый ранг. Допустим, по третьей цели (дальность полета) лучшим вариантом является модель А, у вариантов Б и В дальность меньше, причем одна и та же, даем им обоим второй ранг, у варианта Г дальность еще меньше, ему номер три. Схожее получается по пятой цели.

Таблица 5.5

Многоцелевые альтернативы

Альтернативы	Цели				
	1	2	3	4	5
А	1	3	1	1	2
Б	2	1	2	2	1
В	3	4	2	4	2
Г	4	2	3	3	3

Для отбора лучшей альтернативы проведем сначала процедуру парных сравнений. Сопоставим альтернативы А и Б. Как видим (табл. 5.5), альтернатива А лучше Б по целям 1,3,4, но по целям 2 и 5, наоборот, лучше альтернатива Б.

Сравним далее альтернативы А и В. По четырем первым целям альтернатива В хуже, чем А, а по цели 5 они равны. Отсюда очевиден один вывод: из дальнейшего анализа вариант В следует исключить, ибо по сравнению с А он явно не эффективен. Сравниваем теперь альтернативы А и Г. Вариант Г хуже А по четырем целям, но по цели 2 он лучше: занимает второе место, тогда как А — третье. Потому отбрасывать Г пока нельзя. Для полноты парных сравнений нужно еще сопоставить альтернативы Б и Г. Как видим, по всем целям Б лучше, чем Г, значит, теперь есть все основания вариант Г исключить.

Остались для дальнейшего рассмотрения две альтернативы — А и Б. Проделанная процедура есть первый этап поиска оптимального решения, это отбор эффективных альтернатив из всех допустимых. Эффективной считается такая альтернатива, по сравнению с которой нет другой, лучшей или равной ей по всем целям. В нашем примере это А и Б, неэффективные варианты В и Г мы отбросили.

Следующий этап — выбор из эффективных альтернатив одной, наилучшей. Разумеется, это вполне можно возложить на эксперта, которому при выборе удастся, видимо, учесть некоторые дополнительные соображения, факторы и поглубже качественно обосновать свое решение. Но не исключено и продолжение количественного подхода.

Необходимо оценить количественно важность включенных в задачу целей с помощью весовых коэффициентов, дающих в сумме по всем целям единицу. Скажем, в нашем примере сравнительная важность целей оценена так: первая цель — 0,3, вторая — 0,1, третья — 0,2, четвертая — 0,3, пятая — 0,1. Значит, специалисты посчитали, что важнее других — цели 1 и 4, затем следует третья и менее важны две остальные.

Имея коэффициенты важности целей, можно по каждой эффективной альтернативе рассчитать обобщенный показатель эффективности, взвешенный суммарный ранг.

Для альтернативы А (табл. 5.6) суммарный ранг будет равен: $1 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,1 = 1,3$; для альтернативы Б имеем $2 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,1 = 1,8$. Взвешенный ранг (место) выше у варианта А, значит, его и нужно считать оптимальным вариантом.

Здесь мы рассмотрели задачи, изучаемые теорией статистических решений, причем не в самой сложной их постановке. Отмечено, что в этих задачах могут различаться: альтернативы (стратегии, варианты решения); цели (критерии); состояния природы (среды); лица, принимающие решение (ЛПР).

В рассмотренных постановках альтернатив, конечно, было несколько, а дальше уже не все варьировалось: несколько состояний природы, но одна цель, одно ЛПР; несколько целей, но одно состояние среды, одно ЛПР. Сложнее оказывается задача, в которой несколько и целей, и состояний природы, да еще и работает группа ЛПР, мнения некоторых совсем не совпадают. Теория исследует решение и таких задач, оно более громоздко, чем рассмотренные постановки, но принципиально новой методики, вообще говоря, не содержит.

5.5. Игры и стратегии

В рассмотренных в предыдущем разделе задачах условия неопределенности создавались в основном внешней средой, они и назывались у нас состояниями природы. Эти условия в сущности объективные, от нашего поведения они не зависят, ничьи пожелания и соображения на них не влияют. Приводился пример, где состояния природы включались в задачу в их буквальном смысле, как погодные ситуации в следующем году.

Однако неопределенность может создаваться и как результат конфликтных ситуаций. Конфликтная ситуация создается уже субъективно, путем противостояния интересов, целей двух или более сторон. Различие с состояниями природы здесь довольно существенно. То или иное состояние природы от стратегии оперирующей стороны не зависит: природе «все равно». Но в конфликтной ситуации действия сторон зависят друг от друга, поскольку выигрыш одной стороны может означать проигрыш другой, «природного равнодушия» здесь нет и в помине.

Характерными примерами конфликтных ситуаций являются всем известные игры — шахматы, шашки, карточные игры, домино и т. д. Математический раздел, исследующий моделирование конфликтных ситуаций, называется **теорией игр**. Многие термины этой теории происходят от игровых названий: игрок, ход, партия и другое. Но теория игр вряд ли получила бы такое развитие и научно-практический интерес, если бы объекты ее изучения ограничивались шахматами и шашками.

Конфликтные ситуации, игры возникают в весьма широком диапазоне человеческой деятельности. Все военные действия представляют собой конфликтные ситуации, игры с противником, и идут они не только в период войны, — хорошо известно, что для обучения войск в мирное время очень тщательно разрабатываются сценарии игр. Игрой является и борьба с преступностью, начиная с раскрытия преступления и кончая судебным процессом. Куда приятнее этих процедур игры спортивные, их перечислять — места не хватит, но нельзя не упомянуть футбол и хоккей, эти игры наблюдают миллионы.

Игровые ситуации возникают и в экономической сфере деятельности. Причем с переходом к рыночной экономике они, безусловно, расширятся и усилятся: ведь рынок практически не существует без конкуренции между производителями продукции, а также продавцами, покупателями, а конкуренция неизбежно создает конфликты, при которых выигрыш одного игрока может прямо вести к проигрышу другого. Еще одно распространенное проявление конфликтных ситуаций в экономике – это взаимоотношения поставщиков и потребителей продукции. К сожалению, для многих поставщиков оказывается выгодным производить продукцию не очень высокого качества, но реализовывать ее по очень высоким ценам. Интересы потребителей вполне противоположны: им выгодны продукты отличного качества и низкой цены. В застойные годы побеждали в злой игре чаще всего монополисты-производители. Но времена меняются.

Игры, изучаемые теорией, имеют определенные правила, определяющие, что разрешается или не разрешается делать игрокам, к какому выигрышу или проигрышу приводят те или иные результаты. В соответствии с правилами делают последовательные ходы участники игры. Какой сделать ход, выбирает участник, хотя не исключаются и чисто случайные ходы. В целом же допускаем существование набора правил, определяющих еще до игры выбор игроком варианта своих действий в любой сложившейся ситуации. Такой набор правил называется стратегией.

Стратегий может быть много, вплоть до величин астрономических, как число стратегий в шахматной игре. Выделяют даже понятие бесконечных игр, где число стратегий не ограничено. Но теория изучает в деталях лишь конечные игры с ограниченным числом возможных стратегий. А здесь самая, пожалуй, важная задача теории игр – это выявление оптимальных стратегий игроков. Оптимальной является стратегия, которая приносит игроку максимально возможный выигрыш. Проблема эта довольно сложная: ведь большой выигрыш одного игрока — это обычно большой проигрыш другого, но другой-то тоже стремится к максимальному выигрышу, а не проигрышу, и соответственно действует.

В игре могут противостоять и два, и больше участников. При двух участниках игру называют парной, при более чем двух — множественной. Если число участников больше двух, то некоторые из них могут создавать коалиции – координировать свои стратегии, исходя из каких-то общих интересов. Образование перед игрой коалиций приводит к так называемым кооперативным парам.

Рассмотрим конечную парную игру с нулевой суммой. Нулевая сумма означает, что выигрыш одного участника в точности равен проигрышу другого. Игра идет без снисхождений, поэтому игры с нулевой суммой называются еще антагонистическими.

Условия игры содержат в себе возможные стратегии каждого из игроков и суммы выигрыша (проигрыша) для любого сочетания стратегий. В простом случае эти условия можно представить в табличной (матричной) форме. Данным нашего примера игры соответствует таблица 5.6.

Таблица 5.6

Условия игры

игрок B / игрок A	B_1	B_2	B_3	B_4	Минимальный выигрыш
A_1	4	10	3	6	3
A_2	<u>5</u>	7	9	8	<u>5</u>
A_3	2	1	6	11	1
Максимальный проигрыш	<u>5</u>	10	9	11	

Первый игрок — игрок А располагает тремя стратегиями, игрок В — четырьмя. В таблице приведены только суммы выигрыша игрока А, ибо для игрока В та же сумма будет проигрышем. Скажем, игрок А применил стратегию A_1, а игрок В — стратегию B_4. Такой выбор стратегий приносит первому игроку выигрыш в 6 единиц (табл. 5.6), а второму игроку — проигрыш в те же 6 единиц. Надо платить! Таблица эта и называется платежной матрицей.

Нас интересует один основной вопрос: какие стратегии лучше выбирать игрокам? Начнем с первого игрока. Ему ясно, что при стратегии A_1 можно выиграть 10 единиц, при стратегии A_2 — 9, а при A_3 даже 11 единиц. Но согласимся с теорией игр: надо считать, что другой игрок «не глупее нас». Он будет выбирать стратегии, дающие нам (игроку А) не наибольший, а наименьший выигрыш. А таковыми являются при стратегии A_1 — 3 единицы, при A_2 — 5 и при A_3 — только 1 единица. Эти минимальные выигрыши участника А приведены в последнем столбце таблицы 5.6.

Игрок А, будем считать, достаточно осторожен. На самые большие выигрыши платежной матрицы он не ориентируется. Он смотрит на столбец минимальных выигрышей и рассуждает так: если я выберу стратегию A_2, то гарантирую себе не менее 5 единиц выигрыша; при других стратегиях игрока А эта и будет оптимальной.

Игроку B_2, как ни играй, все равно проиграешь. Но ведь и проиграть можно больше или меньше. Для каждой стратегии игрока В определим максимально возможный проигрыш и выпишем эти величины в последнюю строку таблицы 5.6. Игрок В тоже осторожен: он ищет стратегию, где даже максимально возможный проигрыш будет наименьшим. Такой стратегией, как видим, выступает B_1, при ней больше 5 единиц второй игрок не проиграет. Он и выбирает этот минимакс.

Итак, игрок А ориентируется на максимин. Игрок В — на минимакс. В этой игре они совпадают, равняясь 5 единицам при паре стратегий A_2, B_1. Эти стратегии нужно считать оптимальными, ничего лучшего здесь не придумаешь.

Если в игре максимин совпадает с минимаксом, то выявляется так называемая точка, ей отвечает в нашей таблице 5.6 подчеркнутое число 5. Эти 5 единиц составляют цену игры. Стратегии A_2, B_1 называются оптимальными чистыми стратегиями, их пара представляет собой решение игры.

Конечно, наш пример очень прост, стратегий немного, но он позволяет понять некоторые общие выводы теории игр. Назовем игрой с полной информацией такую игру, в которой каждому игроку перед любым его ходом полностью известно все, что происходило в игре раньше — в каком порядке, кто и как ходил. Оказывается, что всякая игра с полной информацией имеет седловую точку, а последняя определяет пару чистых оптимальных стратегий. Они обеспечивают строгий выигрыш (проигрыш), равный цене игры. Но раз все это известно, зачем играть? В самом деле, игра в таком случае смысла не имеет, как и в нашем простом примере.

Однако догадливый читатель может сказать: простите, ведь и шахматы по вашему определению нужно считать игрой с полной информацией, значит, и шахматная игра имеет седловую точку и оптимальные стратегии? Ответим: да, имеет. Но ведь играют же, и интерес к шахматам не падает, а растет. Все правильно. Оптимальные-то стратегии есть, но никто их не знает и узнать их чрезвычайно сложно: сначала надо составить таблицу (матрицу) всех возможных стратегий, а число их будет не три-четыре, как в таблице 5.6, а астрономически велико. Нахождение всех стратегий в шахматах и их систематизация пока недоступны человеку даже с помощью самых быстродействующих ЭВМ. Видимо, когда-нибудь это удастся и тогда, к сожалению, игра в шахматы потеряет смысл. А пока перейдем к ситуациям игр без седловой точки.

В условиях игр довольно редко встречается случай, когда максимин одного игрока и минимакс другого полностью совпадают, как в нашем предыдущем примере. Гораздо чаще максимин и минимакс не равны, а значит нет и седловой точки. Игры без седловой точки сложнее, но это не значит, что они не имеют решения. Теория игр утверждает, что любая конечная антагонистическая игра имеет решение, т. е. пару оптимальных стратегий и цену игры. Но вот стратегии будут, как правило, иными.

Игры с седловой точкой решаются в чистых стратегиях. Чистая стратегия четко и однозначно определяется максиминным подходом. Решение игры без седловой точки сводится обычно к смешанным стратегиям. В смешанной стратегии игрок должен случайным образом чередовать две или больше чистых стратегий. Какая стратегия будет применима в очередной партии (ходе), об этом не должен знать противник, да и для самого применяющего ее она определяется случайно, «по жребию». Только в массе своей чистые стратегии должны иметь в оптимальной смешанной стратегии определенный удельный вес. Лучше разобраться в этом поможет пример.

Предположим, что в форме игры представлена следующая ситуация. В крупном городе на значительной площади размещена выставка новинок науки, техники, экономики. От выхода на выставку каждые полчаса отправляется по ее территории кольцевым маршрутом автопоезд, состоящий из трех подсоединенных двухместных электромобилей. Ведет автопоезд один водитель в первом электромобиле. К каждой поездке пассажиры выделяются двумя службами: служба посетителей выделяет пришедших на выставку, желающих по ней «прокатиться», служба сотрудников выделяет работников выставки, которым требуется подъехать к какому-либо из отдаленных объектов. Поскольку в автопоезде шесть мест, то каждой из служб разрешается выделять на одну поездку не более трех пассажиров, но можно и меньше — одного или двух (трех ведь не всегда и наберешь).

Выделенные пассажиры — посетители и сотрудники занимают места в автопоезде. Незанятые места «догружать» уже не разрешается. Если пассажиров оказалось не более четырех, то третий электромобиль (пустой) отсоединяют от рейса, если пассажиров не более двух, то отцепляют два электромобиля. В отправляющемся автопоезде число пассажиров может быть четным (и пустых мест нет) или нечетным при очном незанятом месте.

Перед отправкой автопоезда каждый пассажир уплачивает за проезд одну тысячу рублей. Деньги опускают в одну из стоящих у старта касс — кассу службы сотрудников или кассу службы посетителей. Если общее число пассажиров четное, то деньги за рейс опускаются в кассу службы сотрудников. Если же оказалось незанятое место, то это упущение считается виной службы сотрудников, и плата вносился в кассу службы посетителей.

Описанную ситуацию рассматриваем как игру между двумя «противниками» — службами сотрудников и посетителей. Будем считать деньги, опущенные в кассу службы сотрудников, ее выигрышем, а ее проигрышем оцениваем плату в кассу службы посетителей. Тогда в зависимости от возможных стратегий наших «игроков», т. е. количества выделяемых ими на рейс пассажиров, образуется следующая таблица выигрышей — проигрышей с позиции службы сотрудников (табл. 5.7).

Таблица 5.7

Платежная матрица

Служба посетителей / Служба сотрудников	1	2	3
1	2	–3	4
2	–3	4	–5
3	4	–5	6

Чисто выигрышной стратегии ни у какой службы нет. Если служба сотрудников выделяет для какого-то рейса одного пассажира, то при выделении другой службой тоже одного пассажира первая служба выиграет 2 тыс. руб., при отправке трех посетителей — выиграет 4 тыс. руб., но при выделении второй службой двух человек служба сотрудников проигрывает 3 тыс. руб. Возможны выигрыши и проигрыши и при двух других стратегиях службы сотрудников, причем проигрыш может дойти до 5 тыс. руб.

Ясно, что рекомендовать службе какую-либо одну стратегию неразумно: при постоянной ее стратегии другая служба быстро это заметит и тоже станет применять неизменно свою стратегию, приносящую ей наибольшую прибыль. Если, скажем, служба сотрудников всегда станет выделять двух пассажиров, то службе посетителей нужно остановиться на выделении трех человек, что будет давать ей по 5 тыс. руб. с каждого рейса.

Понятно, что стратегии нужно менять, но как?

Первое правило состоит в том, что стратегии необходимо менять в случайном порядке. Ведь при наличии какой-либо закономерности в перемене стратегий другая сторона вскоре ее разгадает и будет применять свою ответную «закономерность», которая даст ей только выигрыши. Но случайность изменений не значит, что в большом числе рейсов каждая из трех стратегий должна встречаться одинаково часто. Существует оптимальное решение задачи, которое определяет наиболее выгодную частоту применения каждой стратегии.

Итак, на этом примере имеем конечную парную игру с нулевой суммой без седловой точки. Такая игра, как уже отмечалось, имеет решение, но найти его гораздо труднее, чем указать оптимальные чистые стратегии при наличии седловой точки в матрице задачи.

Переходя к процедурам решения общих игр, нельзя не обратить внимания на характерную взаимосвязь различных методов анализа и управления. В одной из предыдущих глав мы анализировали задачи линейного программирования – задачи детерминированные с четко выраженной функцией и системой ограничений. Потом перешли к задачам с вероятностной определенностью и в условиях неопределенности, что привело нас в конце концов к рассмотрению игр. Казалось бы, «ушли» достаточно далеко. Но вот теперь надо и «возвращаться». Оказывается, что нахождение решения парной игры с нулевой суммой сводится математически к задаче линейного программирования.

Мы отмечали, что методы линейного программирования хорошо разработаны, имеются стандартные прикладные программы для всех серийных ЭВМ. Следовательно, найти оптимальное решение рассматриваемой игры не так уж сложно, надо лишь представить ее как модель линейного программирования.

Рассмотренные пока задачи относились к играм двух участников с нулевой суммой. Теория игр этим не ограничивается, рассматриваются и более сложные задачи. Возьмем парную игру с нулевой суммой. В ней обязательно один участник выигрывает, а другой столько же проигрывает; могут выигрывать или проигрывать оба игрока совместно. Значит, нет уже полного антагонизма, игроки могут и о чем-то договариваться, координировать свои действия. Так возникают кооперативные игры, в которых игрокам разрешается обсуждать перед игрой свои стратегии, согласовывать какие-то компромиссные решения. Договариваются и о дележе общего выигрыша. Разработаны специфические методы решения кооперативных игр.

Другой непостоянный параметр игры — это число ее участников. Их может быть не только два, но и три, и более, вплоть до бесконечности.

И вот здесь теория игр испытывает большие трудности. Она, как видим, хорошо умеет решать игры с двумя участниками. Оказывается, что теория вполне успешно оптимизирует и игры с бесконечным числом игроков. А вот для игр с тремя игроками и большим, но конечным числом участников никаких точных и универсальных методов решения пока не существует. А ведь в экономике основной интерес представляют игры *n* лиц, особенно кооперативные.

В реальных играх возникают и другие сложности: далеко не всегда известны все возможные стратегии противника, число партий игры может ограничиваться одной — двумя (смешанную стратегию не реализуешь) и т. д. Но все это не перечеркивает, конечно, практического значения теории игр для разумного, обоснованного анализа многих и многих конфликтных ситуаций.

В условиях задач теории игр мы отмечали платежную матрицу. Будем считать, что в общем виде – это матрица коэффициентов a_{ij}, где a_{ij} – размер выигрыша игрока А при его *i*-й стратегии, если игрок В применил *j*-ю стратегию. Обозначим через v цену игры с матрицей a_{ij}.

Решением игры являются оптимальные смешанные стратегии обоих игроков. Обозначим через x_i — частоты, с которыми игрок А выбирает свои чистые стратегии, причем $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m = 1$; через y_i обозначим частоты выбора игроком В своих стратегий, причем $y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n = 1$.

При указанных обозначениях нетрудно описать условия игры системой неравенств:

$$x_1a_{11} + x_2a_{21} + \ldots + x_m a_{m1} \geq v \text{ при стратегии } B_1;$$

$$x_1a_{12} + x_2a_{22} + \ldots + x_m a_{m2} \geq v \text{ при стратегии } B_2;$$

....

$$x_1a_{1n} + x_2a_{1n} + \ldots + x_m a_{mn} \geq v \text{ при стратегии } B_n,$$

где B_1, B_2..... B_n – чистые стратегии игрока В.

Разделим все эти неравенства на v, при этом обозначим $\frac{x_i}{v} = z_i$. Целью игрока А является максимизация v или минимизация $\frac{1}{v}$.

Тогда имеем модель линейного программирования :

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_m = 1/v \to \min$$

при ограничениях:

$$a_{11}z_1 + a_{21}z_2 + \ldots + a_{m1}z_m \geq 1;$$

$$a_{12}z_1 + a_{22}z_2 + \ldots + a_{m2}z_m \geq 1;$$

....

$$a_{1n}z_1 + a_{2n}z_2 + \ldots + a_{mn}z_m \geq 1.$$

Двойственная задача дает оптимальную смешанную стратегию для игрока В.

Обозначим $\frac{y_i}{v} = w_i$, тогда

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n \to \max$$

при ограничениях

$$a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{1n}w_n \leq 1;$$

$$a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{2n}w_n \leq 1;$$

....

$$a_{m1}w_1 + a_{m2}w_2 + \ldots + a_{mn}w_n \leq 1 .$$

После решения задачи линейного программирования нетрудно найти оптимальные смешанные стратегии обоих игроков:

для игрока А $\qquad x_i = z_i v;$

для игрока В $\qquad w_i = w_i v.$

Охарактеризуем другой метод решения игры, это метод постепенного приближения к оптимальным стратегиям. Ставится мысленный опыт игры, в ходе которого первый и второй игроки используют друг против друга свои стратегии, преследуя цель побольше выиграть (поменьше проиграть). Имитируется проведение достаточно большого числа партий игры.

Начинает первый игрок с произвольно выбранной стратегии. Второй игрок отвечает своей стратегией, но уже не произвольной, а наиболее выгодной для него при выбранной стратегии первого. Во второй партии игрок применяет свою стратегию, наилучшую относительно ранее отобранной стратегии второго игрока. Последний выбирает во второй партии свою стратегию, наилучшую для него относительно всей предыдущей (уже смешанной) стратегии первого игрока. И так эксперимент продолжается весьма долго.

В общем, в каждой партии и первый, и второй игроки выбирают такую свою стратегию, которая оптимальна для него относительно всех предыдущих стратегий противника, взятых пропорционально частоте их применения.

Вернемся к нашему примеру и проведем описанный эксперимент. Допустим, сначала первый игрок, т. е. служба сотрудников, выбрал стратегию 3, дающую результат 4; –5 ; 6 в зависимости от стратегии второго игрока (табл. 5.7). Теперь второму игроку выгоднее всего взять стратегию 2, это приносит ему 5 единиц выигрыша. Он эту стратегию и выбирает, а она равносильна для первого игрока выигрышу –3; 4; –5. Разнообразную ситуацию начальной партии игры описывает первая строка таблицы 5.8. В ней подчеркнуты те цифры выигрыша (проигрыша), которые определяют выбор последующей стратегии. На стратегию 2 второго игрока первый игрок должен ответить (уже в следующей партии) своей стратегией 2, что обещает подчеркнутые 4 единицы выигрыша.

Но для второго игрока выбор стратегии определяется теперь уже смешанной прошлой стратегией первого игрока, состоящей из стратегии 3 и 2. Эти стратегии в сумме дают 1; –1; 1. Значит, второму игроку опять выгодна стратегия 2, ее и запишем в таблицу 5.8, указав, что оба выбора им стратегии 2 дают первому игроку возможный выигрыш –6; –8; –10. А это

Таблица 5.8

Имитация игры

Номер партии	Стратегия 1-го игрока	Накопленный выигрыш			Стратегия 2-го игрока	Накопленный выигрыш		
		1	2	3		1	2	3
1.	3	4	–5	6	2	–3	4	–5
2.	2	1	–1	1	2	–6	8	–10
3.	2	–2	3	–4	3	–2	3	–4
4.	2	–5	7	–9	3	2	–2	2
5.	1	–3	4	–5	3	6	–7	8
6.	3	1	–1	1	2	3	–3	3
7.	1	3	–4	5	2	0	1	–2
8.	2	0	0	0	3	4	–4	4
9.	3	4	–5	6	2	1	0	–1
10.	1	6	–8	10	2	–2	4	–6
11.	2	3	–4	5	2	–5	8	–11
12.	2	0	0	0	1	–3	5	–7

означает, что в третьей партии первому игроку выгодна стратегия 2. Строчку этой стратегии из таблицы 5.7 (–3; 4; –5) просуммируем с данными второй строки таблицы 5.8 (1; –1; 1) и получим результат смешанной стратегии первого игрока –2; 3; –4, которая приводит второго игрока к выбору в этой партии своей стратегии 3.

Всего в таблице 5.8 приведено 12 партий, для полного решения задачи надо продолжить, но ход расчета не меняется. Вспомним содержание нашей игры и остановимся, скажем, на партии № 10. Это будет десятый мысленный рейс нашего автопоезда. По окончании расчета девятого рейса накопленный максимальный выигрыш окажется равным 1 тыс. рублей (подчеркнутая единица в строке 9 табл. 5.8). Значит, первый игрок — служба сотрудников выбирает для десятого рейса стратегию 1, т. е. выделяет одного пассажира. К накопленным выигрышам строки т. е. к 4; –5; 6, прибавляем выигрыши 2; –3; 4 строки 1 таблицы 5.7, получаем 6; –8; 10, что внесено в строку 10 таблицы 5.8. Это есть величина накопленного выигрыша службы сотрудников. Для службы посетителей выгодна здесь величина –8, это их ожидаемый накопленный выигрыш при выборе стратегии 2. Значит, на десятый рейс им нужно направить двух пассажиров-посетителей. Тогда накопленный ожидаемый выигрыш для службы сотрудников составит перед одиннадцатым рейсом –2; 4; –6, что рекомендует службе перейти к стратегии 2.

Возьмем из строки 10 (табл. 5.8) подчеркнутые величины минимального, а затем максимального накопленного выигрыша, разделим их на число партий и найдем их среднее значение. Получим

$$\left(\frac{-8}{10}+\frac{4}{10}\right):2=-0{,}2.$$

Найдена приближенная величина цены игры при последовательных смешанных стратегиях по десятую партию игры. Для службы сотрудников ожидается в целом проигрыш 0,2 един. При продолжении роста в нашем опыте числа партий эта величина будет все более приближаться к нулю, так как в оптимальном решении цена этой игры равна нулю.

Таким образом, если обе службы будут «правильно» действовать, то в итоге каждая из них не получит по сравнению с другой ни выигрыша, ни проигрыша. Правильно действовать — это значит, придерживаться оптимальной смешанной стратегии. А в чем же она состоит? Наш метод должен дать ответ на этот вопрос.

Подсчитаем, с какой частотой участвовали в нашем эксперименте различные чистые стратегии. В 12 партиях первый игрок применил 3 раза стратегию 1; 6 раз — стратегию 2 и 3 раза — стратегию 3.

Второй игрок использовал 1 раз стратегию 1; 7 раз использовал стратегию 2 и 4 раза — стратегию 3. Хотя 12 партий для точного ответа мало, но полученный результат достаточно близок к точному решению, которое заключается в том, что в оптимальной смешанной стратегии каждый из игроков должен с частотой 25% применять стратегии 1 и 3 и 50% — стратегию 2. Для первого игрока в нашем опыте так и вышло, для второго пока не получилось — мало партий.

Итак, если бы в описанном методе мы рассчитали не 12 партий, а гораздо больше, или применили для расчета точный метод линейного программирования, то получили бы следующее оптимальное решение нашей игры.

Чистые стратегии	1	2	3
Их доля в смешанной стратегии	0,25	0,5	0,25

Это решение одинаково для каждого из игроков.

Цена игры равняется 0.

Оптимальных стратегий и следует придерживаться обеим нашим службам. Надо сочетать чистые стратегии, случайно выбирая для каждого рейса какую-либо из них, но соблюдая их доли для многих рейсов. Сделать это можно по-разному. Самый, пожалуй, простой способ: для сотни предстоящих рейсов служба заготавливает 100 листочков бумаги; на 25 из них записывает цифру 1, на 50 листочках — цифру 2 и на 25 —

цифру 3. Все 100 листочков помещают в закрытый сосуд или мешочек. Перед каждым рейсом вынимают наугад один листочек и по цифре на нем определяют число пассажиров рейса. Листочек в урну не возвращают. Таким образом, чистая стратегия для каждого рейса будет определяться совершенно случайно, но за 100 рейсов будет точно соблюдена структура смешанной стратегии.

Так действовать должны обе службы — и первый, и второй игроки. Теория игр доказывает, что отклонение от оптимальной стратегии выигрыша игроку не увеличит, а вот проигрыш, вероятно, возрастет.

Основные термины и понятия

- графы и сети;
- дерево целей;
- сетевой график;
- критический путь;
- резервы времени в сетевом графике;
- стратегии и риски;
- теория игр;
- оптимальная стратегия.

Упражнения

Задача 1.

Имеются следующие данные о планируемом комплексе работ по сооружению производственного объекта (таблица).

Требуется:

1. Составить сетевой график производства работ.
2. Проверить правильность составления графика и произвести его упорядочение.
3. Пронумеровать события и работы.

4. Определить ожидаемые сроки наступления событий.

5. Рассчитать критический путь.

6. Определить свободные и полные резервы времени некритических работ сетевого графика.

Таблица работ сетевого графика

Предшествующие работы	№ п/п	Шифр работы	Наименование работы	Продолжительность, дней
–	1		Кирпичная кладка	2
–	2		Подача оборудования	6
–	3		Монтаж стеновых панелей	1
Кирпичная кладка	4		Монтаж трансформаторной подстанции	8
Кирпичная кладка	5		Монтаж оконных блоков	12
Кирпичная кладка	6		Монтаж кровельных плит	7
Подача оборудования. Монтаж трансформаторной подстанции	7		Монтаж технологического оборудования 1-й линии	5
Подача оборудования. Монтаж трансформаторной подстанции	8		Монтаж КПП	9

Задача 2.

Имеются следующие данные о комплексе работ по возведению объекта, длительности работ и затратах по нормальному и срочному вариантам (таблица).

Требуется:

1. Составить и упорядочить сетевой график.

2. Определить ожидаемые сроки наступления событий для нормального варианта.

3. Определить критический путь.

4. Определить свободные резервы времени некритических работ.

5. Произвести последовательное сокращение срока выполнения комплекса работ вплоть до минимально возможного с учетом наименьшего прироста затрат на каждом этапе.

6. Проанализировать полученные результаты.

Исходные данные сетевого графика

Предшествующие работы	№ п/п	Шифр работы	Наименование работы	Продолжительность, дней
Кирпичная кладка. Монтаж стеновых панелей	9		Штукатурные работы	4
Монтаж оконных блоков	10		Монтаж дверных блоков	2
Штукатурные работы. Монтаж дверных блоков	11		Устройство полов	6
Монтаж оборудования 1-й линии	12		Монтаж оборудования 2-й линии	10
Монтаж кровельных плит. Монтаж оборудования 1-й линии	13		Устройство кровли	3
Устройство полов. Монтаж оборудования 2-й линии	14		Отделочные работы	11

Тесты

1. Назовите основные элементы графа как геометрической схемы:

а) стартовые и финишные события;
б) треугольники и прямоугольники;
в) вершины и ребра.

2. Сформулируйте, что представляет собой сетевой график:

а) рисунок всевозможных зависимостей;

б) связный ориентированный граф без контуров и петель;
в) графическую схему различных работ и событий.

3. Что понимается под критическим путем в сетевом графике?

а) последовательность работ между исходным и завершающим событиями графика, имеющая наибольшую общую протяженность во времени;
б) неопределенная последовательность вероятностных событий;
в) понятие аналогичное дереву целей.

4. Какие ситуации изучаются теорией игр?

а) ситуации аналогичные игре в шахматы;
б) конфликтные ситуации в экономике, военном деле, спортивных играх;
в) состязания в большинстве видов спорта.

Контрольные вопросы

1. Разъясните сущность методов и моделей социально-экономического прогнозирования.
2. Охарактеризуйте основы теории графов.
3. Опишите метод построения и расчета сетевых графиков.
4. В чем особенности экономико-математических задач в условиях неопределенности и риска?
5. Сформулируйте основы и экономические положения теории игр.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С переходом к рыночной экономике именно на уровне предприятия начинают концентрироваться те вопросы анализа, планирования и управления, которые раньше распределялись между всевозможными вышестоящими планами и директивными органами.

Вот принципиальная схема информационных связей в системе управления производством на уровне предприятия.

На предприятии выделяются управляющая система (службы управления) и управляемая система (производственный комплекс).

Управляемая система непосредственно осуществляет производственный процесс по выпуску продукции в результате применения труда и средств производства, в том числе вещественно-энергетических ресурсов, поступающих на ее вход от поставщика.

Управляющая система производит только переработку информации и вырабатывает управляющие сигналы для управляемого объекта.

При выработке управляющих воздействий особую роль приобретает использование математических методов и вычислительной техники. Круг возникающих здесь задач чрезвычайно широк, многообразен и весьма специфичен для различных типов производств – массового и мелкосерийного, монопродуктового и многономенклатурного, непрерывного и дискретного.

Отсюда довольно пестрым выглядит и научное направление, изучающее моделирование всевозможных задач анализа, оперативного планирования и управления. Это направление чаще всего называют исследованием операций.

Методы исследования операций позволяют находить с помощью математических методов и ЭВМ эффективное решение таких задач оперативного управления, как календарное планирование производства на предприятии и в его подразделениях, определение наилучших технологических маршрутов движения изделий, оптимизация размеров партий деталей и последовательности их запуска, наиболее рациональное использование оборудования, экономичное управление запасами сырья, материалов, промежуточной и конечной продукции, минимизация отходов при раскрое материалов, оптимальная организация перевозок и использования транспорта, создание эффективных систем массового обслуживания, построение сетевых графиков для сложных комплексных работ, и ряд других.

В условиях рыночной экономики ситуация резко изменяется: эффективно управлять производством становится невозможным без использования положений кибернетики о необходимости функционирования обратных связей в эффективных системах управления.

Таким образом, управление как предприятием, так и экономикой в целом представляет собой достаточно сложную систему, реализация которой «вручную» уже не приносит должных результатов.

Только математизация и компьютеризация процессов управления могут обеспечить высокое их качество и эффективность. Но для этого надо научиться моделировать решаемые нами задачи экономического анализа, планирования и управления.

ЛИТЕРАТУРА

Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики: Учебник. – М.: ЮНИТИ, 1998.

Андрейчиков А.В. Анализ, синтез, планирование решений в экономике: Учебник. – М.: Финансы и статистика, 2002.

Анфилатов В.С. Системный анализ в управлении: Учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 2003.

Байе М.Р. Управленческая экономика и стратегия бизнеса: Учебное пособие для вузов / Пер. с англ. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 1999.

Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы и моделирование экономических систем: Учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 2003.

Джонстон Дж. Эконометрические методы. – М.: Статистика, 1980.

Доучерти К. Введение в эконометрику. – М.: Финансы и статистика, 1999.

Кейн Э. Экономическая статистика и эконометрия. Введение в количественный экономический анализ. – М.: Статистика, 1977.

Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник. – М.: ЮНИТИ, 1998.

Кулинич Е.И. Эконометрия. – М.: Финансы и статистика, 2001.

Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике: Учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 2003.

Лизер С. Эконометрические методы и задачи. – М.: Статистика, 1971.

Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс. – М.: Дело, 1998.

Маленво Э. Статистические методы эконометрии. – М.: Статистика, 1976.

Носко В.П. Эконометрика. Введение в анализ временных рядов. Курс лекций. – М., 2002.

Орлов А.И. Эконометрика: Учебник для вузов. – М.: Изд-во «Экзамен», 2003.

Пелих А.С., Терехов Л.Л., Кизилов А.Н. Методы анализа, планирования и управления. Учебн. пособие / РГЭА: Ростов н/Д, 1997.

Савицкая Г.В. Анализ хозяйственной деятельности предприятия: Учебное пособие. – Минск: ИП «Экоперспектива», 1998.

Селезнева Н.Н., Ионова А.Ф. Финансовый анализ: Учебник. – ЮНИТИ, 2003.

Терехов Л.Л. Кибернетика для экономистов. – М.: Финансы и статистика, 1983.

Тингнер Г. Введение в эконометрию. – М.: Финансы и статистика, 1965.

Эконометрика: Учебник / Под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2003.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

ГЛАВА 1. ХАРАКТЕРИСТИКА ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ 5

1.1. Принципы моделирования в экономике 5

1.2. Корреляционно-регрессионный анализ 10

1.3. Производственные функции 24

1.4. Системы эконометрических уравнений 36

Основные термины и понятия 43

Упражнения 43

Тесты 45

Контрольные вопросы 45

ГЛАВА 2. ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВОМ 47

2.1. Основы математического программирования 47

2.2. Методы управления хозяйственной деятельностью предприятий 70

2.3. Модель оперативно-календарного планирования производства на предприятии 77

2.4. Модели управления запасами 80

2.5. Основы динамического программирования 84

2.6. Методы и модели массового обслуживания 91

Основные термины и понятия 103

Упражнения 103

Тесты 105
Контрольные вопросы 106

ГЛАВА 3. БАЛАНСОВЫЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ 107
3.1. Межотраслевой баланс производства
и распределения продукции 107
3.2. Модификации основной схемы
межотраслевого баланса.................................... 118
3.3. Динамическая модель межотраслевого баланса... 127
3.4. Межотраслевые региональные балансы.............. 133
3.5. Матричная модель на уровне предприятий........... 138
Основные термины и понятия 144
Упражнения 145
Тесты 146
Контрольные вопросы 146

ГЛАВА 4. АНАЛИЗ ПРЕДЛОЖЕНИЯ, СПРОСА,
ПОТРЕБЛЕНИЯ, ЦЕН В УСЛОВИЯХ РЫНКА 148
4.1. Общие положения социального анализа
и прогнозирования 148
4.2. Уравнения для спроса и потребления 151
4.3. Взаимосвязь предложения, спроса,
рыночных цен 157
4.4. Поверхности безразличия 165
4.5. Нормативные модели потребления 171
Основные термины и понятия 175
Упражнения 175
Тесты 176
Контрольные вопросы 177

ГЛАВА 5. УПРАВЛЕНИЕ СЛОЖНЫМИ СИСТЕМАМИ 178
5.1. Прогнозирование в системе управления 178
5.2. Основы теории графов 190

5.3. Сетевые графики 198
5.4. Неопределенность, риск 208
5.5. Игры и стратегии 222
Основные термины и понятия 237
Упражнения 237
Тесты 239
Контрольные вопросы 240

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 240

ЛИТЕРАТУРА 242

Серия
«Высшее образование»

**Анатолий Савельевич Пелих,
Лев Леонидович Терехов,
Любовь Андреевна Терехова**

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В УПРАВЛЕНИИ ПРОИЗВОДСТВОМ

Ответственный
за выпуск: *Кузнецов В.*
Корректор: *Чиркова Д.*
Художник: *Тимофеева Е.*

Сдано в набор 25.07.2005 г. Подписано в печать 25.08.2005 г.
Формат 84x108 1/32. Бумага типографская.
Гарнитура Школьная.
Тираж 3 000. Заказ № 3353

Издательство «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону,
пер. Халтуринский, 80

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО «ИПП «Курск».
305007, г. Курск, ул. Энгельса, 109.

E-mail: kursk-2005@yandex.ru
www.petit.ru

Качество печати соответствует качеству
предоставленных заказчиком диапозитивов.