Современный
Гуманитарный
Университет

Дистанционное образование

054.01 ;3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ЮНИТА 1

ТЕОРИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ. МОДЕЛИ МИКРОЭКОНОМИКИ

ГИПЕРТЕКСТ

МОСКВА 1998

Разработано Н.Д.Николаевой, канд. экономич. наук

Одобрено Методическим советом СГУ

КУРС: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Юнита 1. Теория моделирования. Модели микроэкономики.

Юнита 2. Моделирование макроэкономических процессов. Модели потребительского поведения и экономического равновесия.

ЮНИТА 1

Рассмотрены основные принципы и особенности моделирования экономических систем, модели микроэкономики и модели производства.

Для студентов Современного Гуманитарного Университета.

054.001.01.97 ;3/06.14.Тир.2000

ЮНИТА 1
ТЕОРИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ. МОДЕЛИ МИКРОЭКОНОМИКИ

СОДЕРЖАНИЕ (дидактические единицы)

Основные принципы математического моделирования экономических систем, особенности и трудности моделирования экономической действительности. Классификация моделей по различным уровням экономики. Модели микроэкономики, составляющие основу теории фирмы. Модели производства, сводящиеся к задачам мгновенного принятия решений и принятия решений в краткосрочные периоды времени. Задачи управления запасами. Модели со случайными факторами производства, производственные функции. Анализ предельных эффектов, их роль при моделировании деятельности фирмы. Реакция фирмы на изменение цен на ресурсы и производимую продукцию.

ЛИТЕРАТУРА

* 1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М., 1975. С.237-258, 259-265.
* 2. Кулясов В. И., Николаева Н.Д., Куль И.О. Введение в экономическую теорию и экономико-математические методы анализа хозяйственной деятельности. М., 1989. С.5-7, 8-17.
* 3. Данциг Дж. Линейное программирование. М., 1966. С.9-12, 37-47, 47-54, 59-64, 473-479.
* 4. Ланкастер К. Математическая экономика. М., 1972. С.42-44, 49-51.
* 5. Букан Дж. , Кенигсберг Э. Научное управление запасами. М., 1967. С.15-22.
* 6. Хэнссменн. Применение математических методов в управлении производством и запасами. М., 1966.
7. Ашманов С. А. Математические модели и методы в экономике. М., 1980.
8. Экономическая школа. Т. 1, вып. 1. СПб., 1991.
9. Математическая экономика на персональном компьютере. М., 1991.
10. Ашманов С.л. Введение в математическую экономику. М., 1984.
*11. Карманов В.Г. Математическое программирование. М., 1980. С.5-9, 11-17.
12. Ашманов С.А. Линейное программирование. М., 1981.
13. Калихман И.Л., Вайтенко М.А. Динамическое программирование в примерах и задачах. М., 1979.
14. Юдин Д.В. Математические методы управления в условиях неполной информации. М., 1974.

Примечание. Знаком (*) отмечены работы, выдержками из которых составлен файл материалов для изучения.

КУРСОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Составьте логическую схему базы знаний по теме юниты и словарь новых терминов с объяснением их значений.

2. Вопросы для подготовки к экзаменам:

Дайте понятие модели.

Приведите принципы построения экономико-математической модели.

Перечислите трудности, возникающие при построении экономико-математических моделей.

Дайте определение и разъясните экономический смысл цели, ограничений, решений в линейной модели производства.

Опишите экономическую ситуацию, приводящую к транспортной задаче.

Приведите пример модели управления запасами с постоянной интенсивностью сбыта, без допущения дефицита.

Что такое производственная функция?
Укажите область применения производственных функций в моделях экономики фирмы.
Дайте экономическое содержание производственной функции Кобба-Дугласа.
Каковы экономические свойства производственной функции Кобба-Дугласа?
В чем заключается задача фирмы в условиях совершенной конкуренции?
Сформулируйте задачу фирмы в условиях монополии.

3. Темы рефератов (факультативно):

Принципы и этапы экономико-математического моделирования [2].
Модель линейного программирования применительно к задаче составления плана производства [3].
Принципы построения моделей управления запасами [5, 6].
Основные модели управления запасами [6].
Моделирование деятельности фирмы с помощью производственных функций [4].
Моделирование деятельности фирмы в краткосрочном периоде [1].
Реакция фирмы, работающей в условиях совершенной конкуренции, на изменения цен на ресурсы и выпускаемую продукцию [1].

4. Выполните следующие задания:

4.1. В модели выбора плана производства укажите цель фирмы.
4.2. Какой экономический смысл имеют двойственные переменные в модели выбора плана производства?
А. Оценки стоимости ресурсов В. Объемы выпусков
4.3. В модели выбора плана производства дайте экономическое содержание положительности отдельной компоненты вектора решений двойственной задачи.
4.4. В модели выбора плана производства дайте экономическое содержание положительности компоненты оптимального плана прямой задачи.
4.5. Какой показатель принимается в качестве критерия в транспортной задаче?
4.6. Предполагается, что с 2-х складов развозятся товары по 3-м магазинам, стоимости перевозок единицы продукции заданы в виде таблицы (тыс.руб).

	Магазин №1	№2	№3
склад 1	10	18	15
склад 2	16	20	10

Постройте транспортную задачу, если на 1- м складе хранится 100 ед. продукции, на 2-м - 150 ед., в 1-й магазин требуется доставить 70 ед. продукции, во 2-й - 80, в 3-й - 100 ед. продукции соответственно.
4.7. Постройте экономико-математическую модель для следующей ситуации. Фирма производит три вида продукции, используя для этого два вида ресурсов. Технологическая матрица задана в виде таблицы:

	Прод. 1	Прод. 2	Прод. 3
ресурс	1	2	0
ресурс	2	3	1

Фирма имеет в своем распоряжении 20 единиц 1-го ресурса и 25 единиц 2-го ресурса; цены, по которым предполагает реализовать свою продукцию, равны 15, 20, 30 тыс.руб. за первый, второй и третий товар соответственно.
4.8. Изобразите геометрически кривую изменения уровня запаса некоторого ресурса, спрос на который непрерывен, имеет постоянную интенсивность $a = 10$, заказ размера $q = 100$ поступает мгновенно в моменты времени, соответствующие нулевому уровню запаса.
4.9. В условиях экономической ситуации, приведенной в п.4.8., определите средний уровень запаса.

4.10. Рассмотрите экономическую ситуацию из п .4.8. Опишите допущения, сделанные при моделировании задачи создания запаса некоторого ресурса. Приведите примеры допущений, которые приведут к изменению модели.
4.11. Исследование производственного процесса некоторой фирмы позволило сделать вывод о том, что производственной функцией является функция Кобба-Дугласа вида:

$$f(x_1 x_1) = 20 x_1^{1/3} x_2^{1/3},$$

где x_1 - объем трудовых ресурсов;
x_2 - объем капитала фирмы.
Определите показатели средней и предельной производительности труда и фондоотдачи, коэффициенты эластичности по труду и фондам, предельную норму замещения труда капиталом.
4.12. Сформулируйте для фирмы условие максимума прибыли в краткосрочном периоде времени, если выпускаемая фирмой продукция выходит на рынок совершенной конкуренции.
4.13. Объясните, что собой представляет кривая предложения фирмы, продукция которой выходит на рынок совершенной конкуренции.
4.14. Изобразите графически “прибыль монополиста”.

КРУГЛЫЙ СТОЛ

ТЕМА: Теория моделирования. Модели микроэкономики.
ЦЕЛЬ: Овладеть принципами и методами математического моделирования экономических систем, изучить основные модели микроэкономики.
ВРЕМЯ: 160 мин.
УЧАСТНИКИ: 2 бригады студентов.

Подготовительный этап (домашнее задание)

Выполните в рабочей тетради курсовые задания 4.1. - 4.14.

Порядок проведения

Вступительное слово тьютора	- 10 мин.
Разбивка на бригады:	- 5 мин.
1-я бригада решает задания 4.1, 4.3, 4.5, 4.7, 4.9, 4.11,4.13;	
2-я бригада - задания 4.2, 4.4, 4.6, 4.8, 4.10, 4.12, 4.14	
Подготовка бригад к выступлениям, обсуждение домашних работ, изложение материала на доске	- 25 мин.
Выступления бригад	- 60 мин.
Вопросы к выступающим	- 20 мин.
Ответы на вопросы	- 30 мин.
Заключительное слово тьютора	- 10 мин.

Файл материалов для изучения*

[2]

Возникновение и начало применения методов математического программирования для решения экономических задач относится к 1938 г., когда по заданию Ленинградского фанерного треста профессор Лениниградского государственного университета (впоследствии академик, лауреат Нобелевской премии) Л.В.Канторович решил ряд задач, связанных с организацией и планированием производства, специальным математическим методом, названным им тогда методом разрешающих множителей. В 1939 г. по результатам решения этих задач была опубликована работа Л.В.Канторовича по применению математических методов организации и планирования производства.

* Жирным шрифтом выделены новые понятия, которые необходимо усвоить. Знание этих понятий будет проверяться при тестировании.

В этой работе был дан метод решения задач об оптимальном раскрое листового материала, о наивыгоднейшем распределении работ между станками и максимальном использовании комплексного сырья, названных затем соответственно “раскройная задача” или “задача о раскрое”, “станковая задача” и “задача о смесях”.

Такого рода задачи позднее в США получили название задач линейного программирования.

Указанная выше работа Л.В.Канторовича была первой в мировой практике работой в области применения специальных математических методов в экономике и организации производства. Она положила начало применению методов математического программирования в экономических исследованиях.

В США методы математического программирования возникли впервые лишь в 1947 году, когда Данциг разработал численный метод решения задач линейного программирования, названных симплекс-методом.

Недооценка применения математических методов в экономических исследованиях и планировании привела к тому, что разработка методов математического программирования у нас почти прекратилась, не говоря уже о практическом использовании их. До 1959 г. можно лишь отметить разработку метода потенциалов Л.В.Канторовичем и М.К.Гавуриным в 1949 г., как первого точного метода решения транспортных задач.

Лишь с 1959 г., когда при СО АН СССР была организована лаборатория по применению математических и статистических методов в экономике под руководством академиков В.С.Немчинова и Л.В.Канторовича, начали развертываться теоретические работы и применение математических методов в экономических исследованиях и планировании для решения практических задач экономики.

При решении экономических задач приходится иметь дело со значительным числом исходных данных, т.е. с большим количеством предприятий, цехов, участков, оборудования, рабочих мест, различных видов продукции, потребляемого сырья, материалов, топлива, энергии; с большой численностью рабочих, ИТР, служащих и других категорий работников.

Между этими исходными данными и экономическими показателями существует сложная зависимость, которая должна быть установлена и количественно оценена.

Экономические задачи -значительно осложняются еще и тем, что они являются динамическими, т.е. все явления в них должны рассматриваться изменяющимися во времени, когда результаты данного периода оказывают влияние на решение задачи для следующего периода.

Экономические задачи в большинстве случаев относятся к экстремальным задачам, для решения которых необходимо из большого количества возможных решений найти одно, т.е. максимизирующее или минимизирующее соответствующую числовую функцию.

Большинство экономических задач связано с нахождением условного экстремума, когда определяется максимум или минимум функционала при некоторых ограничениях. В качестве ограничений здесь может быть наличие тех или иных средств (ресурсов) или возможность их производства (поступления). Итак, основной задачей экономики является рациональное ведение хозяйства, рациональная деятельность, т.е. распределение ограниченных ресурсов для достижения поставленных целей. Вследствие ограниченности ресурсов приходится выбирать тот или иной вариант их использования. При разумном выборе можно достичь определенных целей, не превышая пределов, обусловленных ограниченностью ресурсов.

Экономика в целом представляет собой совокупность определенных учреждений, каждое из которых решает стоящую перед ними проблему рационального ведения хозяйства. Во всякой реальной экономике существует масса подобных организаций, однако объектом изучения экономической науки является лишь несколько наиболее типичных и представленных в идеализированном виде учреждений.

В табл. 1-3 представлен процесс рациональной экономической деятельности на уровне народного хозяйства, предприятия и потребителя.

Таблица 1

Органы специальной компетенции как учреждение рационального ведения хозяйства

Целевая функция	Народохозяйственные функции социального благосостояния, зависящие от занятости, производства, покупательной способности населения, экономического роста
Средства (инструменты)	Политика в области финансов, налогов, установления цен и экономического регулирования, кредиты, структура отраслей, конечный продукт
Ограничения	Спрос и предложение в экономике СССР; платежный баланс; правовые ограничения
Нормативные правила	Крупные программы или учреждения (например, программа социального обеспечения)

Принятие эффективного решения - непростая процедура. Чтобы получить эффективный результат, она должна осуществляться по определенным правилам. Но как ни очевиден их перечень, управленческая практика показывает, что именно несоблюдение этих правил чаще всего приводит к принятию неэффективных решений. Поэтому прежде всего рассмотрим общеметодические, исходные предпосылки постановки задач выбора эффективных решений.

Четкая постановка цели решаемой задачи. Любое решение дает ряд результатов и достижение любого из них может стать целью. Однако одни из них реализуемы в большей степени, другие - в меньшей. Да и оценки преимуществ варианта по разным признакам могут оказаться неодинаковыми, а часто и противоположными. Из множества возможных целей приходится выбирать важнейшую, считая остальные подчиненными.

Формулировать цель нужно конкретно, так, чтобы она могла быть численно выражена. Степень соответствия варианта решения поставленной цели характеризуется оценочным критерием.

Например, какая цель ставится при замене старой машины на новую на определенном рабочем месте? Новая машина имеет ту же производительность, что и старая, дороже ее, но экономит живой труд. От принятой цели зависит выбор лучшего варианта. Пусть имеется следующий ряд вариантов (табл. 4).

Таблица 2

Предприятие как учреждение рационального ведения хозяйства

	Классическая экономическая теория	Неоклассический и другие методы экономической теории
Целевая функция	Функция прибыли предприятия (валовый доход минус издержки), зависящая от выпуска продукции и от затратных факторов	Целевой функцией может быть объем реализации
Средства (инструменты)	Уровни выпуска продукции и затрат факторов	Товарно-материальные запасы Уровень рекламной деятельности
Ограничения	Технологическое ограничение: выпуск продукции зависит от затратных факторов (производственная функция)	Задана кривая спроса, а не цены на выпускаемую продукцию. Заданы кривые предложения, а не цены на затраты факторов. Прибыль не может снизиться ниже определенного уровня. Действие других предприятий.
Нормативные правила	Предельные доходы от продукции приравнивать ценам соответствующих факторов по всем видам затрат	Для конкуренции использовать не только цены, но и другие способы, например, рекламу. Использовать товарно-материальные запасы так, чтобы обеспечить стабильность производства, несмотря на колебания уровня продаж.

Таблица 3

Потребитель как учреждение рационального ведения хозяйства

	Классическая экономическая теория	Неоклассический и другие методы экономической теории
Целевая функция	Функция полезности потребителя, зависящая от уровней потребления всех товаров и услуг	Полезность зависит и от будущего, и от текущего потребления, досуга и т.д.
Средства (инструменты)	Уровни потребления всех товаров и услуг	Сбережения. Выбор профессии
Ограничения	Финансовые ограничения: общие расходы на товары и услуги не могут превышать сумму дохода: цены на товары и услуги и объем дохода заданы	Заданы кривые предложения, а не цены
Нормативные правила	Распределять доход между товарами и услугами так, чтобы отношение предельной полезности к цене было одним и тем же для всех видов товаров и услуг	Следует оберегать в зависимости от текущего дохода и ожидаемого будущего дохода, а также потребления в настоящем и в будущем в зависимости от будущих цен

Таблица 4

Показатели по вариантам

Варианты	Затраты по варианту, руб. на ед. продукции		
	живого труда	прошлого (осуществленного труда)	общие
I вариант (старая техника)	10	1	11
Варианты новой техники			
II	9,5	0,5	10
III	7	1,5	8,5
IV	6	3	9

Погоня сразу за двумя целями - за экономией затрат живого и овеществленного труда - приведет к явно невыгодному на фоне других 1 варианту. Принятие в качестве цели минимума затрат прошлого труда также приводит к выбору 2 варианта. При минимизации затрат живого труда будет выбран 4 вариант. Правильная формулировка цели - минимизация общих суммарных затрат - позволяет отыскать действительно наивыгоднейший 3 вариант, при котором, хотя затраты овеществленного труда и возрастают, в целом же достигается наибольшая экономия.

Учет объективных ограничений при решении задачи. Любые решения приходится принимать при наличии ряда объективных ограничений, часть из которых не может быть сразу устранена. Такие ограничения надо конкретно формулировать при самой постановке задачи. Так, перспективный план народохозяйственного развития не может не учитывать ограниченность трудовых ресурсов страны; отрасль не вправе принимать решения, не вписывающиеся в рамки финансовых и ресурсных лимитов, инвестиционные программы окажутся нереализуемыми, если не учтены возможности строительных организаций. Конечно, речь идет не о том, чтобы любое такое ограничение считать незыблемым. Многие из них со временем могут и должны преодолеваться, на это по существу и направлено управление производством. Но стартовая ограниченность имеющихся ресурсных источников и небеспредельность их расширения в дальнейшем должны учитываться при принятии решения. Без этого оно не отвечало бы реальным возможностям своего осуществления.

Рассмотрение достаточного перечня альтернативных вариантов достижения поставленной цели. Возможности достижения любой цели, как правило, многовариантны. Поэтому, если первый рассмотренный вариант приносит некоторый расчетный эффект по сравнению с базисным, это не дает еще оснований для окончательного его принятия. Ведь не исключено, что имеются более выгодные варианты. Одновариантность мышления при постановке задач объяснима психологически, но не имеет объективных оправданий. Она заранее сужает круг выбора, искусственно ограничивая перечень имеющихся возможностей. Процедура принятия решения при этом, хотя и сохраняет внешние признаки объективности, отнюдь не гарантирует выбора наилучшего варианта.

Достаточно полный учет разнообразных последствий осуществления варианта. Любое решение обычно вызывает длинную цепочку последствий. Нетрудно дать экономическую оценку тем из них, которые возникают немедленно и в пределах непосредственно рассматриваемого рабочего места. Сложнее обстоит дело с теми последствиями, которые проявляются за пределами данного производства и лишь спустя длительное время. По своему масштабу такие сопряженные последствия могут оказаться не меньшими, чем прямые результаты. Важнейшие из них обязательно должны учитываться при оценке народнохозяйственной эффективности принимаемых решений; без этого оценка будет не полной. Так, при оценке проекта строительства гидростанции, предусматривающего затопление рудного месторождения (пусть даже ныне не разрабатываемого, но кондиционного), к затратам на строительство гидростанции следует прибавить расчетный народохозяйственный ущерб от потери запасов руды так, чтобы он был учтен при оценке эффективности гидростанции.

Отражение взаимосвязанности отдельных производственных показателей и звеньев. Учет подобных взаимодействий при принятии решений - всегда нелегкая задача. Но отказ от него искажает суждение об эффективности вариантов, особенно если улучшение работы одного производственного звена ухудшает работу другого, смежного. Здесь важно отразить общий баланс взаимосвязанных звеньев и элементов. Учет взаимосвязей затруднителен, если они не отображены соответствующими экономико-математическими моделями. Поэтому создание моделей - важный способ комплексного учета последствий осуществления оцениваемых вариантов.

Модель - это такой материально или мысленно представимый объект, который в процессе исследования заменяет объект-оригинал так, что его непосредственное изучение дает новые знания об объекте-оригинале.

Процесс экономического исследования с помощью моделей оптимизации можно условно подразделить на ряд этапов. На первом этапе формулируется общая задача, в соответствии с которой фиксируется объект исследования (например, экономика электронной промышленности как отрасли материального производства, экономика отдельной организации или определенный аспект функционирования экономических систем: спрос и потребление, распределение доходов, ценообразование и т.п.). Далее формируются требования к характеру исходной информации, которая может быть статистической (получаемой в результате наблюдений за ходом экономических процессов) или нормативной (коэффициенты затрат-выпуска, рациональные нормы потребления). Затем изучаются наиболее простые (исходные) свойства моделируемого объекта и выдвигаются гипотезы о характере его развития. Так, для решения ряда задач эффективного управления экономической системой фундаментальное значение имеют такие свойства, как ограниченность в каждый момент времени материальных трудовых и природных ресурсов, достигнутый уровень науки и техники, определяющий набор технологических способов получения нужных продуктов из имеющихся ресурсов, а также многовариантность допустимых траекторий экономического развития.

Информация, полученная на первом этапе, нужна для создания модели экономической системы, которая и составляет содержание второго этапа. Для изучения различных аспектов функционирования экономических систем используются разные модели. Наиболее общие закономерности развития экономики исследуются при помощи народнохозяйственных моделей (балансовых, оптимизационных, равновесных, игровых и др.). Для анализа и прогнозов динамики и соотношения различных синтетических показателей (национального дохода, занятости, процента на фонды потребления, сбережений, инвестиций и т.п.) применяются макроэкономические модели, а исследование конкретных хозяйственных ситуаций производится с помощью микроэкономических моделей производства, транспорта, торговли, снабжения и сбыта и т.п. Для исследования сложных экономических систем используются преимущественно математические модели, ибо они лучше всего приспособлены для анализа простейших экономических процессов (например, на транспорте), так называемые аналоговые модели (электрические, механические, гидравлические). Здесь же можно выделить имитационные модели, используемые для изучения реальных процессов функционирования экономических систем в тех случаях, когда их математический анализ затруднен или невозможен.

Экономические модели классифицируются по следующим основным критериям: целям и задачам, объекту, применяемому аппарату исследования, характеру исходной информации. С точки зрения последнего критерия различаются статистические и нормативные модели. Все эти классификации, разумеется, весьма условные, так как реальные модели могут занимать промежуточное положение (например, часть информации задается нормативно, а часть из статистического анализа поведения экономической системы). Кроме того, более общие модели могут включать в себя частные. Например, элементом модели народного хозяйства страны могут быть модели отраслей, предприятий и т.д. (субмодели), и наоборот, в локальные модели вводятся требования, вытекающие из анализа всей экономики.

На этапе построения математической модели результаты эмпирического исследования переводятся со специфического языка исследуемого объекта на универсальный математический язык, выбирается схема (конструкция) модели, вводятся основные переменные, параметры и функциональные зависимости. Затем полученная модель сопоставляется с уже имеющимися. Если оказывается, что модели данного класса достаточно хорошо изучены и существуют готовые методы их анализа, то можно решать соответствующую математическую задачу. В противном случае возникает вопрос, нельзя ли так упростить предпосылки модели, чтобы она не утратила существенных специфических черт исследуемого объекта, и в то же время подвести ее под класс структур, уже изученных математикой. В свою очередь, построение моделей с еще не изученными свойствами стимулирует развитие новых математических направлений.

Третий этап - математический анализ моделей, служащий средством получения не только количественных, но и качественных выводов. Качественные выводы, получаемые из анализа экономической модели, позволяют обнаружить неизвестные ранее свойства экономической системы: ее структуру, динамику развития, устойчивость, соотношения макроэкономических параметров, свойства ценностных показателей и т.п. Например, на основе так называемой модели сбалансированного роста удалось выяснить асимптотические свойства эффективных экономических

траекторий - тенденцию к стационарному развитию с максимальным темпом. С помощью модели оптимального планирования исследуются теоретические проблемы ценообразования.

К количественным выводам из экономических моделей относятся оптимальные планы развития тех или иных процессов производства на разных уровнях иерархии, прогнозы экономической динамики, расчеты цен и т.д. Соответствующие экономические модели являются важным элементом автоматизированных систем управления. Требования к разным моделям различны. От теоретических (абстрактных) моделей требуется отображение лишь самых общих свойств экономических систем. С помощью математических методов здесь доказывается существование эффективного (равновесного, оптимального) состояния (траектории) системы, а затем изучаются его свойства. Если возможно, определяется также алгоритм отыскания эффективного состояния экономического явления. Модели, используемые для конкретных расчетов, имеют в качестве своей теоретической базы абстрактные модели и результаты их анализа. Конкретные модели достаточно полно отражают специфические особенности исследуемого объекта, ибо в противном случае расчеты, осуществляемые на их основе, не могут быть использованы на практике. Рассматриваемый этап завершается экономической интерпретацией полученных результатов: математические понятия переводятся на язык изучаемого объекта. Качественные результаты интерпретируются как свойства и закономерности развития экономической системы, алгоритм - как механизм ее планирования и функционирования, числовые результаты - как план или прогнозы.

Прежде чем использовать полученные выводы в теории или на практике, необходимо провести четвертый этап исследования “моделирования” - проверку полученных результатов. Здесь перед исследователем встают огромные трудности. Обычные способы естественных наук - эксперимент, сопоставление полученных результатов с характеристиками реальных процессов - применимы далеко не всегда. Например, если программа развития хозяйственного объекта, полученная с помощью модели, показывает возможности улучшения практики, то еще не ясно, вызвано ли это действительно несовершенством существующих методов планирования, управления и стимулирования или тем, что в исходной модели не были учтены некоторые существенные реальные условия, и намеченные улучшения неосуществимы. Поэтому особо важна теоретическая проверка правильности исходных предпосылок модели, которую необходимо провести еще на первом этапе исследования. Гораздо реже применяется эксперимент на объекте или на имитирующей его модели (например, аналоговом устройстве), дающей возможность проверить результаты моделирования, так как оно связано с большими затратами, а натуральный эксперимент - еще и с рядом трудностей социально-экономического характера.

Последний, пятый этап - внедрение - должен приводить к совершенствованию экономической теории и методов управления экономическими процессами, цен, планов хозяйственного развития. В противном случае необходимо уточнить исходные предпосылки модели, т.е. вновь пройти все перечисленные этапы. Таким образом, исследование экономических систем с помощью моделей носит конструктивный характер.

Использование моделей в экономике имеет определенные границы применения: не вся информация об экономических процессах является доступной и может быть полностью формализована, не всякая модель поддается теоретическому анализу. Кроме того, даже самые современные вычислительные средства не могут справиться с громадным объемом вычислений, которые необходимо провести, чтобы решить некоторые конкретные экономические задачи. Поэтому применение моделей должно дополняться другими методами, в том числе использованием опыта хозяйственных руководителей. В свою очередь, результаты расчетов, проведенных на основе моделей, могут оказать существенную помощь хозяйственным руководителям в деле управления.

[11]

Значительное число задач, возникающих в обществе, связано с управляемыми явлениями, т. е. с явлениями, регулируемыми на основе сознательно принимаемых решений. При том ограниченном объеме информации, который был доступен на ранних этапах развития общества, принималось оптимальное в некотором смысле решение на основании интуиции и опыта, а затем, с возрастанием объема информации об изучаемом явлении,- с помощью ряда прямых расчетов. Так происходило, например, создание календарных планов работы промышленных предприятий.

Совершенно иная картина возникает на современном промышленном предприятии с многосерийным и многономеклатурным производством, когда объем входной информации столь велик, что его обработка с целью принятия определенного решения невозможна без применения современных электронных вычислительных машин. Еще большие трудности возникают в связи с задачей о принятии наилучшего решения.

1.1.3. Принятие решений. Под принятием решений в исследовании операций понимают сложный процесс, в котором можно выделить следующие основные этапы:

1-й этап. Построение качественной модели рассматриваемой проблемы, т.е. выделение факторов, которые представляются наиболее важными, и установление закономерностей, которым они подчиняются.

Обычно этот этап выходит за пределы математики.

2-й этап. Построение математической модели рассматриваемой проблемы, т. е. запись в математических терминах качественной модели. Таким образом, математическая модель - это записанная в математических символах абстракция реального явления, так конструируемая, чтобы анализ ее давал возможность проникнуть в сущность явления. Математическая модель устанавливает соотношения между совокупностью переменных - параметрами управления явлением.

Этот этап включает также построение целевой функции переменных, т. е. такой числовой характеристики, большему (или меньшему) значению которой соответствует лучшая ситуация с точки зрения принимающего решения.

Итак, в результате этих двух этапов формируется соответствующая математическая задача.

Второй этап уже требует привлечения математических знаний.

3-й этап. Исследование влияния переменных на значение целевой функции.

Этот этап предусматривает владение математическим аппаратом для решения математических задач, возникающих на втором этапе процесса принятия решения.

Широкий класс задач управления составляют такие экстремальные задачи, в математических моделях которых условия на переменные задаются равенствами и неравенствами.

На третьем этапе, пользуясь математическим аппаратом, находят решение соответствующих экстремальных задач. Обратим внимание на то, что задачи математического программирования, связанные с решением практических вопросов, как правило, имеют большое число переменных и ограничений. Объем вычислительных работ для нахождения соответствующих решений столь велик, что весь процесс не мыслится без применения современных электронных вычислительных машин (ЭВМ), а значит, требует либо создания программ для ЭВМ, реализующих те или иные алгоритмы, либо использования уже имеющихся стандартных программ.

4-й этап. Сопоставление результатов вычислений, полученных на 3-м этапе, с моделируемым объектом, т. е. экспертная проверка результатов (критерий

практики).

Таким образом, на этом этапе устанавливается степень адекватности модели и моделируемого объекта в пределах точности исходной информации.

Здесь возможны два случая:

1-й случай. Если результаты сопоставления неудовлетворительны (обычная ситуация на начальной стадии процесса моделирования), то переходят ко второму циклу процесса: уточняется входная информация о моделируемом объекте и в случае необходимости уточняется постановка задачи (1-й этап), уточняется или строится заново математическая модель (2-й этап), решается соответствующая математическая задача (3-й этап) и, наконец, снова проводится сопоставление (4-й этап).

2-й случай. Если результаты сопоставления удовлетворительны, то модель принимается. Когда речь идет о неоднократном использовании на практике результатов вычислений, возникает задача подготовки модели к эксплуатации. Предположим, например, что целью моделирования является создание календарных планов производственной деятельности предприятия. Тогда эксплуатация модели включает в себя сбор и обработку информации, ввод обработанной информации в ЭВМ, расчеты на основе разработанных программ календарных планов и, наконец, выдачу результатов вычислений (в удобном для пользователей виде) для их использования в сфере производственной деятельности.

Подготовка модели к эксплуатации предусматривает разработку специального математического обеспечения, без которого невозможно практическое использование модели: должна быть создана гибкая система программ, обеспечивающая пользователям удобный контакт с ЭВМ и не требующая при ее эксплуатации высокой математической квалификации пользователей.

В то же время математическое обеспечение, впрочем, так же как и сама модель, должны допускать модернизацию в связи с новыми требованиями, которые жизнь постоянно предъявляет к производству. Подчеркнем, что именно модернизацию, а не создание каждый раз новой системы программ. Только при этих условиях возможно регулярное использование математических моделей и ЭВМ в процессе управления.

Часто появляется желание построить такую математическую модель, в которой учитывалось бы огромное число входных данных. Однако при тщательном анализе оказывается, что влияние многих из них на решение либо незначительно, либо просто отсутствует из-за невысокой точности входных данных. Кроме того, нельзя не учитывать то обстоятельство, что математическая модель с большим числом параметров приводит к задаче оптимизации функций столь большого числа переменных, что найти численное ее решение с точностью, согласованной с точностью входной информации, оказывается в реальных ситуациях делом безнадежным.

Таким образом, целый ряд условий, предъявляемых к математическим моделям, требует участия математиков в решении прикладных задач уже на втором этапе процесса моделирования.

1.4.2. Задача о рационе. По заданному ассортименту продуктов, при известном содержании в каждом из них питательных веществ и известной стоимости продуктов, составить рацион, удовлетворяющий необходимым потребностям, с минимальными денежными затратами.

Пусть имеется n различных продуктов и m питательных веществ (например, жиров, белков, углеводов, витаминов и др.). Обозначим через a_{ij} содержание (в весовых единицах) j - го питательного вещества в единице веса i-го продукта; через b_i обозначим минимальную (в весовых единицах) суточную потребность в j-м питательном веществе. Наконец, через x_i обозначим искомое суточное потребление i-го продукта. Очевидно, что $x_i \geq 0$.

Величина $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$ есть общее содержание i-го питательного вещества в рационе, которое не должно быть меньше минимальной потребности b_j:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq b_j \quad \left(j = \overline{1,m}\right)$$

Если c_i - стоимость единицы веса i-го продукта, то стоимость всего рациона определяет линейная форма

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i .$$

Итак, математическая формулировка задачи выбора рациона состоит в следующем:

найти

$$\min \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq b_j \quad \left(j = \overline{1,m}\right)$$

$$x_i \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$$

Эта задача является одной из типичных задач линейного программирования.

В постановке задачи вовсе не обязательно было указывать, что это задача о рационе. Достаточно ясно, что таким же образом могут быть сформулированы многочисленные задачи об оптимальных смесях (слово “смесь” здесь следует понимать в обобщенном смысле: это и собственно смесь, и сплав, и рацион, и т. д.).

1.4.3. Транспортная задача. Другим типичным примером задачи линейного программирования является транспортная задача. Требуется составить план перевозок однородного груза таким образом, чтобы общая стоимость перевозок была минимальной.

Исходная информация:

a_i - количество единиц груза в i-м пункте отправления, $i = \overline{1,m}$;

b_j - потребность в j-м пункте назначения, $j = \overline{1,n}$ (в единицах груза);

c_{ij} - стоимость перевозки единицы груза из i-го пункта в j-й.

Обозначим через x_{ij} планируемое количество единиц груза для перевозки из i-го пункта в j-й.

В принятых обозначениях:

$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ - общая (суммарная) стоимость перевозок;

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ - количество груза, вывозимого из i-го пункта;

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ - количество груза, доставляемого в j-й пункт.

В простейшем случае должны выполняться следующие очевидные условия:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Таким образом, математической формулировкой транспортной задачи будет:

найти

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j ,$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right).$$

Эта задача носит название **замкнутой транспортной модели**.

Заметим, что условие

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

является естественным условием разрешимости замкнутой транспортной задачи.

Более общей транспортной задачей является так называемая **открытая транспортная модель**:

найти

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$$

Ясно, что в этой задаче не предполагается, что весь груз, накопленный в i-м пункте, должен быть вывезен.

В схему транспортной задачи укладываются и некоторые другие задачи технико-экономического содержания, например, так называемая “задача о выборе”: задача о наиболее экономном (в смысле суммарных затрат времени) распределении n работ между n исполнителями при известном времени, затрачиваемом каждым исполнителем на каждой работе. Эта задача является частной моделью замкнутой транспортной задачи при m = n и всех $a_i = b_j = 1$.

Заметим, что решения транспортных задач обладают свойствами целочисленности, и поэтому эти задачи относят к задачам линейного программирования, в которых целочисленность является необходимым дополнительным условием.

1.4.4. Задача о режиме работы энергосистемы. В качестве примера задачи выпуклого программирования рассмотрим простейшую среди задач об оптимальном ведении режима работы энергосистемы.

Рассматривается изолированная энергосистема, состоящая из теплоэлектростанций, связанных линиями передач с узлом, в котором сосредоточена нагрузка. Ставится задача распределения активных мощностей между электростанциями в заданный момент времени. Распределение осуществляется по критерию минимизации суммарных топливных затрат на генерацию активной мощности.

Обозначим через x_i активную мощность, генерируемую на i-й станции. Мощности x_i заключены в пределах a_i и b_i, определяемых техническими условиями: $\alpha_i \le x_i \le \beta_i$. Кроме того, должно соблюдаться условие баланса мощностей, т. е. генерируемая общая мощность должна соответствовать потребляемой мощности P с учетом общих потерь ρ в линиях передач:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = P + \pi.$$

Топливные затраты на генерацию мощности x_i представляют собой функцию $T_i(x_i)$, выпуклую на отрезке $[\alpha_i, \beta_i]$.

Таким образом, задача принимает вид:

найти

$$\min \sum_{i=1}^{m} T_i(x_i)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = P + \pi,$$

$$\alpha_i \le x_i \le \beta_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right)$$

Построенная модель является типичной **задачей выпуклого программирования с линейными ограничениями**. Решение этой задачи дает весьма грубое приближение к действительно оптимальному режиму работы энергосистемы. В реальной ситуации нельзя считать всю нагрузку сосредоточенной в одном узле, а следует рассматривать n узлов. Кроме того, потери в системе, естественно, не являются константой, а зависят от величин передаваемых мощностей и параметров линий передач.

В качестве следующего приближения можно рассматривать задачу, в которой ρ является билинейной функцией x_{ij} $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$, где параметры управления x_{ij} означают количество активной мощности, передаваемое из i-й станции в j-й узел.

Очевидно, что в этой новой модели условия будут содержать нелинейности ($p(x_{ij})$ в уравнении баланса).

Эта задача также является задачей выпуклого программирования, но более сложного типа, чем предыдущая.

Примером многоэкстремальной задачи является простейшая задача о размещении.

1.4.5. Задача о размещении. Даны m пунктов потребления (1, 2, ..., j, ..., m) с заданным объемом потребления b_i в каждом пункте. Имеются ρ возможных пунктов производства (1, 2, ..., i, ..., n), причем для каждого i-го пункта известна зависимость стоимости производства f_i от объема производства x_i. (Предполагается, что в стоимость производства $f_i(x_i)$ включены капитальные затраты.) Наконец, задана

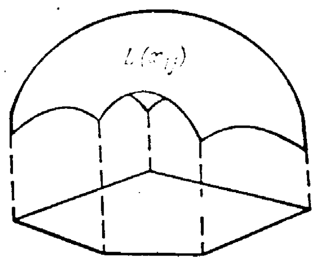


Рис. 1.1.

матрица транспортных расходов a_{ij} (a_{ij} - стоимость перевозки единицы продукции из i-го пункта производства в j-й пункт потребления). Требуется найти такие объемы перевозок x_{ij} из i-го в j-й пункт и такие объемы производства $x_i = \sum_j x_{ij}$, которые минимизируют суммарные расходы; иначе говоря, ищется

$$\min\left[L(x_{ij})=\sum_{i,j} a_{ij}x_{ij}+\sum_{i} f_i(x_i)\right]$$

при условиях

$$\sum_{i} x_{ij}=b_j,\ x_{ij}\geq 0.$$

Поскольку себестоимость единицы продукции обычно убывает при увеличении объема производства, то функции $f_i(x_i)$, как правило, монотонно возрастают и выпуклы вверх. Множество значений x_{ij}, удовлетворяющих ограничениям задачи, образует выпуклый многогранник, вершины которого являются точками локальных минимумов функции $L(x_{ij})$ (рис. 1.1). Отсюда и название подобных задач - многоэкстремальные.

[3]

Промышленное производство, поток ресурсов в экономике, напряжение сил на театре военных действий - все это комплексы многочисленных взаимосвязанных процессов. Различия здесь могут иметь место лишь в целях, которые должны быть осуществлены в природе рассматриваемых процессов и в объеме необходимых усилий. Тем не менее в управлении этими совершенно различными явлениями, или, как далее будет говориться, системами, можно выделить существенные черты сходства. Для этого необходимо уяснить структуру п состояние системы, а также цель, которая должна быть достигнута; это нужно для перечисления действий, которые необходимо выполнить, их распределения во времени и их количественных характеристик (то, что называется “программой”, или “графиком”), что позволит системе перейти от заданного состояния к определенной цели.

Если в исследуемой системе обнаруживается структура, которая может быть математически описана (это описание называется математической моделью) и если цель может быть также количественно выражена, то в этом случае можно использовать тот или иной вычислительный метод для выбора из всех возможных альтернатив лучшего плана действий. Такое использование математических моделей и называется математическим программированием. Установление того, что многие военные, экономические и производственные задачи могут быть математически описаны (хотя бы приближенно) системами линейных неравенств и уравнений[1], содействовало интенсивному развитию линейного программирования.

Следующие три примера являются типичными задачами программирования, поддающимися линейной формулировке.

Представляется полезным освоить эти примеры, прежде чем перейти к рассмотрению общих задач линейного программирования.

В системах, рассматриваемых в каждом из трех примеров, цель состоит в минимизации полных затрат, выраженных в денежных единицах. Однако в других приложениях целью может быть или минимизация трудовых затрат, или максимизация числа собранных деталей, или максимизация количества обученных студентов при заданном распределении их по квалификациям и т. д.

1. Пример из области консервного производства. Предположим, что в Портленде (штат Мэн), Сиэтле и Сан-Диего находятся три консервных завода. Эти

[1] Читателю следует обратить внимание на то, что мы пользуемся словом неравенство. Системы линейных неравенств являются весьма общими; выражаемые линейными неравенствами связи вида $x \geq 0$, $x + y \leq 7$могут быть использованы для описания различных общих ограничений, таких, например, как то, что количество закупок x не должно быть отрицательным, или то, что полное количество закупок x + y не должно превосходить 7, и т. д.

консервные заводы могут производить соответственно 250, 500 и 750 ящиков консервов за день. Для реализации продукции в стране имеется пять складов оптовой торговли: в Нью-Йорке, Чикаго, Канзас-Сити, Далласе и Сан-Франциско. Каждый склад может продать 300 ящиков за день. Специалист, занятый распределением продукции, хочет определить число ящиков, которое должно быть доставлено от трех консервных заводов к пяти сбытовым складам так, чтобы каждый склад смог бы получить столько ящиков, сколько может продать ежедневно, а полные транспортные издержки были бы минимальными.

В задаче имеется 15 возможных процессов по доставке ящиков от каждого завода к каждому складу (рис. 1-2-1). Тем самым имеется 15 неизвестных интенсивностей процессов (которые подлежат определению), выражающих количества грузов, которые должны быть перевезены по этим 15 путям. Такое распределение перевозок обычно называется программой. Имеется ряд ограничений, которым должен удовлетворить допустимый план перевозок, а именно: согласно плану, каждый склад оптовой торговли получит требуемое количество ящиков и каждый завод отправит ящиков не больше того, что он может произвести за день. (Заметим, что имеется одно ограничение для каждого склада и одно - для каждого консервного завода.) Может существовать несколько допустимых планов перевозок, которые будут удовлетворять этим ограничениям, но некоторые из них будут требовать больших транспортных расходов, чем другие. Наша задача состоит поэтому в определении такого плана перевозок, называемого оптимальным, который связан с наименьшими расходами.

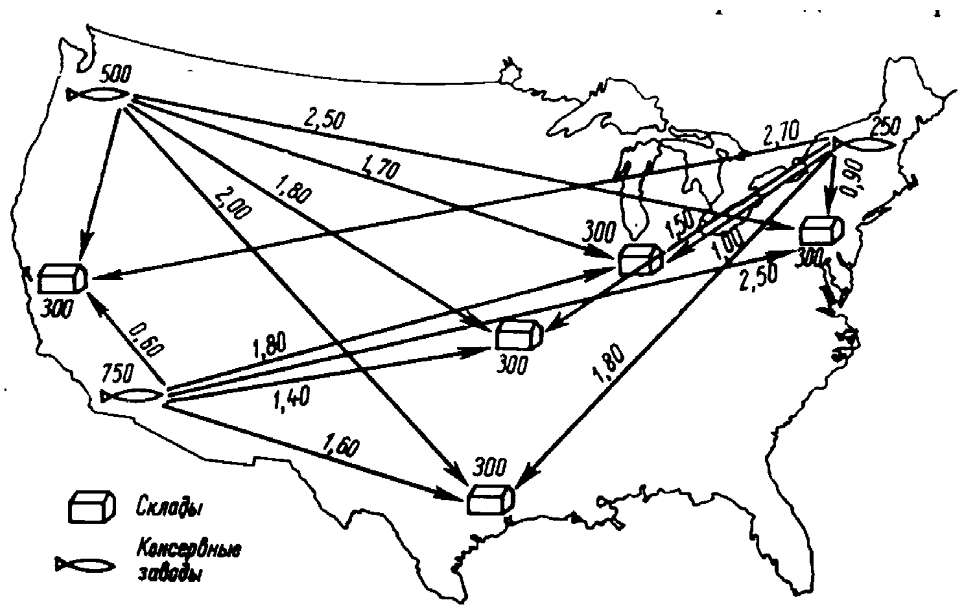


Рис. 1-2-1. Задача: найти план доставки консервных ящиков к складам с минимальными издержками (стоимость транспортировки каждого ящика, наличие и потребность в продукции указаны на схеме).

2. Задача домашней хозяйки. Семья из пяти человек живет на скромную заработную плату главы семьи. Постоянной задачей является определение еженедельного меню после надлежащего рассмотрения потребностей и вкусов

семьи и цен на продукты. Муж должен получать 3000 калорий в день, жена - 1500 калорий (диета для похудания), а детям требуется соответственно 3000, 2700 и 2500 калорий в день. Согласно предписанию домашнего врача, эти калории должны быть получены каждым членом семьи в результате употребления ограниченного сверху количества жиров и углеводов и ограниченного снизу количества белков. В указанной диете особое значение имеют белки. Помимо этого, каждый член семьи должен удовлетворять свои ежедневные потребности в витаминах. Задача заключается в том, чтобы, исходя из цен на продукты в четверг, составить недельное меню, минимизирующее издержки.

Эта задача является типичной задачей линейного программирования: допустимые процессы состоят в покупке продуктов различных видов; программой является количество различных продуктов, которые могут быть куплены; ограничениями в задаче являются потребности членов семьи в калориях и витаминах, а также предписанные врачом верхние и нижние пределы количеств углеводов, белков и жиров, которые могут потребляться каждым из членов семьи. Количество пищевых комбинаций, удовлетворяющих этим ограничениям, велико. Однако некоторые из этих допустимых планов связаны с более высокими затратами, чем другие. Задача состоит в нахождении комбинации, имеющей минимальную полную стоимость.

3. Обучение в процессе работы. Промышленное предприятие заключает договор на выпуск некоторой продукции. Предприятие располагает существенно меньшим количеством рабочей силы, чем это необходимо для выпуска некоторого товара в пределах, предусмотренных выработанным планом на несколько недель вперед. В связи с этим требуется нанять дополнительное количество рабочих, обучить их и использовать на работе. Имеющаяся на предприятии рабочая сила может быть использована либо для производства определенного объема продукции, либо для обучения на рабочих местах определенного количества новых рабочих, либо для выполнения одновременно обоих этих видов работ в условиях заданного соотношения между выработкой одного рабочего и числом обучаемых им новичков. Даже при назначении всей бригады на обучение новых рабочих в течение полной недели она не была бы в состоянии обучить требуемое количество. На следующей неделе данная бригада вместе с вновь обученными рабочими может или работать, или обучать вновь принятых рабочих, или одновременно работать и обучать и т. д. Продукция относится к разряду скоропортящихся; поэтому при хранении ранее произведенной продукции придется нести определенные затраты. Задача заключается в определении программы найма рабочих, выпуска продукции и хранения, которая обеспечивает минимум полных издержек.

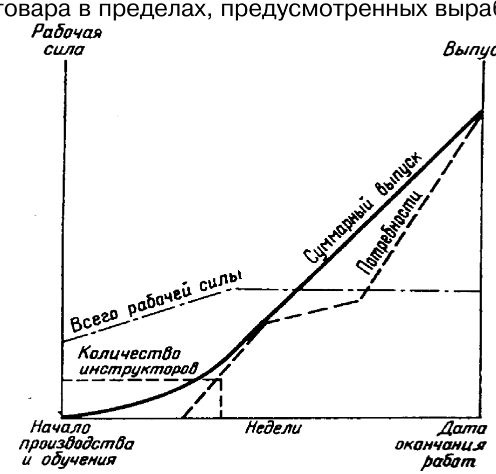


Рис. 1-2-II. Задача: определить программу найма, производства и обучения, удовлетворяющую требуемым условиям и минимизирующую издержки.

Это также задача линейного программирования, хотя и отличающаяся от двух ранее приведенных примеров. Ее можно назвать задачей на планирование работы во времени. Процессами в этой задаче является использование имеющихся

квалифицированных рабочих в двух направлениях: для выпуска продукции или для обучения новых рабочих, а также прием новых рабочих каждую неделю. Интенсивности этих процессов ограничены числом рабочих, имеющихся в начале каждой недели, и отношением числа инструкторов к числу обучаемых. Суммарный выпуск продукции, произведенной всеми рабочими за договорный период, должен быть не меньше, чем требуемый объем. Одна из возможных программ производства и обучения изображена на рис. 1-2-II. Теперь задача может быть сформулирована более точно: определить соотношение между числом нанятых и обучаемых рабочих, между числом инструкторов и числом рабочих, занятых на производстве, между размерами пере- и недопроизводства продукции, с тем чтобы минимизировать полные затраты.

ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

3-1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Предположим, что изучаемая система (которая может либо существовать в действительности, либо лишь в проекте) представляет собой комплекс машин, людей, вспомогательного оборудования и сырья. Для существования этой системы имеются те или иные причины: она должна обеспечивать эффективные действия войск или же в промышленности производить определенные виды продуктов.

Основанный на линейном программировании подход состоит в том, чтобы рассматривать систему в виде совокупности нескольких элементарных функций, называемых технологическими процессами. Технологический процесс мыслится здесь как своего рода “черный ящик”, для которого на вход подаются материальные ресурсы (люди, сырье, оборудование), а выходом оказываются продукты промышленного производства или обученные военные подразделения. Что происходит с ресурсами внутри "ящика" - дело инженера или соответственно лица, производящего обучение; что же касается лица, формулирующего задачу, то его интересуют в этом технологическом процессе только величины затрат и выпуска. Различные виды затрат и выпуска называются ингредиентами.

Количественный показатель использования каждого технологического процесса называется его интенсивностью. Для того чтобы изменить интенсивность технологического процесса, необходимо изменить его затраты и выпуск.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1: ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

В модели линейного программирования величины затрат и выпуска различных ингредиентов технологического процесса всегда пропорциональны его интенсивности. Если мы хотим осуществить процесс с двойной интенсивностью, то мы просто удваиваем все затраты, соответствующие единичной интенсивости. Так, в примере 3 § 1-2, если бы мы хотели удвоить число рабочих, обученных в течение периода обучения, то мы должны были бы удвоить на этот период число инструкторов и соответственно число нанятых рабочих. Это характеристическое свойство модели линейного программирования называется условием пропорциональности.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2: НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТЬ

В то время как допускаются любые положительные кратные некоторого технологического процесса, отрицательные их интенсивности невозможны. Так, в примере 1 § 1-2 нельзя погрузить отрицательное число ящиков. Другой пример имеется в хорошо известной классической литературе: Безумный Шляпочник, как вы можете вспомнить, в “Приключениях Алисы в стране чудес” убеждал Алису выпить еще немного чаю, а Алиса возражала, что ей не ясно, как, собственно, она могла бы выпить еще, если она не пила вообще. "Вы имеете в виду, что вам не ясно, как вы можете выпить еще меньше чаю,- сказал Шляпочник,- но ведь совсем не трудно выпить больше, чем ничего". Эта тонкость Льюиса Каролла была, вероятно, оставлена без внимания его читателями, не имевшими представления о линейном программировании, ибо с какой стати нужно подчеркивать тот очевидный факт, что технологический процесс "чаепитие" не может осуществляться в отрицательном количестве? Возможно, этим Кэррол хотел сказать, что математики в течение столетий были так заняты обобщением числовой системы с целых чисел на дроби, отрицательные числа, мнимые числа, что они мало думали о том, как удерживать участвующие в задачах переменные в их первоначальной области неотрицательных чисел. Это характеристическое свойство переменных модели линейного программирования известно как условие неотрицательности.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3: АДДИТИВНОСТЬ

Следующий шаг в построении модели состоит в том, чтобы определить, какая совокупность технологических процессов является полной в том смысле, что полный расчет технологического процесса может быть сделан по каждому ингредиенту. Говоря точно, требуется, чтобы общее количество каждого ингредиента, определенное системой как целым, было равно сумме количеств, поступающих в различные технологические процессы, минус сумма количеств, выходящих из них. Таким образом, в нашей абстрактной системе каждый ингредиент характеризуется уравнением материального баланса, различные члены которого представляют собой затраты или выпуск различных технологических процессов. В примере, связанном с консервным заводом, число ящиков, отправленных на склад, должно быть полностью сбалансировано с количествами, поступающими от различных; заводов (включая, возможно, хранение или использование каких-либо излишков).

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 4: ЛИНЕЙНАЯ ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ

Один из ингредиентов нашей системы рассматривается как "ценностный" в том смысле, что общее его количество, произведенное системой, измеряет выигрыш системы. Этим ингредиентом может оказаться квалифицированный труд, завершенные агрегаты, используемые ресурсы, запасы которых дефицитны, подобно ограниченному денежному бюджету. Вклад каждого технологического процесса в общий выигрыш есть количество ценностного ингредиента, которое потребляется или выпускается в этом технологическом процессе. Таким образом, если цель состоит в том, чтобы максимизировать доход, технологические процессы, которые требуют денег, вносят в общий доход отрицательную величину, а те технологические процессы, которые производят деньги, вносят в общий доход положительную величину. Расходы домашней хозяйки на каждый из видов пищи в примере 2 § 1-2 представляют собой отрицательный вклад в общий "доход" семьи; в этом примере нет технологических процессов, которые бы вносили положительную величину. Эта черта модели линейного программирования называется условием линейной целевой функции.

СТАНДАРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Определение таких неотрицательных интенсивностей технологических процессов, при которых количества каждого ингредиента (для этих интенсивностей технологических процессов) удовлетворяют уравнениям материального баланса, а величина выигрыша максимальна, называется стандартной задачей линейного программирования. Представление реальной системы, как в любом из трех примеров § 1-2, в виде математической системы, обладающей перечисленными выше характеристиками, называется моделью линейного программирования. Задача планирования технологических процессов реальной системы преобразована, таким образом, в задачу нахождения решения для модели линейного программирования.

3-2. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

Ввиду того что построение модели представляет собой существенный аспект планирования, теперь будут систематизированы отдельные шаги, которые должны быть предприняты при построении модели линейного программирования. После этого мы покажем, как построенная модель определяет задачу линейного программирования. Симплекс-метод как средство решения общей задачи линейного программирования будет рассматриваться в гл. 5. В настоящей же главе мы применим к двум типичным примерам менее общий графический метод.

Математическая модель системы представляет собой совокупность соотношений, которые определяют допустимые в системе планы. Под допустимыми планами далее понимаются такие планы, которые могут быть осуществлены при соблюдении ограничений системы. Построение математической модели часто дает возможность столь глубокого проникновения в систему и получения сведений о ней, что его можно рассматривать как более важную задачу, чем та задача математического программирования, которой оно предшествует. Построение модели часто оказывается затруднительным ввиду богатства, разнообразия и неопределенности реального мира. Тем не менее можно сформулировать некоторые принципы, выделяющие последовательные шаги в процессе построения модели.

Излагаемая далее схема этого процесса основана на основных предположениях а) пропорциональности, б) неотрицательности, в) аддитивности и г) линейности целевой функции, которые положены в основу модели линейного программирования. Читателю рекомендуется просмотреть эти понятия и в дальнейших примерах выявлять эти характеристики моделей.

Шаг 1. Определить множество технологических процессов. Разложить всю изучаемую систему на все ее элементарные функции, технологические процессы, и для каждого технологического процесса выбрать единицу, которой можно измерить его объем или интенсивность.

Шаг 2. Определить систему ингредиентов. Определить классы объектов, ингредиентов, которые потребляются или производятся технологическими процессами, и выбрать единицу для измерения каждого из них. Выбрать один ингредиент так, чтобы чистое количество его, произведенное всей системой, измеряло "затраты" (или так, чтобы это количество со знаком минус измеряло "доход") всей системы.

Шаг 3. Определить коэффициенты затрат - выпуска. Определить количество каждого ингредиента, потребленное или произведенное при использовании каждого технологического процесса в условиях его единичной интенсивности. Эти числа, коэффициенты затрат-выпуска, представляют собой коэффициенты пропорциональности, связывающие интенсивности производственных способов и потоки ингредиентов.

Шаг 4. Определить экзогенные потоки. Определить чистые затраты или выпуски ингредиентов между системой, рассматриваемой как целое, и внешним миром.

Шаг 5. Составить уравнения материального баланса. Всем технологическим процессам приписать неизвестные неотрицательные интенсивности x_1, x_2, ...; затем для каждого ингредиента выписать уравнение материального баланса, которое утверждает, что алгебраическая сумма расходов этого ингредиента в каждом технологическом процессе (выраженных в виде произведения его интенсивности на соответствующий коэффициент затрат - выпуска) равна экзогенному потоку этого ингредиента.

Таким образом, в результате построения модели получается совокупность математических соотношений, описывающих все допустимые планы системы. Эта совокупность и есть модель линейного программирования.

После того как модель построена, задача линейного программирования может быть сформулирована в математических терминах. Решение этой задачи можно интерпретировать как план для системы - расписание времени и объема действий, которые должны быть выполнены находящейся в заданном начальном состоянии системой для осуществления заданной цели.

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Определить интенсивности всех технологических процессов системы, которые а) неотрицательны, б) удовлетворяют уравнениям материального баланса и в) минимизируют общую стоимость.

Разработка методов решения задачи линейного программирования составляет основную математическую задачу линейного программирования, которой посвящены многие из последующих глав.

В приведенных ниже примерах при выполнении нами шагов построения модели необходимо отметить одно обстоятельство: мы не всегда будем завершать модель за одну последовательность шагов. Часто случается, что на некоторые технологические процессы, обычно связанные с управлением используемыми ресурсами или перевыполнением требований, не обращают внимания до тех пор, пока уравнения материального баланса не потребуют их включения. Таким образом, возвращение от шага 5 к шагу 1 иногда будет необходимо, прежде чем будет завершено построение модели.

3-3. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

В примере § 1-2 с консервными заводами мы потребовали, чтобы план перевозок ящиков минимизировал общую стоимость перевозок от заводов к складам. Для того чтобы упростить эту задачу, мы предположим, что имеется два завода, завод I и завод II, и три склада, обозначенные через A, B и C. Наличие ящиков с консервами на заводах и их потребности на складах следующие:

Наличие ящиков	*Потребности в ящиках*
350 на заводе I	300 на складе A
650 на заводе II	300 на складе B
	300 на складе C
1000 общее наличие	900 общая потребность

Излишки производства (100 ящиков) должны не перевозиться, а оставаться на месте. Стоимости перевозки каждого ящика от любого завода до каждого склада приведены в таблице стоимостей перевозок (1). Задача состоит в том, чтобы определить число ящиков, которое нужно перевезти с каждого завода на каждый склад для минимизации общих транспортных расходов.

Таблица стоимостей перевозок
(в долл. за ящик)

Консервные заводы	Склады		
	Нью-Йорк (A)	Чикаго (B)	Канзас-Сити (C)
Сиэтл (I)	2,5	1,7	1,8
Сан-Диего (II)	2,5	1,8	1,4

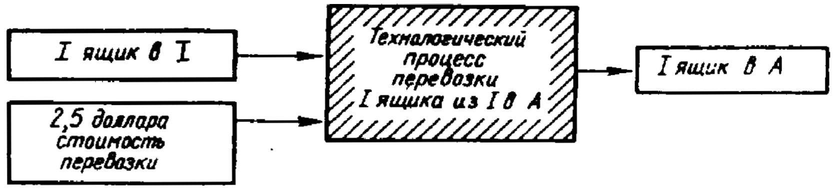
(1)

Для того чтобы построить модель, которая описывает взаимоотношения между наличиями ящиков на заводах и потребностями на складах, мы начнем с анализа одной из элементарных функций, а именно с технологического процесса, состоящего в перевозке с одного завода на один склад. Перевозка ящика с завода I на склад A (т. е. из Сиэтла в Нью-Йорк) показана на диаграмме (2). В качестве затрат она требует двух ингредиентов: один ящик в Сиэтле и 2,5 долл. расходов. В качестве выпуска она производит один игредиент: один ящик в Нью-Йорке. Основное предположение состоит в том, что x ящиков, которые должны быть отправлены из

I в A, потребуют в качестве затрат 1. x ящиков и 2,5. x долл. расходов; в качестве выпуска будет произведено 1. x ящиков в A.

Каким образом этот технологический процесс осуществляется и что именно происходит с ящиком между его пунктами отправления и назначения, не входит в задачу программирования. В этом смысле технологический процесс действительно становится "черным ящиком", в который некоторые ингредиенты поступают, а другие выходят; в нашем случае выпуск есть аналогичный ингредиент, но в другом месте.

Схема "черного ящика" транспортного технологического процесса



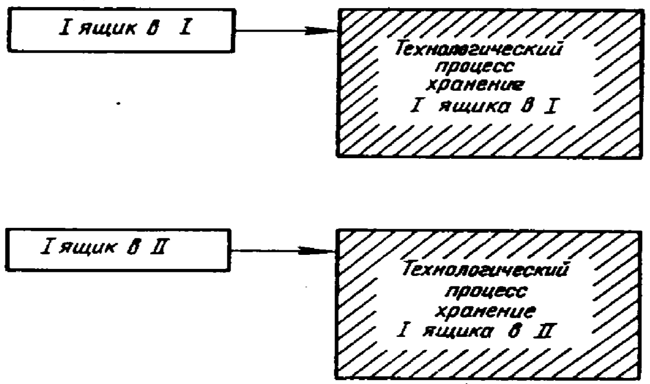
(2)

Пример с консервными заводами содержит шесть технологических процессов, которые представляют собой шесть возможных способов перевозки ящиков от двух заводов к трем складам. Можно также хранить продукцию на заводах, что приводит к другого рода возможной элементарной функции, технологическому процессу, состоящему в хранении. Хранение потребляет ингредиент и стоимость (измеренные в этом примере в долларах); в некоторый момент t и производит этот ингредиент в некоторый более поздний момент t + 1.

Схема "черного ящика" типичного процесса хранения

(3)

Сходство технологических процессов, описанных на схемах (2) и (3), состоит в том, что перевозка есть преобразование в пространстве, а хранение - преобразование во времени. Ввиду того что в нашей конкретной задаче мы не будем рассматривать ни выпуски в более поздние моменты времени, ни приписывание каких-либо стоимостей хранению, эти два процесса хранения примут упрощенную форму (4).



(4)

Шаг 1. Рассмотрим теперь первый шаг построения модели. Мы начнем с составления (5) списка восьми возможных процессов перевозки и хранения. Для удобства слева от этих способов выписаны номера для ссылок; так, технологический процесс “4” есть “перевозка из II в А”. В качестве единицы для измерения объема перевозки или хранения естественно выбрать один ящик; однако для каждого технологического процесса можно было бы выбрать свою единицу измерения. Например, единицей первого технологического процесса могли бы быть десятки перевезенных ящиков, а второй мог бы измеряться в долларах транспортных расходов и т. д.

Перечень технологических процессов

1. Перевозка от I до А	5. Перевозка от II до В	
2. " " I до В	6. " " II до С	(5)
3. " " I до С	7. Хранение излишков в I	
4. " " II до А	8. " " в II	

Шаг 2. Можно было бы полагать, что, кроме стоимостей, имеется еще только один вид ингредиента, а именно ящик. Однако экономисты указывают, что аналогичные ингредиенты в разных местах или же в разные моменты времени являются в сущности различными ингредиентами. В соответствии с нашими целями мы игнорируем изменение времени и сосредоточимся только на перемещениях из одних мест в другие. Согласно этому, получится список из шести ингредиентов, отражающих два завода, три склада и ингредиент стоимости (деньги). Слева к ингредиентам, выписанным в (6), приписаны номера для ссылок; так, ингредиент 4 представляет собой “ящики в В”. Для каждого из ингредиентов 1-5 в качестве единицы измерения будет использоваться один ящик, а для ингредиента 6, т. е. стоимости - один доллар.

Перечень ингредиентов

1. Ящики в I	4. Ящики в В	(6)
2. " " II	5. " " С	
3. " " А	6. Стоимости (долл.)	

Шаг 3. При выписывании коэффициентов затрат - выпуска в модели будет использоваться следующее соглашение об алгебраическом знаке коэффициента: затраты будут считаться положительными, а выпуск - отрицательным. Символически:

(7)

Мы не будем, однако, записывать значения коэффициентов в таком виде, а расположим их в форме таблицы (см. табл. 3-3-I).

Таблица 2-3-I

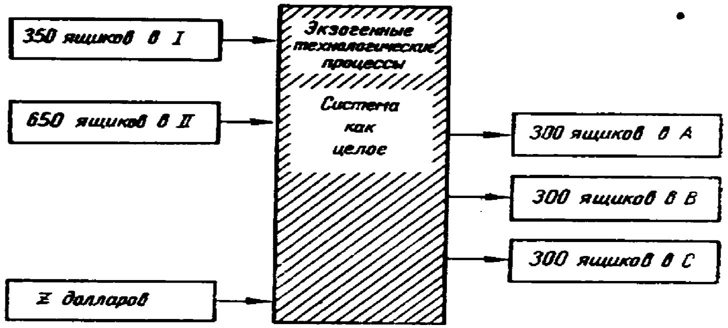
Таблица коэффициентов - транспортная модель

Ингредиенты	Технологические процессы							
	1 I→A	2 I→B	3 I→C	4 II→A	5 II→B	6 II→C	7 хранить в A	8 хранить в B
1. Ящики в I	+1	+1	+1				+1	
2. Ящики в II				+1	+1	+1		+1
3. Ящики в A	−1			−1				
4. Ящики в B		−1			−1			
5. Ящики в C			−1			−1		
6. Стоимости (долл.)	+2,5	+1,7	+1,8	+2,5	+1,8	+1,4		

Каждому технологическому процессу в этой таблице соответствует вертикальный *столбец*, а каждому ингредиенту - *горизонтальная строка*; на пересечении каждой строки и каждого столбца мы помещаем коэффициент затрат - выпуска со знаком для того ингредиента, который требуется единичной интенсивностью технологического процесса.

Таким образом, технологический процесс 4, примененный с единичной интенсивностью для перевозки (одного ящика) из II в А, имеет в качестве затрат один ящик в II (коэффициент +1 в строке 2, столбце 4) и 2,5 долл. (коэффициент +2,5 в строке 6, столбце 4); в качестве выпуска он имеет один ящик в А (коэффициент -1 в строке 3, столбце 4). Составление этой таблицы легко контролируется путем рассмотрения каждой строки для того, чтобы выяснить, произведен или нет полный расчет по каждому ингредиенту; так, в строке 1 ингредиент 1 (ящики в I) входит только в качестве затрат, и эти затраты потребляются технологическими процессами 1, 2, 3 и 7; а в строке 3 ингредиент 3 (ящики в А) выступает только как выпуск технологических процессов 1 и 4.

Шаг 4. Экзогенные (внешние) потоки, поступающие в систему и требуемые от системы как целого, показаны на схеме (8) в виде “черного ящика”. Затраты суть ящики, имеющиеся в распоряжении системы в I и II, а выпуски суть потоки, требуемые от системы. Заметим, что пока еще не были определены денежные затраты. Они должны быть как можно меньше. До тех пор, пока они не определены, они будут обозначаться через z.



(8)

Полезно выписать эти экзогенные потоки в столбец, упорядоченный по ингредиентам, аналогично столбцу для каждого технологического процесса в табл. 3-3-I. Это сделано в табл. (9), где должно использоваться то же самое соглашение относительно алгебраического знака экзогенных потоков, которое принято относительно потоков в каждый технологический процесс внутри системы, потому что алгебраическая сумма потока по всем технологическим процессам будет приравнена к экзогенным потокам. Следовательно, экзогенные затраты будут положительны, а экзогенные выпуски отрицательны. Таким образом:

Ингредиент	Экзогенные потоки	
1. Ящики в I	350	затраты, поступающие в систему
2. Ящики в II	650	
3. Ящики в A	−300	выпуски, требуемые от системы
4. Ящики в B	−300	
5. Ящики в C	−300	
6. Стоимости (долл.)	z	минимальные затраты, поступающие в систему

(9)

Шаг 5. Сопоставим каждому из технологических процессов 1, 2, ..., 8 неизвестную и подлежащую определению величину, которая представляет собой интенсивность этого технологического процесса. Обычно мы обозначаем интенсивность технологического процесса 1 через x_1, технологического процесса 2 через x_2, ..., технологического процесса 8 через x_8.

Используя таблицу коэффициентов, полученную на шаге 3, теперь легко записать уравнения материального баланса для системы, по каждому ингредиенту.

Для ингредиента 1 (ящики в I) технологические процессы, потребляющие его, суть 1, 2, 3 и 7 (перевозки, хранение в I). Ввиду того, что коэффициенты затрат - выпуска, связанные с ингредиентом 1, все равны +1, чистый поток ингредиента 1 в точности равен

$$1^* x_1+1^* x_2+1^*x_3+1^* x_7.$$

Этот поток должен быть равен экзогенному потоку в систему ингредиента 1, который равен 350. Это дает нам первое уравнение материального баланса

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 350.$$

Точно так же уравнение материального баланса для ингредиента 2 (ящики в II) есть

$$x_4 + x_5 + x_6 + x_8 = 650.$$

Для ингредиента 3 (ящики в А) уравнение приобретает иной вид. Здесь технологические процессы 1 и 4, представляющие собой перевозки в А, имеют коэффициенты -1 и никакие другие технологические процессы не включают ингредиент 3. Чистый поток равен

$$-1^*x_1 - 1^*x_4,$$

и ввиду того, что экзогенный поток есть выпуск -300, уравнение будет таким:

$$-x_1 - x_4 = -300.$$

Остальные уравнения, соответствующие ингредиентам 4 и 5, дают аналогичный расчет ящиков в В и С, т.е. соответственно:

$$-x_2 - x_5 = - 300,$$
$$-x_3 - x_6 = -300.$$

Эти уравнения различными способами записаны в виде табл. 3-3-II и в форме системы уравнений (11).

Наконец, поток в систему ингредиента 6, очевидно, описывается выражением

$$2{,}5x_1 +1{,}7x_2+1{,}8x_3+ 2{,}5x_4+1{,}8x_5+1{,}4x_6.$$

Мы приведем это выражение к виду уравнения материального баланса, приравнивая это выражение к неопределенным денежным затратам z. (Напомним при этом, что мы еще не знаем, какое численное значение должно иметь z.)

$$2{,}5x_1 +1{,}7x_2+1{,}8x_3+2{,}5x_4+1{,}8x_5+1{,}4x_6 = z.$$

Теперь шаг 5 завершен.

МОДЕЛЬ В ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ

Система уравнений материального баланса, полученная здесь, вместе с условиями неотрицательности интенсивностей $x_1, \dots, x_8$ всех технологических процессов составляет модель линейного программирования для этой транспортной задачи. Эти уравнения выражены неравенствами (10) и равенствами (11), которые вместе и составляют то, что называется моделью в форме уравнений.

ТАБЛИЦА

Таблица линейного программирования дает как компактную форму для записи данных модели линейного программирования, так и метод получения из этих данных уравнений материального баланса, минуя подробные рассуждения, аналогичные тем, которые мы проводили на шаге 5.

Таблицей для этой задачи является табл. 3-3-II.

Таблица 3-3-II

Модель линейного программирования для транспортной задачи
Табличная форма

Технологические процессы	I → A	I → B	I → C	II → A	II → B	II → C	Хранить в I	Хранить в II	Экзогенные потоки
Интенсивности / Ингредиенты	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
1. Ящики в I	1	1	1				1		350
2. Ящики в II				1	1	1		1	650
3. Ящики в *А*	−1			−1					−300
4. Ящики в *В*		−1			−1				−300
5. Ящики в *С*			−1			−1			−300
6. Стоимости (долл.)	2,5	1,7	1,8	2,5	1,8	1,4			z (min)

Модель в форме уравнений

Неотрицательность
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0,\ x_6 \geqslant 0,\ x_7 \geqslant 0,\ x_8 \geqslant 0. \qquad (10)$$

Уравнения материального баланса
$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 350 \\ x_4 + x_5 + x_6 + x_8 = 650 \\ -x_1 - x_4 = -300 \\ -x_2 - x_5 = -300 \\ -x_3 - x_6 = -300 \\ 2{,}5x_1 + 1{,}7x_2 + 1{,}8x_3 + 2{,}5x_4 + 1{,}8x_5 + 1{,}4x_6 = z\ (\min) \end{array}\right. \qquad (11)$$

Модель состоит из следующих частей:

а) Список технологических процессов системы и их неизвестных интенсивностей.

б) Список ингредиентов системы.

Коэффициенты затрат - выпуска системы расположены в столбцах по технологическим процессам и в строках по ингредиентам, как в “таблице коэффициентов” 3-3-I и затем в “табличной форме” 3-3-II.

в) Экзогенные потоки в систему, в столбце, как в (9).

Соотношение в табл. 3-3-II между моделью в форме уравнений и ее табличной формой должно быть внимательно изучено. Таблица может быть получена из уравнений выписыванием коэффициентов при интенсивностях технологических процессов $x_1, \dots, x_8$, т. е. отбрасыванием букв, обозначающих входящие в уравнения неизвестные. Если модель представлена в табличной форме, то подразумевается, что условия неотрицательности (10) выполнены в табл. 3-3-II; с другой стороны, уравнения (II) могут быть сразу восстановлены из таблицы образованием в каждой строке, соответствующей ингредиенту, произведений коэффициентов затрат - выпуска на соответствующие неизвестные интенсивности технологических процессов, суммированием вдоль всей строки и приравниванием этого выражения для чистого потока экзогенному потоку ингредиента.

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Наконец, мы можем сформулировать задачу для нашего конкретного примера. Она состоит в том, чтобы определить интенсивности технологических процессов x_1, x_2, ..., x_8, которые а) неотрицательны (соотношения (10), табл. 3-3-II), б) удовлетворяют уравнениям материального баланса (11) и в) минимизируют Z.

3-4. ПРИМЕРЫ СМЕШИВАНИЯ

Часто встречается один тип задачи линейного программирования, в который входит смешивание. Типичным является пример, связанный с закупкой различных товаров, каждый из которых имеет известные характеристики и цены. Задача состоит в том, чтобы дать рецепт, указывающий, какое количество каждого товара следует закупить с тем, чтобы после смешивания всех купленных товаров характеристики смеси лежали в пределах заданных границ, а общая закупочная цена была минимальна.

В примере, который мы здесь приводим, характеристики смеси определены точно. Как будет видно позже, в случае, когда характеристики смеси должны лежать между некоторыми нижней и верхней границами, достаточны лишь небольшие изменения модели.

ЗАДАЧА О СМЕСЯХ I

Предприниматель собирается производить сплав, содержащий 30% свинца, 30% цинка и 40% олова. Предположим, что на рынке имеются сплавы A, B, C, ..., составы и цены которых приведены в табл. (1). Какое количество сплава каждого типа следует закупить на каждый фунт производимой смеси для минимизации затрат?

Очевидно, предприниматель может ограничиться покупкой только сплава E, но он стоит 7,60 долл. за фунт. Если он купит по 1/4 фунта каждого из сплавов A, B, C и D, то он также получит один фунт смеси в 30 - 30 - 40%, но уже за 5,05 долл.; 1/4 фунта A, 1/4 фунта B и 1/2 фунта H снова дадут один фунт смеси с нужной пропорцией, но за 5,55 долл. После небольшого числа подобных проб предприниматель вполне может найти более общий подход к этой задаче.

Данные для задачи о смесях I

Сплав	A	B	C	D	E	F	G	H	I	Требуемая смесь
% свинца	10	10	40	60	30	30	30	50	20	30
% цинка	10	30	50	30	30	40	20	40	30	30(1)
% олова	80	60	10	10	40	30	50	10	50	40
Стоимости за фунт в долл.	4,1	4,3	5,8	6,0	7,6	7,5	7,3	6,9	7,3	min

При формулировке модели линейного программирования для этого примера мы должны прежде всего заметить, что задача о смесях не была поставлена в столь же исчерпывающем виде, как, скажем, транспортная задача из предыдущего параграфа. Здесь не были определены количества свинца, цинка и олова в окончательной смеси, а были указаны лишь их доли и требовалось минимизировать стоимость каждого фунта выпуска. Ввиду того что нам необходимы определенные

данные относительно экзогенных потоков, мы потребуем, чтобы было произведено некоторое определенное количество сплава. Ясно, что рецепт, дающий наиболее экономичный план закупки на один фунт выпуска сплава, может быть сразу превращен в рецепт, дающий самый экономичный план закупки на n фунтов выпуска путем умножения на n всех интенсивностей, участвующих в модели технологических процессов, таким образом, мы ограничим объемы технологических процессов теми комбинациями, которые производят один фунт сплава. Это ограничение выражено позже неявно при составлении экзогенных потоков (6), а затем явно в уравнениях материального баланса (8).

Это соглашение имеет еще одно полезное следствие, состоящее в том, что требование процентного состава в исходной постановке задачи теперь становится более конкретным: смесь должна содержать 0,3 фунта свинца, 0,3 фунта цинка и 0,4 фунта олова. (Часто начинающий пытается формулировать задачу, не ограничивая общее произведенное количество, и в этом случае становится трудно интерпретировать уравнения материального баланса, когда они записываются в терминах процентного состава, а не в абсолютных количествах.)

Шаг 1. Определение технологических процессов. Единственные технологические процессы, которые нам необходимо рассмотреть, суть закупки каждого из девяти сплавов, так как мы предполагаем, что весь закупленный металл подвергнется смешиванию. Единичной интенсивностью для каждого технологического процесса будет закупка одного фунта сплава.

Перечень технологических процессов

1. Закупка сплава	A;	интенсивность	x_1	
2. " "	B;	"	x_2	
3. " "	C;	"	x_3	
4. " "	B;	"	x_4	(2)
5. " "	E;	"	x_5	
6. " "	F;	"	x_6	
7. " "	G;	"	x_7	
8. " "	H;	"	x_8	
9. " "	I;	"	x_9	

Шаг 2. Определение ингредиентов. Теперь можно выписать рассматриваемые в системе ингредиенты:

Перечень ингредиентов

1. Общее количество металла в фунтах
2. Количество свинца " "
3. " цинка " " (3)
4. " олова " "
5. Стоимость (долл.)

Шаг 3. Коэффициенты затрат - выпуска. В последующем изложении мы примем первую из трех точек зрения, перечисленных в сноске[1]. Типичный технологический процесс - скажем, способ 1, закупка сплава A, если использовать данные табл. (1), имеет вид

(4)

[1] Имеются три точки зрения, которые можно принять при формулировке этой модели: 1) точка зрения покупателя сплава, которая состоит в том, что он получает доллары и выпускает вклады в фунты готовой смеси и в характеристики свинца, олова, цинка; 2) точка зрения производящего смесь, которая состоит в том, что он получает вклады в характеристики свинца, олова, цинка и выпускает доллары и фунты готовой смеси; 3) точка зрения получателя готовой смеси, которая состоит в том, что он получает готовый металл и вклады в характеристики свинца, олова, цинка и выпускает деньги.

Аналогично каждый из девяти технологических процессов имеет один вход и четыре выхода. Каждый технологический процесс имеет, конечно, в качестве выпуска один фунт металла; остальные элементы табл. 3-4-I, коэффициенты затрат - выпуска, получены непосредственно из данных табл. (1).

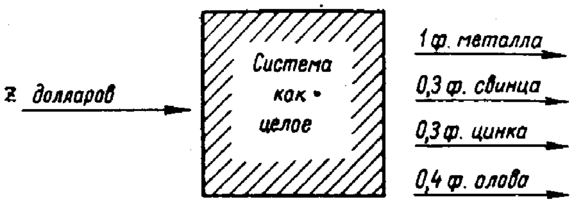
Таблица 3-4-I

Таблица коэффициентов: задача о смесях I

Ингредиенты \ Технологические процессы	1 A	2 B	3 C	4 D	5 E	6 F	7 G	8 H	9 I
1. Металл	—1	—1	—1	—1	—1	—1	—1	—1	—1
2. Свинец	—0,1	—0,1	—0,4	—0,6	—0,3	—0,3	—0,3	—0,5	—0,2
3. Цинк	—0,1	—0,3	—0,5	—0,3	—0,3	—0,4	—0,2	—0,4	—0,3
4. Олово	—0,8	—0,6	—0,1	—0,1	—0,4	—0,3	—0,5	—0,1	—0,5
5. Стоимости (долл.)	4,1	4,3	5,8	6,0	7,6	7,5	7,3	6,9	7,3

Шаг 4. Экзогенные потоки. Они показаны в форме "черного ящика" на диаграмме (5) и в виде списка в (6):

Экзогенные потоки - задача о смесях I



(5)

Ингредиенты	Экзогенные потоки
1. Металл	-1,0
2. Свинец	-0,3
3. Цинк	-0,3
4. Олово	-0,4
5. Стоимости (долл.)	z(min)

(6)

Шаг 5. Уравнения материального баланса. Модель в форме уравнений может быть собрана непосредственно из результатов шагов 3 и 4. Комбинируя таблицу коэффициентов (табл. 3-4-I) и список экзогенных потоков (6), мы приходим к табличной форме нашей модели, показанной в табл. 3-4-II.

Задача линейного программирования для модели смешивания I. Определить интенсивности технологических процессов $x_1, x_2, \ldots, x_9$, которые а) неотрицательны (соотношения (7), табл. 3-4-II), б) удовлетворяют уравнениям материального баланса (8) и в) минимизируют z.

Таблица 3-4-II

Модель линейного программирования для задачи о смесях I

Табличная форма

Технологические процессы	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
Ингредиенты \ Покупать в количестве	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	Экзогенные потоки
1. Металл (общее количество)	—1	—1	—1	—1	—1	—1	—1	—1	—1	—1
2. Свинец	—0,1	—0,1	—0,4	—0,6	—0,3	—0,3	—0,3	—0,5	—0,2	—0,3
3. Цинк	—0,1	—0,3	—0,5	—0,3	—0,3	—0,4	—0,2	—0,4	—0,3	—0,3
4. Олово	—0,8	—0,6	—0,1	—0,1	—0,4	—0,3	—0,5	—0,1	—0,5	—0,4
5. Стоимости (долл.)	4,1	4,3	5,8	6,0	7,6	7,5	7,3	6,9	7,3	z (min)

Модель в форме уравнений

Неотрицательность
$$x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0,\quad x_3 \geqslant 0,\quad x_4 \geqslant 0,\quad x_5 \geqslant 0,\quad x_6 \geqslant 0,\quad x_7 \geqslant 0,\quad x_8 \geqslant 0,\quad x_9 \geqslant 0 \tag{7}$$

Уравнения материального баланса
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - x_8 - x_9 = -1 \\ -0{,}1x_1 - 0{,}1x_2 - 0{,}4x_3 - 0{,}6x_4 - 0{,}3x_5 - 0{,}3x_6 - 0{,}3x_7 - 0{,}5x_8 - 0{,}2x_9 = -0{,}3 \\ -0{,}1x_1 - 0{,}3x_2 - 0{,}5x_3 - 0{,}3x_4 - 0{,}3x_5 - 0{,}4x_6 - 0{,}2x_7 - 0{,}4x_8 - 0{,}3x_9 = -0{,}3 \\ -0{,}8x_1 - 0{,}6x_2 - 0{,}1x_3 - 0{,}1x_4 - 0{,}4x_5 - 0{,}3x_6 - 0{,}5x_7 - 0{,}1x_8 - 0{,}5x_9 = -0{,}4 \\ 4{,}1x_1 + 4{,}3x_2 + 5{,}8x_3 + 6{,}0x_4 + 7{,}6x_5 + 7{,}5x_6 + 7{,}3x_7 + 6{,}9x_8 + 7{,}3x_9 = z \text{ (min)} \end{cases} \tag{8}$$

ЗАДАЧА О СМЕСЯХ II

Рассмотренная выше частная задача линейного программирования несколько трудна для непосредственного решения до тех пор, пока не будут изложены в гл. 5 соответствующие методы. (Эта задача предложена в виде примера 2 этой главы.) Оказывается, что ее решение есть $x_1 = 0$, $x_2 = 3/5$, $x_4 = 2/3$, а все остальные технологические процессы применяются с нулевой интенсивностью. Минимальная стоимость одного фунта металла равна 4,98 долл. Рассмотрим, однако, вместо этой задачи другую, более легкую.

Для того чтобы упростить задачу о смесях до такой степени, чтобы ее можно было решить графически, попытаемся найти самую дешевую смесь сплавов, которая будет иметь 0,4 фунта олова в каждом фунте металла (остальные 0,6 фунта металла могут состоять из свинца и цинка в любом соотношении). Это, конечно, не та задача, которую мы сформулировали раньше, но для ее формулировки совсем не обязательно осуществлять заново весь процесс построения модели. Все, что мы должны сделать, это опустить требования, наложенные в (6) на ингредиенты 2 (свинец) и 3 (цинк); остальные требования, технологические процессы и коэффициенты затрат - выпуска не должны изменяться при построении этой более простой модели. Таким образом, мы можем получить упрощенную модель в форме уравнений, просто вычеркивая второе и третье уравнения (8), которые относятся к свинцу и цинку. Нам остаются первое, четвертое и пятое уравнения (8).

Рассуждение станет еще проще, если мы изменим знаки при всех членах уравнений, относящихся к "металлу" и "олову".

Задача, линейного программирования для модели смешивания II. Определить интенсивности технологических процессов $x_1, x_2, \dots, x_9$, которые а) неотрицательны, б) удовлетворяют уравнениям

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9=1, \qquad (9)$$

$$0{,}8x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}1x_4 + 0{,}4x_5 + 0{,}3x_6 + 0{,}5x_7 + 0{,}1x_8 + 0{,}5x_9 = 0{,}4 \qquad (10)$$

$$4{,}1x_1+4{,}3x_2+5{,}8x_3+6{,}0x_4+7{,}6x_5+7{,}5x_6+ 7{,}3x_7 + 6{,}9x_8+7{,}3x_9 = z \qquad (11)$$

и в) минизируют z.

Графическое представление. Условия задачи о смесях поддаются теперь графическому представлению, которое приведено на рис. 3-4-I. Для каждого из девяти технологических процессов мы берем соответствующие два коэффициента из уравнений (10) и (11) и представляем технологический процесс точкой, имеющей эти два числа своими координатами. Таким образом, точка А, представляющая сплав А, имеет координаты (0,8, 4,1), которые изображают количество олова в сплаве А и стоимость каждого его фунта; аналогично точка В имеет координаты (0,6, 4,3), количество олова и стоимость каждого фунта для сплава В и т.д. Пусть (u, v) - координаты произвольной точки.

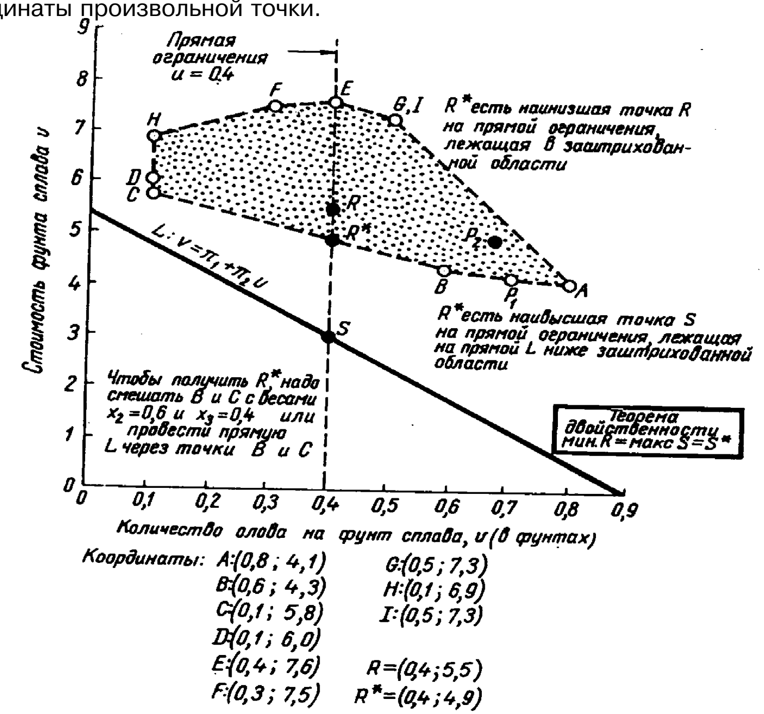


Рис. 3-4-I. Иллюстрация теоремы двойственности на модели смешивания II

Это графическое представление ценно не столько тем, что коэффициенты затрат - выпуска любого технологического процесса могут быть представлены точкой, сколько тем, что чистый экзогенный поток в систему также можно представить точкой для любого плана с неотрицательными интенсивностями $x_1, \dots, x_9$, сумма которых равна единице. Рассмотрим, например, план $x_1 = x_2 =1/2$, $x_3 = x_4 = \dots = 0$, который заключается в использовании каждого из сплавов А и В в количестве полуфунта. Этот план дает 0,8*1/2+0,6*1/2 = 0,7 фунта олова, а стоимость его 4,1*1/2+4,31*1/2 = 4,2. Таким образом, этот план может быть представлен на рис. 3-4-I точкой P_1, расположенной посредине между точками А и В. Другой план, $x_1 = 1/2$, $x_2 = x9 = 1/4$, использующий полфунта А и по четверти фунта каждого из сплавов В и I, имеет координаты 0,8*1/2 + 0,6*1/4 + 0,5*1/4 = 0,675 для олова и 4,1*1/2+4,3*1/4+7,3*1/4 = 4,95 для стоимости и может быть представлен точкой P_2.

В любом случае координаты точки, представляющей смесь, суть взвешенные средние соответствующих координат точек, представляющих чистые сплавы; так, мы говорим, что точка P_1 есть взвешенное среднее точек А и В с весами соответственно 1/2 и 1/2, а P_2 есть взвешенное среднее точек А, В и I с весами соответственно 1/2, 1/4 и 1/4. (В физике P_1 называется центром тяжести системы, состоящей из веса в 1/2 единицы в точке А и 1/2 единицы в точке В, аналогично P_2 есть центр тяжести системы, состоящей из весов 1/2, 1/4, 1/4, расположенных соответственно в точках А, В и I.)

Теперь становится ясно, что множество всех неотрицательных планов, удовлетворяющих соотношению (9), представлено на рис. 3-4-I заштрихованной областью, которая является совокупностью всех возможных взвешенных средних девяти точек А, ..., I. Допустимыми, планами, однако, являются те планы, которые дают в точности 0,4 фунта олова; они представлены теми точками заштрихованной области, которые лежат на вертикальной прямой с абсциссой 0,4. Точка Е дает именно такой план, точно так же как и точка R = (0,4, 5,55), которая есть взвешенное среднее точек А, В и Н соответственно с весами 1/4, 1/4 и 1/2. Очевидно, однако, ни одна из этих точек не дает решения задачи с наименьшим Z; точка, которая дает такое решение, есть наинизшая точка на вертикальной прямой, находящаяся в заштрихованной области. Таким образом, задача линейного программирования может быть графически интерпретирована как задача приписывания вершинам фигуры неотрицательных весов таким образом, чтобы взвешенное среднее вершин лежало на вертикальной прямой с абсциссой 0,4 и имело как можно меньшую ординату Z. Из чертежа мы можем усмотреть, что требуемое взвешенное среднее R* расположено на прямой ВС, т. е. оно есть среднее, полученное приписыванием некоторых весов x_2 и x_3 точкам В и С и нулевых весов всем остальным точкам. Для того чтобы определить x_2 и x_3, положим в (9) и (10) все x_i, кроме x_2 и x_3, равными нулю. Это значит, что мы ограничиваемся рассмотрением смесей, в которые входят только В и С; тогда мы должны иметь

$$x_2 + x_3 = 1,$$

$$0{,}6x_2+0{,}1x_3 = 0{,}4,$$

что дает

$$x_2 = 0{,}6, \; x_3=0{,}4$$

и

$$\min Z =4{,}3x_2+5{,}8x_3=4{,}9.$$

Отсюда мы заключаем, что наилучшей является смесь, при которой берутся 0,6 фунта сплава В и 0,4 фунта сплава С. Это приводит к получению самого дешевого сплава, содержащего 40% олова. Эта смесь будет стоить 4,9 долл. за фунт.

Алгебраическая проверка - двойственная задача линейного программирования. Мы можем проверить алгебраически, правилен ли наш выбор точек В и С на рис. 3-4-I, определяя сначала прямую, соединяющую В и С, и затем исследуя, имеет ли каждая точка заштрихованной области ординату n, большую, чем точка на этой прямой с той же самой абсциссой u. Если это так, то мы скажем, что заштрихованная область лежит "над" прямой, соединяющей B и C. Далее, уравнение произвольной прямой в плоскости u, n есть

$$n = p_1 + p_2 u$$

где p_1 - длина отрезка, отсекаемого на оси n, а p_2 - наклон прямой к оси u. Для того чтобы заштрихованная область лежала выше этой прямой, каждая из точек A, B, C, ..., I (которые порождают заштрихованную область) должна лежать выше этой прямой или на ней. Подставляя в это уравнение значение координаты u = 0,8 точки A, мы получаем, что значение $n = p_1 + p_2 * 0{,}8$ не должно превосходить координаты n точки A. Таким образом, наша проверка для точки A сводится к неравенству $p_1 + p_2 * 0{,}8 \leq 4{,}1$, так что для всей системы точек A, B, C, ... мы должны иметь

$$\begin{aligned}
&\pi_1 + \pi_2 \cdot 0{,}8 \leqslant 4{,}1,\\
&\pi_1 + \pi_2 \cdot 0{,}6 \leqslant 4{,}3,\\
&\pi_1 + \pi_2 \cdot 0{,}1 \leqslant 5{,}8,\\
&\pi_1 + \pi_2 \cdot 0{,}1 \leqslant 6{,}0,\\
&\pi_1 + \pi_2 \cdot 0{,}4 \leqslant 7{,}6,\\
&\pi_1 + \pi_2 \cdot 0{,}3 \leqslant 7{,}5,\\
&\pi_1 + \pi_2 \cdot 0{,}5 \leqslant 7{,}3,\\
&\pi_1 + \pi_2 \cdot 0{,}1 \leqslant 6{,}9,\\
&\pi_1 + \pi_2 \cdot 0{,}5 \leqslant 7{,}3.
\end{aligned} \qquad (12)$$

Пусть $S = (0{,}4; \bar{\upsilon})$ - точка пересечения вертикальной прямой u = 0,4 с прямой $n = p_1 + p_2 u$; тогда прямая, которую мы ищем (и которая, как мы надеемся, будет прямой, соединяющей B и C), есть прямая, лежащая ниже заштрихованной области, для которой координата $\upsilon = \bar{\upsilon}$ точки S максимальна, т. е.

$$\pi_1 + \pi_2 \cdot 0{,}4 = \bar{\upsilon}(\max). \qquad (13)$$

Задача нахождения $p_1 p_2$, и max n , удовлетворяющих (12) и (13), известна под названием двойственной задачи по отношению к нашей исходной (прямой) задаче (9), (10) и (11). Тот факт, что для этих двух задач max $\bar{\upsilon} = \min z$, , есть частный случай важной теоремы двойственности для задач линейного программирования. Если мы догадались, что некоторая смесь пары точек, подобно B, C (полученная визуальным изучением чертежа или как-нибудь иначе), дает оптимальный выбор, то это легко проверить, выяснив, во-первых, расположено ли пересечение S между выбранными двумя точками и, во-вторых, расположены ли все точки A, B, C, ... на прямой, соединяющей выбранные две точки, или выше нее. Для того чтобы проверить первый факт, мы решаем систему

$$\begin{aligned}
x_2 + x_3 &= 1,\\
0{,}6x_2 + 0{,}1x_3 &= 0{,}4,
\end{aligned} \qquad (14)$$

получая $x_2 = 0{,}6$, $x_3 = 0{,}4$, которые положительны, так что S лежит между B и C. Таким образом, эти значения с остальными x_i, равными нулю, удовлетворяют прямой системе (9), (10) и (11). Для того чтобы проверить второй факт, мы находим

уравнение прямой, формулируя условия прохождения этой прямой через точки B и C:

$$\begin{aligned}
\pi_1 + \pi_2 \cdot 0{,}6 &= 4{,}3,\\
\pi_1 + \pi_2 \cdot 0{,}1 &= 5{,}8.
\end{aligned} \qquad (15)$$

Это дает значения $p_1 = 6{,}1$, $p_2 = -3$, которые удовлетворяют двойственной системе (12).

3-6. ПРОСТАЯ ЗАДАЧА О СКЛАДЕ

Рассмотрим задачу создания запасов некоторого товара на складе с целью продажи в будущем. Склад может вместить только 100 единиц товара. Затраты на хранение каждой единицы товара в течение квартала равны 1,00 долл. В каждом квартале закупочная цена равна продажной. Эта цена меняется от квартала к кварталу согласно табл. (1):

Квартал (t)	Цена единицы товара (долл.)
1	10
2	12
3	8
4	9

(1)

Отсюда следует, что можно извлечь прибыль, покупая товар по низкой цене и продавая его по высокой. Задача состоит в том, чтобы определить оптимальный план продажи, хранения и покупки по кварталам в течение одного года, предполагая, что начальный запас на складе составляет 50 единиц.

В течение каждого периода (квартала) t мы различаем четыре типа технологических процессов:

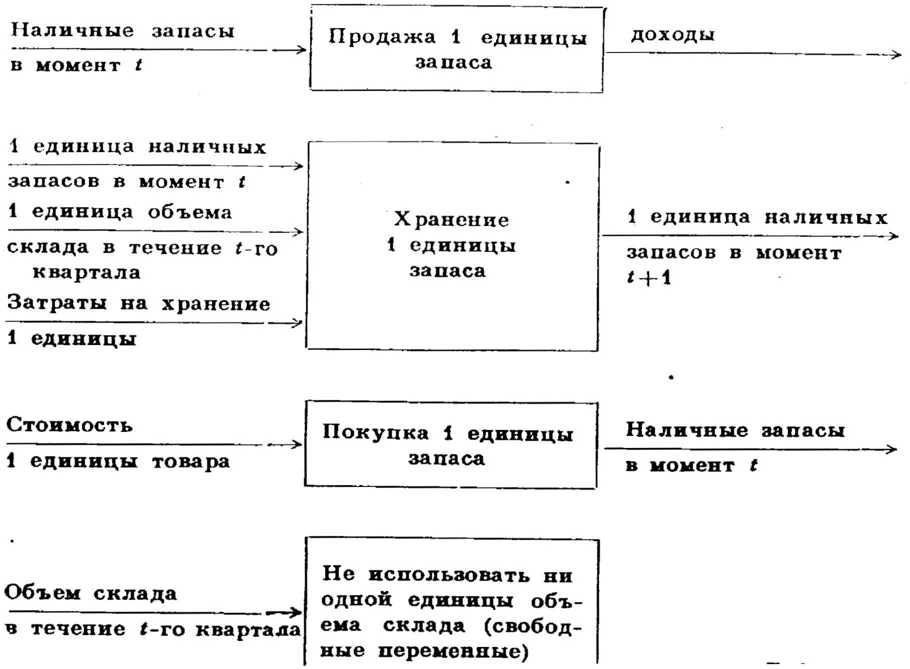
	Количество
1. Продажа запаса	x_{t1}
2. Хранение запаса	x_{t2}
3. Покупка запаса	x_{t3}
4. Не использовать возможности (свободные переменные)	x_{t4}

и три типа ингредиентов:

1. Запасы
2. Объем склада
3. Затраты

Эти технологические процессы имеют характеристики затрат - выпуска, схематически изображенные в (2).

В течение четырех периодов времени каждый ингредиент и каждый технологический процесс повторяются четыре раза, что приводит к табл. 3-6-I, которая и является таблицей задачи о складировании. Задача состоит здесь в том, чтобы найти значения $x_{ti} \geq 0$, которые удовлетворяют уравнениям, вытекающим из таблицы, и которые минимизируют общую стоимость.



(2)

Таблица 3-6-I

Простая модель складирования

Технологические процессы / Ингредиенты	1-й квартал: продавать x_{11}	хранить x_{12}	покупать x_{13}	свободная переменная x_{14}	2-й квартал: продавать x_{21}	хранить x_{22}	покупать x_{23}	свободная переменная x_{24}	3-й квартал: продавать x_{31}	хранить x_{32}	покупать x_{33}	свободная переменная x_{34}	4-й квартал: продавать x_{41}	хранить x_{42}	покупать x_{43}	свободная переменная x_{44}	Экзогенные потоки
$t=0$ запасы	1	1	−1														50
Объем склада		1		1													100
$t=1$ запасы		−1			1	1	−1										0
Объем склада						1		1									100
$t=2$ запасы						−1			1	1	−1						0
Объем склада										1		1					100
$t=3$ запасы										−1			1	1	−1		0
Объем склада														1		1	100
Стоимость	−10	1	10		−12	1	12		−8	1	8		−9	1	9		$z(\min)$

3-7. ОБУЧЕНИЕ НА РАБОТЕ

Цель этого примера состоит в разъяснении того, что модель линейного программирования может охватывать много разнообразных условий, которые так характерны для практических применений.

Задача. Согласно контракту, завод должен произвести 1200 единиц некоторого товара С, причем расписание поставок r_t указано в табл. (1).

Конец недели	1	2	3	4	5
Количество единиц	r_1=100	r_2=200	r_3=300	r_4=400	r_5=200

(1)

Какой план найма, увольнения, производства и хранения должен принять фабрикант для того, чтобы минимизировать затраты выполнения контракта при следующих условиях:

а) Каждая единица продукции, не поставленная в срок, влечет штраф p = 30 долл. за каждую неделю до тех пор, пока поставка не будет выполнена.

б) Любая единица продукции, произведенная раньше срока, требует хранения, расходы по которому составляют s = 10 долл. в неделю.

в) Все требуемые поставки должны быть выполнены в конце пятой недели.

г) Вначале имеется g = 20 рабочих и h = 10 единиц товара С в наличии.

д) Каждый рабочий, использованный на производстве в течение недели, может выпустить k = 8 единиц товара С.

е) Каждый рабочий, использованный для обучения учеников в течение недели, может обучить l - 1 = 5 новых рабочих (т. е. произвести l обученных рабочих, включая себя).

ж) Зарплата рабочего составляет m = 100 долл. в неделю независимо от его занятости.

з) Зарплата рабочего и l - 1 его учеников в процессе обучения в течение одной недели составляет n = 600 долл.

и) Стоимость увольнения одного рабочего составляет f = 100 долл.

Мы выберем в качестве единицы времени период, равный одной неделе. В начале каждой недели мы определяем число рабочих и единиц товара С, необходимые для того, чтобы осуществить технологический процесс в течение этой недели. В соответствии с этим в каждый из шести моментов времени t = 0, 1, ..., 5 должны быть составлены уравнения материального баланса для следующих двух ингредиентов.

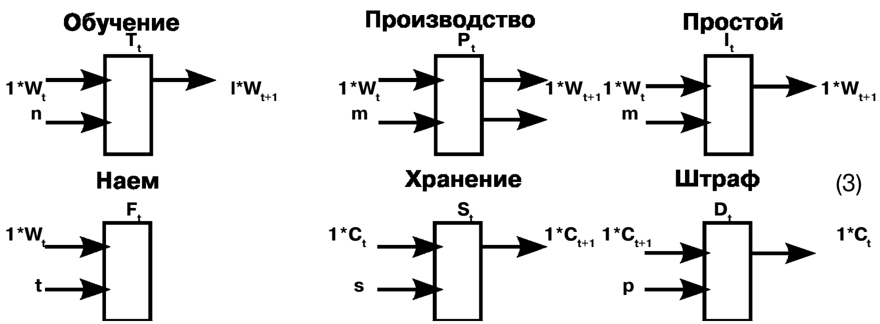
	Обозначение
Рабочие	W_t
Товар	C_t

К этим уравнениям добавится уравнение стоимости для стоимостного ингредиента. В течение каждого из пяти недельных периодов будут осуществляться следующие технологические процессы, перечисленные в (2):

	Обозначение
1. Обучение	T_t
2. Производство	P_t
3. Простой	I_t
4. Увольнение	F_t
5. Хранение	S_t
6. Выплата штрафа (за нехватку)	D_t

(2)

Характеристики затрат - выпуска для каждого из этих технологических процессов, за исключением, возможно, штрафа, получаются непосредственно. Каждое невыполнение поставки одной единицы заставляет уменьшить на одну единицу спрос на товар в настоящий период и увеличить на одну единицу спрос в следующий период по цене p долл. Другою понимание этого технологического процесса состоит в том, чтобы представить, что дефицит временно покрывается заимствованием на открытом рынке 1 единицы товара, которая должна быть возвращена на следующей неделе по цене p долл.



Эти технологические процессы описаны в обозримой форме в табл. 3-7-I. Штраф на пятой неделе опускается ввиду условия (в), которое утверждает, что все поставки должны быть выполнены к концу пятой недели. На шестой неделе должно быть применено увольнение F_6 для того, чтобы избавиться от всех рабочих и завершить программу. (Почему это необходимо?)

Большинство прикладных задач программирования в конечном счете содержат неопределенность либо в технологической матрице, либо в правых частях. Однако рассмотренные до сих пор методы не учитывают неопределенную природу коэффициентов задачи. В период 1955-1960 гг. различные авторы пытались распространить методы линейного программирования на задачи оптимизации тех или иных целевых функций при ограничениях, коэффициенты которых подвержены случайным изменениям. Одна из основных трудностей заключается в том, что эта проблема допускает много формулировок, для каждой из которых получены лишь разрозненные результаты. В настоящей главе мы изучим некоторые из задач, решенных в этой области, предупреждая читателя, что наше изложение является неполным и что необходимы обширные дальнейшие исследования.

25-1. СОСТАВЛЕНИЕ ПЛАНОВ В СЛУЧАЕ ПЕРЕМЕННЫХ ИЗДЕРЖЕК

Напомним сначала, что в практике планирования употребительны два существенно различных подхода - краткосрочное и долгосрочное планирование. В последнем случае влияние случайных факторов сводится к минимуму при помощи обычного в таких задачах приема - введения в систему значительной свободы. Например, уровни потребления, скорости истощения ресурсов или износа оборудования всегда планируются с некоторым завышением; нормы времени на перевозку или на производство назначаются с большим превышением против реальных потребностей. В действительности система в целом обеспечивается значительной свободой в надежде на то, что последняя будет служить своеобразным амортизатором, позволяющим обеспечить осуществление общих целей плана и его выполнение во времени, несмотря на непредвиденные события. Говоря точнее, свобода, запас, вводится в систему таким образом, чтобы при любом случайном непредвиденном событии выбираемые нами процессы оставались бы допустимыми. Процессы, удовлетворяющие этому требованию, мы будем называть перманентно допустимыми.

Таблица 3-7-I

Модель обучения на работе

Ингредиент	1-я неделя						2-я неделя						3-я неделя					
	T_1	P_1	I_1	F_1	S_1	D_1	T_2	P_2	I_2	F_2	S_2	D_2	T_3	P_3	I_3	F_3	S_3	D_3
	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}
W_0	1	1	1	1														
C_0					1	−1												
W_1	$-l$	−1	−1				1	1	1	1								
C_1		$-k$			−1	1					1	−1						
W_2							$-l$	−1	−1				1	1	1	1		
C_2								$-k$			−1	1					1	−1
W_3													$-l$	−1	−1			
C_3														$-k$			−1	1
W_4																		
C_4																		
W_5																		
C_5																		
Стоимость	n	m	m	f	s	p	n	m	m	f	s	p	n	m	m	f	s	p

Ингредиент	4-я неделя						5-я неделя						Экзогенные потоки
	T_4	P_4	I_4	F_4	S_4	D_4	T_5	P_5	I_5	F_5	S_5	F_6	
	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	x_{45}	x_{46}	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}	x_{55}	x_{64}	
W_0													g
C_0													h
W_1													0
C_1													$-r_1$
W_2													0
C_2													$-r_2$
W_3	1	1	1	1									0
C_3					1	−1							$-r_3$
W_4	$-l$	−1	−1				1	1	1	1			0
C_4		$-k$			−1	1					1		$-r_4$
W_5							$-l$	−1	−1			1	0
C_5								$-k$			−1		$-r_5$
Стоимость	n	m	m	f	s	p	n	m	m	f	s	f	z (min)

Влияние случайных событий сводится к минимуму также путем введения в систему значительной вялости. Под этим мы понимаем, например, следующее. Затраты экзогенных ограниченных факторов в системе оцениваются с большим занижением, так что представляется весьма маловероятным, что выбранное нами множество процессов окажется недопустимым из-за нехватки ресурсов.

На практике долгосрочные планы приходится часто подвергать пересмотру в силу назойливого вторжения случайных элементов задачи. По этой причине главное достоинство - если таковые вообще имеются - долгосрочного плана заключается в возможности принятия немедленного решения - скажем, о распределении фондов или о разработке более совершенной технологии.

При краткосрочном планировании применяются многие из приемов введения свободы и вялости, используемых в долгосрочном случае. Основные различия состоят в большем внимании к деталям и в краткости планового периода. Пока возможности значительно превышают требования или уровни спроса либо же удовлетворение спроса можно сдвинуть во времени, этот подход не выдвигает никаких проблем, так как в этом случае оказывается возможным осуществить план во всех его деталях. Однако при наличии дефицита план, составленный на основе подобных приемов, может привести к действиям, весьма далеким от оптимальных, в то время как излагаемые здесь новые методы в случае своей применимости могут дать значительную экономию.

МИНИМАЛЬНЫЕ ОЖИДАЕМЫЕ ЗАТРАТЫ

Эксперт по питанию хочет посоветовать своим приверженцам придерживаться диеты с минимальными затратами, не зная наперед цен. Так как цены на пищевые продукты проявляют - за исключением тенденций типа инфляции - известную склонность к колебаниям в зависимости от условий погоды, от предложения и т.п., он предполагает, что на каждый продукт имеется не фиксированная цена, а некоторое распределение возможных цен, и пытается определить диету, удовлетворяющую определенным требованиям по питательности и минимизирующую ожидаемые суммарные издержки. Пусть x_j - количество фунтов j-го пищевого продукта, подлежащее закупке, а p_j - его цена. Пусть a_{ij} - количество i-го питательного вещества (например, витамина А), содержащееся в весовой единице j-го продукта, а b_i - минимальное количество этого питательного вещества, необходимое индивидууму для поддержания сил и здоровья. Тогда значения x_j должны быть выбраны так, чтобы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, x_i \geq 0. \qquad (i = 1, 2, ..., m) \tag{1}$$

Затраты на эту диету составят

$$C = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j . \tag{2}$$

Однако x_j выбираются до того, как станут известными цены, так что при фиксированных значениях x_j суммарные затраты C оказываются случайной величиной, представляющей собой взвешенную сумму случайных величин p_j. Мы будем обозначать математическое ожидание случайной величины u через M_u или M(u). В соответствии с этим математическое ожидание затрат при такой диете составит, очевидно,

$$E = MC = \sum_j \bar{p}_j x_j , \tag{3}$$

где $\bar{p}_j$ - ожидаемая цена продукта j. Поскольку p_j предполагаются заранее известными, наилучшим выбором для x_j будет тот, при котором x_j удовлетворяют (1) и минимизируют Е. Поэтому мы получаем следующую общую теорему.

Теорема 1. Если цены за единицу p_j в (2) представляют собой случайные величины, распределение которых не зависит от x_j, то решение, дающее минимальные ожидаемые затраты, получается путем нахождения x_j ³ 0, удовлетворяющих (1) и минимизирующих С, в котором p_j заменены на $\bar{p}_j = M(p_j)$.

С другой стороны, если каждое p_j зависит от x_j, мы можем записать $p_j x_j = \varphi_j(x_j p_j)$. Вспоминая, что математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий, получаем

$$E = MC = \sum_{j=1}^{n} M\varphi_j(x_j p_j) = \sum_{j=1}^{n} M\varphi_j(x_j) \tag{4}$$

где $\varphi(x_j)$ - некоторые (не обязательно линейные) функции от x_j.

Следующий пример иллюстрирует случай, когда ожидаемые издержки не являются линейными по x_j. Пусть x_j - объем производства j-го товара, а ограничения представляют ограниченность производственных возможностей. Предположим, что имеются издержки трех видов: детерминированные издержки на производство c_{0j}, детерминированные издержки c_{1j} на хранение товаров, не востребованных в результате случайного спроса, и детерминированные издержки от нехватки c_{2j}, возникающие, когда случайный спрос превышает предложение. Тогда

$$E = \sum_j c_{0j} x_j + \sum_j c_{1j} M(x_j - d_j \mid x_j > d_j) + \sum_j c_{2j} M(d_j - x_j \mid x_j < d_j),$$

где символ М (А|В) понимается как условное математическое ожидание А при условии В. Хотя эта задача сформулирована как одношаговая и содержит неопределенность только в целевой функции, ее можно поставить и как двухшаговую задачу, в которой неопределенность будет фигурировать уже в ограничениях.

МИНИМАЛЬНАЯ ДИСПЕРСИЯ ПРИ ФИКСИРОВАННЫХ ОЖИДАЕМЫХ ЗАТРАТАХ

Возвращаясь снова к нашей проблеме питания, отметим, что может оказаться желательным управлять дисперсией V ожидаемых затрат. Таким образом, решение задачи (1), (3), дающее низкие ожидаемые затраты, но проявляющее значительную неустойчивость, может оказаться не столь желательным, как решение, проявляющее большую степень устойчивости. Именно такой случай был рассмотрен Г. Марковицем в его исследованиях по выбору портфеля ценных бумаг. Биржевые маклеры часто предлагают своим покупателям большой выбор акций, одни из которых расцениваются ими как весьма надежные, но приносящие относительно низкие доходы, тогда как другие могут давать высокий средний доход, обладая в то же время большой дисперсией. Таковы, например, акции на разведку нефти, в которых колебания зависят, скажем, от того, будет ли вообще обнаружена нефть.

Целью подобного исследования является указание для каждого из множества уровней ожидаемых прибылей того набора ценных бумаг, который минимизирует дисперсию дохода (рис. 25-1-1).

Теперь покупателю предоставляется решить, какую комбинацию “уровня дохода” и “уровня риска” (min V) он предпочитает.

Предположим, что цена не зависит от x_j и что нам известны дисперсия s^2_j цены конкретного товара p_j и ковариация s_{jk} между двумя ценами p_j и p_k. Положим $\sigma_{jk} = \sigma_j \sigma_k Q_{jk}$, где коэффициент корреляции между двумя ценами Q_{jk} удовлетворяет условию $-1 \le Q_{jk} \le +1$. Так как все x_j единиц товара покупаются по одной и той же цене p_j, дисперсия величины $x_j p_j$ равна $x^2_j s^2_j$, а ковариация между

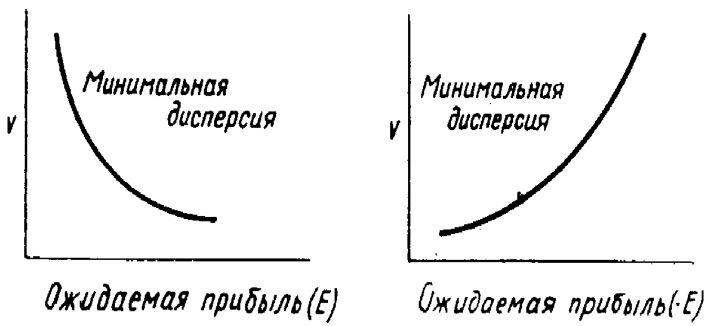


Рис. 25-1-1. Минимальная дисперсия является выпуклой функцией математического ожидания прибыли.

$x_j p_j$ и $x_k p_k$ равна $x_j x_k s_{jk}$. Отсюда следует, что дисперсия V случайной величины E определяется квадратичной формой

$$V = M\left[C-E\right]^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j x_k \sigma_{ik} \cdot \left(\sigma_{jj} = \sigma_j^2\right) \qquad (5)$$

Если, в частности, цены на пищевые продукты сильно коррелированы, так что для всех практических целей можно считать Q_{jk}=1 и $s_{jk}= s_j s_k$, то в этом случае было бы целесообразно заменить $V^{1/2}$ ограничивающим его линейным выражением, указанным в (6)

$$V^{\frac{1}{2}} \le x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + \ldots + x_n\sigma_n . \qquad (6)$$

Знак равенства здесь имеет место в том случае, когда все коэффициенты корреляции Q_{jk}=1. С другой стороны, если все цены независимы, так что Q_{jk}=0 , то

$$V = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + \ldots + x_n^2\sigma_n^2 . \qquad (\mathbf{Q_{jk}=0}) \qquad (7)$$

Обратимся теперь к общей задаче определения решения (1), (3), (5), минимизирующего V при фиксированном E.

Случай I: $V^{1/2}$ линейно. Если имеет место неравенство (6), то мы решаем задачу определения min $V^{1/2}$ при условии , где E* - некоторая верхняя граница, которую мы хотим наложить на математическое ожидание затрат. Так как это ограничение линейно, мы можем проанализировать влияние на V изменения E*, рассматриваемого как параметр. В этом случае мы имеем стандартную задачу параметрического программирования.

Случай II: V представляет собой сумму квадратов. Если справедливо равенство (7), то функция V оказывается выпуклой и вырожденной и выпуклые функции x^2_j можно аппроксимировать ломаными линиями. При этом задача снова сводится к стандартной задаче параметрического программирования. При желании этот метод можно сочетать с методом, учитывающим ограничения сверху на переменные. Здесь мы варьируем один из свободных членов. Можно, однако, рекомендовать и следующий прием. Заменим V на

$$\bar{V} = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + \ldots + x_n^2\sigma_n^2 + kE^* . \quad \left(E \le E^*\right) \qquad (8)$$

Снова используя аппроксимацию x^2_j посредством ломаной, решим сначала задачу для значения k = 0. Легко видеть, что это соответствует случаю E* = + ¥ . Если теперь постепенно увеличивать k, то определится критическое значение k = k_1, при котором решение уже не будет оптимальным. Это приведет к одной или нескольким переменам базиса, после чего решение снова станет оптимальным. После этого k снова можно увеличивать до достижения нового критического значения k = k_2 и т. д.

Упражнение. Показать, что описанный процесс представляет собой в скрытом виде не что иное, как первый метод параметрического линейного программирования. Почему выше вместо E используется E*?

По-видимому, целесообразно, однако, вместо постепенного увеличения k выбрать заранее некоторое множество его дискретных значений. Решение даст нам ряд различных пар значений E* и V, которые можно использовать для нанесения точек на кривой. Если желательно иметь лучшее распределение значений E*, то для определения того, какие новые значения k надлежит выбрать, можно использовать график зависимости E* от k.

Случай III: V имеет общий вид. Так как квадратичная форма V является положительно полуопределенной, ее можно привести к сумме квадратов при помощи подходящим образом выбранного линейного преобразования (случай II); следовательно, описанный метод может быть применен для решения задачи и в общем случае. С другой стороны, можно использовать и какой-нибудь общий алгоритм для квадратичного программирования, скажем метод Марковица [41 или Вулфа [2), сочетая его с методом параметрического программирования для правых частей (см. § 11-3). Однако и здесь рекомендуется использовать аналог (8) с членом, содержащим E*, взвешенное посредством параметра k.

Упражнение. Объединить методы решения задач квадратичного программирования и параметрического программирования, для решения задачи о минимальной дисперсии.

ПЛАНИРОВАНИЕ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОМ СПРОСЕ

Рассмотрим следующий простой случай. Предприятие имеет в наличии 100 объектов, которые можно транспортировать по цене 1 долл. за штуку на внешний рынок для удовлетворения неопределенного спроса d. В случае, если спрос превзойдет предложение, необходимо удовлетворить избыточный спрос путем закупок на внутреннем рынке по цене 2 долл. за штуку. Уравнения, которым должна удовлетворять система, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} 100 &= x+y \qquad \left(x, y, \upsilon, s \ge 0\right) \\ d &= x \qquad +n-s \\ C &= x \qquad +2n \end{aligned} \qquad (1)$$

где $\begin{cases} x \text{ - число объектов, транспортируемых с предприятия,} \\ y \text{ - число объектов, сохраняемых на предприятии,} \end{cases}$

n - число объектов, закупленных на внутреннем рынке,

$\begin{cases} s \text{ - превышение спроса над предложением,} \\ d \text{ - неизвестный спрос, равномерно распределенный между 70 и 80,} \end{cases}$

C - суммарные издержки.

Мы рассматриваем транспортировку и закупку как этапы двухшагового процесса. На первом шаге принимается решение о количестве транспортируемых объектов, совместимое с имеющимся запасом. На втором шаге возникает неизвестный спрос.

Описанный выше простой пример принадлежит к общему классу двухшаговых задач, имеющих следующую структуру. На первом шаге определяются величины x_j ³ 0, u_R ³ 0, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad (i = 1,2,\ldots,m)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj}x_j = u_R, \qquad (k = 1,2,\ldots,p) \qquad (2)$$

где начальные запасы b_i, i = 1, 2, ..., m заданы. Здесь x_j ³ 0 представляют решения первого шага, имеющие своим результатом определенные величины u_R, поступающие в наше распоряжение для второго шага. На втором шаге определению подлежат величины n_R и s_R, для которых

$$d_R = u_R + \upsilon_R - s_R\,. \qquad (k = 1,2,\ldots,p) \qquad (3)$$

Здесь d_R - неизвестный спрос с заданным распределением вероятностей, n_R - нехватка предложения и s_R - превышение предложения над спросом. Предполагая для удобства, что в случае нехватки никаких закупок на внутреннем рынке не производится, мы можем записать суммарные издержки в виде

$$C = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{k=1}^{p} f_R\left(d_R - \upsilon_R\right), \qquad (4)$$

где n_R = 0, если u_R ³ d_R. Здесь c_j представляют собой издержки от осуществления процесса j, а f_R ³ 0 - доход от удовлетворения одной единицы спроса. Таким образом, всегда выгодно продавать столько из предложенного количества u_R, сколько это возможно, так что (d_R - n_R) = min (u_R, d_R) и

$$C = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{k=1}^{p} f_R \min\left(u_R, d_R\right). \qquad (5)$$

Ясно, что для любого выбора x_j и u_R, совместного с уравнениями первого шага, значение C зависит от этого выбора и от неизвестного спроса. Следовательно, при фиксированном выборе x_j и u_R математическое ожидание C определяется как

$$MC = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{k=1}^{p} f_R M \min\left(u_R, d_R\right), \qquad (6)$$

так как математическое ожидание min(u_R, d_R) зависит от $\bar{\bar{u}}_R$. Обозначим эту функцию от u_R через

$$\varphi_R\left(u_R\right) = M \min\left(u_R, d_R\right). \qquad (7)$$

Если известно распределение спроса d_R, то функция j_R (u_R) легко вычисляется. Пусть d_R принимает значения 1, 2 с вероятностями 1/2, 1/2. Тогда нетрудно найти $j_R(u_R)$.

Объем поставок (u_k)	Объем продажи $d_k - v_k = \min(u_k, d_k)$ при $d_k=1$ (1)	при $d_k=2$ (2)	Математическое ожидание дохода [1] $\psi_k(u_k)$ (3)
$u_k = 0$	0	0	0
$0 < u_k < 1$	u_k	u_k	u_k
$u_k = 1$	1	1	1
$1 < u_k < 2$	1	u_k	$1/2 + \frac{u_k}{2}$
$u_k = 2$	1	2	$3/2$
$2 < u_k$	1	2	$3/2$

(8)

[4]

Задана линейная модель производства, в котором выпускаются n продуктов x_j и затрачиваются m факторов b_i. Модель описывается постоянными коэффициентами затрат a_{ij}. Коэффициент a_{ij} определяет количество i-го фактора, требуемое для производства единицы j-го продукта. Тогда $\sum_j a_{ij}x_j$ определяет суммарное количество i-го фактора, необходимое, чтобы произвести набор продуктов x, а A_x задает вектор затрат факторов b, необходимых для выпуска набора x.

Пусть заданы вектор цен p и вектор ресурсов $\bar{b}$, ограничивающий использование факторов. Исследуем свойства оптимального производства, определяемого допустимым набором x, максимизирующим доход px. Оптимальное производство описывается задачей линейного программирования

max px,

$$Ax \le \bar{b}, x \ge 0.$$

[1] Здесь величины в столбце (3) получаются путем умножения величин столбца (1) на p_1=1/2, величин столбца (2) на p_2 = 1/2 и сложения.

Запишем задачу, двойственную к ней,

$$\min \bar{y}\bar{b},$$

$$yA \geq p, y \geq 0.$$

Прежде всего приведем интерпретацию двойственной задачи. Согласно теореме двойственности имеем $px^* = y^*\bar{b}$. Величина px* имеет размерность стоимости (цена, умноженная на объем продукции). Следовательно, $y^*\bar{b}$ имеет ту же размерность. Поскольку b - вектор объемов факторов, то y* - в некотором роде вектор цен - цен на факторы. Вследствие этой экономической интерпретации двойственные переменные часто называют **условными оценками**.

Рассмотрим ограничения двойственной задачи, каждое из которых записано в виде

$$\sum_i a_{ij} y_i \geq p_j.$$

Поскольку a_{ij} - количество i-го фактора, требуемое для выпуска единицы j-го продукта, величина $a_{ij}y_i$ представляет собой оценку затрат i-го фактора, а $\sum_i a_{ij} y_i$ - суммарную оценку факторов, необходимых для выпуска единицы j-го продукта. Стоимость факторов вычисляется в условных оценках y.

Отсюда можно получить интерпретацию двойственности (важно четко понимать, что не обязательно следовать этой интерпретации, она связана лишь с рассматриваемой моделью). Условные оценки определяют ответ на вопрос, какова наименьшая стоимость набора факторов , дающая возможность обращения факторов в продукты и продажи продуктов. Ограничения двойственной задачи выражают тот факт, что если оценка затрат, необходимых для производства продукта, меньше цены продукта, то более выгодно произвести и продать продукт, чем продать эти факторы. При оптимальных значениях x* и y* экономической системе или фирме безразлично, использовать ли факторы и продать продукты, чтобы получить px*, или продать ресурсы $\bar{b}$ по ценам y*, так как для оптимальных векторов $y^*\bar{b} = px^*$.

Легко видеть, что к этой интерпретации причастна теорема равновесия, которая в терминах этой модели утверждает, что:

а) всякий фактор, который не может быть полностью использован при производстве оптимального набора продуктов, получает нулевую условную оценку (нулевую оптимальную оценку);

б) продукт, издержки на производство которого превосходят его цену (когда факторы оцениваются в оптимальных условных оценках), не будет производиться при оптимальном производстве *).

Другими словами, если условные оценки являются двойственными ценами факторов, то избыточно предлагаемые факторы не представляют ценности (их условные оценки равны нулю), а убыточные процессы не будут использоваться (т.е. соответствующие продукты не будут производиться). Поскольку эти соотношения соответствуют состоянию равновесия конкурентной экономики, теорема и получила название теоремы равновесия.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДВОЙСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим изменение допустимого множества, обусловленное изменением вектора ограничений в прямой задаче. Каждое ограничение представляется в виде $\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$ (стандартная форма). Изменение b_i эквивалентно смещению гиперплоскости $\sum_j a_{ij} x_j = b_j$, ограничивающей допустимое множество, по отношению к началу координат. При этом наклон гиперплоскости определяемый коэффициентами a_{ij}, не меняется.

Рис. 3.3 иллюстрирует этот тип изменения ограничений. Во всех четырех случаях наклоны границ C_1, C_2 и C_3 остаются неизменными. Меняются лишь расстояния прямых C_1, C_2, C_3 от начала координат. Таким образом, были получены четыре (заштрихованных) допустимых множества.

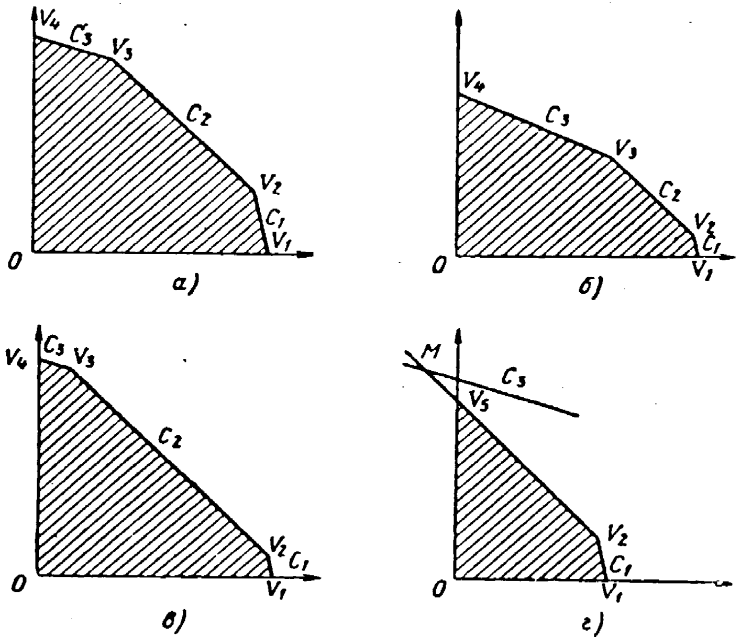


Рис. 3.3. Пример изменения ограничений

Экстремальные точки допустимого множества получаются при пересечении границ. Пересечение одних и тех же граней (в рассматриваемом случае - прямых), например C_1 и C_2, отвечает одному и тому же базису, и определяемая им экстремальная точка V_2 поставлена в соответствие одному и тому же допустимому базису во всех случаях. Экстремальные точки, отвечающие одному и тому же допустимому базису, будем называть **эквивалентными**.

Основная теорема предыдущего параграфа может быть здесь интерпретирована следующим образом. Пусть прямые, определяющие ограничения задачи, передвигаются параллельно самим себе, и некоторая экстремальная точка, скажем, V_2, является оптимальной в одном из случаев. Тогда эквивалентная экстремальная точка (также обозначенная V_2) будет оптимальной во всех случаях, в которых она еще допустима.

Заметим, что если бы точка V_3 была оптимальной в случае (а), она оставалась бы оптимальной также и в случаях (б) и (в). В случае (г) пересечение C_2 и C_3 дает точку M, которая не удовлетворяет ограничению на неотрицательность. Следовательно, эта точка не принадлежит допустимому множеству и, следовательно, не оптимальна.

Как можно видеть на иллюстрации, изменение вектора b, не нарушающее допустимость начального базиса, может проводиться в достаточно широких пределах. Поэтому утверждение, приведенное ниже, представляет значительный интерес.

Рассмотрим задачу линейного программирования с вектором ограничений b, оптимальным значением целевой функции V* и оптимальным вектором двойственной задачи y*. Заменим b на b + Db так, чтобы начальный оптимальный базис оставался допустимым. Тогда вариация DV* оптимального значения целевой функции определяется соотношением

$$DV^* = y^* Db.$$

В частности, если меняется только i-я компонента вектора b, то

$$\Delta V^* = y_i^* \Delta b_i .$$

Доказательство сразу же следует из основной теоремы и теоремы двойственности. Пусть x* и x' - оптимальные векторы начальной и измененной задач. Тогда, поскольку начальный базис остается допустимым, y* является также оптимальным вектором задачи, двойственной к измененной задаче. Используя теорему двойственности в обоих случаях, имеем

$$cx' = y^*(b + \Delta b),$$

$$\mathbf{cx^* = y^*b}.$$

Вычитая одно равенство из другого, получаем утверждение теоремы.

Теперь можно закончить интерпретацию двойственных переменных. Пусть меняется только i-е ограничение. Тогда

$$\frac{\Delta V^*}{\Delta b_i} = y_i^* .$$

Следовательно, i-я двойственная переменная (в оптимальной точке) рассматривается как приращение целевой функции при ослаблении i-го ограничения на единицу.

В типичных экономических задачах эта величина может истолковываться, например, как приращение дохода при возрастании объема соответствующего ресурса. Таким образом, оправдывается обычная интерпретация двойственных переменных как условных оценок.

[5]

ВВЕДЕНИЕ В НАУЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ

Данная глава имеет целью объяснить основные положения теории управления запасами и предназначается для читателей, которые не знакомы с этим предметом и не имеют обширных познаний в области математики.

Такое понятие, как **модель процесса**, является фундаментальным не только в теории управления запасами, но и при построении любых формализованных теорий. В данном случае модель - это изображение характера реальной торговой или промышленной операции. Экспериментируя с моделью, нередко можно найти пути совершенствования операции.

Основная модель управления запасами, называемая системой с фиксированным размером заказа, проста и является в некотором роде классической (она известна уже более тридцати лет). В такой системе размер заказа является постоянной величиной, и повторный заказ подается при уменьшении наличных запасов до определенного критического уровня (точка заказа). Реализация такой модели показана на рис. 1.6.

Система с фиксированным размером заказа основана на выборе размера партии, минимизирующего общие издержки управления запасами. При этом предполагается, что издержки управления запасами состоят из издержек выполнения заказа и издержек хранения запасов.

Издержки выполнения заказа представляют собой накладные расходы, связанные с реализацией заказа; считается, что они не зависят от размера заказа. В промышленности такими издержками являются затраты на подготовительно-заключительные операции. Если C_0 - издержки выполнения заказа, а q - размер партии, то издержки выполнения заказа в расчете на единицу товара составляют C_0/q; при увеличении размера партии они уменьшаются с убывающей скоростью. Для определения годовых издержек выполнения заказа издержки выполнения заказа, приходящиеся на единицу товара, нужно умножить на количество товара S, реализованного за год. На рис. 1.1 показано, что при увеличении размера партии годовые издержки выполнения заказов уменьшаются таким же образом, как и издержки выполнения заказа, приходящиеся на единицу товара.

Издержки хранения запасов включают в себя расходы, связанные с физическим содержанием товаров на складе, плюс возможные проценты на капитал, вложенный в запасы. Обычно издержки хранения выражаются в процентах от закупочной цены и связываются с определенным промежутком времени, например 20% за год. Если C_u - закупочная цена единицы товара, а i- издержки хранения, выраженные как доля этой цены, то $C_u i$ - годовые издержки хранения товара. Издержки хранения определяются средним уровнем запасов. При постоянной интенсивности сбыта годовые издержки хранения запасов составляют $C_u iq/2$. Из рис. 1.2 видно, что при увеличении размера заказа эти издержки линейно возрастают.

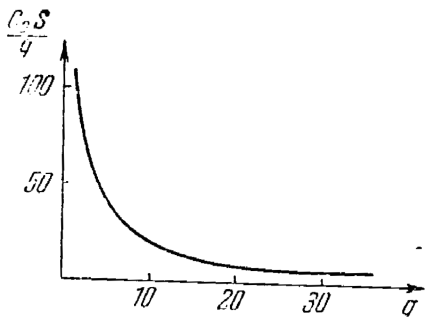


Рис. 1.1. Зависимость годовых издержек выполнения заказов от размера заказа

На рис. 1.3 показаны общие годовые издержки управления запасами (сумма годовых издержек выполнения заказов и годовых издержек хранения запасов), которые математически выражаются формулой

$$\frac{C_0 S}{q} + \frac{C_u iq}{2} . \qquad (1.1)$$

Возьмем от этого выражения первую производную по q и полученный результат приравняем нулю, получим равенство

$$q_{\hat{\imath}\ddot{\imath}\grave{o}} = Q = \sqrt{\frac{2C_0 S}{C_u i}} , \qquad (1.2)$$

где S - годовой сбыт в единицах. Это выражение называется формулой Уилсона.

Значение q минимизирующее годовые издержки управления запасами, называется наиболее экономичным размером заказа и обозначается буквой Q.

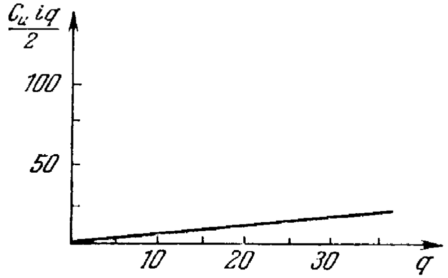


Рис. 1.2. Зависимость годовых издержек хранения запасов от размера заказа

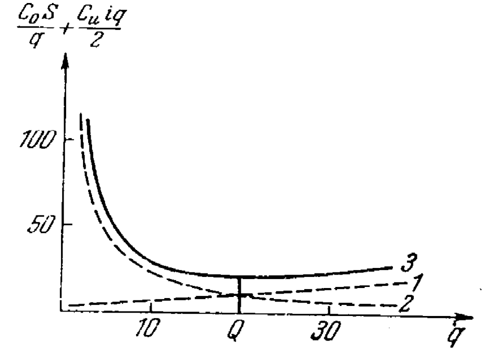


Рис. 1.3. Зависимость годовых издержек управления запасами от размера заказа. S = 100, C_0 = 2,00 долл.. C_u = 5,00 долл., i = 0,20.
1 - издержки выполнения заказов;
2 - издержки хранения запасов;
3 - издержки управления запасами

Кривая общих годовых издержек является весьма пологой вблизи точки минимума, что отражает факт наличия квадратного корня в выражении для Q. Таким образом, вблизи точки минимума размер заказа может колебаться в некоторых пределах без существенного изменения общих издержек.

В идеальном случае (рис. 1.4) уровень запасов уменьшается с постоянной интенсивностью, и как только он достигает нуля, немедленно поступает новый заказ размером Q. Такого воспроизводства запасов на практике обычно не встречается, на рис. 1.5 изображена более сложная модель. Для определения точки заказа необходимо знать временную задержку между моментом подачи заказа и моментом его получения и средний ожидаемый сбыт S_L за время доставки L.

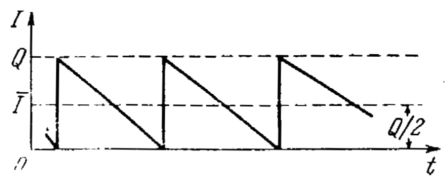


Рис. 1.4. Влияние размера заказа на средний уровень запасов. (Постоянная интенсивность сбыта) = (Средняя годовая интенсивность сбыта).
I - наличные запасы: t - время; Q - размер заказа; $\bar{I}$ - средний уровень запасов.

Однако этого недостаточно, так как примерно в половине случаев фактический сбыт за время доставки заказа может превысить среднее значение и наступит временная нехватка товара (дефицит). Поэтому при определении точки заказа P к ожидаемому сбыту за время доставки заказа добавляется резервный или страховой запас B.

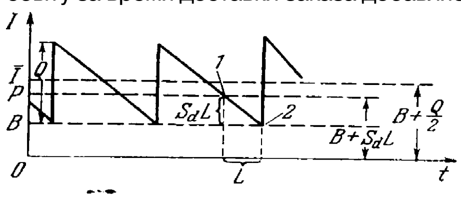


Рис. 1.5. Точка заказа модели с фиксированным размером заказа.
I - наличные запасы; B - резервный запас; t - время: $\bar{I}$ - средний уровень запасов: P - точка заказа; 1 - момент подачи заказа: 2 - момент получения заказа; L - время доставки заказа в сутках.

Точка заказа определяется по формуле

$$P = B + \bar{S}_d L, \qquad (1.3)$$

где $\bar{S}_d$-средний суточный сбыт. Формулы (1.2) и (1.3) полностью описывают работу основной модели с фиксированным размером заказа.

Средний уровень запасов составляет

$$\bar{I} = B + \frac{Q}{2}. \qquad (1.4)$$

Необходимость в резервном запасе наглядно показана на рис. 1.6, где рассматривается более реальный случай, когда интенсивность сбыта - случайная величина. Используя фактические данные о сбыте и времени доставки заказа, можно промоделировать процесс и определить, что произойдет при применении правил заказа в течение длительного промежутка времени. Результаты моделирования, выраженные через вероятность дефицита и средние уровни запасов, можно сравнить с результатами, полученными для существующей системы.

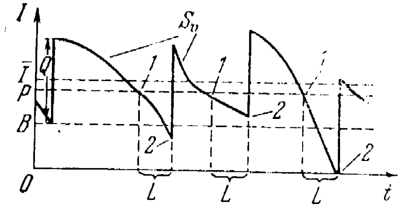


Рис. 1.6. Типичный процесс в системе с фиксированным размером заказа.
I - наличные запасы (в единицах); t - время; S_v - переменная интенсивность сбыта; B - резервный запас: $\bar{I}$ - средний уровень запасов; 1 - момент подачи заказа; 2 - момент получения заказа: L - время доставки заказа в сутках.

Если время доставки заказа постоянно, то для определения резервного запаса, обеспечивающего надежную защиту от дефицита и задалживания спроса, необходимо знать лишь распределение сбыта за время доставки. **Задалживание спроса** представляет собой сбыт товара при нулевом уровне запасов.

На рис. 1.7 показано распределение фактического сбыта, которое является хорошей аппроксимацией определенного распределения вероятностей, известного как **закон Пуассона.**

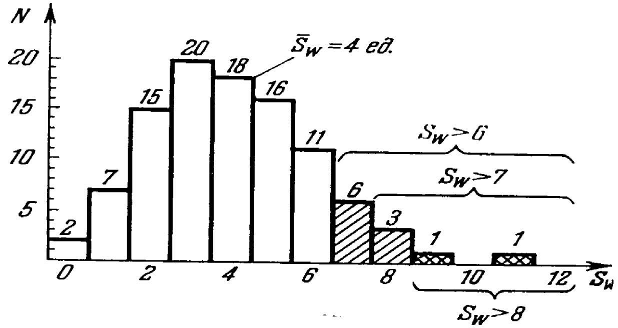


Рис. 1.7. Распределение недельного сбыта Sw для одного товара в магазине розничной торговли за 100 недель. В 11% случаев Sw> 6 ед. В 5% случаев Sw > 7 ед. В 2% случаев Sw > 8 ед. Sw [ед] - недельный сбыт; N - число недель: $\bar{S}$w - средний сбыт ($\bar{S}$w = 4 ед.).

Распределение Пуассона имеет следующее полезное свойство: функция распределения известна полностью, если известно математическое ожидание; среднее квадратическое отклонение данного распределения равно квадратному корню из математического ожидания. Поэтому при вычислении размера резервного запаса достаточно знать лишь средний сбыт за время доставки заказа. В случае пуассоновского распределения сбыта удобно пользоваться следующим практическим правилом: только в двух процентах случаев сбыт превысит величину, равную среднему сбыту плюс удвоенный квадратный корень из этого среднего. Если математическое ожидание известно, то вероятность появления некоторого определенного значения можно получить непосредственно из таблиц для пуассоновского распределения. В типичных таблицах не приводятся вероятности для средних значений, превосходящих 20, так как обычно применимость пуассоновского распределения ограничивается довольно коротким интервалом средних значений.

В розничной торговле сбыт многих товаров часто описывается распределениями, достаточно близкими к пуассоновскому. Если закон Пуассона удовлетворительно описывает фактическое распределение сбыта характерных товаров, то и для большой группы аналогичных товаров часто можно допустить также наличие пуассоновского распределения. В этом случае размер резервного

запаса B_L можно определить, зная средний сбыт $\bar{S}_L$ за время доставки заказа и находя с помощью таблиц вероятность того, что сбыт превысит заданное значение

$B + \bar{S}_L$.

Для проверки применимости закона Пуассона для каждого товара среднее квадратическое отклонение сбыта находится по формуле

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{\sum\left(S_1 - \bar{S}\right)^2}{n}}, \qquad (1.5)$$

где S_i - отдельные значения сбыта, $\bar{S}$ - средний сбыт, n- число отдельных значений. Затем на координатных линиях прямоугольной логарифмической бумаги откладываются средние значения и средние квадратические отклонения сбыта для каждого товара. Если полученные точки располагаются вблизи прямой (как показано на рис. 1.8), то среднее квадратическое отклонение характеризуется квадратным корнем из среднего сбыта. Этот факт еще не доказывает существования пуассоновского распределения, но он свидетельствует о том, что допущение о пуассоновском распределении сбыта для данной группы товаров является разумным и полезным.

Другим распределением вероятностей с удобными свойствами является показательное. В частности, оно служит достаточно хорошей аппроксимацией распределения сбыта некоторых товаров при розничной и оптовой торговле (рис. 1.9). Показательное распределение также полностью определено, если известно его математическое ожидание; среднее квадратическое отклонение этого распределения равно его математическому ожиданию. Уровень $3S_L$, т. е. величину, равную математическому ожиданию плюс $2s_s$, превысят лишь около 5% всех фактических значений сбыта. Часто можно принять, что показательное распределение сбыта справедливо для всего класса товаров, если известно,что оно применимо к некоторым характерным видам товара.

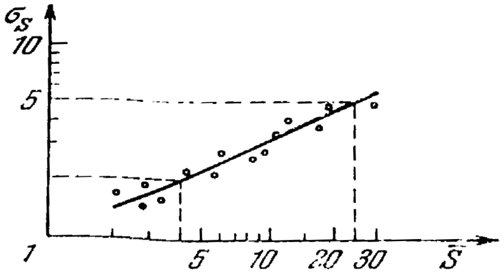


Рис. 1.8. Определение пуассоновского распределения сбыта для группы товаров.
s_s - среднее квадратическое отклонение сбыта; $\bar{S}$ - средний сбыт в единицах.

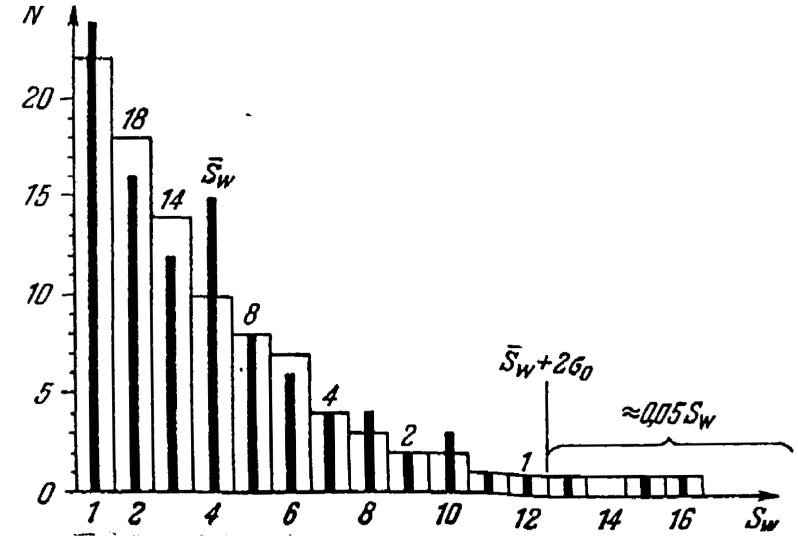


Рис. 1.9. Распределение сбыта, близкое к показательному.
N - число недель; Sw - недельный сбыт в единицах.

Нормальное распределение часто описывает сбыт продукции на промышленном предприятии, где пуассоновское и показательное распределения встречаются редко. Для нормального распределения не существует какого-либо соотношения между

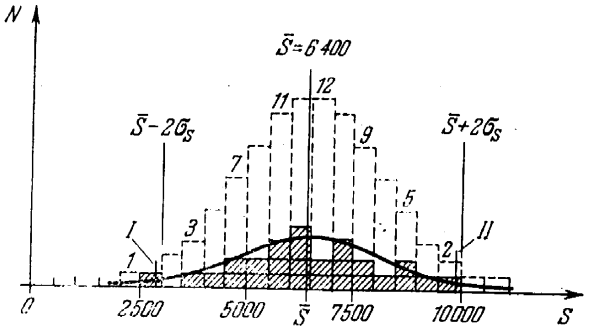


Рис. 1.10. Распределение фактического потребления продукции, близкое к нормальному.

N - число периодов длительностью две недели; S - потребление за две недели (одному интервалу соответствует 500 единиц). I - период с потреблением 2900 ед.; II - период с потреблением 9400 ед. Пунктиром обозначено нормальное распределение потребления для 100 периодов; штриховкой обозначено фактическое распределение потребления для 26 периодов; сплошной линией проведена соответствующая кривая нормального распределения для 26 периодов.

средним квадратическим отклонением и математическим ожиданием. Если известно среднее квадратическое отклонение и математическое ожидание, то с помощью таблиц нормального распределения легко определить вероятность того, что величина сбыта превысит любое определенное значение. В случае нормального распределения значение, равное математическому ожиданию плюс 2ss, будет превзойдено лишь в 2,5 % случаев. На рис. 1.10 изображено типичное, близкое к нормальному распределение фактического потребления упаковочного картона на бумажной фабрике в течение 26 периодов, длительностью две недели каждый. Здесь показана также кривая нормального распределения, соответствующая этим фактическим данным, и приводится ожидаемое нормальное распределение сбыта для 100 периодов.

[6]

ОДИНОЧНАЯ БАЗА

СТАТИЧЕСКИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ

За последнее время в литературе рассматривалось большое число элементарных моделей статических, детерминированных процессов управления запасами. Весьма часто эти модели лишь незначительно отличаются друг от друга; число лежащих в их основе принципо.в невелико. В подавляющем большинстве случаев эти принципы основываются на следующих предположениях.

Общие принципы построения моделей с непрерывным спросом

1. Предположения, касающиеся поступления и выхода:

а) спрос непрерывен и имеет постоянную интенсивность r. До тех пор пока уровень запасов положителен, интенсивность выхода принимается равной интенсивности спроса;

б) поступление происходит в дискретные моменты или дискретные интервалы времени; заказ должен быть сделан на L, единиц времени раньше момента поставки. Будем называть L временем отставания поставки;

в) момент выписки заказа определяется критическим уровнем запасов P, который будем называть точкой заказа;

г) поступление происходит с постоянной скоростью p в течение интервала времени, определяемого размером заказа q. Допускается возможность p= ¥ (мгновенное поступление);

д) точка заказа, размер заказа и интервалы между моментами поступления постоянны во времени;

е) процесс движения запасов бесконечен.

2. Предположения, касающиеся показателя эффективности (издержек):

а) каждому поступлению соответствуют постоянные издержки s (затраты на подготовительно-заключительные операции);

б) единичному поступлению соответствуют издержки, равные c, которые могут зависеть от общего размера поступления q (при наличии скидок в связи с размером заказа и т. д.);

в) издержки содержания запасов пропорциональны интегралу (по времени) положительного уровня запасов. Коэффициент пропорциональности обозначим через h. Реже случаи, когда издержки содержания запасов связаны с уровнем запасов более сложной зависимостью и зависят от других параметров задачи, например от общего размера поступления q;

г) потери из-за дефицита (отсутствия запасов) пропорциональны интегралу отрицательного уровня запаса. Коэффициент пропорциональности обозначим через d. Здесь также рассматриваются более сложные взаимосвязи. Считается, что спрос не уменьшается из-за дефицита (неудовлетворенный спрос можно удовлетворять из более поздних поступлений).

Для таких простых моделей задача управления запасами становится задачей определения оптимальных значений точки заказа и размера заказа.

Определение точки заказа

Предположим, что непосредственно перед моментом поступления мы решаем установить уровень запасов I_o; тогда не следует делать заказ, если фактический уровень запасов A удовлетворяет неравенству

$$A > R_L + R_t - Q_L + I_0, \qquad (2.1)$$

где

R_L-общий спрос в течение времени отставания поставки L,

Q_L-общее поступление в течение времени отставания поставки L, обусловленное предыдущими заказами,

R_t - общий спрос в течение “интервала проверки” t.

Значение “интервала проверки” состоит в том, что заказы могут выписываться только в равностоящие моменты, которые отделены друг от друга t единицами времени. Неравенство (2.1) при t=0 имеет следующий смысл: если не делать дополнительный заказ, то уровень запасов (перед поступлением) в момент (L+t) будет все еще превышать I_0. Следовательно, заказ не нужно делать.

Величину $S=A+Q_L$ можно рассматривать как обобщенный уровень запасов. Точка заказа при обобщенном уровне запасов S определяется следующим образом:

$$P = I_0 + R_L + R_t. \qquad (2.1a)$$

Классическая модель наиболее экономичного размера партии

Классическая модель наиболее экономичного размера партии есть простейший пример определения оптимального размера заказа. В модели предполагается наиболее простая структура издержек, включающая только расходы на подготовительно-заключительные операции и издержки содержания запасов; отрицательный уровень запаса не допускается. Следовательно, уровень запасов непосредственно перед поступлением составляет $I_0 = 0$. Это позволяет определить точку заказа с помощью соотношения (2.1a). Из общих предположений (I_a- I_e) следует, что уровень запасов I(t) описывается кусочно-линейной периодической функцией времени (см. рис. 3). Уровень запасов в течение полного цикла движения запасов, начинающийся при t=0, можно представить в виде

$$I(t) = \begin{cases} (p-r)t & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{q}{p} \\ q - rt & \text{при} \quad \frac{q}{p} \leqslant t \leqslant \frac{q}{r}. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Отсюда издержки содержания запасов в течение цикла составляют

$$h \int_0^{-q/r} I(t) qt = \frac{h}{2} \frac{q^2}{r} \left(1 - \frac{r}{p}\right) \qquad (2.3)$$

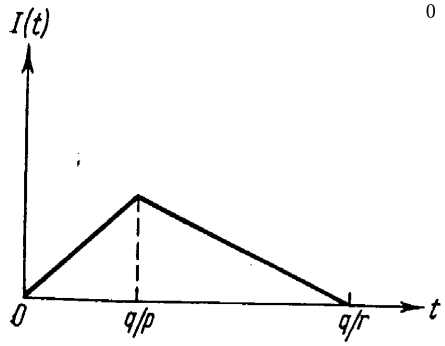


Рис. 3.

Следовательно, общая сумма издержек содержания запасов и затрат на подготовительно-заключительные операции в расчете на единицу времени равна

$$C = \frac{hq}{2}\left(1 - \frac{r}{p}\right) + s\frac{r}{q}. \qquad (2.4)$$

Продифференцировав по q и приравняв производную нулю, получим оптимальный размер заказа (наиболее экономичный размер партии):

$$q = \sqrt{\frac{2rs}{h[1-(r/p)]}}. \qquad (2.5)$$

Разумеется, всегда предполагается, что r<p. Весьма часто допускается r/p » 0. Тогда первое слагаемое выражения (2.4) принимает простую форму hq/2. Это упрощающее предположение мы используем в следующих далее моделях.

Если в (2.4) подставить оптимальный размер партии, полученный из (2.5), то легко заметить, что общая сумма издержек за единицу времени, соответствующая оптимальной политике управления запасами, равна

$$C = \sqrt{2rsh(1-r/p)}. \qquad (2.6)$$

К счастью, издержки не очень чувствительны к отклонениям от оптимального размера заказа.

Классическая модель с допущением дефицита

Дополнительная степень свободы вводится в том случае, если допускается дефицит, но сохраняются все остальные особенности классической модели. Выбрав длительность цикла повторения заказа T, мы все же можем устанавливать допустимый дефицит. В то же время следует ввести потери из-за дефицита, поскольку в противном случае не будет стимула для производства продукции. Пусть S-уровень запаса в начале цикла движения запасов (см. рис. 4). Издержки за весь цикл состоят из издержек содержания среднего запаса S/2 в течение t' единиц времени, потерь из-за допущения среднего дефицита (q-S)/2 в течение t” единиц времени и затрат на подготовительно - заключительные операции. Следовательно, издержки на единицу времени могут быть выражены следующим образом:

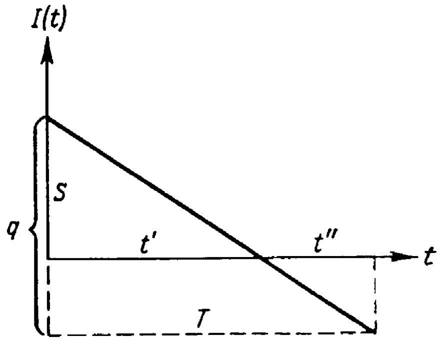


Рис. 4.

$$C = \frac{1}{T}\left(s + h\frac{S}{2}t' + d\,\frac{q-S}{2}\,t''\right) \qquad (2.7)$$

Подставив

$$t' = \frac{S}{r}, \qquad (2.8)$$

$$t'' = T - \frac{S}{r} = \frac{Tr - S}{r} \qquad (2.9)$$

в (2.7), получим стоимостную функцию

$$C(S,T) = \frac{s}{T} + \frac{hS^2}{2rT} + \frac{d(rT-S)^2}{2rT}. \qquad (2.10)$$

Минимум издержек можно найти, взяв частные производные по двум управляющим переменным S и T. В результате получим:

$$\hat{T} = \sqrt{\frac{2s}{rh}}\sqrt{\frac{h+d}{d}}, \qquad (2.11)$$

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{2rs}{h}}\sqrt{\frac{d}{h+d}}, \qquad (2.12)$$

$$\hat{C} = \sqrt{2rsh}\sqrt{\frac{d}{h+d}}, \qquad (2.13)$$

Следует отметить, что затраты на проведение оптимальной политики для этой модели в

$$\sqrt{\frac{d}{h+d}} \qquad (2.14)$$

раз меньше, чем аналогичные затраты для классической модели.

Скидки в связи с размером заказа

Если расходы с на единицу поступления постоянны, суммарные издержки в единицу времени также фиксированны. Следовательно, не нужно рассматривать этот случай в модели издержек. Перейдем к тому случаю, когда с есть функция размера поступления q:

$$c = c(q). \qquad (2.15)$$

Например, в случае скидок в связи с размером заказа при закупках [11]. При сохранении всех остальных предположений классической модели соответствующие издержки за единицу времени становятся равными

$$C(q) = h\frac{h}{2} + s\frac{r}{q} + c(q)r. \qquad (2.16)$$

Обычно предполагается, что

$$h = kc, \qquad (2.17)$$

где k-коэффициент пропорциональности. При таком предположении

$$C(q) = \frac{1}{2}kcq + s\frac{r}{q} + c(q)r. \qquad (2.18)$$

Если c(q) является ступенчатой функцией (как при скидках в связи с размером заказа), то в пределах каждого i-го ценностного интервала c(q) можно рассматривать как постоянную c_i. Пусть i-й ценностный интервал определяется границами $I_i \le q \le u_i$. Следовательно, локальный минимум q_i функции издержек в i-м интервале определяется следующим образом:

$$q_i = \begin{cases} l_i & \text{при } q_i^{\bullet} \leqslant l_i \\ q_i^{\bullet} & \text{при } l_i \leqslant q_i^{\bullet} \leqslant u_i \\ u_i & \text{при } u_i \leqslant q_i^{\bullet}, \end{cases} \tag{2.19}$$

где

$$q_i^* = \sqrt{\frac{2rc}{kc_i}}. \tag{2.20}$$

Соответствующая сумма минимальных издержек

$$C_i = \begin{cases} C(l_i) & \text{при } q_i = l_i \\ C(q_i^{\bullet}) = \sqrt{2rsh} + c_i r & \text{при } q_i = q_i^{\bullet} \\ C(u_i) & \text{при } q_i = u_i \end{cases} \tag{2.21}$$

Глобальный минимум находится путем выбора наименьшего значения C_i. На практике возможны многие упрощения. Хорошим методом является определение ценностного интервала, для которого $q_i = q_i^*$.Тогда все интервалы, лежащие слева, могут быть исключены.

Издержки содержания запасов как функции издержек производства

До сих пор издержки содержания запасов h считались постоянной величиной. Однако поскольку издержки содержания запасов обычно вычисляются как некоторая доля (равная k) стоимости единицы продукта и поскольку последняя зависит от объема производства q, то и h зависит от q. Пусть переменная часть издержек производства единицы продукции равна v. Тогда общая сумма издержек производства партии размера q составляет

$$s + \upsilon q, \tag{2.22}$$

а издержки производства единицы продукции составят

$$\frac{s}{q} + \upsilon. \tag{2.23}$$

Поскольку предполагается, что издержки содержания запасов h равны k, умноженному на единицу продукции, то

$$h = k\left(\frac{s}{q} + \upsilon\right). \tag{2.24}$$

Следовательно, общая сумма затрат на подготовительно-заключительные операции и издержек содержания запасов в течение единицы времени равна

$$C = \frac{sr}{q} + k\left(\frac{s}{q} + \upsilon\right)\frac{q}{2} = \frac{sr}{q} + k\upsilon\frac{q}{2} + \frac{ks}{2}, \tag{2.25}$$

откуда

$$\hat{q}\sqrt{\frac{2rs}{k\upsilon}}. \tag{2.26}$$

Очевидно, только переменные издержки v имеют значение при корректировке издержек содержания запасов в формуле определения оптимального размера партии.

Ступенчатые издержки содержания запасов

Если склады арендуются, то, вероятно, арендоваться могут только фиксированные приращения складских помещений (соответствующие размеру партии q_0). Если издержки на единицу времени за пользование такой дополнительной площадью равны c_o, то общая сумма издержек хранения за единицу времени составит (см. рис. 5)

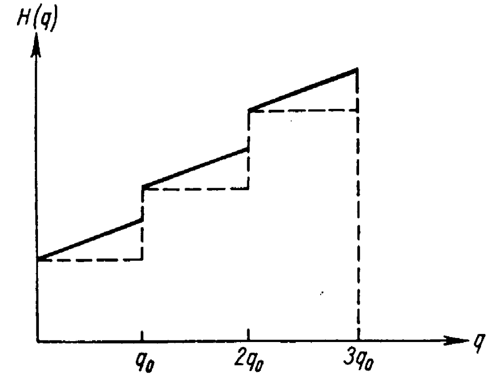


Рис. 5.

$$H(q) = \left[\frac{q}{q_0}\right]c_0 + \frac{h}{2}q, \tag{2.27}$$

где $[q/q_0]$ есть частное от деления q на q_0, а q - размер партии. Общая сумма издержек содержания запасов и подготовительно-заключительных операций за единицу времени составит

$$C(q) = \left[\frac{q}{q_0}\right]c_0 + h\frac{q}{2} + s\frac{r}{q}. \tag{2.28}$$

Минимизация этой функции осуществляется аналогично минимизации в случае скидок в связи с размером заказа.

Зависимость спроса от цен

Если интенсивность спроса r зависит от продажной цены единицы продукции p

$$r = r(p), \tag{2.29}$$

то в классической модели появляется вторая степень свободы: как цены p, так и размер заказа q становятся управляющими переменными. В этом случае критерием оптимальности является прибыль за единицу времени:

$$P = pr(p) - \left[s\frac{r}{q} + h\frac{q}{2} + cr(p) \right], \qquad (2.30)$$

где c есть издержки производства единицы продукции. Оптимальный размер партии при любом заданном уровне цен p равен

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{2rs(p)}{h}}, \qquad (2.31)$$

а соответствующая прибыль составит

$$P\left(\hat{q}, p\right) = pr(p) - \sqrt{2shr(p)} - cr(p). \qquad (2.32)$$

Оптимальная цена может быть получена максимизацией этого выражения по p. В иллюстративных целях предположим, что

$$r(p) = ap + b, \qquad (2.33)$$

где a и b- заданные постоянные. Тогда

$$P = ap^2 + bp - \sqrt{2sh(ap+b)} - c(ap+b). \qquad (2.34)$$

Пользуясь обычными методами дифференциального исчисления, нетрудно получить следующее кубическое уравнение для определения оптимальной цены $\hat{p}$:

$$8a^3p^3 + \left(16a^2b - 8ca^3\right)\hat{p}^2 + \left(10ab^2 - 12ca^2b + 2c^2a^3\right)\hat{p} + \qquad (2.35)$$

$$+2b^3 - 4cab^2 + 2c^2a^2b - sha^2 = 0.$$

Уравнение (2.35) можно решить с помощью формулы Кардана или приближенными численными методами.

Классическая модель с дискретным спросом (для случая медленно оборачивающихся запасаемых объектов)

Идеальное представление о непрерывности спроса во времени вполне разумно постольку, поскольку выдача из запасов невелика по сравнению с разовыми количествами произведенной или закупленной продукции. Но это предположение перестает быть справедливым в случае “медленно оборачивающихся запасаемых объектов”, когда классическая формула определения наиболее экономичного размера партии уже непригодна. В то же время соображения об оптимальном размере партии могут оказаться особенно важными для медленно оборачивающихся объектов. Сюда относится решение вопроса о том, стоит ли вообще создавать запасы данного объекта. Таким образом, мы вынуждены приспособить классическую модель к случаю дискретного спроса.

Поскольку рассматриваются статические модели, предположим, что через постоянные интервалы времени, которых в единицу времени имеется n, возникает спрос, равный a. Очевидно, при установлении размера заказа можно ограничиться числами, кратными спросу:

$$q = ka \qquad (k = 1, 2, \ldots). \qquad (2.36)$$

Кроме того, можно предположить, что возникновение затрат во времени всегда совпадает с одной из “точек спроса”. Следовательно, средний уровень запасов равен a(k - 1)/2, и издержки содержания запасов за единицу времени составляют

$$C(k) = \frac{ah}{2}(k-1) + \frac{ns}{k}. \qquad (2.37)$$

Задача оптимизации теперь сводится к нахождению целого $\hat{k} \geq 1$, минимизирующего C(k). Очевидно, искомое число есть одно из двух целых чисел, соседних с действительным числом:

$$k^* = \sqrt{\frac{2ns}{ah}}. \qquad (2.38)$$

Искомое число можно найти путем подстановки двух целых чисел в (2.37). Разница между двумя вариантами обычно незначительна; поэтому k* может быть округлено до ближайшего целого числа. Решение

$$\hat{k} = 1 \qquad (2.39)$$

означает, что данный объект должен производиться для непосредственного удовлетворения спроса, а не на склад. Прежде чем определять k по формуле (2.38) для большого числа наименований объектов, может оказаться полезным выявление объектов, которые вообще не следует запасать. Очевидно, необходимое и достаточное условие для отказа от включения в запас описывается неравенством

$$C(1) \leq C(2) \qquad (2.40)$$

или

$$ns - ah \leq 0. \qquad (2.41)$$

Эти значения легко представить в табличной форме для широких диапазонов измерения параметров. Такие таблицы могут служить удобным инструментом отбора.

Точка разделения для медленно оборачивающихся объектов

В крупных системах запасов, включающих много видов используемых объектов, часто желательно иметь простое правило отделения запасаемых объектов от незапасаемых. Пусть n - годовая частота спроса (количество заказов) на какой-либо объект. Для рассматриваемого класса медленно оборачивающихся объектов можно считать также, что разовый спрос равен единице количества объекта. На практике пользуются правилом следующего вида:

если $n<j$, то не создавайте запаса, (2.42)

если $n \geq j$, то создавайте запас.

Точка разделения j одинакова для всех объектов. Как выбрать оптимальную точку разделения? Пусть данная система запасов содержит f(n) предметов с годовой частотой спроса n. Кроме того, предположим, что расходы на подготовительно-заключительные операции (s) одинаковы для всех видов объектов. Следовательно, годовые издержки для незапасаемых объектов составляют

$$\sum_{n=1}^{j-1} f(n)ns. \qquad (2.43)$$

Что касается запасаемых объектов, то сперва следует выбрать ту или иную политику управления запасами.

Как и в (2.37), будем считать пополнение запасов мгновенным и происходящим в моменты возникновения спроса; тогда для медленно оборачивающихся объектов в некотором диапазоне n £ N наиболее экономичный размер заказа обычно равен двум единицам. Если для всех видов объектов, относящихся к этому диапазону, принять размер заказа в 2 единицы, то, согласно (2.37), средний уровень запасов этих объектов будет равен 0,5 единицы. Если c (n) есть средняя стоимость объекта с частотой спроса n, то вложения в запасы класса n составят f (n) c (n)/2. На годовые издержки содержания запасов можно отнести 1/k - ую часть этих вложений.

Поскольку размер заказа равен двум единицам, годовые расходы на подготовительно-заключительные операции для класса n составят f(n)ns/2. Наконец, предположим, что в случае отнесения объекта к числу запасаемых возникают постоянные годовые издержки a, которые можно интерпретировать, например, как обычные затраты по инвентаризации. Поскольку ожидается, что j < N, то достаточно считать, что эти издержки возникают для всех запасаемых объектов при n £ N. Эти издержки определяются следующим образом:

$$C(j) = \sum_{n=1}^{j-1} f(n)ns + \sum_{n=j}^{N} f(n)\left[a + \frac{k}{2}c(n) + \frac{ns}{2}\right]. \qquad (2.44)$$

Легко увидеть, что первая разность C(j) по j равна

$$\Delta C(j) = C(j+1) - C(j) = f(j)js - f(j)\left[a + \frac{k}{2}c(j) + \frac{js}{2}\right] =$$

$$f(j)\left[\frac{js}{2} - a - \frac{k}{2}c(j)\right]. \qquad (2.45)$$

Приравняв первую разность нулю, получим следующее уравнение для определения оптимальной точки разделения $\hat{j}$:

$$\frac{s}{2}\hat{j} - a - k'c\left(\hat{j}\right) = 0 \qquad (2.46)$$

Поскольку решение обычно не выражается целым числом, следует проверить смежные целые числа. Кроме того, следует тщательно проверить, не имеется ли у функции C(j) многих локальных минимумов. Желательно рассчитать ряд разностей DC(j) в окрестности числа $\hat{j}$.

[1]

Теория фирмы

Основным понятием микроэкономической теории является **фирма**, определяемая как некоторая организация, производящая затраты экономических факторов, таких, как земля, труд и капитал, для изготовления продукции и услуг, которые она продает потребителям или другим фирмам. Задача рационального ведения хозяйства, с которой встречается фирма, заключается в определении количества продукции и в расчете необходимых для ее выпуска затрат с учетом технологической связи между ними и заданными ценами на затраты (или функциях предложения затрат) и на продукцию (или функциях спроса на продукцию).

ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Предположим, что фирма производит только один вид продукции, используя несколько видов затрат; в этом случае фирма должна выбрать точку в пространстве затрат, которое состоит из всех возможных комбинаций затрат. Если обозначить через x_j количество j-го вида затрат, используемых фирмой, j = 1, 2, ... n, то вектор затрат представляет собой вектор-столбец

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'. \qquad (8.1.1)$$

Пространство затрат, I, состоящее из всех возможных векторов затрат, является неотрицательным ортантом n-мерного евклидова пространства в предположении, что все затраты могут непрерывно изменяться

$$I = x = \left\{(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)' \mid x_j \geq 0\right\},\ j = 1,2,\ldots,\ n. \qquad (8.1.2)$$

Каждой точке пространства затрат соответствует единственный максимальный выпуск, произведенный при использовании этих затрат. Технологическая связь между выпуском продукции и затратами называется производственной функцией. Обозначив через q размеры выпуска, производственную функцию можно записать в виде

$$q = f(x) = q(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n). \qquad (8.1.3)$$

Она представляет собой отображение любого вектора затрат (точки пространства затрат) в единственное неотрицательное действительное число, а именно максимальный выпуск, который может быть получен при использовании этого вектора затрат. В дальнейшем будем считать, что производственная функция непрерывно дифференцируема.

Предполагается, что производственная функция удовлетворяет двум аксиомам. Первая из них утверждает, что существует подмножество пространства затрат, называемое **экономической областью**, в которой увеличение любого вида затрат не приводит к уменьшению выпуска продукции. Таким образом, если x^1 и x^2 - две точки этой области, то

$$x^1 \geq x^2 \text{ влечет за собой } f(x^1) \geq f(x^2). \qquad (8.1.4)$$

Эта область характеризуется неотрицательностью всех первых частных производных производственной функции, которые называются **предельными продуктами**

$$\frac{df}{dx_j}(x) = MP_j(x) \geq 0,\ j = 1,2\ ,\ldots,\ n; \qquad (8.1.5)$$

Определим вектор предельного продукта как вектор-строку

$$MP(x) = \frac{df}{dx_j}(x) = (MP_1(x), MP_2(x), \ldots, MP_n(x)), \qquad (8.1.6)$$

тогда экономическая область явится подмножеством пространства затрат

$$\{x \in I \mid MP(x) \geq 0\}. \qquad (8.1.7)$$

Вторая основная аксиома утверждает, что существует особая область R, выпуклое подмножество экономической области, для которой матрица Гессе производственной функции

$$H = H(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x) \qquad (8.1.8)$$

отрицательно определена для всех x из R. В этой особой области производственные множества

$$\{x \in I \mid f(x) \geq q^0\}, \qquad (8.1.9)$$

являются выпуклыми для каждого неотрицательного числа q^0. В ней также выполняется

$$\frac{d^2 f}{dx_j^2}(x) = \frac{d}{dx_j}(MP_j(x)) < 0,\ j = 1,2,\ldots,n; \qquad (8.1.10)$$

это соотношение называется **законом убывающей отдачи (убывающей доходности)**: по мере того как затраты одного вида добавляются к установленным объемам других затрат, в конечном счете достигается особая область, в которой предельный продукт затрат снижается. Классическим примером этого закона является добавление все большего и большего количества труда в производстве зерна на фиксированном участке земли. После достижения определенной точки дополнительный выпуск продукции, производимый добавочным человеком, будет падать вследствие исчерпания возможностей специализации и в связи с трудностями координации усилий.

Согласно этим двум аксиомам, существует выпуклая область пространства затрат, называемая особой областью R и определенная соотношением

$R = \{x \in I \mid MP(x) \geq 0\}$, H (x) отрицательно определена. (8.1.11)

Производственная функция в особой области характеризуется отдачей (доходом) от расширения масштаба производства и “возможностями замещения”.

Доход от расширения масштаба производства характеризует производственную функцию с точки зрения “поведения” выпуска продукции, если все затраты изменяются в одинаковой пропорции. Предположим, что в определенной точке пространства затрат x все затраты умножаются по масштабу на число $\alpha : \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$, , где a > 1. Производственная функция характеризуется постоянным доходом от расширения масштаба производства, если выпуск возрастает в той же пропорции, что и затраты

$$f(ax) = af(x). \qquad (8.1.12)$$

Так, например, удвоение всех затрат приводит к увеличению выпуска продукции в два раза. Аналогично производственная функция характеризуется возрастающим (убывающим) доходом от расширения масштаба производства, если она возрастает в большей (меньшой) степени, чем все затраты

$$f(ax)>(<)af(x). \qquad (8.1.13)$$

Конечно, производственная функция может характеризоваться постоянным доходом от расширения масштаба производства в одних точках пространства затрат и возрастающим или убывающим доходом от расширения масштаба производства в других. Локальным показателем измерения дохода от расширения масштаба производства, определенным в некоторой точке пространства затрат, является эластичность производства

$$\varepsilon(x) = \lim_{a\to 1} \frac{\alpha}{f(\alpha x)} \frac{df(\alpha x)}{d\alpha} = \lim_{a\to 1} \frac{d \ln f(\alpha x)}{d \ln \alpha} \qquad (8.1.14)$$

т. е. эластичность выпуска по отношению к параметру масштаба a. В случае постоянного (возрастающего, убывающего) дохода от расширения масштаба производства эластичность замещения равна (больше, меньше) единице. Так как $f(ax) = f(ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$, то после дифференцирования обеих сторон по a получим

$$\frac{df(\alpha x)}{d\alpha} \sum_{j=1}^{n} \frac{df(\alpha x)}{d(\alpha x_j)} x_j. \qquad (8.1.15)$$

Таким образом, эластичность производства можно записать в виде

$$\varepsilon(x) = \lim_{a\to 1} \frac{\alpha}{f(\alpha x)} \frac{df(\alpha x)}{d\alpha} = \lim_{a\to 1} \frac{\alpha}{f(\alpha x)} \sum_{j=1}^{n} \frac{df(\alpha x)}{d(\alpha x_j)} x_j \qquad (8.1.16)$$

или

$$\varepsilon(x) = \frac{MP(x)}{f(x)}(x). \qquad (8.1.17)$$

Определим **эластичность выпуска** по отношению к изменению затрат j-го вида как

$$\varepsilon(x) = \frac{x_j}{f(x)} \frac{df}{dx_j}(x),\ j = 1,2,\ldots,n, \qquad (8.1.18)$$

тогда уравнение (8.1.17) примет вид

$$\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(x). \qquad (8.1.19)$$

Таким образом, эластичность производства в любой точке особой области равна сумме эластичностей выпуска по отношению к различным затратам в этой точке.

Возможности замещения характеризуют производственную функцию с точки зрения различных комбинаций затрат, порождающих одинаковые уровни выпуска. Локальным измерением замещения между двумя затратами, скажем x_j и x_k, когда все остальные затраты остаются постоянными, в некоторой точке особой x_k области может служить эластичность замещения между затратами j и k, определенная как

$$\sigma_{jk}(x) = \frac{d \ln(x_j / x_k)}{d \ln(MP_j(x)/MP_k(x))} =,\ j,\ k = 1,2,\ldots,n, \qquad (8.1.20)$$

т. е. процентное изменение соотношения затрат, деленное на процентное изменение соотношения их предельных продуктов (знак минус подтверждает, что $\sigma_{jk} \geq 0$ в особой области). Эластичности замещения характеризуют кривизну изоквант, множеств затрат, необходимых для производства одного и того же уровня выпуска

$$\{x \in I \mid f(x) = q^0\}, \qquad (8.1.21)$$

где q_0 - заданный уровень выпуска. Дифференцирование вдоль изокванты приводит к формуле

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{df}{dx_j}(x)dx_j = 0; \qquad (8.1.22)$$

поэтому, определив $dx = (dx_1, dx_2, ..., dx_n)'$, получаем

$$MP(x)dx = 0 \qquad (8.1.23)$$

Если все затраты фиксированы, кроме затрат вида j и k, то

$$MP_j(x)dx_j + MP_k(x)dx_k = 0, \qquad (8.1.24)$$

поэтому

$$\left.\frac{dx_j}{dx_R}\right| \text{изокванта} = -\frac{MP_k(x)}{MP_j(x)}. \qquad (8.1.25)$$

Теперь запишем величину, обратную эластичности замещения (8.1.20) в виде

$$\frac{1}{\sigma_{jk}} = \frac{d\ln\left(MP_k(x)/MP_j(x)\right)}{d\ln\left(x_j/x_k\right)} = \frac{d\ln\left(-dx_j/dx_k \mid \textit{изокванта}\right)}{d\ln\left(-dx_j/dx_k\right)}. \qquad (8.1.26)$$

Вышеизложенная характеристика производственной функции может быть геометрически проиллюстрирована в случае двух затрат (n = 2), для которых производственная функция имеет следующий вид:

$$q = f(x_1, x_2). \qquad (8.1.27)$$

Изокванты выражаются формулой

$$f(x_1, x_2) = q^0 = \text{const}; \qquad (8.1.28)$$

некоторые из них показаны на рис. 8.1, где наклон изоквант из (8.1.25) вычисляется по выражению

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right| \text{изокванта} = -\frac{MP_1(x)}{MP_2(x)}. \qquad (8.1.29)$$

В особой области, заштрихованной на рис. 8.1, оба предельных продукта неотрицательны, поэтому наклон изоквант неположителен. Особая область, совпадающая здесь с экономической областью, ограничена двумя кривыми, которые называются разделяющими линиями. Разделяющая линия 1 является геометрическим местом затрат, для которых наклон изокванты равен нулю ($MP_1(x) = 0$), а разделяющая линия 2 характеризует геометрическое место затрат, для которых наклон изокванты равен бесконечности ($MP_2(x) = 0$). Разделяющая линия 1 показывает минимальные количества x_2, необходимые для производства различных уровней выпуска. Например, для того чтобы произвести $\bar{\bar{q}}$, необходимо по крайней мере $\bar{x}_2$ затрат второго вида. Аналогично разделяющая линия 2 показывает минимальные количества x_1, необходимые для выпуска различных

объемов продукции. Например, для того чтобы произвести $\bar{q}$, требуется по крайней мере $\bar{\bar{x}}_1$ затрат первого вида.

Рис. 8.1 можно также использовать для иллюстрации понятия дохода от расширения масштаба производства. Если производственная функция характеризуется постоянным доходом от расширения масштаба производства, то

$$f(ax_1, ax_2) = af(x_1, x_2). \qquad (8.1.30)$$

Взяв в качестве $a = 1/x_1$, получим

$$q = f(x_1, x_2) = \frac{1}{\alpha} f(\alpha x_1, \alpha x_2) = x_1 f\left(1, \frac{x_2}{x_1}\right), \qquad (8.1.31)$$

т. е. выпуск зависит только от уровня затрат одного вида (x_1) и от отношения затрат (x_2/x_1). Вдоль каждого луча, проходящего через начало координат, такого, как OR

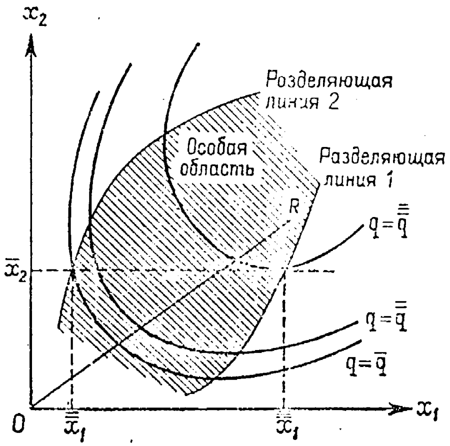


Рис. 8.1.

на рис. 8.1, соотношение затрат постоянно, так что выпуск продукции зависит только от x_1. Например, если количество затрат первого вида в точке, где OR пересекает изокванту $\bar{\bar{q}}$, равно удвоенному количеству в точке, где OR пересекает изокванту $\bar{q}$, то $\bar{\bar{q}} = 2\bar{q}$. При этом очевидно, что если производственная функция характеризуется постоянным доходом от расширения масштаба производства, то все изокванты являются радиальными растяжениями относительно какой-либо одной изокванты.

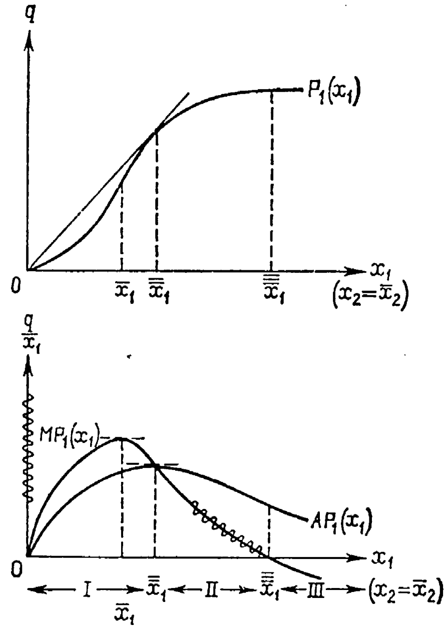


Рис. 8.2. Кривые продукции.

В качестве иллюстрации закона убывающей доходности могут служить кривые продукции, как это показано на рис. 8.2. На верхнем графике построена кривая продукции для затрат первого типа

$$P_1(x_1) = f(x_1, \overline{x_2}), \qquad (8.1.32)$$

показывающая зависимость выпуска от затрат первого типа при неизменных затратах второго типа. На нижнем графике показаны кривые среднего и предельного продукта

$$AP_1(x_1) = \frac{P_1(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_1, \overline{x_2})}{x_1}. \quad (8.1.33)$$

$$MP_1(x_1) = \frac{dP_1(x_1)}{dx_1} = \frac{df}{dx_1}(x_1, \overline{x_2}). \quad (8.1.34)$$

Первое равенство характеризует выпуск продукции, произведенной на еденицу затрат первого вида; второе - добавочный доход, полученный при использовании дополнительного количества затрат первого типа. Геометрически MP_1 выражает наклон кривой P_1, а AP_1 - тангенс угла, составленного лучом, проведенным из начала координат в P_1.

На обоих графиках показаны три критические точки: первая - $(\overline{x_1})$, в которой P_1 имеет точку перегиба, где MP_1 достигает максимума; вторая - $\left(\overset{=}{x_1}\right)$, в которой луч из начала координат касается P_1, где AP_1 достигает максимума и равно MP_1, третья - , $(\overline{\overset{=}{x_1}})$ в которой P_1 достигает максимума и MP_1 равно нулю. Рис. 8.2 иллюстрирует закон убывающей доходности, так как MP_1 понижается в конце концов после первой критической точки.

На рис. 8.2 нашли отражение также три стадии производства. Первая стадия длится до второй критической точки, в которой средний продукт достигнет максимума (и равен предельному продукту). На этой стадии предельный продукт превышает средний.

Стадия 1: $MP_1 > AP_1 > 0$. (8.1.35)

Вторая стадия находится между второй и третьей критическими точками. На этой стадии средний продукт превышает предельный, а последний положителен.

Стадия 2: $AP_1 > MP_1 > 0$. (8.1.36)

Третья стадия расположена за третьей критической точкой. На этой стадии предельный продукт отрицателен.

Стадия 3: $MP_1 < 0$. (8.1.37)

Если производственная функция показывает постоянный доход от расширения масштаба производства, то стадии 1 и 3 симметричны. В этом случае эластичность производства равна единице; поэтому из уравнения (8.1.17) получим

$$q = x_1\frac{df}{dx_1} + x_2\frac{df}{dx_2} = x_1 MP_1 + x_2 MP_2. \quad (8.1.38)$$

Разделив это соотношение на x_1 и используя прежние обозначения, получим

$$AP_1 = MP_1 + \frac{x_2}{x_1}MP_2. \quad (8.1.39)$$

или

$$MP_2 = \frac{x_1}{x_2}(AP_1 - MP_1). \quad (8.1.40)$$

Таким образом, стадию 1, в которой $MP_1 > AP_1$, можно равным образом характеризовать в виде соотношения $MP_2 < 0$, тогда

Стадия 1: $MP_2 < 0$;
Стадия 3: $MP_1 < 0$; (8.1.41)

это показывает симметричность стадий 1 и 3. Такой вывод также может быть получен при сравнении рис. 8.1 и рис. 8.2. На рис. 8.2 затраты второго вида зафиксированы в размере $\overline{x}_2$, показываемом горизонтальной линией на рис. 8.1. Точки $\overset{=}{x}_1$ и $\overline{\overset{=}{x}}_1$ на рис. 8.1 соответствуют аналогично обозначенным точкам на рис. 8.2. Соответствие $\overline{\overset{=}{x}}_1$ на двух рисунках следует из того, что если затраты второго вида остаются неизменными на уровне $\overline{x}_2$, то возрастание x_1 вдоль этой горизонтальной линии на рис. 8.1 приводит к увеличению выпуска, пока не будет достигнуто $\overline{\overset{=}{x}}_1$. После $\overline{\overset{=}{x}}_1$ горизонтальная линия проходит через все более низкие изокванты, поэтому максимальный выпуск находится в точке $\overline{\overset{=}{x}}_1$, как показано на рис. 8.2. Соответствие $\overset{=}{x}_1$ на двух рисунках следует из уравнения (8.1.40). Слева от $\overset{=}{x}_1$ на рис. 8.1 изокванты имеют положительный наклон, потому что $MP_2 < 0$. По (8.1.40) это условие выполняется, только если $MP_1 > AP_1$ что характеризует область слева от $\overset{=}{x}_1$ на рис. 8.2. Таким образом, если функция показывает постоянный доход от масштаба, то стадии 1 и 3 не только симметричны, но они соответствуют областям снаружи разделяющих линий. Экономическая область, в которой предельные продукты неотрицательны и изокванты имеют отрицательный наклон, соответствует стадии 2, где предельный продукт ниже среднего и положителен.

Некоторые частные типы производственных функций в случае двух видов затрат представлены в табл. 8-1. Для **линейной производственной функции** характерна линейная зависимость выпуска от затрат. Производственная функция Кобба - Дугласа выражает логарифм выпуска как линейную функцию логарифма затрат. Производственная функция затрат - выпуска есть одна из заданных пропорций, которыми для производства одной единицы выпуска определяется количество затрат каждого вида. Производственная функция анализа производственной деятельности обобщает производственную функцию затрат - выпуска на случай, когда существует p элементарных процессов, называемых “активностями”, каждый из которых может протекать при любой неотрицательной “интенсивности”. Выпуск, произведенный при единичной интенсивности, и затраты, необходимые на единицу интенсивности, фиксированы, а общий выпуск и общие затраты находятся путем простого сложения выпуска и затрат соответственно для каждой активности при выбранных интенсивностях. Изокванты для этих четырех производственных функций показаны на рис. 8.3. Производственная функция с постоянной эластичностью замещения (constant elasticity of substitution, CES), для которой s, эластичность замещения, равна $\frac{1}{1+\beta}$, является обобщением производственных функций трех первых типов: если b стремится к -1, CES стремится к линейной производственной функции (s = ¥); если b приближаются к нулю, то CES приближается к производственной функции Кобба - Дугласа (s = 1); и если b стремится к ¥, то CES стремится принять вид производственной функции затрат - выпуска (s = 0).

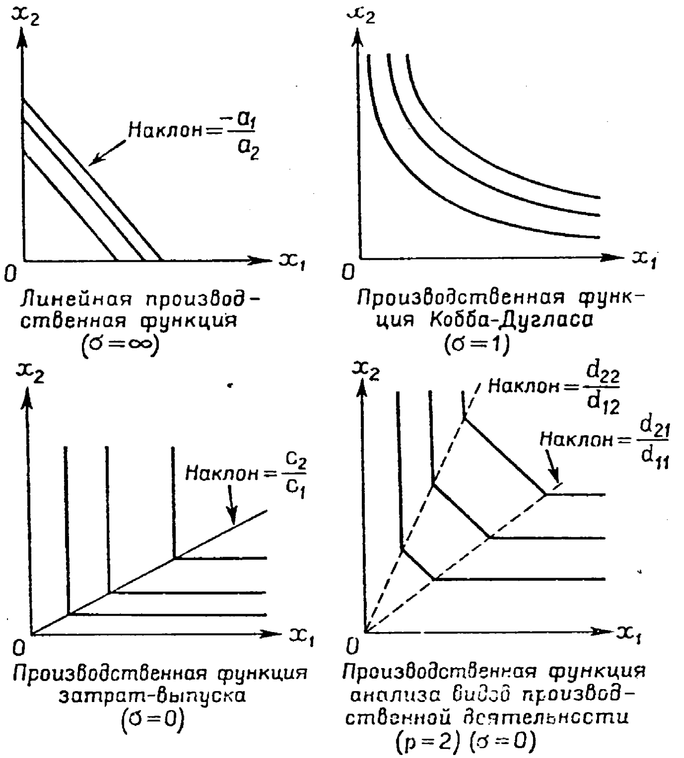


Рис. 8.3. Изокванты для различных производственных функций

НЕОКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФИРМЫ

Неоклассическая теория фирмы построена на предположении, что цель фирмы заключается в максимизации прибыли путем выбора видов затрат, при заданной производственной функции и заданных ценах выпуска p и ценах затрат (оплатах факторов производства) $W = (w_1, w_2, \ldots\ldots, w_n)$. Прибыль П равна годовому доходу R за вычетом издержек производства C, т. е.

$$П = R - C, \qquad (8.2.1)$$

где годовой доход вычисляется как годовая продукция, умноженная на цену выпуска. Используя (8.1.3), получим

$$R = pq = pf(x). \qquad (8.2.2)$$

Таблица 8.1

Производственные функции в случае двух видов затрат

Тип производственной функции	Производственная функция $q = f(x_1, x_2)$	Эластичность замещения ε	Эластичность производства σ	Параметры
1	2	3	4	5
Линейная	$q = a_1x_1 + a_2x_2$	∞	1	a_j — предельный физический продукт затрат $j \geqslant 0$, $j = 1, 2$
Кобба—Дугласа	$q = b_0x_1^{b_1}x_2^{b_2}$	1	$b_1 + b_2$	b_0 — фактор шкалы > 0 b_j — эластичность выпуска продукции по отношению к затратам $j \geqslant 0$, $j = 1, 2$
Затраты — выпуск	$q = \min\left(\frac{x_1}{c_1}, \frac{x_2}{c_2}\right)$ или $(x_j \geqslant c_jq,\ j = 1, 2)$	0	1, $\frac{x_1}{c_1} = \frac{x_2}{c_2}$	c_j — количество затрат вида j, необходимое для производства одной единицы продукции $\geqslant 0$, $j = 1, 2$
Анализа способов производственной деятельности	$q = \sum_{h=1}^{p} d_h y_h$ $\sum_{h=1}^{p} d_{jh}y_h \leqslant x_j$, $j = 1, 2$	0	1	p — число способов производственной деятельности y_k — уровень интенсивности способа k, $k = 1, 2, \ldots, p$ d_k — выпуск продукции при единичной интенсивности k, $k = 1, 2, \ldots, p$ d_{jh} — количество затрат вида j, необходимых при единичной интенсивности способа k, $j = 1, 2$; $k = 1, \ldots, p$
С постоянной эластичностью замещения	$q = c_0[c_1x_1^{-\beta} + c_2x_2^{-\beta}]^{-h/\beta}$	$\frac{1}{1+\beta}$	h	c_0 — коэффициент шкалы > 0 c_j — коэффициент распределения $\geqslant 0$, $j = 1, 2$ h — степень однородности > 0 β — коэффициент замещения $\geqslant -1$

Издержки производства равны общим выплатам за все виды затрат

$$C = \sum_{j=1}^{n} \omega_j x_j = wx \quad . \qquad (8.2.3)$$

Решая долгосрочную задачу, фирма свободна выбрать любой вектор затрат из пространства затрат, поэтому задача формулируется следующим образом:

$$\max_x \prod(x) = pf(x) - wx \text{ при условии } x_n \geq 0, \qquad (8.2.4)$$

или в развернутой форме

$$\max_{x_1, x_2, ..., x_n} \prod(x_1, x_2, ..., x_n) = pf(x_1, x_2, ..., x_n) - \sum_{j=1}^{n} \omega_j x_j$$

при условии

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0. \qquad (8.2.5)$$

Эта задача представляет собой задачу нелинейного программирования, в которой в качестве инструментальных переменных выступает x, вектор затрат; целевая функция выражается функцией прибыли П (x); единственным ограничением является условие неотрицательности x и заданы (n +1) параметров p и w. В противоположность долгосрочной задаче, для которой характерно, что все затраты можно произвольно варьировать, при краткосрочной появляются ограничения на выбор затрат, как, например, пониженные лимиты на определенные затраты из-за договорных обязательств. В краткосрочной задаче фирма должна выбрать сектор затрат из заданного подмножества пространства затрат, так что к задаче (8.2.4) добавляется ряд ограничений

$$g(x) < b, \qquad (8.2.6)$$

или

$$q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_i, i = 1,2,...,m. \qquad (8.2.7)$$

где эти m неравенств выражают ограничения на затраты для определенного краткосрочного периода.

В условиях долгосрочности необходимыми условиями для максимизации прибыли являются условия Куна - Таккера

$$\frac{d\Pi}{dx} = p\frac{df}{dx}(x) - w \leq 0$$

$$\frac{d\Pi}{dx} \cdot x = \left(p\frac{df}{dx}(x) - w\right)x = 0 \qquad (8.2.8.)$$

$$x \geq 0.$$

Таким образом, для всех затрат

$$pMp(x) = p\frac{df}{dx_j}(x) \leq \omega_j, \ j = 1,2,...,n \qquad (8.2.9)$$

и

$$\left.\begin{array}{l} pMP_j(\mathbf{x}) = w_j, \text{ если } x_j > 0 \\ x_j = 0, \quad \text{если } p \ MP_j(\mathbf{x}) < w_j \end{array}\right\} j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (8.2.10)$$

где pMP_j (x) представляет собой стоимость предельного продукта в точке x, т. е. стоимость добавочного выпуска, полученного при использовании добавочных затрат j-го вида.

Предположим, что все затраты были действительно использованы (x > 0), тогда условия первого порядка будут иметь вид

$$p\frac{df}{dx}(x) = pMp(x) = w, \qquad (8.2.11)$$

т. е. стоимость предельных продуктов равна плате за затраты факторов производства. Точка из особой области, определенной в (8.1.11), удовлетворяющая (8.2.11), является решением задачи фирмы для долгосрочного периода, так как удовлетворяются условия первого порядка и условия достаточности второго порядка.

Условия первого порядка

$$\psi_j(x) = p\frac{df}{dx_1}(x) - \omega_j = 0, \ j = 1,2,...,n. \qquad (8.2.12)$$

можно разрешить относительно оптимальных затрат, если матрица Якоби

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\psi_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial\psi_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = p\mathbf{H} \qquad (8.2.13)$$

невырожденна. Предположим, что вектор затрат x лежит в особой области; тогда матрица Якоби невырожденна и оптимальные уровни затрат могут быть выражены как функции (n + 1) параметра задачи

$$x^* = x^*(p, w), \qquad (8.2.14)$$

т. е.

$$x_j^* = x_j^*(p, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n), \ j = 1,2,..., n. \qquad (8.2.15)$$

Эти n уравнений образуют функции спроса на затраты, выражающие оптимальные выборы затрат как функции цен продукции и плат за факторы производства. Эти функции однородны нулевой степени, так как, умножая цены и платы па положительный коэффициент шкалы , меняя (p, w) на (ap, aw) в (8.2.4), мы изменим П на aП, а максимизация aП, где a > 0, эквивалентна максимизации П. Таким образом,

$$x^*(ap, aw) = x^*(p, w) \text{ для всех } a > 0. \qquad (8.2.16)$$

Подставляя функции спроса на затраты в производственную функцию, получим выпуск как функцию цен продукции и платы за факторы производства

q* = f(x*, (p, w)) = q*(p, w), (8.2.17)

т. е. **функцию предложения выпуска**. Так как функция спроса на затраты однородна нулевой степени, то и для функции предложения продукции справедливо

q*(ap, aw) = q*(p, w) для всех a > 0, (8.2.18)

поэтому пропорциональное изменение в ценах продукции и плате за факторы производства не влияет ни на затраты, ни на выпуск продукции.

Полученные результаты можно проиллюстрировать геометрически в случае двух видов затрат. На рис. 8.4 показаны изокванты, как на рис. 8.1, а также изокосты (isocosts), геометрические места точек, для которых издержки производства постоянны

$$x = \{(x_1, x_2)' \mid C = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 = const\}. \quad (8.2.19)$$

Так как w_1 и w_2 предполагаются заданными, изокосты являются параллельными линиями с наклоном

$$\frac{dx_2}{dx_1} \mid изокоста = -\frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (8.2.20)$$

Изокванты из (8.1.29) имеют наклон

$$\frac{dx_2}{dx_1} \mid изокванта = -\frac{MP_1(x)}{MP_2(x)}. \quad (8.2.21)$$

Запишем условия второго порядка

$$pMP_1(x) = \omega_1 \quad (8.2.22)$$

$$pMP_2(x) = \omega_2$$

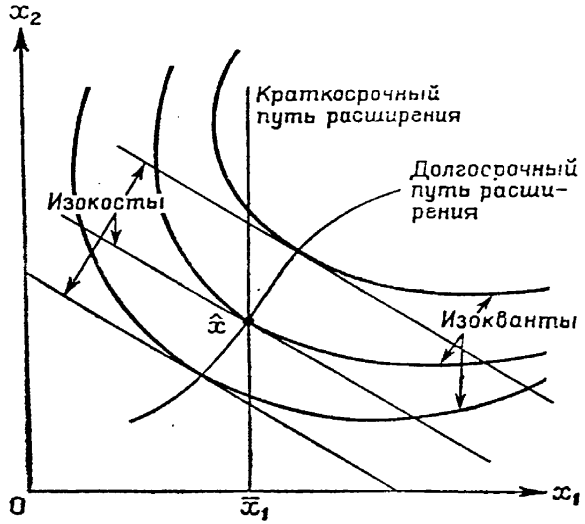


Рис. 8.4. Пути расширения

требующие пересечения изоквант и изокост

$$\frac{dx_2}{dx_1} \mid изокванта = -\frac{MP_1(x)}{MP_2(x)} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{dx_2}{dx_1} \mid изокоста. \quad (8.2.23)$$

Геометрическое место пересечений изокост и изоквант определяет собой **долгосрочный путь расширения**. Он показывает затраты, максимизирующие выпуск продукции при любом определенном уровне издержек или равнозначно затраты, минимизирующие издержки при определенном уровне выпуска, где уровень издержек определяется изокостой, а уровень выпуска - изоквантой. Используя путь расширения изокванты и изокосты, можно получить кривую издержек C(q), выражающую издержки как функцию выпуска. Типичная кривая издержек и соответствующие ей кривые средних и предельных издержек показаны на рис. 8.5 C_L, AC_L и MC_L, где нижний индекс относится к долгосрочному периоду

$$C_L = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + C_L(q)$$

$$AC_L = \frac{C_L(q)}{q}.$$

$$MC_L = \frac{dC_L(q)}{dq}. \quad (8.2.24)$$

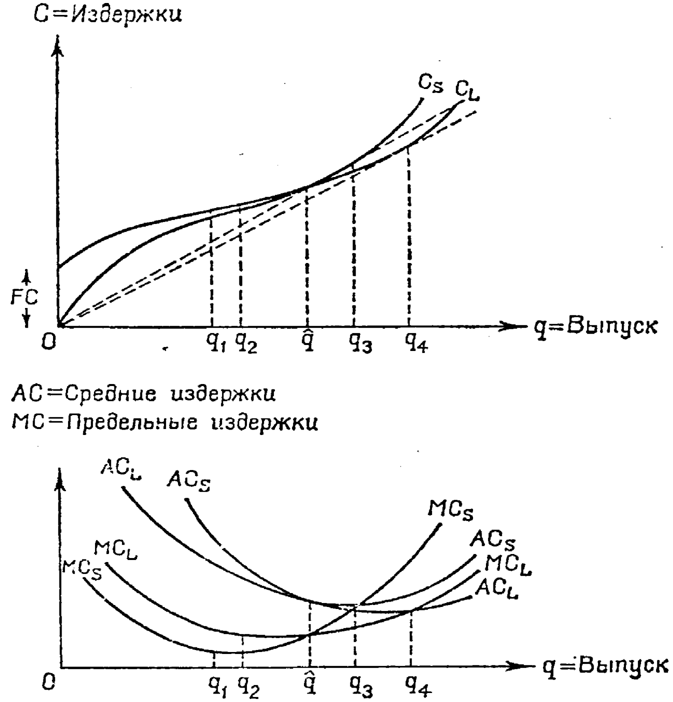


Рис. 8.5. Кривые издержек

Заметим, что при q_2 в точке перегиба C_L кривая MC_L достигает минимума; при q_4, где луч, проведенный из начала координат, касается C_L, кривая AC_L достигает минимума и две кривые пересекаются ($AC_L = MC_L$); слева от q_4, где MC_L лежит ниже AC_L, кривая AC_L убывает; справа от q_4 где MC_L лежит выше AC_L, кривая AC_L возрастает.

Частный случай краткосрочного периода, для которого затраты первого вида зафиксированы на уровне $\bar{x}_1$, показан вертикальной линией на рис. 8.4, представляющей собой путь расширения для этого краткосрочного периода. Тогда соответствующими кривыми издержек будут краткосрочные кривые издержек C_S, AC_S и MC_S, как это показано на рис. 8.5. В точке x на рис. 8.4, где пересекаются два пути расширения, выпуск и издержки одинаковы, поэтому в соответствующей точке q на рис. 8.5 краткосрочные и долгосрочные издержки равны. Все остальные точки на краткосрочном пути расширения не оптимальны в том смысле, что при определенном уровне выпуска, заданном изоквантой, издержки не минимальны. Таким образом, на рис. 8.5 краткосрочные издержки и средние издержки для любого
выпуска, отличающегося от $\hat{q}$, больше соответствующих долгосрочных издержек и средних издержек. При q_1 и q_3 соответственно краткосрочные предельные и средние издержки достигают своего минимального значения и отношения между издержками, средними издержками и предельными издержками для долгосрочного и краткосрочного периодов одинаковы. Положительная ордината FC кривой издержек является **фиксированными издержками** и определяет издержки при нулевом выпуске, в данном случае равные $\omega_1 \bar{x}_1$.

Кривая издержек характеризует (минимальные) издержки при различных уровнях выпуска. Тогда оптимальным уровнем выпуска является решение задачи

$$\max_{\{q\}} \prod(q) = pq - C(q), \qquad (8.2.25)$$

которое в виде условий первого порядка требует, чтобы цены равнялись предельным издержкам

$$p = MC = \frac{dC}{dq}, \qquad (8.2.26)$$

а условия достаточности второго порядка утверждают, что предельные издержки должны возрастать в этой точке

$$\frac{d^2C}{dq^2} > 0. \qquad (8.2.27)$$

Поэтому оптимальный выпуск на рис. 8.6 находится в q* и характеризует оптимальный уровень предложения выпуска при ценах выпуска p и заданных платах за затраты факторов производства, которые были использованы при построении кривых издержек.

СРАВНИТЕЛЬНАЯ СТАТИКА ФИРМЫ

Методом сравнительной статики определяется чувствительность оптимальных затрат и выпуска фирмы к изменениям параметров задачи. Подставляя функцию спроса на затраты (8.2.14) и функцию предложения продукции (8.2.17) в необходимые условия (8.2.11) и производственную функцию (8.1.3), получим (n + 1) тождеств

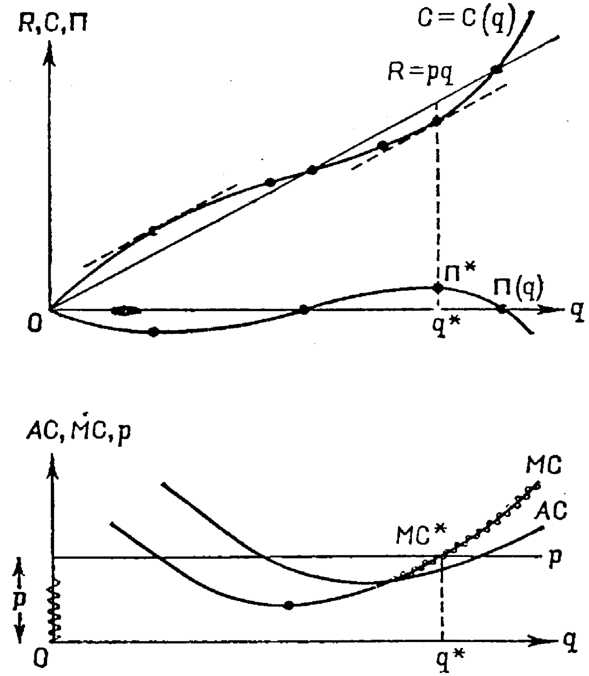


Рис. 8.6. Определение оптимального выпуска продукции через доход (валовой) и кривые издержек.

$$q^*(p,w) \equiv f(x^*(p,w)) \qquad (8.3.1)$$

$$p\frac{df}{dx}(x^*(p,w)) \equiv w.$$

Дифференцируя эти тождества по (n + 1) параметрам p и w, определим степень чувствительности оптимальных затрат и выпуска продукции.

Рассмотрим сначала влияние изменения цены выпуска p. Дифференцируя (8.3.1) по p, получим

$$\frac{dq^*}{dp} = \sum_{R=1}^{n} \frac{df}{dx_R}\frac{dx_R^*}{dp} \qquad (8.3.2)$$

$$\frac{df}{dx_j} + p\sum_{R=1}^{n} \frac{d^2f}{dx_j dx_R}\frac{dx_R^*}{dp} = 0, j = 1,2,...,n$$

или в векторно-матричных обозначениях

$$\frac{dq}{dp} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dp} \qquad (8.3.3)$$

$$\frac{df'}{dx} = pH\,\frac{dx}{dp} = 0,$$

где dq/dp характеризует изменение оптимального выпуска продукции, если меняется его цена; dx/dp - влияние изменения цены продукции на оптимальные затраты

$$\frac{dq}{dp} = \frac{dq*(p,\omega)}{dp}$$

$$\frac{d_x}{d_p} = \left(\frac{dx_1^*(p,w)}{dp}, \frac{dx_2^*(p,w)}{dp}, \ldots, \frac{dx_n^*(p,w)}{dp}\right), \qquad (8.3.4)$$

df/dx- вектор-строка предельных продуктов, а H - матрица Гессе. Уравнения (8.3.3) могут быть записаны в виде одного матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{d}{dx} \\ 0 & pH \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dg}{dp} \\ \frac{dx}{dp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\left(\frac{df}{dx}\right) \end{pmatrix}. \qquad (8.3.5)$$

Затем рассмотрим влияние изменения в оплате затрат l-го вида. Дифференцируя (8.3.1) по w_l, получим

$$\frac{dq^*}{d\omega_l} = \sum_{k=1}^{n} \frac{df}{dx_k} \frac{dx_k^*}{d\omega_l} \qquad (8.3.6)$$

$$p \sum_{k=1}^{n} \frac{d^2 f}{dx_j dx_k} \frac{dx_k^*}{d\omega_l} = \delta_{il} \quad \mathbf{j = 1, 2, \ldots, n}$$

$$\frac{dq^*}{dp} > 0. \qquad (8.3.17)$$

Таким образом, возрастание цен продукции всегда приводит к увеличению оптимального уровня выпуска продукции, т. е. кривая предложения продукции должна быть возрастающей. Кривая предложения показана на рис. 8.6 как заштрихованная часть кривой предельных затрат, которая находится выше средних затрат, так как оптимальный выпуск определен на таком уровне, где цена равна предельным издержкам, и заштрихованная часть вертикальной оси до минимальных средних издержек, так как при цене, меньшей, чем средние издержки, продукция не будет выпускаться; действительно, нулевая прибыль более предпочтительна, чем отрицательная, в долгосрочном периоде.

Относительно знаков отдельных элементов dx/dp ничего определенного сказать нельзя, но из того факта, что

$$\frac{dq}{dp} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dp} = \sum_{j=1}^{n} \frac{df}{dx_j}\frac{dx_j^*}{dp} > 0, \qquad (8.3.18)$$

следует, что в особой области, где все предельные продукты неотрицательны, некоторые из dx*/dp должны быть положительными

$$\frac{dx_j^*}{dp} > 0 \text{ для некоторого } \mathbf{j,\ j = 1, 2, \ldots, n.} \qquad (8.3.19)$$

Таким образом, возрастание цены продукции должно привести к увеличению предложения продукции и, следовательно, к повышению спроса на некоторые виды затрат.

По определению:

затраты j-го вида называются малоценными, если, и только если,

$$\frac{dx_j^*}{dp} < 0 \qquad (8.3.20)$$

Таким образом, по (8.3.19) не все затраты могут быть малоценными.

Из (8.3.14) и (8.3.15) следует, что

$$\frac{dq}{dw} = -\frac{dx}{dp}, \qquad (8.3.21)$$

или

$$\frac{dq^*}{d\omega_j} = -\frac{dx_j^*}{dp}, \ j = 1,2,\ldots,n, \qquad (8.3.22)$$

поэтому возрастание цены продукции приводит к повышению (понижению) спроса на определенные виды затрат, если, и только если, увеличение платы за этот вид затрат приводит к сокращению (возрастанию) оптимального выпуска. В частности, увеличение платы за малоценные затраты ведет к увеличению выпуска. Из (8.3.21) и (8.3.18) имеем

$$\frac{dq}{dp} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dp} = -\frac{df}{dx}\frac{dq}{dw} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{df}{dx_j}\frac{dq^*}{d\omega_j} > 0, \qquad (8.3.23)$$

поэтому в особой области справедливо, что

$$\frac{dq^*}{d\omega_j} < 0 \text{ для некоторого j, } \quad \mathbf{j = 1, 2, \ldots, n,} \qquad (8.3.24)$$

т. е. возрастание платы за некоторый вид затрат должно привести к уменьшению выпуска продукции.

Из (8.3.16) следует, что

$$\left(\frac{dx}{dw}\right) \text{ симметрична и отрицательно определена.} \qquad (8.3.25)$$

В частности, элементы вдоль главной диагонали отрицательны

$$\frac{dx_j^*}{d\omega_j} < 0, \ \mathbf{j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.} \qquad (8.3.26)$$

Таким образом, повышение платы за затраты фактора некоторого вида всегда приводит к сокращению спроса на эти затраты. В противоположость теории потребления для фирмы не могут существовать "затраты Гиффина", потому что фирма в отличие от потребителя не должна удовлетворять бюджетному ограничению. Поэтому кривые спроса на затраты всегда убивающие. Так как при равновесии $MP_j = w_j/p$ кривая спроса для затрат первого вида показала на рис. 8.2 как засщтрихованное пространство, совпадающее с кривой предельного продукта ниже некоторого уровня, определенного из условия, что прибыль должна быть неотрицательной (и, следовательно, зависимой от расходов на другие затраты и цен продукции), и совпадающее с вертикальной осью выше этого уровня.

Матрица dx/dw симметрична

$$\frac{dx_j^*}{d\omega_1} = \frac{dx_j^*}{d\omega_j}, \ \mathbf{j,\ \ l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,} \qquad (8.3.27)$$

поэтому влияние изменения платы на затраты l-го вида на спрос, предъявляемый на затраты j-го вида, и влияние изменения платы за затраты j-го вида на спрос, продъявлиемый на затратs l-го, вида, одинаковы. По определению затраты j-го и

l-го вида являются $\left\{\begin{matrix}\text{взаимозаменяемыми}\\ \text{взаимодополняемыми}\end{matrix}\right\}$

$$\text{если} \quad \frac{dx_j^*}{d\omega_1}\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}0. \qquad (8.3.28)$$

Например, в случае когда плата за затраты j-го вида возрастает, так что размеры спроса на эти затраты падают, спрос на затраты i-го вида увеличивается (понижается), если затраты являются взаимозаменяемыми (взаимодополняемыми).