МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Пособие

для студентов по специальности «Прикладная математика
и информатика» (шифр 010200)

Воронеж
2003

ВВЕДЕНИЕ

Межотраслевой баланс производства и распределения продукции является хорошо исследованным направлением экономико-математического моделирования и широко описанным в учебной литературе [1, 2, 3, 4, 5].

В основе анализа лежат специальные формы, отражающие движение межотраслевых потоков.

При межотраслевом анализе в качестве единицы структурирования экономики принимается "чистая отрасль-условная отрасль", объединяющая все производство определенного вида продукции. По своему экономическому содержанию межотраслевой баланс состоит из трех разделов, каждый из которых отражает различие и в то же время взаимообусловленность процесса расширенного воспроизводства (см. таблицу).

Принципиальная схема стоимостного МОБ

	1 2, … j … n			
1	x_{11}			
2	$\dots$			
$\vdots$				
i	$x_{1i} \dots x_{ij} \dots x_{nj}$	$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$	y_i	x_i
$\vdots$				
n	x_{nj}			
	z_j			
	x_j			

Первый раздел характеризует межотраслевой обмен между отраслями материального производства, x_{ij} - межотраслевой поток, направляемый из i-отрасли в j-ю, $i, j = 1, \dots n, n$. Строка этого раздела характеризует распределение продукции, столбец - структуру материальных затрат.

Второй раздел отражает конечное потребление, y_i-го i-й элемент. Элемент второго раздела содержит продукцию, направляемую на нужды потребления, расширения основных фондов и восполнения их выбытия, сальдо экспорта-импорта и сальдо запасов.

В третьем разделе отражается величина z_j, содержащая прибыль, величину оплаты труда и величину амортизационных отчислений j-й отрасли.

Элементы разделов МОБ связывают следующие соотношения, называемые основными балансовыми соотношениями

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i = x_i \quad \forall i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + z_j = x_j \quad \forall j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} z_j$$

В предлагаемых методических указаниях приведены задачи, решение которых позволит усвоить приемы, позволяющие строить модели межотраслевого анализа.

§ 1. Межотраслевой баланс. Моделирование основных пропорций многоотраслевых комплексов

Межотраслевой баланс – это метод отыскания отраслевых пропорций. Его разработка реально выливается в заполнение специальных таблиц, отражающих процессы распределения продукции и структуру ее затрат.

Одной из широко используемых моделей, предназначенных для оптимизации отраслевых пропорций, является модель Леонтьева. Для ее формулировки введем обозначения.

Обозначим через i – порядковый номер "чистой"отрасли, производящей продукт, через j – потребляющей продукт, $(i, j = \overline{1, n})$. Под "чистой"понимается отрасль, выпускающая (потребляющая) один единственный продукт. Реально существующие отрасли распадаются при отражении в модели Леоньева на такое число "чистых"отраслей, каково число различных продуктов, выпускаемых данной отраслью. Обозначим через

x_i – валовый выпуск i–ой отрасли,

x_j – валовый выпуск j–ой отрасли,

y_i – конечный продукт i–ой отрасли,

x_{ij} – межотраслевая поставка, т.е. количество продукции i–ой отрасли, направляемой в j–ю отрасль.

Заметим, что все выше приведенные элементы предполагаются заданными в стоимостном выражении.

Под конечным продуктом понимается часть совокупного общественного продукта, произведенная в сфере материального производства и используемая для нужд непроизводственного потребления, для ремонта расширения и реконструкции основных фондов, воспроизводства выбытия основных фондов, сальдо запасов и сальдо экспорта-импорта.

Обозначим далее через a_{ij} – количество (в руб) продукции i–ой отрасли, необходимое для выпуска единицы продукции j–го вида. Тогда модель Леонтьева может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + y_i = x_i, \quad i = \overline{1,n} & (1) \\ x_j \geq 0, \qquad\qquad j = \overline{1,n}, & (2) \end{cases}$$

В модели (1)-(2) по заданным величинам затрат a_{ij} и заданному конечному продукту y_i проектного года отыскивается объем выпуска отраслей $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Модель (1)-(2) может быть переписана в матричном виде:

$$\begin{cases} (E-A)x = y \\ \qquad\quad x > 0 \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $A = (a_{ij})$ – матрица коэффициента прямых затрат, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - вектор валовых выпусков, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ - вектор конечного продукта, E - единичная матрица порядка n. На основе модели (10) предлагается рассмотреть следующие типы задач:

1) по заданной матрице A и вектору x найти вектор конечного продукта y:

$$y = x - Ax,$$

2) по заданной матрице A и вектору y найти вектор валового выпуска

x:

$$x = (E - A)^{-1} y,$$

3) по вектору $x = (x^1 \overline{x}^2)$ и заданной матрице

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

найти вектор $y = (\overline{y}^1 \ \overline{y}^2), \overline{x}^2, \overline{y}^1$ - подвекторы векторов x и y, для которых заданы их компоненты. В этом случае мы получаем модель типа:

$$\begin{cases} (E - A_{11})x^1 = \overline{y}^1 + A_{12}\overline{x}^2; \\ A_{21}x^1 + y^2 = (E - A_{22})\overline{x}^2; \\ x^1 > 0; \quad y^2 > 0. \end{cases} \tag{4}$$

Модель (4) называется смешанной моделью Леонтьева.

Распространенной моделью межотраслевого баланса является модель с коэффициентами распределения

$$x^T H + z^T = x^T.$$

Здесь $x = (x_j, \ j = l \dots n)$ – вектор валового продукта, $z = (z_j, j = l \dots n)$ – вектор содержащий величину прибыли, амортизации и оплаты труда в j-й отрасли, H - матрица коэффициентов распределения, $H = (h_{ij}, \ h_{ij} = 1, \dots, n)$, $h_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_i}$. Другими словами, коэффициент распределения - это доля продукции i-й отрасли, направляемая в j-ю.

Рассмотрим пример:

Пусть 2 отрасли, конечный продукт которых составляет 120 и 70 единиц, производят продукцию. Затраты на производство заданы матрицей A:

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Найти валовый выпуск каждой отрасли.

<u>Решение</u>: Для определения валового выпуска воспользуемся уравнением

$$Ax + y = x,$$

отсюда

$$x = (E - A)^{-1} y.$$

Вектор y задан:

$$y = \begin{pmatrix} 120 \\ 70 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу, обратную к матрице $(E - A)$.

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ -0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc}
0{,}6 & -0{,}3 & 1 & 0 \\
-0{,}3 & 0{,}8 & 1 & 0 \\
\hline
6 & -3 & 10 & 0 \\
-3 & 8 & 0 & 10 \\
\hline
1 & -1/23 & 5/3 & 0 \\
0 & 13{,}2 & 5 & 10 \\
\hline
1 & 0 & 80/30 & 10/13 \\
0 & 1 & 10/13 & 20/13
\end{array}$$

Итак,

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 80/39 & 10/13 \\ 10/13 & 20/13 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 80/39 & 10/13 \\ 10/13 & 20/13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

Замечание: Обратная матрица здесь отыскивается методом Жордана-Гаусса.

1. Найти вектор конечного продукта y, если валовый выпуск четырех отраслей составляет соответственно 100, 50, 200 и 100 единиц, а матрица затрат A задана следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,3 & 0 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

2. Дана матрица межотраслевых поставок и вектор валового выпуска x

$$(x_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 30 \\ 20 & 0 & 50 \\ 30 & 20 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу затрат A и вектор конечного продукта y.

<u>Указание</u>. Для вычисления элементов матрицы A воспользуемся формулой $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$.

3. Валовый выпуск четырех отраслей равен 80, 60, 200 и 100 единиц соответственно. Матрица межотраслевых поставок дана:

$$(x_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 & 50 \\ 40 & 0 & 20 & 10 \\ 10 & 15 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 120 & 10 \end{pmatrix}.$$

1) Найти матрицу затрат A.

2) Построить модель Леонтьева.

3) Найти вектор конечного продукта - y

4) Найти матрицу H.

4. Известна матрица затрат A и вектор конечного продукта y

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}; y = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

1. Составить модель Леонтьева.
2. Найти вектор валовых выпусков
3. Найти модель МОБ с коэффициентами распределения, если $z = (5;\ 4;\ 6)$.

5. Определить вектор валовых выпусков x, если матрица затрат и вектор конечного продукта известны:

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/6 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}; \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

6. Составить модель Леонтьева и с ее помощью найти вектор валовых выпусков, если матрица затрат и вектор конечного продукта помещены в таблице 2. Составить модель с коэффициентами распределения.

Таблица 2

i/j	затраты			конечный продукт
	1	2	3	y
1	0,5	0	0,1	9
2	0,1	0,2	0	5
3	0,2	0,1	0	10
2	10	3	5	

7. Три отрасли выпускают продукцию. Объем производства 2-й отрасли равен 10 единицам, а 3-й - 15 единиц. Конечный продукт 1-й отрасли равен 8 и нормы затрат ресурсов заданы матрицей A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить объем производства 1-1 отрасли и конечный продукт 2-й и 3-й отраслей.

8. Три отрасли выпускают продукцию, причем объем производства 3-ей отрасли равен 15 единицам, а конечный продукт 1-й отрасли равен 7 единицам, 2-й отрасли - 6.

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Найти объемы производства 2-1 и 1-ой отрасли и конечный продукт 3-ой отрасли.

9. Есть 4 отрасли. Объем производства 1-ой отрасли равен 10 единицам. Конечный продукт 2-ой, 3-ой и 4-ой отраслей равен соответственно 5, 10 и 5 единицам. Найти конечный продукт 1-ой отрасли и объемы производства 2-ой, 3-ой и 4-ой отраслей при следующих нормах затрат ресурсов:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,4 & 0,5 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0,3 & 0 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Три отрасли производят продукцию. Нормы затрат отраслей при

этом таковы:

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Объем производства 1-ой отрасли равен 20 единицам. Конечный продукт 2-ой и 3-ей отраслей равен соответственно 5 и 10 единицам. Найти объем производства 2ой и 3-ей отраслей и конечный продукт 1-ой отрасли.

11. Четыре отрасли производят продукцию так, что объем производства 2-ой отрасли равен 150 единицам, а 4-ой – 200 единицам. Конечный продукт 1-ой отрасли равен 100 единицам, а 3-ей – 80 единицам. Нормы затрат ресурсов даны:

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 & 0,7 \\ 0,2 & 0,3 & 0,6 & 0,5 \\ 0,1 & 0,4 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Найти объемы производства 1-й и 3-ей отраслей и конечный продукт 2-ой и 4-ой отраслей.

§ 2. Коэффициенты прямых, полных и косвенных затрат

Коэффициенты прямых затрат рассчитываются на основе данных базисного года по формуле:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad i,j = 1,\ldots,n,$$

где x_{ij} – количество продукции, направленное из i-ой отрасли в j-ую. Количество продукции i-отрасли, поступающей в j-ую отрасль для выпуска единицы ее продукции не непосредственно, а вещественным в другом продукте, называется косвенными затратами. Для косвенных затрат используется следующее обозначение – $a_{ij}^{(k)}$, здесь k - порядок косвенных затрат. Для расчета косвенных затрат используется формула:

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} \cdot a_{\ell j}^{(k-1)}.$$

Под полными затратами понимается суммарная потребность продукции i-ой отрасли для выпуска единицы конечной продукции j-ой отрасли. Матрицу полных затрат обозначают через B

$$B = (E - A)^{-1}.$$

В литературе нередко полные затраты определяются и как сумма прямых и косвенных затрат. Если матрицу полных затрат, понимаемых в этом смысле, обозначать через C, то легко показать справедливость следующей формулы

$$C = A(E - A)^{-1}.$$

Учитывая, что $(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^n + \cdots$, легко увидеть, что

$$B = E + C.$$

Величина полных затрат в смысле 1-го или второго определения отличаются лишь величиной диагональных элементов. Полные затраты каждой отрасли на себя, в зависимости от того, в каком смысле понимаются, отличаются, таким образом, на 1.

12. Дан межотраслевой баланс производства и распределения продукции трехотраслевой модели за базовый год:

Отрасли потребления/ Отрасли производства	I	2	3	конечный продукт	валовой выпуск
1	20	10	40	30	100
2	30	10	80	40	100
3	20	20	20	120	200

1) Построить матрицу прямых, полных и косвенных затрат 2-го порядка.

13. Дана матрица прямых затрат

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Построить матрицу Леонтьева.

2) Рассчитать матрицу полных затрат.

3) Рассчитать матрицу суммарных косвенных затрат.

<u>Указание</u>: Для решения 3) воспользоваться формулой

$$A^{(\text{Ск})} = C - A.$$

14. Задана матрица прямых затрат:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

1) Рассчитать матрицу полных затрат B.

2) Рассчитать приближенную матрицу полных затрат с точностью до косвенных затрат 3-го порядка.

<u>Указание:</u> Задание 2) выполняется по формуле:

$$B = (E - A)^{-1} = E + A + A^2 + A^3 +$$

с учетом того, что

$$A^{(1)} = AA = A^2,$$

$$A^2 = A \cdot A \cdot A \cdot = A^3 \quad \text{и т.д.}$$

A^1 – матрица коэффициентов косвенных затрат I-го порядка.

15. Дана матрица прямых затрат

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 1/3 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

1) Рассчитать матрицу полных затрат.

2) Рассчитать матрицу приближенных значений коэффициентов полных затрат с точностью до косвенных затрат 2-го порядка.

16. Дана матрица полных затрат

$$B = \begin{pmatrix} 6/5 & 2/5 \\ 2/5 & 9/5 \end{pmatrix}.$$

1) Найти матрицу прямых затрат и построить модель Леонтьева.

2) Найти матрицу ΔB изменения матрицы полных затрат, если величина коэффициента a_{11}, найденного в пункте 1) настоящей задачи, уменьшится на $1/10$.

Указание. Для выполнения пункта 1) необходимо воспользоваться тем, что матрица Леонтьева является обратной по отношению к матрице полных затрат:

$$(E - A) = B^{-1}.$$

§ 3. Аналитические приемы агрегирования в межотраслевом балансе. Ошибка агрегирования

Пусть n отраслей агрегируются, т.е. объединяются, в m новых отраслей. Порядок агрегирования задан. Для n отраслей, имеющихся до агрегирования, заданы матрица коэффициентов прямых затрат A, вектор валового выпуск x и вектор конечного продукта y. Если вектор y не задан, то он находится из балансового уравнения $Ax + y = x$ по формуле

$$y = (E - A)x,$$

где E – единичная матрица n–го порядка.

Введем следующие обозначения: $\widetilde{A}$ – матрица коэффициентов прямых затрат для отраслей, полученных в результате агрегирования;

$\widetilde{x}$ – вектор валового выпуска отраслей после агрегирования;

$\widetilde{y}$ – вектор конечного продукта отраслей после агрегирования.

В основе аналитических приемов агрегирования лежит оператор агрегирования Т. Это матрица размерности $m \times n$, состоящая из нулей и единиц, причем единицы стоят на местах агрегированных отраслей.

Например, 4 отрасли агрегируются так, что становится 2 отрасли, при этом 1 и 3-я объединяются в 1-ю отрасль, а 2-я и 4-я – во 2-ю. Оператор Т имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Наряду с оператором Т введем оператор агрегирования с весами $T(w)$. Он имеет такую же структуру, как и оператор T, но на местах единиц стоят специальные веса w_i.

Пусть отрасли с номерами $1, \ldots, h_1$ объединяются в новую 1-ю отрасль, с номерами $h_1+1,\ldots,h_2 \Rightarrow 2$, и т.д. $h_{m-1}+1,\ldots,n \Rightarrow m$. Тогда

$$w_i = \frac{x_i}{\sum\limits_{i=1}^{h_1} x_i}\ , \quad i=1,\ldots,h_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$w_i = \frac{x_i}{\sum\limits_{i=h_{m-1}+1}^{n}} x_i, \quad i=h_{m-1}+1,\ldots,n.$$

Весовые коэффициенты характеризуют таким образом долю валового выпуска i–ой отрасли в валовом выпуске объединяемых отраслей. В приведенном выше примере $T(w)$ имеет вид:

$$T(w) = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & w_3 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & w_4, \end{pmatrix},$$

где

$$w_1 = \frac{x_1}{x_1+x_3},$$
$$w_2 = \frac{x_2}{x_2+x_4},$$
$$w_3 = \frac{x_3}{x_1+x_3},$$
$$w_4 = \frac{x_4}{x_2+x_4}.$$

Формулы, на основе которых осуществляется агрегирование, называются аналитическими приемами агрегирования. Они имеют следующий вид:

$$\widetilde{x} = Tx; \quad \widetilde{y} = Ty; \quad \widetilde{A} = TAT^t(w),$$

где $T^t(w)$ – матрица, образования из матрицы $T(w)$ переменной местами столбцов и строк, такая матрица называется транспонированной. Под ошибкой агрегирования понимают величину $\Delta = Tx - \widetilde{x}^0$, где x решение неагрегированного матричного уравнения $Ax+y=x$, а $\widetilde{x}^0$ – решение агрегированного матричного уравнения:

$$\widetilde{A}\widetilde{x}^0 + \widetilde{y} = \widetilde{x}^0,$$

где $\widetilde{A} = TAT^t(w)$, $\widetilde{y} = Ty$. Для ее отыскания необходимо:

1. По заданной матрице A и вектору x найти вектор y.

2. На основе заданного порядка агрегирования построить оператор агрегирования T.

3. Найти весовые коэффициенты w и построить оператор $T(w)$.

4. Найти $\widetilde{A} = TAT^t(w)$, $\widetilde{y} = Ty$.

5. Построить агрегированное уравнение межотраслевого баланса

$$\widetilde{A}\widetilde{x}^0 + \widetilde{y} = \widetilde{x}^0.$$

6. Решить уравнение, построенное на 5-м шаге, то есть найти $\widehat{x}^0$.

7. Найти ошибку агрегирования $\Delta = Tx - \widehat{x}^0$. Если ошибка агрегирования равна 0, то агрегирование верно.

Рассмотрим пример на отыскание ошибки агрегирования:

Пусть четыре отрасли агрегируются в порядке: $1, 3 \Rightarrow 1; \quad 2, 4 \Rightarrow 2.$ Вектор валового выпуска x и матрица коэффициентов прямых затрат A заданных отраслей даны:

$$x = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Найти ошибку агрегирования Δ.

Решение:

1. Найдем вектор y:

$$y = (E - A)x$$

$$y = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0,6 & -0,2 & -0,1 \\ -0,3 & -0,2 & 0,8 & -0,2 \\ -0,1 & -0,2 & -0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 19 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

2. Построим оператор агрегирования T:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Найдем весовые коэффициенты и построим оператор $T(w)$:

$$w_1 = \frac{x_1}{x_1 + x_3} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3},$$

$$w_2 = \frac{x_2}{x_2 + x_4} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}\ ,$$

$$w_3 = \frac{x_3}{x_1 + x_3} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}\ ,$$

$$w_4 = \frac{x_4}{x_2 + x_4} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}\ .$$

$$T(w) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

4. Найдем $\widetilde{y}$ и $\widetilde{A}$

$$\widetilde{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 19 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 33 \end{pmatrix}.$$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \\ 2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,3 & 0,3 \\ 0,3 & 0,6 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \\ 2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

5. Построим агрегированное уравнение

$$\widetilde{A}\widetilde{x} + \widetilde{y} = \widetilde{x}:$$

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \end{pmatrix}.$$

6. Найдем $\widetilde{x}$. Для этого вычислим матрицу $(E - A)^{-1}$

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,3 \\ -0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$$

0,6	-0,3	1	0
-0,3	0,6	1	0
6	-3	10	0
-3	6	0	10
1	-1/2	5/3	0
0	9,2	5	10
1	0	20/9	10/9
0	1	10/9	20/9

Таким образом,

$$(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 20,9 & 10,9 \\ 10,9 & 20,9 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{x}=\begin{pmatrix} 20,9 & 10,9 \\ 10,9 & 20,9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 24 \\ 33 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 90 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

7. Найдем ошибку агрегирования:

$$\Delta=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 90 \\ 100 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 90 \\ 100 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 90 \\ 100 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Так как ошибка агрегирования равна нулю, то агрегирование осуществлено верно.

17. Пусть три отрасли агрегируются в две в порядке: $1,2 \Rightarrow 1$, $3 \Rightarrow 2$. Пусть матрица A, векторы x и y заданы:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}; \quad x=\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}; \quad y=\begin{pmatrix} 3 \\ 17 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Найти ошибку агрегирования Δ.

18. Пусть заданы четыре отрасли, валовый выпуск которых равен соответственно 30, 50, 60 и 50 единицам. Матрица коэффициентов прямых затрат дана:

$$A=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Порядок агрегирования таков: $1, 2 \Rightarrow 1$; $3, 4 \Rightarrow 2$. Вычислить ошибку агрегирования Δ.

19. Вычислить ошибку агрегирования, если валовый выпуск четырех отраслей составляет 10, 20, 20 и 10 единиц соответственно, порядок агрегирования задан, как $1, 4 \Rightarrow 1$; $2, 3 \Rightarrow 2$ и матрица коэффициентов прямых затрат A дана:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

20. Пять отраслей агрегируются в две в следующем порядке: $1, 3, 4 \Rightarrow 1$; $2, 5 \Rightarrow 2$. Матрица A и вектор x заданы:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 20 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Найти ошибку агрегирования.

21. Порядок агрегирования четырех отраслей задан: $1, 4 \Rightarrow 1$; $2, 3 \Rightarrow 2$. Матрица коэффициентов прямых затрат, векторы валового выпуска этих отраслей даны:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0 & 0,4 \\ 0,4 & 0,1 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Найти ошибку агрегирования Δ.

§ 4. Макроэкономические модели планирования расхода ресурсов

Разновидностью моделей расчета ассортиментного плана, обеспечивающего рациональное расходование ресурсов, является модель Новожилова. Приведем ее формулировку.

Пусть для производства n видов продукции используется m видов ресурсов. j – порядковый номер продукта, $j = \overline{1, n}$; i – порядковый номер ресурса, $i = \overline{1, m}$.

Пусть

a_{ij} – количество i –го ресурса, необходимого на производство единицы j –ой продукции;

b_i – общий запас i –го ресурса;

$(\underline{A}_j, \overline{A}_j)$ – интервал возможного изменения объема выпуска продукта j –го вида.

Для составления математической модели расчета ассортиментного плана, минимизирующего трудовые затраты, обозначим через x_j – количество j –ой продукции, планируемые к выпуску, t_j –затраты труда на единицу продукции j –о вида. Тогда получим модель, называемую моделью Новожилова:

$$\sum_{j=1}^{n} t_j\, x_j \to min, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le bi, \quad i = \overline{1, m} & (2) \\ \underline{A}_j \le x_j \le \overline{A}_j, \quad j = \overline{1, n}, & (3) \end{cases}$$

где (2) – ограничение, обеспечивающее балансовую увязку расхода и наличия ресурса каждого вида, (3) – обеспечивает получение плана выпуска в допустимых пределах. Модель Новожилова создает основу для отыскания плана выпуска продукции, минимизирующего суммарные трудовые затраты и удовлетворяющего ограничениям на расход ресурсов и выпуск продукции.

Однако отыскание достоверных коэффициентов, характеризующих общественно необходимые трудовые затраты t_j, весьма затруднительно, и потому распространенной моделью, описывающей отыскание плана как оптимизационной задачи, является модель Канторовича.

Модель Канторовича имеет ограничения, совпадающие с ограничениями (2)-(3), а в качестве функции цели - максимизацию количества комплектов продукции. Каждый комплект определяется заданной пропорцией выпуска $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$. Здесь k_j – количество продукции j –го вида, входящего в один комплект. Тогда $\lambda = \min\left(\frac{x_1}{k_1}, \frac{x_2}{k_2}, \ldots, \frac{x_n}{k_n}\right)$ характеризует общее число комплектов продукции, которые могут быть получены из ассортиментного набора $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Модель Канторовича состоит, таким образом, в отыскании ассортимента, удовлетворяющего ограничениям (2)-(3) и максимизирующего общее число получаемых комплектов. Математическая формулировка модели Канторовича такова:

$$max\ \lambda, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad \forall i = \overline{1,m}, \tag{5}$$

$$\underline{A}_j \le x_j \le \overline{A}_j, \quad \forall j = \overline{1,n}, \tag{6}$$

$$\lambda = min\left\{\frac{x_1}{k_1},\ \frac{x_2}{k_2}, \ldots, \frac{x_n}{k_n}\right\}. \tag{7}$$

Ограничение (7) может быть легко переписано в линейном виде

$$\lambda \le \frac{x_j}{k-j}, \quad \forall j = \overline{1,n}.$$

Следует заметить, что среди ограничений (5) может быть сформулировано и ограничение на расход трудовых ресурсов.

22. Для производства четырех видов продукции используется 5 видов ресурсов. Нормы расхода i-го ресурса на производство единицы j-ой продукции заданы матрицей A, где номер строки обозначает вид ресурса, а номер столбца – вид продукции.

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,8 & 1 & 2 \\ 0 & 0,5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0,5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Общий запас по каждому виду ресурсов задан: (20, 15, 25, 10, 3). Минимальная потребность в продукции определяется величинами: 300, 200, 500, 350. Затраты труда на выпуск единицы каждого вида равны: 3, 2, 6, 4 человеко–дням соответственно.

1) Составить модель Новожилова.

2) Учитывая, что продукция должна выпускаться в пропорции $\{2:4:1:3\}$, составить модель Канторовича.

3) Записать модель Канторовича в виде задачи линейного программирования

23. Для производства 3-х видов продукции используется 3 вида сырья и трудовые ресурсы. Запасы сырья: 100, 200, 150. Матрица затрат сырья на единицу производимой продукции имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1,5 & 1 \\ 4 & 0,2 & 3 \\ 3 & 0,5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вектор затрат трудовых ресурсов

$$t = (1, 2, 1)$$

Минимальная потребность в каждом виде продукции задана вектором $\underline{A}$:

$$\underline{A} = (125, 120, 135).$$

1) Составить модель Новожилова.

2) Составить модель Канторовича при дополнительном условии, что запасы трудовых ресурсов составляют 30 единиц, и продукцию требуется выпустить в пропорции: $\{2 : 3 : 4\}$.

24. Производится 4 вида продукции, на выпуск которой затрачивается 3 вида материальных ресурсов. Матрица затрат материальных ресурсов A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0,5 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 0,2 & 2 \\ 6 & 0,9 & 3 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Материальные ресурсы имеются в объеме: 220, 170 и 90 тонн, трудовые ресурсы - в объеме 70 чел.дней, нормы затрат трудовых ресурсов равны 2; 0,5; 1; 3 чел.дней. Известно, что объем выпуска 1 –го продукта может изменяться в интервале (100, 300), 3–го не превосходит 250, четвертого не должен быть ниже 120.

1. Составить модель Новожилова.

2. Составить модель Канторовича, если известно, что продукция должна выпускать в пропорции: $\{1,7 : 2,3 : 2 : 2,5\}$.

25. Выпускается 3 продукта и при этом используется 2 вида сырья, имеющегося в распоряжении в количестве 120 и 85 тысяч тонн, два вида

оборудования, в количестве 200, 350 станко-часов и трудовые ресурсы в количестве 60 чел.дней. Нормы расходов ресурсов помещены в таблице 1.

Таблица 1

Продукция/ ресурсы	I	II	III
1 Вид сырья	0,6	1	0,7
2 Вид сырья	0,8	0,9	0,3
Обор. 1	0,2	0	1
Обор. 2	0,3	0,5	1,2
Максимальный объем выпуска	100	140	90
Минимально возможный объем	50	70	40

1. Составить модель Новожилова.
2. Составить модель Канторовича, учитывая, что продукция должна быть выпущена в пропорции: $\{1,2:4,2:5\}$.

26. На производство 4 видов продукции используется 4 вида материальных ресурсов и трудовые ресурсы. Составить модели Новожилова и Канторовича, если $b=(120,85,100,65)$, $t=(0,4;0,3;0,7;0,8)$.

Минимальная потребность в 1-м виде продукции равна 30, а в 4-м виде – 25. Максимальная потребность в 1-м виде продукции равна 70, во 2-м – 55, а в 3-м – 120.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,5 \\ 0,1 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

$\{x_1:x_2:x_3:x_4\}=\{2,5:4:5,3:6\}$; общее количество трудовых ресурсов – 90.

27. Выпускают 2 продукта, минимальная потребность в которых 10 и 6 единиц. Для их выпуска используется 3 вида сырья, матрица норм

расхода которых A приведена ниже.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запасы сырья соответственно равны 40, 10, 15. Вектор трудовых затрат на единицу выпуска продукции $t = \{4, 3\}$.

1) Составить модель Новожилова.

2) Найти оптимальный ассортиментный план, минимизирующий трудовые затраты.

3) Решить задачу, заменив ограничения на объем выпуска продукции, требованием выпускать ее в заданной пропорции: $\{1 : 3\}$.

§ 5. Модели формирования оптимальных планов развития и размещения отраслей

Рассмотрим n предприятий, выпускающих однотипную продукцию. Пусть k – порядковый номер предприятий

$$(k = \overline{1, n});$$

x_k – объем производства на k–м предприятии;

c_k – себестоимость производства единицы продукции на k–ом предприятии.

Пусть есть m предприятий, потребляющих эту продукцию.

Пусть l – порядковый номер такого предприятия $(l = \overline{1, m})$;

b_l – объем потребления продукции на l-ом предприятии;

x_{kl} – количество продукции, которое поставляется из k-го предприятия в l-ое;

γ_{kl} – стоимость перевозки единицы продукции с k-го предприятия в l-ое.

Дополнительно могут быть заданы $D_k(\overline{D}_k)$ минимальная (максимальная) мощности k-го предприятия. Тогда модель развития и размещения продукции отраслей имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k x_k + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \gamma_{kl}\, x_{kl} \to min$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{m} x_{kl} = x_k, & k = \overline{1,n} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} x_{kl} = b_l, & l = \overline{1,m} \\ \underline{D}_k \le x_k \le \overline{D}_k, & k = \overline{1,n} \end{cases}$$

28. На 2-х предприятиях, предельные максимальные мощности которых 100 и 130 единиц, производится продукция, которая доставляется 3-м потребителям с потребностями 80, 60 и 85 единиц. Себестоимость производства единицы продукции на 1-м предприятии 5 единиц, на 3-м – 8. Стоимость перевозок задана матрицей γ :

$$\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Составить модель развития и размещения производства.

29. На 3 сахарных завода доставляется сахарная свекла из 4-х мест. Максимальные мощности ее производства по 1-му, 3-му и 4-му предприятиям соответственно равны 250, 300 и 600 единиц. Минимальное производство сахарной свеклы во 2-м предприятии составляет 100 единиц. Потребности сахарных заводов в ней соответственно равны 320, 380, 500. Себестоимость производства сахарной свеклы по предприятиям составляет соответственно 15, 20, 35 и 10 единиц. Стоимость перевозок из каждого предприятия на каждый завод задана матрицей γ :

$$\gamma = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 15 \\ 2 & 10 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \\ 15 & 17 & 20 \end{pmatrix}.$$

Составить математическую модель оптимального производства сахарной свеклы и ее перевозки на заводы.

30. На 3-х предприятиях, мощности которых находятся в пределах от 300 до 700, от 250 до 500 и от 350 до 800 единиц соответственно, производится продукция, направляемая 4-м потребителям с потребностями 350, 500, 650 и 450 единиц. Себестоимость производства единицы продукции на предприятиях равняется 12, 7 и 10 единицам. Стоимость перевозок

задана матрицей γ :

$$\gamma = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 12 & 8 \\ 14 & 11 & 8 & 15 \\ 15 & 12 & 18 & 21 \end{pmatrix}.$$

Составить модель развития и размещения продукции отраслей.

31. Четыре предприятия могут производить продукцию в урочное время в количествах 160, 250, 390, 200 единиц и дополнительно используя сверхурочное время в количестве 40, 50, 110, 50 единиц. При этом затраты на производство единицы продукции по предприятиям составляют 30, 50, 40, 35 единиц при работе в урочное время и соответственно на 50% в неурочное время. Продукция должна быть доставлена четырем потребителям в количествах 380, 250, 400, 200 единиц. Транспортные расходы на перевозку единицы из k-го предприятия на l-ое заданы матрицей:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 25 & 30 & 40 & 35 \\ 30 & 40 & 30 & 20 \\ 25 & 45 & 30 & 40 \\ 42 & 36 & 28 & 34 \end{pmatrix}.$$

Составить модель формирования оптимального плана выпуска продукции и ее перевозки потребителям.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Леонтьев В. Межотраслевая экономика / В.Леонтьев. - М.: Экономика, 1997. - 250 с.

2. Моделирование народнохозяйственных процессов / Под ред. И.В.Котова. - СПб.: Экономика, 1990. - 300 с.

3. Экономико-математические методы и модели / Под ред. В.В.Федосеева. - М.: ЮНИТИ, 2002. - 391 с.

4. Холод Н.И. Экономико-математические методы и модели / Н.И.Холод, А.В.Кузнецов. - Минск: ВГЭУ, 2000. - 215 с.

5. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М.Интрилигатор. - М.:АЙРИС ПРЕСС, 2002. - 565 с.

6. Трояновский В.М. Элементы математического моделирования в макро-экономике / В.М.Трояновский. - М.: РДЛ, 2002. - 151 с.

Дополнительная литература

1. Экономико-математические модели / Под ред. Н.П.Федоренко. - М.:Мысль, 1969. - 511 с.

2. Гранберг А.Г. Математические модели социалистической экономики / А.Г.Гранберг. - М.: Экономика, 1978. - 350 с.

3. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование / А.В.Лотов. - М.: Наука, 1984. - 391 с.

4. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику / С.А.Ашманов. - М.: Наука, 1984. - 284 с.

5. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие / С.И.Шелобаев. - М.: ЮНИТИ, 2000. - 249 с.

n

Составитель: Баева Нина Борисовна
Редактор Тихомирова О.А.

Утверждено научно-методическим советом факультета Прикладной математики, информатики и механики 26 февраля 2003 г, № 5

Составитель: Баева Н.Б.

Пособие подготовлено на кафедре математических методов исследования операций факультета Прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов 3-4 курсов дневного и вечернего отделений факультета прикладной математики, информатики и механики

Составитель: Баева Нина Борисовна
Редактор Тихомирова О.А.