Министерство образования Российской Федерации

Воронежский государственный университет

Математический факультет

Кафедра математического моделирования

И.Г.Карелина

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МИКРОЭКОНОМИКИ

Учебное пособие

для студентов 3-4 курсов математического и экономического факультетов

Воронеж 2001

Вашему вниманию предлагается первая часть курса лекций по дисциплине "Математические модели экономики", читаемого на математическом факультете студентам, обучающимся по специализации "математика экономического профиля". Весь курс предполагает три части: "Математические модели рационального поведения потребителя", "Математические модели рационального поведения производителя", "Математические модели взаимодействия потребителя и производителя".

Об организации текста. Пособие представляет собой курс лекций. Каждая лекция имеет деление на пункты, которые могут быть взяты за основу экзаменационных и зачетных вопросов. Нумерация формул в каждой лекции автономна. Однако при ссылках на формулы других лекций используется двойная нумерация: первая цифра соответствует номеру лекции, вторая - номеру формулы в ней. Начало доказательств помечено знаком $\triangleright$, окончание доказательства - соответственно знаком $\blacktriangleleft$.

В конце лекций приводятся вопросы для самоконтроля.

К данному учебному пособию имеется комплект задач и методические указания к их решению, используемые при проведении практических занятий по указанной дисциплине.

Рекомендуется студентам математического и экономического факультетов.

Рецензенты:
заведующий кафедрой информационных технологий и математических методов в экономике, доктор экономических наук, профессор В.В.Давнис;
профессор кафедры алгебры и топологических методов анализа, доктор физико-математических наук В.В.Обуховский.

Печатается в соответствии с решением Научно-методического совета Воронежского госуниверситета протокол № 4 от 22 июня 2001 года.

Содержание

Лекция 1
Потребитель и система его предпочтений

1.1. Рациональное поведение потребителей и математическое моделирование

Экономика как объект исследования представляет собой совокупность благ (материальных товаров и услуг), их распределения, обмена и потребления. Соответственно основными субъектами экономики являются производители (фирмы) и потребители (домашние хозяйства) благ. Процессы производства и распределения регулируются в определенной степени государством. В достаточно развитых в социально-правовом отношении обществах заметную роль в процессах распределения играют также объединения трудящихся (профсоюзы), и это учитывает экономическая наука.

Рациональное поведение субъектов экономики заключается в стремлении к наибольшей эффективности (оптимальности) своей деятельности при ограниченных возможностях. Этот общий принцип конкретизируется на основе формализации субъектов, их целей, уточнения понятия эффективности и возможных способов ее повышения.

Потребление является ведущим фактором в функционировании всей взаимосвязанной социально-экономической системы, обладающей достаточной степенью свободы своих производственных элементов. В результате более или менее осознанного выбора элементарных потребителей (домашних хозяйств), действующих в соответствии со своими предпочтениями и бюджетными возможностями, формируется совокупный спрос. Этот спрос играет роль социального заказа для работы производственной подсистемы и торговли, в частности, внешнеэкономического обмена. Особенно важно, что потребительский спрос наряду с технологическими возможностями производителей определяет естественную для данной экономики систему цен.

Поведение потребителей на рынке конечной продукции, на первый взгляд, трудно формализуемо. Действительно, имея ограниченный бюджет, потребитель желает приобрести множество различных товаров, потребительские свойства которых сильно отличаются. Но ограниченность бюджета делает доступным лишь вполне ограниченное множество товаров. Изучение торговой статистики позволило установить, что в большинстве случаев в относительно стабильной ситуации потребители имеют достаточно устойчивую систему предпочтений между наборами различных товаров. При этом рациональное поведение потребителей удалось описать так, что их эффективный выбор дает максимум некоторой функции (называемой функцией полезности) на множестве товаров, доступных потребителю. Первые результаты в этом направлении были получены еще в XIX веке в рамках теории предельной полезности. Основы современной высоко математизированной теории рационального потребления (потребительского спроса) заложены классической работой русского математика Е.Е.Слуцкого (1915). В 40-е годы нашего столетия теория рационального потребления была пересмотрена в рамках аксиоматической теории "выявленного предпочтения"в работах американских экономистов-математиков П.Самуэльсона, Г.Хаутеккера. Эта теория возникла в связи с "проблемой интегрируемости", сущность которой заключается в изучении аналитических свойств функций спроса, порождаемых некоторой функцией полезности.

Современная теория рационального потребления строится на основе понятия бинарного отношения предпочтения на пространстве товаров и его функции полезности (в современных терминах - индикатора отношения предпочтения). Построение индикатора отношения предпочтения, а также решение обратной задачи и построения в результате ее исследования индикатора цен, адекватных конкретному рынку и всей экономике, позволяет эффективно решать основные вопросы анализа и регулирования потребительского рынка: как изменится спрос на товары при изменении цен? какие цены обеспечат заданный спрос? Ответы на эти вопросы необходимы для принятия решений по налогообложению, дотированию производства социально значимой продукции, субсидированию социальных программ, внешнеэкономическому обмену.

1.2. Пространство товаров

Одним из основных понятий экономической теории является домашнее хозяйство (потребитель). Под отдельным потребителем понимается не обязательно физическое лицо, а любой участник экономики: это может быть магазин, фермерское хозяйство, домашнее хозяйство и т.д. Проблема рационального ведения хозяйства потребителя заключается в решении вопроса о том, какое количество каждого наличного товара или услуг он должен приобрести при заданных ценах и фиксированном доходе.

Под *товаром* будем понимать некоторое благо или услугу, поступившие в продажу в определенное время в определенном месте. Пусть существует конечное число различных товаров n. Обозначим через x_i - количество $i-$того блага, приобретенного потребителем. Тогда набор товаров, приобретенный потребителем, характеризуется вектор-столбцом

$$\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'.$$

Будем считать, что все товары обладают свойством произвольной делимости, то есть может быть куплено любое неотрицательное количество каждого из них.

Пространство товаров - это множество $\mathfrak{M}$ векторов пространства $\mathbf{R^n}$ с неотрицательными координатами:

$$\mathfrak{M} = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)' \,|\, x_i \geq 0,\; i = 1, \ldots, n\}\,.$$

Из определения множества $\mathfrak{M}$ следует, что оно выпукло и замкнуто.

1.3. Отношение предпочтения

Естественным выглядит предположение, что потребитель делает свой выбор, исходя из своих вкусов, которые характеризуются *отношением предпочтения.*

Если для данного потребителя набор товаров x *предпочтительнее или безразличен* набору y (слабое отношение предпочтения), то используют запись

$$\mathrm{x} \succeq \mathrm{y}, \quad \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathfrak{M}.$$

Если для данного потребителя набор товаров x *предпочтительнее* набора y (сильное отношение предпочтения), то используют запись

$$\mathrm{x} \succ \mathrm{y}, \quad \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathfrak{M}.$$

Если для данного потребителя набор товаров x *безразличен* набору y, то есть они обладают одинаковой степенью предпочтения (отношение эквивалентности), то используют запись

$$\mathrm{x} \sim \mathrm{y}, \quad \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathfrak{M}.$$

В дальнейшем будем предполагать выполненными следующие аксиомы.

Аксиома 1. Отношение слабого предпочтения обладает следующими свойствами:

(а) для любых $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathfrak{M}$ имеет место либо $\mathrm{x} \succeq \mathrm{y}$, либо $\mathrm{y} \succeq \mathrm{x}$;

(б) для любого $\mathrm{x} \in \mathfrak{M}$ справедливо $\mathrm{x} \succeq \mathrm{x}$ (рефлексивность);

(в) для любых $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathfrak{M}$ справедливо $\mathrm{x} \succeq \mathrm{y} \wedge \mathrm{y} \succeq \mathrm{z} \Rightarrow \mathrm{x} \succeq \mathrm{z}$ (транзитивность).

Свойство (а) означает, что отношение слабого предпочтения является совершенным, то есть в пространстве товаров все наборы "сравнимы". Если отношение обладает свойством рефлексивности и транзитивности, то его называют полуупорядоченностью. Таким образом, аксиома 1 означает, что отношение слабого предпочтения является совершенной полуупорядоченностью.

Утверждение 1. Отношение безразличия является отношением эквивалентности, то есть

(а) для заданного набора $\mathrm{x} \in \mathfrak{M}$ справедливо $\mathrm{x} \sim \mathrm{x}$ (рефлексивность);

(б) для заданных наборов $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathfrak{M}$ выполняется условие $\mathrm{x} \sim \mathrm{y} \wedge \mathrm{y} \sim \mathrm{z} \Rightarrow \mathrm{x} \sim \mathrm{z}$ (транзитивность);

(в) для заданных наборов $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathfrak{M}$ отношение $\mathrm{x} \sim \mathrm{y}$ означает $\mathrm{y} \sim \mathrm{x}$ (симметричность).

$\triangleright$ Доказательство.

(а) Так как отношение слабого предпочтения рефлексивно, то $\mathrm{x} \succeq \mathrm{x}$, откуда по определению отношения безразличия имеем $\mathrm{x} \sim \mathrm{x}$.

(б) Пусть для заданных наборов $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathfrak{M}$ имеет место $\mathrm{x} \sim \mathrm{y} \wedge \mathrm{y} \sim \mathrm{z}$. Тогда по определению отношения безразличия $(\mathrm{x} \succeq \mathrm{y} \wedge \mathrm{y} \succeq \mathrm{x}) \wedge (\mathrm{y} \succeq \mathrm{z} \wedge \mathrm{z} \succeq \mathrm{y})$ или $(\mathrm{x} \succeq \mathrm{y} \wedge \mathrm{y} \succeq \mathrm{z}) \wedge (\mathrm{z} \succeq \mathrm{y} \wedge \mathrm{y} \succeq \mathrm{x})$, откуда в силу транзитивности отношения слабого предпочтения (аксиома 1), следует $\mathrm{x} \succeq \mathrm{z} \wedge \mathrm{z} \succeq \mathrm{x}$, что и означает $\mathrm{x} \sim \mathrm{z}$.

(в) Пусть для заданных наборов $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathfrak{M}$ отношение $\mathrm{x} \sim \mathrm{y}$ означает, что $\mathrm{x} \succeq \mathrm{y} \wedge \mathrm{y} \succeq \mathrm{x}$. Тогда $\mathrm{y} \succeq \mathrm{x} \wedge \mathrm{x} \succeq \mathrm{y}$, что означает $\mathrm{y} \sim \mathrm{x}$. $\blacktriangleleft$

Отношение безразличия подразделяет пространство товаров $\mathfrak{M}$ на классы эквивалентности – попарно непересекающиеся подмножества I_x – *множества безразличия*, каждое из которых состоит из тех и только тех наборов, которые безразличны набору товаров x

$$I_x = \{\mathrm{y} \in \mathfrak{M} \,|\mathrm{y} \sim \mathrm{x}\}.$$

Введем в рассмотрение *предпочтительное множество* – множество P_x, состоящее из тех наборов, которые предпочтительны или безразличны набору $\mathrm{x} \in \mathfrak{M}$

$$P_x = \{\mathrm{y} \in \mathfrak{M} \,|\mathrm{y} \succeq \mathrm{x}\},$$

и *непредпочтительное множество* – множество N_x, состоящее из тех наборов, для которых набор $\mathrm{x} \in \mathfrak{M}$ предпочтителен или безразличен

$$N_x = \{\mathrm{y} \in \mathfrak{M} \,|\mathrm{x} \succeq \mathrm{y}\}.$$

Аксиома 2. Отношение слабого предпочтения непрерывно, то есть множества P_x и N_x являются замкнутыми подмножествами пространства $\mathfrak{M}$ для любого набора $\mathrm{x} \in \mathfrak{M}$.

Из определения предпочтительного и непредпочтительного множеств следует, что

$$P_x \cap N_x = I_x.$$

Аксиома 3 (ненасыщения). Для двух заданных наборов $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathfrak{M}$
(а) $\mathrm{x} \geq \mathrm{y}$ (то есть $x_i \geq y_i \ \forall i = 1, \ldots, n$) влечет $\mathrm{x} \succeq \mathrm{y}$;
(б) $\mathrm{x} \geq \mathrm{y} \wedge \mathrm{x} \neq \mathrm{y}$ влечет $\mathrm{x} \succ \mathrm{y}$.

Аксиома ненасыщения предполагает, что если набор x содержит товары в количестве, меньшем, чем набор y, то набор x предпочтительнее, чем набор y.

Аксиома 4 (строгой выпуклости). Для различных наборов $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathfrak{M}$ таких, что $\mathrm{x} \succeq \mathrm{y}$, и числа $\lambda \in [0; 1]$ имеет место $\lambda\,\mathrm{x} + (1-\lambda)\,\mathrm{y} \succeq \mathrm{x}$, где $\lambda\,\mathrm{x} + (1-\lambda)\,\mathrm{y}$ – набор, состоящий из $\lambda x_i + (1-\lambda) y_i$ единиц $i-$того товара.

1.4. Бюджетное множество

С каждым набором $\mathrm{x} \in \mathfrak{M}$ мы связываем упорядоченный набор положительных чисел $\mathrm{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, где через p_i обозначена цена $i-$го товара.

Скалярное произведение векторов x и p, то есть число

$$\mathrm{p}\,\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i,$$

называют *стоимостью набора* x.

Зафиксируем некоторое число b. Множество наборов $\mathfrak{B}_{p,b}$ стоимости не более b при заданных ценах p называют *бюджетным множеством*

$$\mathfrak{B}_{p,b} = \{\mathrm{x} \in \mathfrak{M} \,|\, \mathrm{p}\,\mathrm{x} \leq b\}.$$

Утверждение 2. Бюджетное множество выпукло, ограниченно и закнуто.

$\triangleright$ Доказательство.

Выпуклость. Пусть $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathfrak{B}_{p,b}$, число $\lambda \in [0; 1]$. Поскольку $\mathrm{p}\,\mathrm{x} \leq b$, $\quad \mathrm{p}\,\mathrm{y} \leq b$, то и $\lambda\,\mathrm{p}\,\mathrm{x} + (1-\lambda)\,\mathrm{p}\,\mathrm{y} \leq b$. Тогда $\mathrm{p}(\lambda\,\mathrm{x} + (1-\lambda\,\mathrm{y})) \leq b$, поэтому $\lambda\,\mathrm{x} + (1-\lambda)\,\mathrm{y}$ принадлежит $\mathfrak{B}_{p,b}$, что означает выпуклость множества $\mathfrak{B}_{p,b}$.

Ограниченность. Обозначим через $p_0 = \min\limits_i p_i$. Если $\mathrm{x} \in \mathfrak{B}_{p,b}$, то для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ справедливо неравенство $x_i \leq b/p_0$, что означает ограниченность множества $\mathfrak{B}_{p,b}$.

Замкнутость. Пусть последовательность x^k элементов множества $\mathfrak{B}_{p,b}$ стремится к элементу x^0. Тогда и последовательность $\mathrm{p}\,\mathrm{x}^k \to \mathrm{p}\,\mathrm{x}^0$. В силу неравенств $\mathrm{p}\,\mathrm{x}^k \leq b$, справедливых при всех k, имеем $\mathrm{p}\,\mathrm{x}^0 \leq b$, тогда и $\mathrm{x}^0 \in \mathfrak{B}_{p,b}$, что означает замкнутость множества $\mathfrak{B}_{p,b}$. $\blacktriangleleft$

Лекция 2
Функция полезности

2.1. Определение функции полезности

Под *функцией полезности* будем понимать функцию $u : \mathfrak{M} \to \mathbf{R}$, удовлетворяющую условиям:
(а) $u(\mathrm{x}) \geq u(\mathrm{y})$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{x} \succeq \mathrm{y}$;
(б) $u(\mathrm{x}) > u(\mathrm{y})$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{x} \succ \mathrm{y}$;
(в)$u(\mathrm{x}) = u(\mathrm{y})$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{x} \sim \mathrm{y}$.

Теорема (Дебре, 1954). Если множество $\mathfrak{M}$ связно, а отношение предпочтения непрерывно, то существует непрерывная функция (полезности) [1].

Из определения функции полезности видно, что она принимает постоянные значения на каждом классе эквивалентности, поэтому ее можно представлять себе, как функцию, "пересчитывающую"классы эквивалентности в сторону все большего предпочтения наборов товаров.

Заметим, что функция полезности $u(\mathrm{x})$ определяется неоднозначно. Если $f(u)$ возрастающая функция, то функция $f(u(\mathrm{x}))$ также является функцией полезности. Главное требование, предъявляемое к функции полезности потребителя – она должна отражать систему его предпочтений.

2.2. Свойства функции полезности

Основные свойства функции полезности определяются ее подчиненностью системе предпочтений.

1°. Если $u(\mathrm{x})$ непрерывно дифференцируемая функция, то из аксиомы ненасыщения следует положительность ее первых частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathrm{x}) > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

то есть в любой точке пространства товаров возрастание потребления любого товара при постоянном потреблении остальных товаров приводит к увеличению полезности.

Вектор $\operatorname{grad} u(\mathrm{x}) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(\mathrm{x}), \dfrac{\partial u}{\partial x_2}(\mathrm{x}), \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)(\mathrm{x})$ в теории полезности обозначают через $\dfrac{\partial u}{\partial x}(\mathrm{x})$ и называют вектором *предельных полезностей,* частную

[1] Debreu G., Theory of Value, Cowles Foundation Monograph, 17, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1959

производную $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(\mathrm{x})$ называют *предельной полезностью $i-$го товара.*

2°. Небольшое увеличение $i-$того товара при его первоначальном отсутствии резко увеличивает его полезность, то есть

$$\lim_{x_i \to 0} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathrm{x}) = \infty. \tag{2}$$

3°. При очень большом количестве $i-$того товара его дальнейшее увеличение не приводит к увеличению полезности, то есть

$$\lim_{x_i \to \infty} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathrm{x}) = 0. \tag{3}$$

4°. Если $u(\mathrm{x})$ дважды непрерывно дифференцируемая функция, то из аксиомы строгой выпуклости следует, что матрица вторых производных функции $u(\mathrm{x})$ (матрица Гессе) должна быть отрицательно определена

$$U = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\mathrm{x}) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathrm{x}) & \dots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathrm{x}) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathrm{x}) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(\mathrm{x}) & \dots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathrm{x}) \\ & & \dots & \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1}(\mathrm{x}) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2}(\mathrm{x}) & \dots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(\mathrm{x}) \end{pmatrix}$$

В частности, имеет место закон Госсена[1]: предельная полезность любого товара уменьшается по мере того, как продукт потребляется, то есть

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\mathrm{x}) < 0. \tag{4}$$

2.3. Примеры функций полезности

Приведем некоторые примеры функций полезности, обладающих перечисленными выше свойствами:

(a) степенная аддитивная

$$u(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{\alpha_i}, \quad a_i > 0, \quad 0 < \alpha_i < 1; \tag{5}$$

[1]Госсен – немецкий экономист XIX века

(б) степенная мультипликативная

$$u(\mathrm{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}, \quad \alpha_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < 1; \tag{6}$$

(в) логарифмическая

$$u(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \ln(1 + b_i x_i), \quad a_i > 0, \quad b_i > 0; \tag{7}$$

(г) постоянной эластичности замещения

$$u(\mathrm{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i^{-\rho} \right)^{-\mu/\rho}, \quad \beta_i > 0, \quad 0 < \mu < 1, \quad -1 < \rho \neq 0; \tag{8}$$

(д) пропорциональная

$$u(\mathrm{x}) = \min_i \frac{x_i}{k_i}, \quad k_i > 0. \tag{9}$$

Пример. Проверим, что функция полезности

$$u(\mathrm{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}, \quad \alpha_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < 1$$

обладает свойствами $1^\circ - 4^\circ$.

Решение. 1°. Найдем вектор предельных полезностей, для этого вычислим частные производные функции $u(\mathrm{x})$

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(\mathrm{x}) = \alpha_j x_j^{\alpha_j - 1} \prod_{i \neq j} x_i^{\alpha_i} = \frac{\alpha_j}{x_j} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Так как по условию $\alpha_i > 0$, $x_i > 0$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\mathrm{x}) = \left(\frac{\alpha_1}{x_1} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i},\ \frac{\alpha_2}{x_2} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}, \ldots, \frac{\alpha_n}{x_n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \right) > 0.$$

2°. Вычислим для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$

$$\lim_{x_j \to 0} \frac{\partial u}{\partial x_j}(\mathrm{x}) = \lim_{x_j \to 0} \frac{\alpha_j}{x_j} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} = \lim_{x_j \to 0} \alpha_j x_j^{\alpha_j - 1} \prod_{i \neq j} x_i^{\alpha_i} = \infty,$$

так как по условию $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i < 1$, откуда $\alpha_j - 1 < 0$.

3°. Вычислим для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$

$$\lim_{x_j \to \infty} \frac{\partial u}{\partial x_j}(\mathrm{x}) = \lim_{x_j \to \infty} \alpha_j x_j^{\alpha_j - 1} \prod_{i \neq j} x_i^{\alpha_i} = 0,$$

так как по условию $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i < 1$, откуда $\alpha_j - 1 < 0$.

4°. Найдем частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(\mathrm{x}) = \frac{\alpha_j(\alpha_j - 1)}{x_j^2} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} < 0,$$

так как $\alpha_j - 1 < 0$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Матрица Гессе в данном случае имеет вид

$$U = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1(\alpha_1 - 1)}{x_1^2} \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} & \frac{\alpha_1 \alpha_2}{x_1 x_2} \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} & \ldots & \frac{\alpha_1 \alpha_n}{x_1 x_n} \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \\ \frac{\alpha_2 \alpha_1}{x_2 x_1} \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} & \frac{\alpha_2(\alpha_2 - 1)}{x_2^2} \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} & \ldots & \frac{\alpha_2 \alpha_n}{x_2 x_n} \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \\ & & \ldots & \\ \frac{\alpha_n \alpha_1}{x_n x_1} \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} & \frac{\alpha_n \alpha_2}{x_n x_2} \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} & \ldots & \frac{\alpha_n(\alpha_n - 1)}{x_n^2} \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \end{pmatrix}$$

2.4. Товары-заменители

Поверхностью (линией) безразличия называют множество наборов x, для которых

$$u(\mathrm{x}) = const,$$

или в дифференциальной форме

$$\mathrm{d}u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i = 0. \tag{10}$$

Поверхность безразличия есть не что иное, как поверхность уровня для функции $u(\mathrm{x})$. Множество линий безразличия называют *картой предпочтений.*

Условие (10) означает, что касательная к поверхности безразличия перпендикулярна вектору предельных полезностей $\dfrac{\partial u}{\partial x}(\mathrm{x}) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(\mathrm{x}), \dfrac{\partial u}{\partial x_2}(\mathrm{x}), \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}(\mathrm{x})\right)$.

С точки зрения потребителя наличие множества наборов товаров, обладающих одинаковой полезностью, означает возможность замены одного товара другим.

Пусть в пространстве двух товаров функция полезности потребителя имеет вид $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Зафиксируем линию безразличия MN. Пусть потребитель имеет набор товаров $\mathrm{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$. Если первый товар уменьшился на Δx_1 единиц, то его можно компенсировать увеличением второго товара на Δx_2 единиц так, чтобы полезность набора не изменилась. Компенсация означает, что новый набор $\mathrm{x}^1 = (x_1^1, x_2^1) = (x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2)$ имеет ту же ценность, что и набор x^0 .

Рисунок 1

Отношение $|\Delta x_2 / \Delta x_1|$ показывает, сколько единиц второго товара добавочно могут компенсировать уменьшение первого товара на единицу.

Из равенства (10) имеем

$$-\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2}.$$

Отношение $M_1^2 = -\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}$ называют *предельной нормой замены* первого товара вторым.

Таким образом, предельная норма замещения M_i^k $i-$го товара $k-$тым равна отношению предельных полезностей этих товаров

$$M_i^k = -\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}x_i} = \frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_k}. \tag{11}$$

Эластичностью (или коэффициентом) замещения E_i^k товара x_i товаром x_k называют величину

$$E_i^k = \lim_{\Delta x_i \to 0} \left(-\frac{\Delta x_k / x_k}{\Delta x_i / x_i} \right),$$

или

$$E_i^k = \frac{M_i^k}{x_k / x_i}. \tag{12}$$

Таким образом, 1% уменьшения товара x_i компенсируется увеличением на E_i^k процентов товара x_k.

Пример. Для степенной мультипликативной функции полезности (см. п.3) найти

(а) предельные нормы замещения $M_i^k,\ i,k = 1,2$;

(б) эластичность замещения $E_i^k,\ i,k = 1,2$.

Решение.

(а) Для нахождения предельной нормы замещения M_i^k i-го товара k-ым воспользуемся формулой (11)

$$M_i^k = \frac{\partial u/\partial x_i}{\partial u/\partial x_k} = \left(\frac{\alpha_i}{x_i}\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}\right) : \frac{\alpha_k}{x_k}\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} = \frac{\alpha_i}{\alpha_k}\cdot\frac{x_k}{x_i}.$$

(б) Для нахождения предельной нормы замещения E_i^k i-го товара k-ым воспользуемся формулой (12)

$$E_i^k = M_i^k : \left(\frac{x_k}{x_i}\right) = \frac{\alpha_i}{\alpha_k}\cdot\frac{x_k}{x_i} : \frac{x_i}{x_k} = \frac{\alpha_i}{\alpha_k}.$$

Наличие для товара x_i товаров-заменителей (например, товара x_k, по которому предельная норма замещения M_i^k не столь мала) очень существенно, поскольку при повышении цены на него потребитель уменьшит его потребление и увеличит потребление товаров-заменителей. Например, хорошим заменителем кофе является чай или какао. В то время как на бензин хороших заменителей нет.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулировать аксиомы слабого предпочтения. Пусть I_x - множество безразличия, $\mathrm{y} \in I_x$. Покажите, что $I_x = I_y$ и $\mathrm{x} \sim \mathrm{y}$.

2. Дать определение функции полезности. Привести экономическую интерпретацию свойств функции полезности. Проверить выполнение этих свойств для функции $u(\mathrm{x}) = \mathrm{p}\,\mathrm{x} = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$. Найти нормы замещения и эластичность замещения.

3. Что означает термин "линии безразличия"? Построить карту предпочтений для функции $u(\mathrm{x}) = \min\{2x_1, x_2\}$. Найти предельные полезности и нормы замещения в точках (1;5), (3;2), (1;2).

Лекция 3
Модель поведения потребителя

3.1. Постановка задачи рационального поведения потребителя

Потребитель, имея некоторый фиксированный доход b, желает его потратить и, естественно, с максимальной пользой с точки зрения его предпочтений (или функции полезности).

Задача рационального поведения потребителя (или задача потребительского выбора) заключается в выборе такого набора x^* из бюджетного множества $\mathfrak{B}_{p,b}$, что

$$\mathrm{x}^* \succeq \mathrm{x}, \quad \forall\, \mathrm{x} \in \mathfrak{B}_{p,b},$$

или в отыскании такого набора товаров x^*, на котором функция полезности достигает своего наибольшего значения на бюджетном множестве $\mathfrak{B}_{p,b}$, то есть

$$\mathrm{x}^* \mapsto \max_{\mathrm{x} \in \mathfrak{B}_{p,b}} u(\mathrm{x}). \tag{1}$$

Набор $\mathrm{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, который дает максимум функции полезности при заданных ограничениях, называют *локальным рыночным равновесием потребителя.*

Утверждение 1. Если функция полезности $u(\mathrm{x})$ потребителя непрерывна, то решение x^* задачи рационального поведения потребителя (1) существует и лежит на границе бюджетного множества $\mathfrak{I}_{p,b}$, где

$$\mathfrak{I}_{p,b} = \{\mathrm{x} \in \mathfrak{M} \,|\, \mathrm{p}\,\mathrm{x} = b\}. \tag{2}$$

Множество $\mathfrak{I}_{p,b}$ называют *бюджетной линией.*

$\triangleright$ Доказательство.

Бюджетное множество $\mathfrak{B}_{p,b}$ ограничено и замкнуто (см. утверждение 2 лекции 1), функция полезности $u(\mathrm{x})$ непрерывна, поэтому и в силу теоремы Вейерштрасса функция $u(\mathrm{x})$ достигает на множестве $\mathfrak{B}_{p,b}$ своего наибольшего значения, поэтому решение x^* задачи (1) существует.

Покажем, что $\mathrm{x}^* \in \mathfrak{I}_{p,b}$. В предположении противного $\mathrm{x}^* \notin \mathfrak{I}_{p,b}$, но $\mathrm{x}^* \in \mathfrak{B}_{p,b}$, поэтому $\mathrm{p}\,\mathrm{x}^* < b$, а, значит, потребитель имеет неиспользованное количество денег $b - \mathrm{p}\,\mathrm{x}$ и может приобрести на них дополнительный набор товаров y, а в предположении безграничной делимости товаров имеем $\mathrm{y} > 0$. Рассмотрим набор $\mathrm{z} = \mathrm{x}^* + \mathrm{y}$. Так как $\mathrm{p}\,\mathrm{y} \le b$, то $\mathrm{y} \in \mathfrak{B}_{p,b}$, причем в силу аксиомы ненасыщения $u(\mathrm{y}) > u(\mathrm{x}^*)$, что противоречит оптимальности точки x^*. ◀

Рисунок 2

Напомним, что функция $u(\mathrm{x})$ называют строго выпуклой, если $u(\lambda\,\mathrm{x}+(1-\lambda)\,\mathrm{y}) > \lambda u(\mathrm{x}) + (1-\lambda)u(\mathrm{y}), \quad 0 < \lambda < 1.$

Утверждение 2. Если функция $u(\mathrm{x})$ строго выпуклая, то решение задачи (1) единственно.

$\triangleright$ Доказательство.

В предположении противного существуют два оптимальных набора $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathfrak{B}_{p,b}$, причем $u(\mathrm{x}) = u(\mathrm{y})$, то есть оба набора принадлежат одной кривой безразличия. В силу утверждения 1 имеем равенство $\mathrm{p}\,\mathrm{x} = \mathrm{p}\,\mathrm{y} = b$. Пусть набор $\mathrm{z} = \frac{1}{2}\,\mathrm{x}+\frac{1}{2}\,\mathrm{y}$, тогда $\mathrm{p}\,\mathrm{z} = \mathrm{p}(\frac{1}{2}\,\mathrm{x}+\frac{1}{2}\,\mathrm{y}) = b$, то есть набор z также принадлежит множеству $\mathfrak{I}_{p,b}$. В силу строгой выпуклости функции полезности имеем $u(\mathrm{z}) > \frac{1}{2}u(\mathrm{x}) + \frac{1}{2}u(\mathrm{y}) = u(\mathrm{x}) = u(\mathrm{y})$, что противоречит предположению об оптимальности точек x, y. $\blacktriangleleft$

Итак, если функция полезности непрерывна и строго выпукла, то задача потребительского выбора сводится к исследованию на условный экстремум функции полезности

$$u(\mathrm{x}) \mapsto \max_{\mathrm{p}\,\mathrm{x}=b}. \tag{3}$$

3.2. Решение задачи потребительского выбора

Рассмотрим задачу (3) рационального поведения потребителя, который имеет дифференцируемую функцию полезности $u(\mathrm{x})$. Для ее решения задачи воспользуемся методом Лагранжа исследования дифференцируемой функции на условный экстремум.

Составим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n - b).$$

Воспользуемся необходимым условием существования экстремума функции многих переменных: если $(\mathrm{x}^*, \lambda^*)$ - оптимальная точка, то в ней все частные производные функции $\mathcal{L}$ равны нулю. Далее, не оговаривая это особо, с целью упрощения записи точку $(\mathrm{x}^*, \lambda^*)$ будем опускать. Найдем частные производные функции $\mathcal{L}$ и приравняем их нулю

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - b = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Получили систему $(n+1)$ уравнений с $(n+1)$ неизвестными. Исключая неизвестный параметр λ из первых n уравнений, получаем соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathrm{x}^*) : \frac{\partial u}{\partial x_j}(\mathrm{x}^*) = p_i : p_j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Соотношение (5) называют *законом Джевонса.* Оно означает, что потребитель, стремясь максимизировать полезность доступных ему наборов товаров, приобретает такой набор, для которого отношение предельных полезностей отдельных товаров пропорционально отношению их рыночных цен.

Так как отношение $(\partial u/\partial x_i) : (\partial u/\partial x_j)$ есть предельная норма замены $i-$того товара $j-$м в точке локального рыночного равновесия потребителя x^*, то из (5) следует, что эта предельная норма замещения равна отношению рыночных цен на эти продукты.

$$M_i^j = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathrm{x}^*)\right) : \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}(\mathrm{x}^*)\right) = p_i : p_j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Оптимальный множитель Лагранжа λ^*, равный отношению предельной полезности к цене

$$\lambda^* = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathrm{x}^*)\right) : \left(\frac{1}{p_i}\right),$$

измеряется в полезности единицы товара i, деленной на количество денежных единиц на единицу товара i, что означает полезность товара на одну денежную единицу (например, доллар, рубль). Поэтому множитель λ^* следует интерпретировать как предельную полезность добавочного дохода

$$\lambda^* = \frac{\partial u}{\partial b}(\mathrm{x}^*), \tag{6}$$

которую называют *предельной полезностью денег.*

Геометрически решение $\mathrm{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$ задачи рационального поведения потребителя в случае двух товаров можно интерпретировать как точку касания линии безразличия функции полезности $u(x_1, x_2)$ с бюджетной линией $p_1x_1 + p_2x_2 = b$, так как касательная к кривой безразличия в оптимальной точке имеет, согласно закону Джевонса, тот же угол наклона α, что и бюджетная линия

Рисунок 3

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) : \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) = -\frac{p_1}{p_2}.$$

В предположении отрицательной определенности матрицы Гессе для функции полезности условия второго порядка для данной задачи выполняются. Поэтому условия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = b \end{cases} \tag{7}$$

являются необходимыми и достаточными.

3.3. Функции спроса

Из уравнения (7) согласно теореме о существовании неявной функции неизвестные $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \lambda^*$ можно разрешить относительно параметров $p_1, p_2, \dots, p_n, b$, если матрица Якоби системы (7) имеет ненулевой определитель.

Матрица Якоби для системы (7) – это матрица вида

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\mathrm{x}) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathrm{x}) & \dots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathrm{x}) & -p_1 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathrm{x}) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(\mathrm{x}) & \dots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathrm{x}) & -p_2 \\ & & \dots & & \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1}(\mathrm{x}) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2}(\mathrm{x}) & \dots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(\mathrm{x}) & -p_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & -\mathrm{p}' \\ \mathrm{p} & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь через U обозначена матрица Гессе для функции $u(\mathrm{x})$, через p – вектор-строка цен, p' – вектор-столбец цен.

Покажем, что матрица J имеет обратную, а значит ее определитель отличен от нуля. Матрица Гессе U отрицательно определена, и потому имеет ненулевой определитель, матрица J имеет блочный вид, поэтому обратную матрицу J^{-1} будем искать в виде

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} V & \mathrm{q}' \\ & \\ -\mathrm{q} & \mu \end{pmatrix}.$$

Здесь через V обозначена квадратная матрица порядка $n \times n$, через $\mathrm{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ - вектор, через μ -скаляр.

Найдем V, q, μ из условия $JJ^{-1} = I_{n+1}$, где I_{n+1} - единичная матрица порядка $(n+1) \times (n+1)$. Обозначим через I_n - единичную матрицу порядка $n \times n$, $\theta_n = (0, 0, \ldots, 0)$ - нулевой n-мерный вектор, тогда

$$JJ^{-1} = \begin{pmatrix} U & -\mathrm{p}' \\ & \\ \mathrm{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & \mathrm{q}' \\ & \\ -\mathrm{q} & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & \theta_n' \\ & \\ \theta_n & 1 \end{pmatrix}.$$

Это матричное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} UV + \mathrm{p}'\,\mathrm{q} = I_n, \\ U\,\mathrm{q}' - \mathrm{p}'\,\mu = \theta_n', \\ \mathrm{p}\,V = \theta_n, \\ \mathrm{p}\,\mathrm{q}' = 1, \end{cases}$$

из которой находим

$$\begin{cases} V = U^{-1}(I_n - \mathrm{p}'\,\mathrm{q}), \\ \mathrm{q} = \mu\,\mathrm{p}\,U^{-1}, \\ \mu = 1/(\mathrm{p}\,U^{-1}\,\mathrm{p}'), \end{cases} \tag{8}$$

где через U^{-1} обозначена матрица, обратная матрице Гессе U. Таким образом, матрица Якоби для системы (7) имеет ненулевой определитель, поэтому решение задачи потребительского выбора может быть получено в виде функций ее параметров

$$\begin{cases} \mathrm{x}^* = \mathrm{x}^*(\mathrm{p}, b), \\ \lambda^* = \lambda^*(\mathrm{p}, b), \end{cases} \tag{9}$$

которые, в силу теоремы о существовании неявной функции, имеют непрерывные частные производные первого порядка.

Функции $\mathrm{x}^*(\mathrm{p}, B)$ называют *функциями спроса* на каждый продукт, они характеризуют количественные значения спроса как функцию от цен на все товары и дохода $x_i^* = x_i^*(p_1, p_2, \ldots, p_n, b), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

Отметим одно важное свойство функций спроса – однородность нулевой степени относительно всех цен и дохода. Поскольку пропорциональное изменение всех цен и дохода не влияет на бюджетное множество и значение функции полезности, поэтому удобно выбрать цену на какой-нибудь товар (или доход), например, p_1 за единицу счета и ввести коэффициент пропорциональности $\alpha = 1/p_1$ и рассматривать зависимость спроса $x_i^* = x_i^*(1, p_2/p_1, \ldots, p_n/p_1, b/p_1)$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n$ от относительных цен $p_2/p_1, \ldots, p_n/p_1$ и реального дохода b/p_1.

В качестве α иногда удобно выбирать величину, равную $1/\sum\limits_{i=1}^{n} p_i$.

Пример. Найти функции спроса на товары $x_1,\ x_2$, если функция полезности потребителя $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$, вектор цен $(\mathrm{p} = p_1, p_2)$, а доход равен b единиц.

Решение. Воспользуемся законом Джевонса и бюджетным равенством (7), получим

$$\begin{cases} x_2 : x_1 = p_1 : p_2, \\ p_1 x_1 + p_2 x = b, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x_2 p_2 = x_1 p_1, \\ p_1 x_1 = p_2 x = b/2. \end{cases}$$

Из первой строки системы получаем, что количество денег, затрачиваемых на оба блага, должно быть одинаково.

Найдем функции спроса

$$x_1(p_1, b) = \frac{b}{2p_1}, \quad x_1(p_2, b) = \frac{b}{2p_2}.$$

Таким образом, расход на каждое благо составляет половину общего дохода потребителя. Функции спроса на каждый продукт в данном примере не зависят от цен на другой продукт.

Вопросы для самоконтроля

1. Что означают термины "бюджетное множество", "карта предпочтений", "локальное рыночное равновесие потребителя"? Найти точку локального рыночного равновесия в задаче $\sqrt{x_1 x_2} \mapsto \max\limits_{x_1 + 2x_2 = 6}$.

2. Дать определение функций спроса. Найти функции спроса в задаче потребительского выбора $\sqrt{x_1 x_2} \mapsto \max\limits_{p_1 x_1 + p_2 x_2 = b}$.

3. Рассмотрим аддитивную функцию полезности, то есть функцию вида $u(x_1, x_2) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$. Найти спрос на каждый товар.

4. Докажите, что в точке локального рыночного равновесия бюджетное ограничение выполняется как равенство.

5. Приведите геометрическую интерпретацию решения задачи потребительского выбора.

Лекция 4

Задача потребительского выбора для некоторых функций полезности

4.1. Модель Стоуна

Пусть a_i – минимально необходимое количество $i-$го блага, которое приобретается потребителем и не является предметом выбора. Поэтому при заданных ценах $\mathrm{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ доход b должен быть больше количества денег $b_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i$, необходимого для приобретения минимально необходимого набора $\mathrm{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Пусть числа $\alpha_i > 0$ характеризуют ценность $i-$го блага для потребителя. Тогда функция полезности может быть записана в виде

$$u(x) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{\alpha_i}, \quad a_i,\ \alpha_i > 0,\ i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Задачу потребительского выбора для функции полезности (1), то есть

$$u(x) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{\alpha_i} \mapsto \max_{\mathrm{p}\,\mathrm{x}=b}, \tag{2}$$

называют *моделью Стоуна.*

Найдем функции спроса для модели Стоуна. Для этого вычислим частные производные функции $u(x)$

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\alpha_j}{x_j - a_j} \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{\alpha_i} = \frac{\alpha_j}{x_j - a_j} \cdot u(x).$$

Воспользуемся равенствами (7) из п.2 лекции 3, получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_j}{x_j - a_j} \cdot u(x) - \lambda p_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n = b. \end{cases} \tag{3}$$

Система (3) определяет функции спроса x_j как функции цен p_i и дохода b.

Выразим из первых n уравнений системы (3) функции x_j, получим равенство

$$x_j = a_j + \frac{\alpha_j}{p_j} \cdot \frac{u(x)}{\lambda},\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Умножив каждое из равенств (4) на λp_j и просуммировав их по $j = 1, 2, \ldots, n$, получим равенство

$$\lambda \sum_{j=1}^{n} p_j x_j - \lambda \sum_{j=1}^{n} p_j a_j - u(x) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 0,$$

из которого, с учетом бюджетного ограничения $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j = b$, приходим к соотношению

$$\frac{u(x)}{\lambda} = \frac{b - \sum\limits_{j=1}^{n} p_j a_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j}. \qquad (5)$$

Подставим полученное в (5) соотношение для $\dfrac{u(x)}{\lambda}$ в функции спроса (4), тогда функции спроса в модели Стоуна примут вид

$$x_j = a_j + \frac{\alpha_j \cdot \left(b - \sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i \right)}{p_j \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (6)$$

Функции спроса в модели Стоуна имеют следующую экономическу интерпретацию. Вначале приобретается минимально необходимое количество каждого блага a_j, затем оставшаяся часть дохода, то есть $b_0 = b - \sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i$, распределяется пропорционально "коэффициентам ценности"$j-$го товара $\alpha_j / \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$. Разделив оставшееся количество денег на его цену с учетом "коэффициентам ценности"$j-$го товара, получим дополнительное количество $j-$го блага, приобретаемое сверх необходимого минимума. В частном случае, когда все товары имеют равную ценность для потребителя, то есть $\alpha_i = \alpha_j$, для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $a_i = 0$, то функции спроса будут иметь вид

$$x_i(\mathrm{p}, b) = \frac{b}{np_i}. \qquad (7)$$

Вычислим эластичность спроса на $i-$тый товар по цене $j-$того товара

$$E_i^j = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} : \frac{x_i}{p_j} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ -1, & i = j, \end{cases}$$

то есть спрос на $i-$тое благо падает с ростом цены на него с эластичностью, равной -1 и не зависит от роста цен на другие товары.

Вычислим эластичность спроса на $i-$тый товар по доходу

$$E_i^j = \frac{\partial x_i}{\partial b} : \frac{x_i}{b} = \frac{1}{np_i} : \frac{b}{b \cdot np_i} = 1,$$

то есть спрос на $i-$тый товар с увеличением дохода растет с эластичностью, равной 1.

4.2. Функции Торнквиста

Рассмотрим в пространстве двух товаров следующую задачу потребительского выбора

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta-\alpha} (x_1 + \beta - \alpha)^{-\beta} \mapsto \max_{p_1x_1+p_2x_2=b}, \tag{10}$$

где $\alpha,\ \beta$ -некоторые параметры.

Для нахождения функций спроса воспользуемся законом Джевонса и бюджетным ограничением, получим систему двух уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p_1} \cdot \dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \dfrac{1}{p_2} \cdot \dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = b. \end{cases} \tag{11}$$

Найдем частные производные функции полезности, определенной в (10),

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \left(\frac{\alpha}{x_1} - \frac{\beta}{x_1 + \beta - \alpha} \right) u(x); \quad \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{\beta - \alpha}{x_2} u(x)$$

и подставим полученные выражения в первое уравнение системы (11), а из второго уравнения выразим сначала x_1 через x_2, придем к системе уравнений

$$\text{(I)} \begin{cases} \dfrac{1}{p_1} \cdot \left(\dfrac{\alpha}{x_1} - \dfrac{\beta}{x_1 + \beta - \alpha} \right) = \dfrac{1}{p_2} \cdot \dfrac{\beta - \alpha}{x_2}, \\ x_2 = \dfrac{1}{p_2} \cdot (b - p_1 x_1), \end{cases}$$

решив которую, получим функцию спроса на первый товар

$$x_1(p_1, b) = \frac{\alpha b}{b + \beta p_1}. \tag{12}$$

Если считать цены фиксированными (в общем случае параметры $\alpha,\ \beta$ могут зависеть от цен), то графиком зависимости спроса от дохода будет часть ветви (при $b \geq 0$) гиперболы $x_1 = \alpha - \dfrac{\alpha\beta p_1}{b + \beta p_1}$, имеющей горизонтальную асимптоту $x_1 = \alpha$.

Естественно интерпретировать зависимость (12) как спрос на "товары первой необходимости", например, дешевые продукты питания, спрос на которые растет с ростом дохода и не зависит от цен на другие товары.

Рисунок 4

Теперь выразим во втором уравнении системы (11) x_2 через x_1, получим систему

$$(\text{II}) \begin{cases} \dfrac{1}{p_1} \cdot \left(\dfrac{\alpha}{x_1} - \dfrac{\beta}{x_1 + \beta - \alpha} \right) = \dfrac{1}{p_2} \cdot \dfrac{\beta - \alpha}{x_2}, \\ x_1 = \dfrac{1}{p_1} \cdot (b - p_2 x_2), \end{cases}$$

из которой находим функцию спроса на второй товар

$$x_2(p_1, p_2, b) = \frac{b\,(b + p_1(\beta - \alpha))}{p_2\,(b + \mathrm{p}_1\,\beta)}. \tag{13}$$

Будем, как и выше, считать цены фиксированными. Поскольку функция спроса может принимать лишь неотрицательные значения, естественно предположить, что функция спроса на второй товар будет иметь вид

$$x_2(p_1, p_2, b) = \begin{cases} 0, & 0 \le b \le p_1(\alpha - \beta), \\ \dfrac{b\,(b + p_1(\beta - \alpha))}{p_2\,(b + \mathrm{p}_1\,\beta)}, & p_1(\alpha - \beta) < b. \end{cases} \tag{14}$$

Обратим внимание на то, что если доход b меньше некоторой фиксированной величины, пропорциональной цене на товар первой необходимости, то второй товар не приобретается. Поэтому спрос на такой товар интерпретируют как спрос на предметы роскоши.

Так как предел функции

$$y(b) = b \cdot \frac{b + \gamma_1}{\gamma_2(b + \gamma_3)},$$

где $\gamma_1 = p_1(\beta - \alpha)$, $\gamma_2 = p_2$, $\gamma_3 = p_1\beta$, равен $+\infty$ при $b \to +\infty$, то она имеет наклонную асимптоту, уравнение которой $y = kb + m$, где

$$k = \lim_{b\to+\infty} \frac{y(b)}{b} = \lim_{b\to+\infty} \frac{b+\gamma_1}{\gamma_2(b+\gamma_3)} = \frac{1}{\gamma_2} > 5;$$

$$m = \lim_{b\to+\infty} [y(b) - kb] = \lim_{b\to+\infty} \left[b \cdot \frac{b+\gamma_1}{\gamma_2(b+\gamma_3)} - \frac{1}{\gamma_2} \cdot b \right] =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{b}{\gamma_2} \cdot \left[\frac{b+\gamma_1}{\gamma_2(b+\gamma_2)} - 1 \right] = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{\gamma_1-\gamma_3}{\gamma_2} \cdot \frac{b}{b+\gamma_3} \right] = \frac{\gamma_1-\gamma_3}{\gamma_2} < 0,$$

так как $\dfrac{\gamma_1-\gamma_3}{\gamma_2} = \dfrac{p_1\beta - p_1\alpha - \mathrm{p}_1\beta}{p_2} = -\dfrac{p_1}{p_2} < 0.$

Таким образом, уравнение асимптоты к графику функции $x_2(b)$ имеет вид $x(b) = \dfrac{1}{p_2}b - \dfrac{p_1}{p_2}\alpha$.
График зависимости (14) представлен на рисунке.
Функции, определяющие спрос на товары первой необходимости (12) и предметы роскоши (14) называют *функциями Торнквиста.*

Рисунок 5

4.3. Задача потребления с линейно однородной функцией полезности

Пусть функция полезности $u(x)$ обладает свойством линейной однородности, то есть

$$u(tx) = tu(x) \quad \forall t > 0. \tag{8}$$

Продифференцировав равенство (8) по t в точке $t = 1$, получим равенство Эйлера

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} x_i = u(x). \tag{9}$$

Линейно однородная функция полезности не является строго выпуклой, ее матрица Гессе вырождена. Исследование задачи потребления для линейно однородной функции полезности проводится методами выпуклого программирования и актуально для современной теории спроса. Свойство линейной однородности (8) обеспечивает пропорциональность значений функции полезности масштабу потребления, и это позволяет считать его скалярным измерителем количества потребляемых продуктов $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Лекция 5
Уравнение Слуцкого

5.1. Исследование зависимости спроса от дохода

Исследуем зависимость решения задачи потребительского выбора от ее параметров путем сравнения положения оптимума до и после изменения ее параметров.

Рассмотрим систему уравнений (см. формулу (3.7)), которая неявно определяет функции спроса $\mathrm{x}^*(\mathrm{p}, b)$ и оптимальный множитель Лагранжа $\lambda^*(\mathrm{p}, b)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(\mathrm{x}^*(\mathrm{p}, b)) - p_i \lambda^*(\mathrm{p}, b) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ p_1 x_1^*(\mathrm{p}, B) + p_2 x_2^*(\mathrm{p}, b) + \dots + p_n x_n^*(\mathrm{p}, b) = b. \end{cases} \tag{1}$$

Рассмотрим влияние изменения дохода на спрос, для этого продифференцируем каждое из уравнений системы по параметру b, получим систему

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\mathrm{x}^*(\mathrm{p}, b)) \dfrac{\partial x_j^*}{\partial b}(\mathrm{p}, b) - p_i \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial b}(\mathrm{p}, b) = 0, \ i = 1, 2, \dots, n, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \dfrac{\partial x_j^*}{\partial b} = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Перепишем эту систему уравнений относительно производных $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial b}$, $\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial b}$ в матричном виде, используя прежние обозначения (см. п.3 в лекции 3),

$$\begin{cases} U \, \dfrac{\partial \, \mathrm{x}^*}{\partial b} - \mathrm{p}' \, \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial b} = 0, \\ \mathrm{p} \, \dfrac{\partial \, \mathrm{x}^*}{\partial b} = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Матрица этой системы есть матрица J, обратная ей матрица J^{-1} существует (см. п.3 в лекции 3), поэтому решение системы (3) можно записать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \, \mathrm{x}^*}{\partial b}(\mathrm{p}, b) = \mu U^{-1} \, \mathrm{p}', \\ \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial b}(\mathrm{p}, b) = \mu. \end{cases} \tag{4}$$

Первое равенство определяет чувствительность спроса x на все товары к изменению бюджета b. Второе равенство, если вспомнить, что множитель Лагранжа интерпретируется как предельная полезность денег и равен du/db (см. формулу (3.6)) позволяет представить параметр μ как скорость убывания предельной полезности денег.

$$\mu = \frac{\partial \lambda^*}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial u}{\partial b}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial b^2}\left(x^*(\mathrm{p}, b)\right).$$

5.2. Исследование зависимости спроса от цен

Исследуем влияние изменения цены k-того товара на спрос, для этого продифференцируем каждое из уравнений системы (1) по параметру p_k, получим систему

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\mathrm{x}^*(\mathrm{p}, b))\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_k}(\mathrm{p}, b) - p_i \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_k}(\mathrm{p}, b) = \lambda^*(\mathrm{p}, b)\delta_{ik}, \; i = 1, 2, \ldots, n, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_k} = -x_k^*(\mathrm{p}, b), \end{cases} \tag{5}$$

здесь через δ_{ik} обозначен символ Кронекера.

Перепишем систему (3) в матричном виде, используя прежние обозначения,

$$\begin{cases} U\,\dfrac{\partial\,\mathrm{x}^*}{\partial\,\mathrm{p}} - \mathrm{p}'\,\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial\,\mathrm{p}} = \lambda^* I_n, \\ \mathrm{p}\,\dfrac{\partial\,\mathrm{x}^*}{\partial\,\mathrm{p}} = -\,\mathrm{x}(\mathrm{p}, b). \end{cases} \tag{6}$$

Используя обратную матрицу J^{-1}, как и в предыдущем случае, получаем решение системы в виде

$$\frac{\partial\,\mathrm{x}^*}{\partial\,\mathrm{p}} = \lambda^* U^{-1}\left[I_n - \mu\,\mathrm{p}'\,\mathrm{p}\,U^{-1}\right] - \mu U^{-1} p'\,\mathrm{x}^*, \tag{7}$$

то есть матрицу $\left\{\dfrac{\partial x_i^*(\mathrm{p}, b)}{\partial p_k}\right\}_{i,k=1}^{n}$, определяющую чувствительность спроса на каждый товар $x_i(\mathrm{p}, b)$ к ценам всех товаров p_k.

5.3. Изменение спроса при изменении цены с компенсацией

Для экономического анализа представляет интерес такой режим изменения цен, при котором одновременно меняется бюджет потребителя так, что уровень потребления сохраняется (не меняется полезность), то есть происходит *компенсированное изменение цен*. При этом бюджет $b(\mathrm{p})$, определяемый постоянством достижимого уровня потребления, называют *компенсирующим бюджетом*, а соответствующий ему спрос *компенсированным спросом.*

Поскольку полезность при компенсированном изменении цен остается неизменной, то
$\mathrm{d}u(\mathrm{x}^*(\mathrm{p})) = 0$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\mathrm{x}^*(\mathrm{p}))}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i^*}{\partial p_k} = 0. \tag{8}$$

Пара $(x^*(\mathrm{p}), \lambda^*(\mathrm{p}))$ удовлетворяет системе (1), поэтому

$$\frac{\partial u(\mathrm{x}^*(\mathrm{p}))}{\partial x_i} - p_i \lambda^*(\mathrm{p}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Подставим $\dfrac{\partial u(\mathrm{x}^*(\mathrm{p}))}{\partial x_i}$ из (9) в уравнение (8), получим

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \lambda^*(\mathrm{p}) \cdot \frac{\partial x_i^*}{\partial p_k} = 0. \tag{10}$$

В силу положительности $\lambda^*(\mathrm{p})$ из уравнения (10) получим уравнение для произвольного p_k

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \frac{\partial x_i^*}{\partial p_k} = 0, \tag{11}$$

называемое *условием постоянства полезности.*

Продифференцируем равенства (9) по p_k, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(\mathrm{x}^*)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_j^*}{\partial p_k} - \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_k} = \lambda^* \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{12}$$

где δ_{ik}– символ Кронекера.

Уравнения (11), (12) объединяются в систему

$$\begin{cases} U \dfrac{\partial x^*}{\partial \mathrm{p}} - \mathrm{p}' \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial \mathrm{p}} = \lambda^* I_n, \\ \mathrm{p}\, \dfrac{\partial x^*(\mathrm{p})}{\partial \mathrm{p}} = 0, \end{cases}$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} U & -\mathrm{p}' \\ \mathrm{p} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^* I_n \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Решение последней системы можно выписать, используя матрицу J^{-1}, в виде

$$\left[\frac{\partial x^*}{\partial \mathrm{p}}\right]_{comp} = \lambda U^{-1}\left(I_n - \mu\, \mathrm{p}'\, \mathrm{p}\, U^{-1}\right). \tag{14}$$

Здесь $\left[\frac{\partial x^*}{\partial \mathrm{p}}\right]_{comp}$ характеризует изменение спроса, если увеличение цены k-того товара на $\mathrm{d}p_k$ компенсируется увеличением дохода на $\mathrm{d}b = x_k^* \mathrm{d}p_k$.

5.4. Уравнение Слуцкого

Для экономического анализа представляет интерес такой режим изменения цен, при котором одновременно меняется бюджет потребителя так, что уровень потребления сохраняется (не меняется полезность), то есть происходит *компенсированное изменение цен.* При этом бюджет $b(\mathrm{p})$, определяемый постоянством достижимого уровня потребления, называют *компенсирующим бюджетом*, а соответствующий ему спрос *компенсированным спросом.*

Поскольку полезность при компенсированном изменении цен остается неизменной, то
$\mathrm{d}u(\mathrm{x}^*(\mathrm{p})) = 0$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\mathrm{x}^*(\mathrm{p}))}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i^*}{\partial p_k} = 0. \tag{8}$$

Пара $(x^*(\mathrm{p}), \lambda^*(\mathrm{p}))$ удовлетворяет системе (1), поэтому

$$\frac{\partial u(\mathrm{x}^*(\mathrm{p}))}{\partial x_i} - p_i \lambda^*(\mathrm{p}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Подставим $\frac{\partial u(\mathrm{x}^*(\mathrm{p}))}{\partial x_i}$ из (9) в уравнение (8), получим

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \lambda^*(\mathrm{p}) \cdot \frac{\partial x_i^*}{\partial p_k} = 0. \tag{10}$$

В силу положительности $\lambda^*(\mathrm{p})$ из уравнения (10) получим уравнение для произвольного p_k

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \frac{\partial x_i^*}{\partial p_k} = 0, \tag{11}$$

называемое *условием постоянства полезности.*

Продифференцируем равенства (9) по p_k, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(\mathrm{x}^*)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_j^*}{\partial p_k} - \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_k} = \lambda^* \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Уравнения (11), (12) объединяются в систему

$$\begin{cases} U\dfrac{\partial x^*}{\partial\,\mathrm{p}} - \mathrm{p}'\,\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial\,\mathrm{p}} = \lambda^* I_n, \\ \mathrm{p}\,\dfrac{\partial x^*(\mathrm{p})}{\partial\,\mathrm{p}} = 0, \end{cases}$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} U & -\mathrm{p}' \\ \mathrm{p} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^* I_n \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Решение последней системы можно выписать, используя матрицу J^{-1}, в виде

$$\left[\frac{\partial x^*}{\partial\,\mathrm{p}}\right]_{comp} = \lambda U^{-1}\left(I_n - \mu\,\mathrm{p}'\,\mathrm{p}\,U^{-1}\right). \tag{14}$$

Здесь $\left[\dfrac{\partial x^*}{\partial\,\mathrm{p}}\right]_{comp}$ характеризует изменение спроса, если увеличение цены k-того товара на $\mathrm{d}p_k$ компенсируется увеличением дохода на $\mathrm{d}b = x_k^*\mathrm{d}p_k$.

5.5. Типы товаров

Рассмотрим равенство, получаемое в результате дифференцирования бюджетного равенства $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i = b$ по доходу b,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i(\mathrm{p}, b)}{\partial b} = 1. \tag{16}$$

В теории потребительского спроса его называют *условием агрегации Энгеля* [1]. Поясним его экономический смысл.

Товары, спрос на которые растет с ростом дохода потребителя, то есть $\dfrac{\partial x_i(\mathrm{p}, b)}{\partial b} > 0$, называют *ценными.* Товары, спрос на которые падает с ростом дохода потребителя, то есть $\dfrac{\partial x_i(\mathrm{p}, b)}{\partial b} < 0$, называют *малоценными.* Примером ценного товара может быть, например, сливочное масло, а малоценным – маргарин.

Условие агрегации (16) показывает, что в любой системе предпочтений, определяемой функцией полезности $u(x)$ (или представляемым ею отношением предпочтения $\succeq$) обязательно должны быть ценные товары. Этот факт был установлен Энгелем на основе эмпирического анализа.

[1] Энгель Эрнст (1821-1896) – немецкий экономист, статистик

Товары, для которых спрос падает с ростом цены, то есть $\dfrac{\partial x_i(\mathrm{p}, b)}{\partial p_i} < 0$, называют *нормальными.* В противном случае (спрос на товар продолжает расти с ростом на него цены) товар называют *товаром Гиффина.* Эффект Гиффина наблюдался в конце XIX века в Ирландии. В то время картофель считался одним из основных продуктов питания. Но по мере увеличения дохода потребитель предпочитал покупать меньше картофеля, но больше мяса. Но с увеличением цены на картофель реальный доход понизился на столько, что потребители не в состоянии были покупать мясо на прежнем уровне. Таким образом, картофель стал заменителем мяса и его потребление, несмотря на повышение цены, все равно увеличилось.

Очевидно, что товары Гиффина являются малоценными товарами.

Эффект Гиффина проявился и в современной России [1]. Так, в 1990 году отношение средних рыночных цен на картофель (0,3 руб/кг) и мяса (5 руб/кг) составило 0,06. В июне 1996 года средние цены стали соответственно 2250 руб/кг и 13750 руб/кг, а их отношение составило 0,16. Таким образом, относительная цена картофеля (к мясу) выросла в 2,7 раз. В то же время потребление мяса за этот срок сократилось на 20 %, а потребление картофеля возросло на 15 %.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая функция называется неявной? Сформулируйте теорему о неявной функции, определенной уравнением $F(x_1, x_2) = 0$; $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$; $F(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots y_m) = 0$. Выведите формулу для производной неявной функции [2].

2. Найти размер компенсации для задачи потребительского выбора $x_1 x_2 \mapsto \max\limits_{10x_1 + 2x_2 \leq 60}$, если цена на второй товар увеличилась до 7 денежных единиц, а цена на первый товар не изменилась.

3. Выписать уравнение Слуцкого для задачи потребительского выбора $x_1^\alpha x_2^\alpha \mapsto \max\limits_{p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq b}$. Являются ли товары в данной модели ценными?

4. Найти функцию спроса для линейной функции $u(\mathrm{x}) = \mathrm{k}\,\mathrm{x}$. Исследуйте случай, когда $\mathrm{k} = \mathrm{p}$.

5. Можно ли считать товары в модели Стоуна товарами роскоши или товарами первой необходимости с точки зрения зависимости спроса на них от дохода?

[1] Социально-экономическое положение России (январь-июнь 1996 г.). – Москва, Госкомстат РФ, 1996

[2] Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа.-М.:Наука, 1968.

Лекция 6
Следствия уравнения Слуцкого

6.1. Условие агрегации Курно

Изучим свойства матрицы

$$H = U^{-1}\left(I_n - \mu\,\mathrm{p}'\,\mathrm{p}\,U^{-1}\right),\ \mathrm{p} > 0, \tag{1}$$

определяющей с точностью до множителя $\lambda > 0$ изменение компенсированного спроса $\dfrac{\partial\,\mathrm{x}^*}{\partial\,\mathrm{p}}$ (см. формулу (5.14)).

Утверждение 1. Матрица H симметрична и отрицательно определена, то есть для любого вектора $\mathrm{z} \in \mathbf{R^n}$ имеет место неравенство

$$\mathrm{z}\,H\,\mathrm{z}' \le 0, \tag{2}$$

причем равенство нулю выполняется для нетривиальных z тогда и только тогда, когда $\mathrm{z} = \alpha\,\mathrm{p}$ при некотором $\alpha \in \mathbf{R}$.

$\triangleright$ Доказательство.

1. Рассмотрим случай, когда вектор z пропорционален вектору цен, то есть $\mathrm{z} = \alpha\,\mathrm{p}$ при некотором $\alpha \ne 0$. Преобразуем

$$\mathrm{z}\,H\,\mathrm{z}' = (\alpha\,\mathrm{p})H(\alpha\,\mathrm{p})' = \alpha^2 \cdot (\mathrm{p}\,U^{-1}\,\mathrm{p}' - \mu\,\mathrm{p}\,U^{-1}\,\mathrm{p}'\,\mathrm{p}\,U^{-1}\,\mathrm{p}').$$

Так как $\mathrm{p}\,U^{-1}\,\mathrm{p}' = 1/\mu$ (см. равенство (8) в лекции 3), то

$$\mathrm{z}\,H\,\mathrm{z}' = \alpha^2(\mathrm{p}\,U^{-1}\,\mathrm{p}' - \mathrm{p}\,U^{-1}\,\mathrm{p}') = \theta',$$

где θ' – n–мерный нулевой вектор-столбец.

2. Пусть теперь $\mathrm{z} \ne \alpha\,\mathrm{p}$ при всех $\alpha \in \mathbf{R}$. Представим нетривиальный вектор $\mathrm{z} = \alpha\,\mathrm{p} + \mathrm{v}$, где нетривиальный вектор v и число α удовлетворяют условию

$$\mathrm{v}\,U^{-1}\,\mathrm{p}' = 0, \tag{3}$$

или

$$(\mathrm{z} - \alpha\,\mathrm{p})U^{-1}\,\mathrm{p}' = \mathrm{z}\,U^{-1}\,\mathrm{p}' - \alpha\,\mathrm{p}\,U^{-1}\,\mathrm{p}' = 0.$$

Так как $\mathrm{p}\,U^{-1}\,\mathrm{p}' = 1/\mu$, то $\alpha = \mu\,\mathrm{z}\,U^{-1}\,\mathrm{p}'$.

Рассмотрим

$$\mathrm{z}\,H\,\mathrm{z}' = \mathrm{v}\,H\,\mathrm{v}' = \mathrm{v}\,U^{-1}\,\mathrm{v}' - \mu\,\mathrm{v}\,U^{-1}\,\mathrm{p}'\,\mathrm{p}\,U^{-1}\,\mathrm{v}'.$$

Здесь в правой части в силу условия (3) вычитается нуль. Поскольку матрица U^{-1}, как и матрица U, отрицательно определена, то и $\mathrm{v}\,U^{-1}\,\mathrm{v}' < 0$, откуда $\mathrm{z}\,H\,\mathrm{z}' < 0$. ◀

Следствие 1. Чувствительность компенсированного спроса на любой продукт к собственной цене отрицательна, то есть

$$\frac{\partial x_i^*(\mathrm{p})}{\partial p_i} < 0. \tag{4}$$

▷ Доказательство.

Если в качестве z взять вектор-строку, все элементы которой нули, кроме $i-$го, который равен 1, то есть $\mathrm{z} = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, то

$$\mathrm{z}\,H\,\mathrm{z}' = h_{ii} < 0,$$

то есть все диагональные элементы матрицы H отрицательны. ◀

С экономической точки зрения неравенство (4) соответствует *закону спроса Курно,* то есть реакция спроса на любой товар при компенсированном изменении цен всегда нормальная.

Уравнение Слуцкого с помощью (4) позволяет выделить класс товаров, удовлетворяющих "закону спроса"и в общем случае, без компенсирующего изменения бюджета.

Рассмотрим произвольный диагональный элемент системы

$$\frac{\partial x_i(\mathrm{p}, b)}{\partial p_i} = \frac{\partial x_i^*(\mathrm{p})}{\partial p_i} - \frac{\partial x_i}{\partial b} x_i. \tag{5}$$

Товар, спрос на который с ростом цены падает, называют *нормальным.*

Следствие 2. Ценные товары всегда нормальные.

Это вытекает непосредственно из следствия 1 и системы (5).

Следствие 3. Товары Гиффина могут быть только малоценными.

В самом деле, товар Гиффина характеризуется аномальным спросом, то есть $\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j} > 0$, чего не может быть для ценных товаров.

6.2. Взаимозаменяемость благ

Два товара называют *взаимодополняемыми,* если компенсированный спрос на один товар падает с ростом цены другого, то есть

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} < 0.$$

Два товара называют *взаимозаменяемыми,* если компенсированный спрос на один товар растет с ростом цены другого, то есть

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} > 0.$$

Утверждение 2. В любой системе предпочтений для любой функции полезности $u(x)$ существуют взаимозаменяемые товары.

$\triangleright$ Доказательство.

Умножим равенство (5.14) на $\mathrm{p} > 0$, получим

$$\frac{\partial \,\mathrm{x}^*(\mathrm{p})}{\partial \,\mathrm{p}}\,\mathrm{p}' = \lambda \left[U^{-1}\,\mathrm{p}' - \mu U^{-1}\,\mathrm{p}'\,\mathrm{p}\,U^{-1}\,\mathrm{p}'\right] = 0,$$

так как $\mathrm{p}\,U^{-1}\,\mathrm{p}' = 1/\mu$ (см. лекцию 5).

Для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i^*(\mathrm{p})}{\partial p_j} p_j = 0, \tag{6}$$

и в силу (4), необходимо при некотором $j \neq i$ будет $\dfrac{\partial x_i^*(\mathrm{p})}{\partial p_j} > 0$, то есть товары i и j – взаимозаменяемые. $\blacktriangleleft$

6.3. Свойство эластичности спроса

Уравнение Слуцкого позволяет установить важное свойство эластичностей спроса на любой товар относительно всех факторов.

Напомним, что *эластичностью спроса на товар i относительно цены товара j* называют величину

$$E_i^j = \frac{\partial x_i(\mathrm{p}, b)}{\partial p_j} : \frac{x_i}{p_j}, \tag{7}$$

эластичностью спроса относительно бюджета - величину

$$E_i^0 = \frac{\partial x_i(\mathrm{p}, b)}{\partial b} : \frac{x_i}{b}. \tag{8}$$

Утверждение 3. Сумма эластичностей спроса на любой товар относительно всех факторов равна нулю

$$\sum_{j=0}^{n} E_i^j = 0. \tag{9}$$

▷ Доказательство.

В соответствии с равенствами (7), (8) имеем

$$\sum_{j=0}^{n} E_i^j = \frac{1}{x_i}\left[\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial p_j} p_j + \frac{\partial x_i}{\partial b} b\right]. \tag{10}$$

Из уравнения Слуцкого имеем равенство

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i}{\partial b} x_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Умножая эти равенства на p_j, складывая результаты и используя равенство (6) и бюджетное ограничение $\sum\limits_{j=0}^{n} p_j x_j = b$, получим

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial p_j} p_j = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} p_j - \frac{\partial x_i}{\partial b} \sum_{j=0}^{n} x_j p_j = -\frac{\partial x_i}{\partial b} b.$$

Подставляя полученный результат в (10), приходим к равенству (9). ◀

6.4. Геометрическая интерпретация компенсированного изменения цены

Пусть первоначально цены на товары (x_1, x_2) были (p_1, p_2), а доход составил b единиц.

Пусть начальное рыночное равновесие потребителя находилось в точке $\mathrm{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)$ – точке касания кривой безразличия L^1 и бюджетной линии $\mathfrak{J}^1$.

Рисунок 7

При возрастании цены на первый товар с p_1 денежных единиц за единицу товара до q_1 денежных единиц за единицу товара точка пересечения новой бюджетной линии $\mathfrak{I}^2$ и оси $0x_1$ изменится, и новое рыночное равновесие потребителя установится в точке x^2, которая является точкой пересечения бюджетной линии $\mathfrak{I}^2$ и другой кривой безразличия L^2.

Проведем вспомогательную линию $\mathfrak{I}^0$ параллельно линии $\mathfrak{I}^2$ (то есть под тем же углом $\alpha = \operatorname{tg} -q_1/p_2$.) Точку пересечения линии $\mathfrak{I}^0$ и кривой безразличия L^1 обозначим через x^0 .

Если мы хотим компенсировать потребителю потерю благосостояния в связи с изменением цен, то необходимо увеличить его доход так, чтобы касание бюджетной линии $\mathfrak{I}^0$, соответствующей этому доходу, произошло на исходной кривой безразличия L^1, чтобы полезность потребителя не изменилась.

Вектор $\mathrm{x}^1\,\mathrm{x}^0$ показывает "эффект замены"при росте цены, то есть изменение структуры спроса при условии поддержания прежнего уровня благосостояния.

Вектор $\mathrm{x}^0\,\mathrm{x}^2$ отражает "эффект дохода", то есть изменение потребительского спроса при сохранении соотношения цен благ и изменении уровня дохода.

Вектор $\mathrm{x}^1\,\mathrm{x}^2$ отражает общий результат роста цены (при отсутствии компенсации).

В данном случае (см. Рисунок 7) первый товар является

1) первый товар является ценным, так как при снижении дохода сокращается спрос (точка x^2 лежит левее точки x^0);

2) первый товар является нормальным, так как при снижении цены спрос на него уменьшается (точка x^2 лежит левее точки x^1).

3) товары являются взаимозаменяемыми (точка x^0 лежит выше точки x^1).

Вопросы для самоконтроля

1. Доказать следствие 2.

2. Пусть спрос $x_1(p_1, b) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{b}}{p_1^2}$. Используя уравнение Слуцкого, найти $\left[\dfrac{\partial x_1}{\partial p_1}\right]_{comp}$.

3. Для задачи $u(x_1, x_2) = x_1 x_2 \mapsto \max\limits_{10x_1+2x_2 \le 60}$ дать геометрическую интерпретацию компенсированного изменения цены, если цена на 1-ый товар увеличилась до 20 денежных единиц?

Список использованной литературы

1. Аллен Р. Математическая экономия. - М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

2. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. - М.: Наука, 1984.

3. Вавилин С.А., Волошинов В.В., Кривцов В.Е., Шананин А.А. Моделирование структуры потребительского спроса на основе теории экономических индексов. - М.: Изд-во ИСА РАН, 1992.

4. Вальтух К.К., Дементьев Н.П., Ицкович И.А. Математический и статистический анализ функции потребления. - Новосибирск: Наука, 1986.

5. Еремин И.И. Противоречивые модели оптимального планирования. - М.: Наука, 1988.

6. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. - М.: ДИС, 1998.

7. Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. - М.: Наука, 1979.

8. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. - М.: Прогресс, 1975.

9. Канторович Л.В., Горстко А.Б. Оптимальные решения в экономике. - М., 1972.

10. Кевеш П. Теория индексов и практика экономического анализа. - М.: Финансы и статистика, 1990.

11. Клейнер Г.Б.Методы анализа производственных функций. - М.: Информэлектро, 1980.

12. Конюс А.А. Метод индексов цен в построении моделей потребления// Статистические методы в исследованиях труда, доходов и потребления. - М.: Наука, 1981, с.144-172.

13. Колемаев В.А. Математическая экономика. - М.: ЮНИТИ, 1998.

14. Ланкастер К. Математическая экономика. - М.: Сов.радио, 1979.

15. Макконнел К.Р., Брю С.Л. Экономикс, т.1,2. - Баку: Азербайджан, 1992.

16. Малыхин В.И. Математика в экономике. - М., 1998.

17. Математическая экономика на персональном компьютере / Ред. Кубонива М. - М.: Финансы и статистика, 1991.

18. Маршалл А. Принципы экономической науки. - М.: Прогресс, 1993 (1890).

19. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. - М.: Мир, 1972.

20. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. - М.: Мир, 1988.

21. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. - М.: Энергоатомиздат, 1996.

22. Робинсон Дж. Экономическая теория несовершенной конкуренции. - М.: Прогресс, 1986.

23. Самуэльсон П. Экономика, - М.: Прогресс, 1964.

24. Серебряков Б.Г. Теории экономического равновесия. - М.: Мысль, 1973.

25. Слуцкий Е.Е. К теории сбалансированного бюджета потребителя // Народнохозяйственные модели: Теоретические вопросы потребления. - М.: Изд-во АН СССР, 1963г. с.241-277 (переиздания статьи 1915 г.).

26. Теория потребительского поведения и спроса ("Вехи экономич. мысли." Вып.1)//Ред. Гальперин В.М. - С.-Пб.: Экономическая школа, 1993.

27. Хикс Дж. Стоимость и капитал. - М.: Прогресс, 1993 (1939).

28. Шаттелес Т. Современные эконометрические методы. - М.: Статистика, 1975.

29. Шананин А.А. Непараметрические методы анализа структуры потребительского спроса // Математическое моделирование. 1993, т.5, N9, с.3-17.

30. Экланд И. Элементы математической экономики. - М.: Мир, 1983.

31. Экономика и бизнес / Ред. Камаев В.Д. - М.: Изд. МГТУ, 1993.

32. Afriat S.N. The system of inequalities $a_{rs} \geq x_r - x_s$ Prinston Univ., Econometric Research Program, Research Mem., N18, 1960.

33. Samuelson P.A. Consumption theory in terms of revealed preference // Economica, 15 (1948), p.243-253.

Карелина Ирина Георгиевна,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического моделирования

Редактор Бунина Т.Д.