Экономический факультет
Новосибирский государственный университет

**В. П. Бусыгин, Е. В. Желободько,
С. Г. Коковин, А. А. Цыплаков**

Микроэкономический анализ несовершенных рынков
I

Новосибирск
1999

Пособие издано при
поддержке проекта
Европейского сообщества

TEMPUS (TACIS)
JEP-N 08508/94
*Canterbury*Novosibirsk*
*Oldenburg*Paris-8*

Tempus

Пособие представляет собой первую часть учебника по методам микроэкономического анализа, ориентированного на студентов старших курсов первой ступени обучения и магистрантов экономических факультетов, специализирующихся в экономической теории. Оно посвящено методам анализа несовершенной конкуренции.

Предисловие

В настоящее время многие российские вузы перешли на двухступенчатую систему образования и предлагают программы подготовки магистров по специальности «Экономическая теория». Этому движению в сторону модернизации экономического образования в России мешает отсутствие методических пособий для магистратуры практически по всем дисциплинам, поэтому усилия по разработке таких методических пособий крайне важны. В рамках программы TEMPUS-TACIS сотрудниками экономического факультета НГУ подготовлены пособия, в том числе, и по ряду дисциплин второй ступени.

Настоящая книга открывает серию учебных пособий, посвященных методам микроэкономического анализа. Она отражает опыт преподавания экономической теории на экономическом факультете Новосибирского государственного университета, где традиционно большую роль играли математические методы. Поэтому в книге много места уделено формально-логическому обоснованию моделей изучаемых экономических явлений и методов их анализа.

Конечно, по своему характеру программы обучения студентов второй ступени должны отражать сравнительные преимущества вуза, специализацию его сотрудников, и поэтому могут сильно отличаться друг от друга. Вместе с тем, различия не должны быть столь большими в содержании базовых дисциплин, составляющих ядро программы подготовки экономистов, таких как микроэкономика, макроэкономика, эконометрика. Поэтому, как думается, данное учебное пособие окажется полезным в преподавании микроэкономических курсов на экономических факультетах многих вузов России.

Декан экономического факультета НГУ,
д.э.н., профессор Г. М. Мкртчян

Оглавление

Введение

Данное пособие представляет собой первую часть учебника по методам микроэкономического анализа, ориентированного на студентов старших курсов первой ступени обучения и магистрантов экономических факультетов, специализирующихся в экономической теории.

Оно посвящено методам анализа несовершенной конкуренции — ситуации, когда участники обмена обладают рыночной властью, то есть способностью влиять на условия сделок, в которых они участвуют. Такая направленность пособия оставляет вне его рамок многие другие ситуации рыночных несовершенств, в частности внешние влияния, общественные блага, несимметричную информированность участников сделки об ее условиях. Эти темы являются предметом последующих частей учебного пособия. Кроме того, в данной части пособия рыночная организация предполагается экзогенно заданной. Объяснение различных рыночных структур — также является предметом следующих частей пособия.

Поскольку при анализе рыночных несовершенств в центре внимания оказывается стратегическое поведение участников, обладающих рыночной властью, пособие открывает глава «Элементы теории некооперативных игр», посвященная методам анализа такого поведения.

Изложение методов анализа ситуаций с несовершенной конкуренцией уместно начинать с наиболее простых моделей — моделей частного равновесия. Поэтому вторая глава посвящена рассмотрению так называемых квазилинейных экономик, когда такой анализ рынков является корректным.

В третьей и четвертой главе приводятся собственно методы анализа несовершенных рынков — монополии и олигополии. Мы обращаем внимание прежде всего на методы анализа последствий той или иной организации рынка в терминах уровней благосостояния.

В каждом параграфе пособия читателю предлагаются задачи для самостоятельного решения. В частности — это варианты утверждений из основного текста пособия, которые, как представляется, важны для успешного овладения методами микроэкономического анализа.

Пособие рассчитано на читателя, обладающего известной математической культурой, которую естественно предполагать у студентов старших курсов экономических факультетов университетов, кому прежде всего и адресовано пособие.

Авторы будут благодарны за любые замечания по структуре и содержанию курса; их можно присылать по электронному адресу busygin@ieie.nsc.ru .

Авторы

Элементы теории некооперативных игр

Введение

Теория игр анализирует принятие решений экономическими субъектами (называемыми, в соответствии с установившейся традицией, игроками) в ситуациях, когда на результат этих решений оказывают влияние действия, предпринимаемые другими экономическими субъектами. Такие ситуации принято называть **играми**.

В настоящее время теория игр проникла практически во все области экономической теории — в экономику общественного сектора, экономику труда, в теорию отраслевых рынков, международную экономику, макроэкономику и т.д. Как оказалось, исследователи, занимавшиеся моделированием экономических и социальных явлений, предлагали решения, которые совпадают с теми или иными концепциями равновесия современной теории игр, еще до того, как эти концепции были сформулированы в явном виде и вошли в инструментарий теории игр. Приведем лишь несколько примеров: модели олигополии (А. Курно, Ж. Бертран, Г. Штакельберг), модель рынка «лимонов» (Дж. Акерлов), модель сигнализирования на рынке труда (М. Спенс), анализ аукционов в условиях неполной информации (У. Викри). Это совпадение не является чем-то случайным. Фактически предлагаемые решения оказывались естественным обобщением лежащих в основе современной неоклассической теории понятия *рационального поведения.*

Неоклассическая экономическая теория опирается на логику, которой руководствуются люди, осуществляя выбор в самых разных ситуациях повседневной жизни. Покупая те или иные товары, поступая учиться в университет, голосуя за ту или иную партию, решая вступить в брак и даже совершая преступления люди выбирают из двух или более альтернатив исходя из своих предпочтений. Другими словами, в основе неоклассической экономической теории лежит убеждение,[1] что любой феномен общественной жизни следует рассматривать как итог взаимодействия рациональных индивидуумов, выбирающих наилучшие (с их

[1] так называемый методологический индивидуализм

точки зрения) альтернативы из тех, которые для них доступны в данной ситуации.

Как правило, последствия решений, принимаемых одним экономическим субъектом, зависят от того, какие решения приняли, принимают или будут принимать другие. В ситуациях, когда эти решения (влияющие на положение экономического субъекта) ему неизвестны,[2] естественно считать, что он делает предположения (формирует ожидания) относительно того, какими эти решения могут быть. Тогда естественное обобщение рационального поведения — это оптимальные выборы экономических субъектов при данных ожиданиях.

Однако предположений о рациональности в общем случае оказывается недостаточным для того, чтобы предсказать, какие действия будут выбраны. Необходимо, таким образом, сделать какие-то предположения относительно ожиданий. Следуя сложившейся в экономической теории практике, мы будем здесь анализировать *равновесные* ситуации — ситуации, при которых ожидания экономических субъектов оказываются оправдавшимися, т.е. ожидаемые ими действия других экономических субъектов совпадают с фактически выбранными. Такой подход позволяет существенным образом сузить область возможных решений.

Мы не стремились представить здесь сколько-нибудь развернутое изложение теории игр, какой она сложилась к настоящему моменту.[3] Цель раздела скорее в том, чтобы дать понятие об идеях и продемонстрировать возможности теории игр в моделировании ситуаций, включающих стратегическое взаимодействие экономических субъектов.

1. Статические игры с полной информацией

Под **статической игрой** понимают такую игру, в которой все ее участники принимают решения не зная, какие именно решения принимают другие. Обычно в этом случае говорят, что участники принимают решения *одновременно*, хотя сама по себе од-

[2] например, решения остальных олигополистов в моделях Курно и Бертрана

[3] В частности, мы не касаемся тем, относящимся к кооперативной теории игр.

новременность принятия решений в данном случае не важна. Под играми с **полной информацией** понимаются такие игры, в которых каждый из игроков точно знает характеристики других игроков.[4]

Нормальная форма игры

Альтернативные действия, которые может предпринять игрок, в контексте статических игр с полной информацией, совпадают с тем, что в теории игр называется **стратегиями**, по причинам, которые станут ясны из дальнейшего.

Приведем пример статической игры с полной информацией.

Игра 1.[5] «Выбор компьютера»

Двое знакомых одновременно выбирают, компьютеры какого типа им купить. Первый предпочитает IBM PC, второй — Макинтош. Обладание компьютером любимого типа первый оценивает в a ($a>0$) некоторых условных единиц, а второй — в b ($b>0$) условных единиц. Полезность компьютера другого типа для обоих равна нулю. Каждый получает дополнительную выгоду ($c>0$), если они выберут одинаковые компьютеры, поскольку в таком случае используемое ими программное обеспечение будет совместимым. ⇦

В этом примере каждый из игроков (мы будем их называть «Игрок 1» и «Игрок 2») имеет две стратегии, которые можно условно назвать «IBM» и «Mac». Описанную игру удобно представить в виде таблицы (матрицы) $2{\times}2$. В игре имеется четыре исхода: (IBM, IBM), (IBM, Mac) (Mac, IBM) и (Mac, Mac). Каждому исходу соответствует своя клетка таблицы; в этой клетке помещаются соответствующие выигрыши участников.[6] Игры такого рода, то есть игры с двумя участниками, каждый из которых имеет конечное число стратегий, принято называть матричными[7] играми двух лиц.

Таблица 1

		Игрок 2: IBM	Игрок 2: Mac
Игрок 1	IBM	c $a+c$	b a
	Mac	0 0	$b+c$ c

В рассмотренном примере можно выделить три элемента:

- ✦ множество игроков,
- ✦ множество стратегий, которые могут выбрать игроки,
- ✦ выигрыши игроков.

И в общем случае, чтобы задать статическую игру с полной информацией, требуется указать перечисленные элементы. Описание игры в виде такого набора называется **нормальной формой** игры.[8] Можно сказать, предваряя дальнейшее, что это тот минимум, который необходим для описания *любой* игры. В более сложных типах игр становятся важными и другие аспекты анализируемой ситуации, такие как очередность ходов, информированность игроков, и т.д.

В дальнейшем, описывая общую статическую игру m лиц с полной информацией, будем использовать следующие формальные обозначения для указанных элементов.

---

[4] Точный смысл терминов *статическая игра* и *игра с полной информацией* станет ясен из дальнейшего, когда мы рассмотрим динамические игры и игры с неполной информацией (байесовские игры) соответственно.

[5] Игра представляет собой вариант известной игры «Battle of sexes» — «Борьба полов».

[6] Мы будем использовать следующее соглашение при изображении матричных игр двух лиц. Игрок, чье имя стоит *слева*, выбирает *строки* таблицы и его выигрыши записываются *в левом нижнем углу* каждой клетки таблицы. Игрок, чье имя стоит *сверху*, выбирает *столбцы* таблицы и его выигрыши записываются *в правом верхнем углу*. При таком расположении проще понять где чья стратегия и где чей выигрыш. Свой выигрыш всегда расположен ближе к игроку, чем выигрыш партнера.

[7] точнее биматричными

[8] Ее также называют стратегической формой игры. Впервые в явной формулировка нормальной формы игры была дана в основополагающей статье Джона фон Неймана (Von Neumann, J. (1928), "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele," *Mathematische Annalen*, **100**, 295-320. Рус. пер. Дж. фон Нейман, К теории стратегических игр, в сборн. "Матричные игры", под ред. Н. Н. Воробьева, М.: Физматгиз, 1961, 173-204. См. также von Neumann, J., and O. Morgenstern (1944), *Theory of Games and Economic Behavior. Princeton*. Princeton University Press. Рус. пер. Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн, "Теория игр и экономическое поведение", М.: Наука, 1970.)

Множество **игроков** (множество участников) будем обозначать I:

$$I = \{1,\ldots,m\}.$$

Множество возможных стратегий i-го игрока — или просто **множество стратегий** i-го игрока — будем обозначать через X_i. Отдельную стратегию i-го игрока будем, как правило, обозначать через x_i. Совокупность стратегий всех игроков будем называть **исходом** игры. Т.е. исход игры — это набор

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m), \text{ где } \boldsymbol{x} \in X_1 \times \cdots \times X_m = X.$$

Будем предполагать, что у каждого из игроков есть своя целевая функция (в экономической теории ее называют функцией полезности). Обозначим целевую функцию i-го игрока через $u_i(\cdot)$. Каждому исходу игры она сопоставляет некоторое действительное число — **выигрыш**. Таким образом, в описании игры следует

Таблица 2

		Автомобилист: A	Автомобилист: B
Пешеход	A	-102 -110	-20 -200
	B	-120 -100	-100 -500

задать для каждого игрока $i \in I$ функцию вида

$$u_i : X \mapsto \mathbb{R}.$$

Нормальная форма игры, в соответствии со сказанным выше, представляет собой набор

$$G = \langle I, \{X_i\}_I, \{u_i\}_I \rangle.$$

В некоторых играх есть элемент случайности. Если на вероятности случайных событий не влияют выборы, сделанные игроками, то принято говорить о **случайных ходах природы**. Рассмотрим в качестве примера следующую игру.

Игра 2.

В игре участвуют пешеход и автомобилист. Каждый из игроков имеет две стратегии: проявлять осторожность (A) и не проявлять осторожности (B). От выбранных стратегий зависит вероятность дорожно-транспортного происшествия (автомобилист собьет пешехода). Если оба ведут себя неосторожно, то вероятность

происшествия равна $1/2$, если только один ведет себя неосторожно, то вероятность равна $1/10$, а если оба осторожны, то вероятность равна $1/100$.

В случае, если произойдет столкновение, то ущерб пешехода составит 1000 у.е.,[9] а ущерб автомобилиста — 200 у.е. Кроме того, осторожное поведение на дороге связано для обоих игроков с издержками в 100 у.е. ⇦

На примере Игры 2 рассмотрим, каким образом представить в нормальной форме игру, включающую случайность. Для этого нам необходимо задать способ вычисления выигрышей (все остальные элементы нормальной формы здесь уже указаны).

Стандартное предположение теории игр состоит в том, что если выигрыш — случайная величина, то игроки предпочитают действия, которые приносят им наибольший **ожидаемый выигрыш**.[10] Предполагается, что в описании игры случайные выигрыши даны в таком виде, что можно рассчитать их математическое ожидание и использовать в качестве выигрышей в нормальной форме игры. Таким образом, выигрыши выражены в некоторых условных единицах (вовсе не обязательно денежных) и представляют некоторый абстрактный уровень полезности для игрока при данном сочетании стратегий.

Пусть оба участника игры проявляют осторожность, то есть реализовался исход (A, A). Если произойдет столкновение, то выигрыш пешехода составит (-1100), а выигрыш водителя — (-300). В противном случае выигрыш пешехода составит (-100), а выигрыш водителя — (-100). Ожидаемые выигрыши равны в этом случае:

$$\frac{1}{100}\cdot(-1100) + \frac{99}{100}\cdot(-100) = -110 \quad \text{— для пешехода,}$$

$$\frac{1}{100}\cdot(-300) + \frac{99}{100}\cdot(-100) = -102 \quad \text{— для автомобилиста.}$$

---

[9] условных единиц

[10] Здесь, как это обычно делается в экономической теории, предполагается, что определенные на лотереях предпочтения каждого игрока удовлетворяют условиям, которые гарантируют существование представляющей их линейной функции полезности (имеется в виду линейность по вероятностям). См. Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн, "Теория игр и экономическое поведение", М.: Наука, 1970, П. Фишберн, "Теория игр для принятия решений". М.: Наука, 1978.

Аналогичные вычисления нужно провести для трех других исходов. Рассчитанные выигрыши представлены в Таблице 2.

Заметьте, что полученная нормальная форма игры не содержит информацию о случайных ходах природы, их вероятностях и соответствующих случайных выигрышах.

Концепция доминирования

Задача теории игр — по данному описанию игры, предсказать, какие стратегии выберут игроки и каким при этом будет исход игры, или, по крайней мере, сузить множество прогнозируемых исходов. В некоторых случаях предсказать исход игры можно однозначно, если исходить из предположения о том, что каждый игрок рационален.

Пусть в Игре 1 (стр. 6) выгода от совместимости программного обеспечения сравнительно мала, например, $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$ (Таблица 3).

Тогда вне зависимости от того, какой компьютер выберет 2-й игрок, 1-му игроку выгодно выбрать компьютер IBM PC, поскольку $3 > 0$ и $2 > 1$. Аналогично, 2-й игрок предпочтет Макинтош, поскольку $3 > 1$ и $4 > 0$. В обоих случаях имеет место так называемое строгое доминирование двух указанных стратегий: если стратегия A при любых действиях других игроков дает больший выигрыш, чем стратегия B, то принято говорить, что стратегия A **строго доминирует** стратегию B.

Таблица 3

		Игрок 2	
		IBM	Mac
Игрок 1	IBM	3, 1	2, 3
	Mac	0, 0	1, 4

Дадим формальное определение строгого доминирования. Здесь и в дальнейшем мы будем применять обозначение $\boldsymbol{x}_{-i}$, что означает «все элементы вектора $\boldsymbol{x}$, кроме i-го», т.е.

$$\boldsymbol{x}_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n).$$

При этом будем считать, что $(x_i, \boldsymbol{x}_{-i})$.— это то же самое, что $\boldsymbol{x}$.

Определение 1.

Стратегия $x_i \in X_i$ игрока i строго доминирует стратегию $y_i \in X_i$, если при любых стратегиях, выбранных остальными игроками, $\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}$, выполнено

$$u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) > u_i(y_i, \boldsymbol{x}_{-i}),$$

где $X_{-i} = \bigtimes_{j \neq i} X_j$.

Определение строгого доминирования можно наглядно проиллюстрировать в случае двух игроков, множества стратегий одного из которых — действительная прямая (см. Рис 1). На рисунке стратегия x_1 первого игрока строго доминирует стратегию y_1. Это выражается в том, что график функции полезности этого игрока по стратегии x_2 второго, соответствующий x_1, лежит ниже графика, соответствующего y_1.

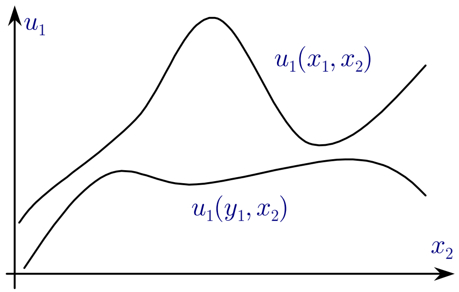


Рисунок 1. Стратегия $\boldsymbol{x_1}$ строго доминирует стратегию $\boldsymbol{y_1}$.

Стратегия называется строго доминирующей, если она строго доминирует любую другую стратегию.

Определение 2.

Стратегия $x_i \in X_i$ игрока i является его **строго доминирующей стратегией**, если при любых стратегиях, выбранных остальными игроками, $\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}$, она дает игроку i больший выигрыш, чем любая другая его стратегия $y_i \in X_i$, т.е.

$$u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) > u_i(y_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \ \forall \boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i} \ \forall y_i \in X_i\colon\ y_i \neq x_i.$$

В соответствие с данным определением не может существовать более одной строго доминирующей стратегии. Естественно ожидать, что рациональный игрок выберет именно такую стратегию. Поэтому при наличии у каждого игрока строго доминирующей стратегии исход игры может быть предсказан однозначно.

Предсказание исхода игры не столь однозначно, когда у каждого игрока имеется лишь так называемая (слабо) доминирующая стратегия, обеспечивающая этому игроку не меньший выигрыш, чем любая другая его стратегия при любых стратегиях других игроков. Приведем определения (слабого) доминирования.

Определение 3.

Стратегия $x_i \in X_i$ игрока i (слабо) **доминирует** стратегию $y_i \in X_i$ (или, другими словами, стратегия y_i доминируется стратегией x_i), если при любых стратегиях, выбранных остальными игроками, $\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}$, выполнено

$$u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \geqslant u_i(y_i, \boldsymbol{x}_{-i}),$$

и существует хотя бы один набор стратегий других игроков, $\boldsymbol{x}'_{-i} \in X_{-i}$, такой что

$$u_i(x_i, \boldsymbol{x}'_{-i}) > u_i(y_i, \boldsymbol{x}'_{-i}).$$

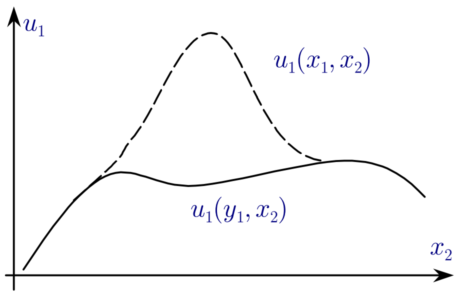


Рисунок 2. Стратегия $\boldsymbol{x}_1$ (слабо) доминирует стратегию $\boldsymbol{y}_1$.

Слабое доминирование можно проиллюстрировать на графике, аналогичном тому, который мы использовали для иллюстрации строгого доминирования. Стратегия x_1 первого игрока слабо, но не строго доминирует его стратегию y_1 (см. Рис. 2), поскольку график функции полезности для x_1 не везде строго выше, чем для y_1.

Определение 4.

Стратегия $x_i \in X_i$ игрока i является его (слабо) **доминирующей стратегией**, если при любых стратегиях, выбранных остальными игроками, $\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}$, она доминирует любую другую его стратегию, $y_i \in X_i$, либо эквивалентна ей, т.е.

$$u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \geqslant u_i(y_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \ \forall \boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i} \ \forall y_i \in X_i.$$

Из определения следует, что если стратегия x_i *строго доминирует* стратегию y_i, то стратегия x_i *доминирует* стратегию y_i.

Кроме того, если стратегия является *строго доминирующей*, то она является *доминирующей*.

Определение 5.

Исход игры $\boldsymbol{x}^* \in X$ является **равновесием в доминирующих стратегиях**, если стратегия каждого игрока в этом исходе является его доминирующей стратегией.

Естественно ожидать, что если в игре существует равновесие в доминирующих стратегиях, то именно оно будет реализовавшимся исходом игры. Следующая игра иллюстрирует равновесие в доминирующих стратегиях.

Игра 3. «Парламентское голосование»

Парламент разделен на 3 фракции: «белые», «зеленые» и «красные». В каждой фракции одинаковое количество членов. Проходит голосование по некоторому законопроекту. Каждая из фракций может проголосовать «за» или «против». Решение принимается большинством голосов. Зеленым и красным нравится законопроект, белым — нет. Если законопроект пройдет, то зеленые и красные получат выигрыш 1, а белые — -1, в противном случае все получат 0. ⇦

Таблица 4

(A) **Белые:** за

		Красные: За	Красные: против
Зеленые	за	-1 1 1	-1 1 1
Зеленые	против	-1 1 1	0 0 0

(B) **Белые:** против

		Красные: За	Красные: против
Зеленые	за	-1 1 1	0 0 0
Зеленые	против	0 0 0	0 0 0

Удобно представить исходы игры в виде двух таблиц А и Б (см. Таблицу 4). Белые выбирают между таблицей А и таблицей Б. Их выигрыши записаны в левом верхнем углу этих таблиц.

Если зеленые проголосуют за, то вектор их выигрышей будет

$(1$ (за, за)$, 1$ (за, против)$, 1$ (против, за)$, 0$ (против, против)$)$.

В скобках указано, как голосуют другие фракции. Если же они проголосуют против, то вектор выигрышей будет

$(1$ (за, за)$, 0$ (за, против)$, 0$ (против, за)$, 0$ (против, против)$)$.

Очевидно, что голосовать за законопроект является доминирующей стратегией зеленых. То же самое можно сказать и о красных.

Белые имеют следующие выигрыши (при аналогичных предположениях о том как голосуют другие фракции):

за $(-1, -1, -1, 0)$,

против $(-1, 0, 0, 0)$.

Таким образом, голосовать против законопроекта является доминирующей стратегией белых (хотя, заметим, эта стратегия не сможет им помочь выиграть).

Тем самым, в этой игре существует равновесие в доминирующих стратегиях. В нем зеленые и красные голосуют «за», а белые — «против».

Приведем теперь пример игры с непрерывными стратегиями, в который есть равновесие в доминирующих стратегиях.

Игра 4. «Аукцион Ви́кри».[11]

Некий предмет продается с аукциона по следующим правилам. Каждый из участников аукциона ($i = 1, ..., n$) подает в тайне от других свою заявку — предлагаемую им цену p_i. Побеждает участник, предложивший самую высокую цену, но платит он следующую по порядку убывания цену. Если самую высокую цену предложат сразу несколько участников, то победитель определяется жребием. Если i-й участник окажется победителем, то его выигрыш составит $v_i - p$, где v_i — ценность для него данного предмета, p — цена, которую он должен заплатить; выигрыш всех остальных участников будет равен нулю. ⇦

[11] W. Vickrey (1961), "Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders", *Journal of Finance*, **16**, 8-37. Уильям Викри стал Нобелевским лауреатом по экономике за 1996г.

Особенность аукциона Викри состоит в том, что «правдивая» стратегия является доминирующей стратегией для каждого участника. Под «правдивой» стратегией понимается стратегия, заключающаяся в том, что участник называет цену, совпадающую с ценностью для него данного предмета, ($p_i = v_i$). Проверим это. Проанализируем данную игру при $n = 2$. (При большем количестве участников рассуждения будут аналогичными). Поскольку участники входят в данную игру симметрично, то достаточно рассмотреть мотивацию только одного из них, например, 1-го.

Вычислим сначала выигрыши 1-го игрока при разных исходах. Если 1-й участник назовет более высокую цену, чем 2-й ($p_1 > p_2$), то он выиграет аукцион и заплатит p_2. При этом его выигрыш составит $v_1 - p_2$. Если 1-й участник назовет более низкую цену, чем 2-й ($p_1 < p_2$), то он проиграет аукцион и получит выигрыш 0. Если цены совпадут ($p_1 = p_2$), то с вероятностью 1/2 1-й участник выиграет и получит выигрыш $v_1 - p_2$, а с вероятностью 1/2 он проиграет и получит выигрыш 0. Таким образом, его ожидаемый выигрыш составит $(v_1 - p_2)/2$. Окончательно запишем функцию выигрыша 1-го участника:

$$u_1(p_1, p_2) = \begin{cases} v_1 - p_2, & \text{если } p_1 > p_2 \\ \dfrac{v_1 - p_2}{2}, & \text{если } p_1 = p_2 \\ 0, & \text{если } p_1 < p_2. \end{cases}$$

Чтобы показать, что «правдивая» стратегия, $p_1 = v_1$, является доминирующей, нужно показать, что она дает не меньший выигрыш, чем любая другая стратегия. Следует рассмотреть 3 случая: $p_2 > v_1$, $p_2 = v_1$ и $p_2 < v_1$.

[$p_2 > v_1$] Если 2-й участник назовет цену, превышающую v_i, то 1-му участнику не выгодно выигрывать аукцион; его выигрыш (полезность) в этом случае был бы отрицательный, а в случае проигрыша он получит 0. Поскольку в рассматриваемом случае при выборе «правдивой» стратегии 1-й участник проиграет аукцион, то «правдивая» стратегия является одной из оптимальных.

[$p_2 = v_1$] Если 2-й участник назовет цену, совпадающую с v_i, то 1-й участник при любом выборе получит 0. Значит, «правдивая» стратегия даст ему выигрыш не меньший, чем любая другая.

[$p_2 < v_1$] Если 2-й участник назовет цену, меньшую v_i, то для 1-го участника выгодно выиграть аукцион, поскольку в этом случае его выигрыш будет положительным. «Правдивая» стратегия обеспечивает ему победу на аукционе, и приносит максимальный выигрыш, $v_1 - p_2$.

Мы видим, что «правдивая» стратегия в самом деле является доминирующей для 1-го участника. Более того, как несложно увидеть, это единственная доминирующая стратегия. Если он назовет цену ниже или выше своей оценки v_1, то можно подобрать такую цену 2-го участника, что 1-й участник потеряет по сравнению с $p_1 = v_1$.

Проведя аналогичные рассуждения для 2-го участника, мы сделаем вывод, что в этой игре существует (единственное) равновесие в доминирующих стратегиях.

$$p_1 = v_1, \qquad p_2 = v_2.$$

Последовательное отбрасывание строго доминируемых стратегий

К сожалению, довольно часто бывает, что по крайней мере у одного из игроков нет строго доминирующей стратегии или даже просто доминирующей стратегии. Иногда в таких играх исход можно предсказать однозначно, если дополнительно к рациональности предположить, что каждый игрок знает цели партнеров и способен достаточно глубоко «просчитать» их умозаключения.

Рассмотрим в Игре 1 случай, когда $a < c < b$. Пусть, к примеру, $a = 1$, $c = 2$, $b = 3$.

Если 2-й игрок выберет IBM, то 1-му игроку тоже выгодно выбрать IBM. Если же 2-й игрок выберет Макинтош, то 1-му игроку будет выгодно выбрать Макинтош. Эти оптимальные решения выделены в Таблице 5 подчеркиванием соответствующих выигрышей. Здесь оптимальное для 1-го игрока решение будет зависеть от того, какое решение примет 2-й игрок.

В этом и ему подобных случаях нельзя рассматривать мотивацию одного игрока, не рассматривая мотивацию других игроков. Игрок, у которого нет доминирующей стратегии, должен делать какие-то предположения о том, какие стратегии могут выбрать другие игроки. Не специфицируя механизма формирования ожиданий, мы можем исходить из того, что все такие механизмы не противоречат рациональности игроков. Наиболее очевидное требование можно сформулировать следующим образом:

«*Рациональный игрок не станет выбирать строго доминируемую стратегию*».

Таблица 5

		Игрок 2	
		IBM	Mac
Игрок 1	IBM	$\underline{3}$; 2	1; 3
	Mac	0; 0	$\underline{2}$; 5

Определение 6.

Стратегия $y_i \in X_i$ игрока i называется строго доминируемой, если существует стратегия $x_i \in X_i$, которая ее строго доминирует, т.е.

$$u_i(y_i, \boldsymbol{x}_{-i}) < u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \ \forall \boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}.$$

Проанализируем ситуацию, в которой структура игры (множества стратегий и функции выигрышей), а также то, что все игроки рациональны, известно каждому игроку. Более того, мы рассмотрим ситуацию, в которой все это *общеизвестно*,[12] то есть не только каждый игрок знает это, но он знает, что все другие игроки знают это, и так далее до бесконечности.

В этом случае игрок должен не только сам исходить из того, что ни один из игроков не выберет доминируемую стратегию, но и учитывать, что другие игроки исходят из того, что ни один из игроков не выберет доминируемую стратегию. Эту цепочку предположений следует продолжить до бесконечности.

На этой основе строится метод получения решения игры путем отбрасывания строго доминируемых стратегий. Если в результате последовательности шагов, состоящих в вычеркивании строго доминируемых стратегий получился «остаток», в котором у каждого игрока только одна стратегия, то при сделанных нами предположениях о рациональности представляется естественным, что игроки должны выбрать именно эти не отброшенные стратегии.

Можно отметить, что в данном случае предполагается не только рациональность игроков, но и их способность провести соответствующие рассуждения, ведь цепочка рассуждений может быть достаточно длинной (я знаю, что он знает, что я знаю…).

[12] англ. *common knowledge*

В Таблице 6 и таблицах на Рис. 3 показан пример процесса отбрасывания строго доминируемых стратегий. В исходной игре 3×3 (Таблица 6) стратегия II строго доминирует стратегию III, поэтому стратегию III следует вычеркнуть (игрок выбирающий строки, не станет выбирать эту стратегию). Отбрасываемая стратегия обведена двойной волнистой рамкой. Остается игра 2×3 (Рис. 3 а)), в которой стратегия A строго доминирует стратегию C. Стратегию C вычеркиваем (поскольку игрок, выбирающий столбцы, прогнозируя действия игрока, выбирающего строки, не станет ее выбирать). В получившейся игре 2×2 (Рис. 3 б)) стратегия I строго доминирует стратегию II. В получившейся после отбрасывания стратегии II игре (Рис. 3 в)) у игрока, выбирающего строки, осталась только одна стратегия. Для игрока, выбирающего столбцы, стратегия A строго лучше стратегии B, поэтому стратегия B вычеркивается. Остается игра (Рис. 3 г)), в которой каждый игрок имеет только по одной стратегии: (I, A). На основании этого можно сделать вывод, что в исходной игре 3×3 должен реализоваться исход (I, A).

Таблица 6

	A	B	C
I	2, 3	3, 0	2, 1
II	1, 4	2, 6	4, 2
III	0, 7	1, 2	3, 8

а)

	A	B	C
I	2, 3	3, 0	2, 1
II	1, 4	2, 6	4, 2

б)

	A	B
I	2, 3	3, 0
II	1, 4	2, 6

в)

	A	B
I	2, 3	3, 0

г)

	A
I	2, 3

Рисунок 3.

Если общеизвестно, что игроки рациональны, и после последовательного вычеркивания строго доминируемых стратегий у каждого игрока останется единственная стратегия (как в приведенной выше игре), то, как и в случае существования строго доминирующих стратегий у каждого игрока, исход игры может быть предсказан однозначно.[13]

Даже если рассматриваемая процедура даст неоднозначный результат, то по крайней мере можно быть уверенным, что решение должно принадлежать полученному «остатку».

Ситуации, когда в игре существует равновесие в доминирующих стратегиях, достаточно редки. И далеко не во всех играх можно найти решение, отбрасывая строго доминируемые стратегии. Соответствующий пример игры представлен в Таблице 7.

Таблица 7

	A	B	C
X	2, $\underline{3}$	2, 0	$\underline{3}$, 1
Y	1, 4	$\underline{4}$, $\underline{6}$	2, 2
Z	$\underline{3}$, 7	1, 2	3, $\underline{8}$

Второй игрок выберет стратегию A, если предполагает, что первый выберет стратегию Z; в то же время стратегия B для него предпочтительнее в случае, если первый выберет Y.

Естественно предположить, что при отсутствии у всех игроков доминирующих стратегий, выбор каждого игрока зависит от *ожиданий* того, какими будут выборы других. Далее мы рассмотрим концепцию решения, основанную на этой идее.

Равновесие по Нэшу

Кроме ситуаций, рассмотренных в предыдущем разделе, бывают ситуации,[14] которые естественно моделировать, исходя из следующих предположений:

---

[13] Остаток при последовательном отбрасывании *строго* доминируемых стратегий всегда один и тот же, вне зависимости от того, в каком порядке происходит отбрасывание стратегий. Можно рассмотреть также процедуру последовательного отбрасывания (слабо) доминируемых стратегий (правда она кажется менее обоснованной с точки зрения рациональности). В этой последней процедуре порядок уже существенен.

[14] Можно представить себе популяцию игроков типа А (скажем, кошки) и игроков типа Б (скажем, мышки). Игрок типа А при встрече с игроком типа Б имеет оправданные своим или чужим опытом ожидания

- игроки при принятии решений ориентируются на предполагаемые действия партнеров;
- ожидания являются равновесными (совпадают с фактически выбранными партнерами действиями).

Если считать, что все игроки рациональны, так что каждый выбирает стратегию, дающую ему наибольший выигрыш при данных ожиданиях, то эти предположения приводят к концепции решения, называемой **равновесием Нэша**. В равновесии у каждого игрока нет оснований пересматривать свои ожидания.

Формально равновесие Нэша определяется следующим образом.

Определение 7.

Набор стратегий $\boldsymbol{x}^* \in X$ является равновесием Нэша,[15] если:

1) стратегия x_i^* каждого игрока является наилучшим для него откликом на ожидаемые им стратегии других игроков $\boldsymbol{x}_{-i}^e$:

$$u_i(x_i^*, \boldsymbol{x}_{-i}^e) = \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}^e) \quad \forall i = 1, \dots, n;$$

2) ожидания совпадают с фактически выбираемыми стратегиями:

$$\boldsymbol{x}_{-i}^e = \boldsymbol{x}_{-i}^* \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Заметим, что при использовании равновесия Нэша для моделирования игровых ситуаций вопросы о том, знают ли игроки цели партнеров, знают ли они о рациональности партнеров, умеют ли их просчитывать, и т.д., отходят на второй план. Способ

относительно поведения партнера типа Б, и заранее на них ориентируется (и наоборот). Однако это не единственный тип ситуаций, в которых рассматриваемый подход является адекватным.

[15] Американский математик Джон Нэш получил Нобелевскую премию по экономике в 1994 г. вместе с Дж. Харшаньи и Р. Зельтеном «за новаторский анализ равновесий в теории некооперативных игр». Концепция равновесия была предложена в следующих статьях: Nash, J. F. (1950) "Equilibrium Points in N-Person Games," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **36**, 48-49. Nash, J. F. (1951) "Non-Cooperative Games," *Annals of Mathematics*, **54**, 286-295.

Следует оговориться, что сам Нэш не вводил в определение ожиданий. Исходное определение Нэша совпадает с тем свойством, о котором говорится далее.

формирования ожиданий выносится за рамки анализа; здесь важно только то, что ожидания являются равновесными.

Но если при анализе равновесия Нэша не важно, знает ли игрок цели других игроков, то может возникнуть сомнение в правомерности рассмотрения концепции Нэша в контексте игр с *полной информацией*. Все дело в том, что термин «полная информация» в теории игр имеет довольно узкое значение. Он фактически подразумевает только полноту сведений о типах партнеров (термин «тип игрока», разъясняется в параграфе, посвященном байесовским играм).

Как легко видеть, приведенное определение равновесия Нэша эквивалентно следующему свойству, которое обычно и используется в качестве определения:

> Набор стратегий $\boldsymbol{x}^* \in X$ является равновесием Нэша, если стратегия x_i^* каждого игрока является наилучшим для него откликом на стратегии других игроков $\boldsymbol{x}_{-i}^*$:
>
> $$u_i(x_i^*, \boldsymbol{x}_{-i}^*) = \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}^*) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Это свойство можно также записать в терминах так называемых функций (отображений) отклика.

Определение 8.

Отображение отклика i-го игрока,

$$R_i: X_{-i} \mapsto X_i,$$

сопоставляет каждому набору стратегий других игроков, $\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}$, множество стратегий i-го игрока, каждая из которых является наилучшим откликом на $\boldsymbol{x}_{-i}$. Другими словами,

$$u_i(y_i, \boldsymbol{x}_{-i}) = \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \quad \forall \boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}, \forall y_i \in R_i(\boldsymbol{x}_{-i}).$$

Введение отображений отклика позволяет записать определение равновесия Нэша более компактно: набор стратегий $\boldsymbol{x}^* \in X$ является равновесием Нэша, если

$$x_i^* \in R_i(\boldsymbol{x}_{-i}^*) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Если отклик каждого игрока однозначен (является *функцией*), то множество равновесий Нэша совпадает с множеством решений системы уравнений:

$$x_i^* = R_i(\boldsymbol{x}_{-i}^*) \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

В Таблице 7 отображения отклика игроков изображены подчеркиванием выигрышей, соответствующих оптимальным действиям. Равновесие Нэша в данной игре — клетка (B, Y), поскольку выигрыши обоих игроков в ней подчеркнуты.

Проиллюстрируем использование функций отклика на примере игры, в которой игроки имеют континуум стратегий.

Игра 5. *«Международная торговля»*

Две страны одновременно выбирают уровень таможенных пошлин, τ_i. Объем торговли между странами, x,[16] зависит от установленных пошлин как

$$x = 1 - \tau_1 - \tau_2.$$

Цель каждой страны — максимизировать доходы:

$$u_i = \tau_i x \to \max.$$

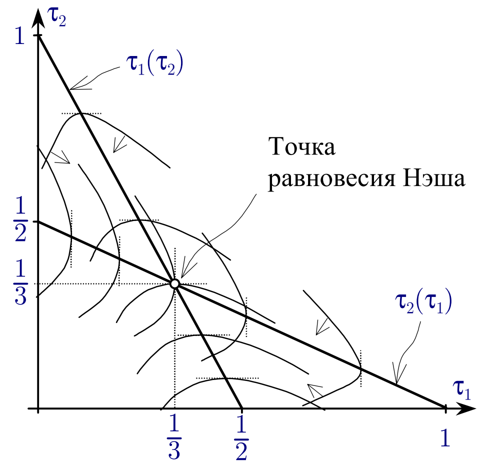


Рисунок 4. Равновесие Нэша в игре «Международная торговля»

⇦

Максимизируем выигрыш 1-й страны,

$$\tau_1(1 - \tau_1 - \tau_2),$$

по τ_1 считая фиксированным уровень пошлины, установленный 2-й страной. Условие первого порядка имеет вид

$$1 - 2\tau_1 - \tau_2 = 0.$$

Поскольку максимизируемая функция строго вогнута, то условие первого порядка соответствует глобальному максимуму.

Условие первого порядка для задачи максимизации выигрыша 2-й страны находится аналогично:

$$1 - \tau_1 - 2\tau_2 = 0.$$

Решив систему из двух линейных уравнений, найдем равновесие Нэша:

$$\tau_1^* = \tau_2^* = 1/3.$$

Оптимальный отклик 1-й страны на уровень таможенной пошлины, установленной 2-й страной описывается функцией

$$\tau_1(\tau_2) = \frac{1 - \tau_2}{2}.$$

Аналогично, функция отклика 2-й страны имеет вид

$$\tau_2(\tau_1) = \frac{1 - \tau_1}{2}.$$

Чтобы найти равновесие Нэша, требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} \tau_1(\tau_2^*) = \tau_1^*, \\ \tau_2(\tau_1^*) = \tau_2^*. \end{cases}$$

Графически поиск равновесия Нэша показан не Рис. 4. Точки, лежащие на кривых оптимального отклика $\tau_1(\tau_2)$ и $\tau_2(\tau_1)$, характеризуются тем, что в них касательные к кривым безразличия игроков параллельны соответствующей оси координат. Напомним, что кривой безразличия называют множество точек, в которых полезность рассматриваемого индивидуума одна и та же ($u_i(\boldsymbol{x}) = const$). Равновесие находится как точка пересечения кривых отклика.

Преимущество использования концепции равновесия Нэша состоит в том, что можно найти решение и в тех играх, в которых отбрасывание доминируемых стратегий не позволяет этого сделать. Однако сама концепция может показаться более спорной, поскольку опирается на сильные предположения о поведении игроков.

Связь между введенными концепциями решений описывается следующими утверждениями.

---

[16] В этой игре мы для упрощения не делаем различия между экспортом и импортом.

> **Теорема 1.**
> Если $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ — равновесие Нэша в некоторой игре, то ни одна из составляющих его стратегий не может быть отброшена в результате применения процедуры последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий.

Обратная теорема верна в случае единственности.

> **Теорема 2.**
> Если в результате последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий у каждого игрока остается единственная стратегия, x_i^*, то $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ — равновесие Нэша в этой игре.

Доказательства этих двух утверждений даны в Приложении B (стр. 18). Нам важно здесь, что концепция Нэша не входит в противоречие с идеями рациональности, заложенной в процедуре отбрасывания строго доминируемых стратегий.

По-видимому, естественно считать, что разумно определенное равновесие, не может быть отброшено при последовательном отбрасывании строго доминируемых стратегий. Первую из теорем можно рассматривать как подтверждение того, что концепция Нэша достаточно разумна. Отметим, что данный результат относится только к строгому доминированию. Можно привести пример равновесия Нэша с одной или несколькими слабо доминируемыми стратегиями (см. напр. Таблицу 12 на стр. 27).

Равновесие Нэша в смешанных стратегиях

Нетрудно построить примеры игр, в которых равновесие Нэша отсутствует. Следующая игра представляет пример такой ситуации.

Игра 6. «*Инспекция*»

В этой игре первый игрок (проверяемый) поставлен перед выбором — платить или не платить подоходный налог. Второй — налоговой инспектор, решает, проверять или не проверять именно этого налогоплательщика. Если инспектор «ловит» недобросовестного налогоплательщика, то взимает в него штраф и получает поощрение по службе, более чем компенсирующее его

издержки; в случае же проверки «исправного» налогоплательщика, инспектор, не получая поощрения, тем не менее несет издержки, связанные с проверкой. Матрица выигрышей представлена в таблице 8.

Таблица 8

		Инспектор	
		проверять	не проверять
Проверяемый	нарушать	-1, $\underline{1}$	$\underline{1}$, 0
	не нарушать	$\underline{0}$, -1	0, $\underline{0}$

Если инспектор уверен, что налогоплательщик выберет не платить налог, то инспектору выгодно его проверить. С другой стороны, если налогоплательщик уверен, что его проверят, то ему лучше заплатить налог. Аналогичным образом, если инспектор уверен, что налогоплательщик заплатит налог, то инспектору не выгодно его проверять, а если налогоплательщик уверен, что инспектор не станет его проверять, то он предпочтет не платить налог. Оптимальные отклики показаны в таблице подчеркиванием соответствующих выигрышей. Очевидно, что ни одна из клеток не может быть равновесием Нэша, поскольку ни в одной из клеток не подчеркнуты одновременно оба выигрыша.

В подобной игре каждый игрок заинтересован в том, чтобы его партнер не смог угадать, какую именно стратегию он выбрал. Этого можно достигнуть, внеся в выбор стратегии элемент неопределенности.

Те стратегии, которые мы рассматривали раньше, принято называть **чистыми стратегиями**. Чистые стратегии в статических играх по сути дела совпадают с действиями игроков. Но в некоторых играх естественно ввести в рассмотрение также смешанные стратегии. Под **смешанной стратегией** понимают распределение вероятностей на чистых стратегиях. В частном случае, когда множество чистых стратегий каждого игрока конечно,

$$X_i = \{x_i^1, \ldots, x_i^{n_i}\},$$

(соответствующая игра называется **конечной**,), смешанная стратегия представляется вектором вероятностей соответствующих чистых стратегий:

$$\mu_i = (\mu_i^1, \ldots, \mu_i^{n_i}).$$

Обозначим множество смешанных стратегий i-го игрока через M_i:

$$M_i = \{\mu_i \mid \mu_i^k \geqslant 0,\ k=1, \ldots n_i;\ \mu_i^1 + \ldots + \mu_i^{n_i} = 1\}.$$

Как мы уже отмечали, стандартное предположение теории игр (как и экономической теории) состоит в том, что если выигрыш — случайная величина, то игроки предпочитают действия, которые приносят им наибольший ожидаемый выигрыш. Ожидаемый выигрыш i-го игрока, соответствующий набору смешанных стратегий всех игроков, $(\mu_1, \ldots, \mu_m)$, вычисляется по формуле

$$U(\mu_i, \mu_{-i}) = \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{n_m} \mu_1^{k_1} \cdots \mu_m^{k_m}\, u_i(x_1^{k_1}, \ldots, x_m^{k_m}).$$

Ожидание рассчитывается в предположении, что игроки выбирают стратегии независимо (в статистическом смысле).

Смешанные стратегии можно представить как результат **рандомизации** игроком своих действий, то есть как результат их случайного выбора. Например, чтобы выбирать каждую из двух возможных стратегий с одинаковой вероятностью, игрок может подбрасывать монету. Эта интерпретация подразумевает, что выбор стратегии зависит от некоторого *сигнала*, который сам игрок может наблюдать, а его партнеры — нет.[17] Например, игрок может выбирать стратегию в зависимости от своего настроения, если ему известно распределение вероятностей его настроений, или от того, с какой ноги он в этот день встал.[18]

Определение 9.

Набор смешанных стратегий $\mu^* = (\mu_1^*, \ldots, \mu_m^*)$ является **равновесием Нэша в смешанных стратегиях**, если:

1) стратегия μ_i^* каждого игрока является наилучшим для него откликом на ожидаемые им стратегии других игроков μ_{-i}^e:

$$U(\mu_i^*, \mu_{-i}^e) = \max_{\mu_i \in M_i} U(\mu_i, \mu_{-i}^e)\ \ \forall i = 1, \ldots, n;$$

[17] Если сигналы , наблюдаемые игроками, статистически зависимы, то это может помочь игрокам скоординировать свои действия. Это приводит к концепции *коррелированного равновесия*.

[18] Впоследствии мы рассмотрим, как можно достигнуть эффекта рандомизации в рамках байесовского равновесия.

2) ожидания совпадают с фактически выбираемыми стратегиями:

$$\mu_{-i}^e = \mu_{-i}^*\ \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что *равновесие Нэша в смешанных стратегиях является обычным равновесием Нэша в так называемом смешанном расширении игры*, т.е. игре, чистые стратегии которой являются смешанными стратегиями исходной игры.

Найдем равновесие Нэша в смешанных стратегиях в Игре 6.

Обозначим через μ вероятность того, что налогоплательщик не платит подоходный налог, а через ν — вероятность того, что налоговой инспектор проверяет налогоплательщика.

В этих обозначениях ожидаемый выигрыш налогоплательщика равен

$$U_1(\mu, \nu) = \mu\,[\nu\cdot(-1) + (1-\nu)\cdot 1] + (1-\mu)\,[\nu\cdot 0 + (1-\nu)\cdot 0] = \\ = \mu\,(1 - 2\nu),$$

а ожидаемый выигрыш инспектора равен

$$U_2(\mu, \nu) = \nu\,[\mu\cdot 1 + (1-\mu)\cdot(-1)] + (1-\mu)\,[\mu\cdot 0 + (1-\mu)\cdot 0] = \\ = \nu\,(2\mu - 1).$$

Если вероятность проверки мала ($\nu < 1/2$), то налогоплательщику выгодно не платить налог, т.е. выбрать $\mu = 1$. Если вероятность проверки велика, то налогоплательщику выгодно заплатить налог, т.е. выбрать $\mu = 0$. Если же $\nu = 1/2$, то налогоплательщику все равно, платить налог или нет, он может выбрать любую вероятность μ из интервала $[0, 1]$. Таким образом, отображение отклика налогоплательщика имеет вид:

$$\mu(\nu) = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu < 1/2 \\ [0, 1], & \text{если } \nu = 1/2 \\ 0, & \text{если } \nu > 1/2. \end{cases}$$

Рассуждая аналогичным образом, найдем отклик налогового инспектора:

$$\nu(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu < 1/2 \\ [0, 1], & \text{если } \mu = 1/2 \\ 1, & \text{если } \mu > 1/2. \end{cases}$$

Графики отображений отклика обоих игроков представлены на Рис. 5. По осям на этой диаграмме откладываются вероятности (ν и μ соответственно). Они имеют единственную общую точку $(1/2, 1/2)$. Эта точка соответствует равновесию Нэша в смешанных стратегиях. В этом равновесии, как это всегда бывает в равновесиях с *невырожденными* смешенными стратегиями (то есть в таких равновесиях, в которых ни одна из стратегий не выбирается с вероятностью 1), каждый игрок рандомизирует стратегии, которые обеспечивают ему одинаковую ожидаемую полезность. Вероятности использования соответствующих чистых стратегий, выбранные игроком, определяются не структурой выигрышей данного игрока, а структурой выигрышей его партнера, что может вызвать известные трудности с интерпретацией данного решения.

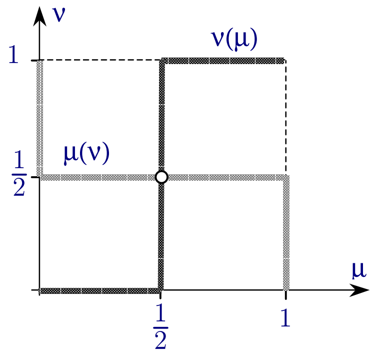


Рисунок 5. Отображения отклика в игре «Инспекция»

В отличие от равновесия в чистых стратегиях, равновесие в смешанных стратегиях в конечных играх существует всегда,[19] что является следствием следующего общего утверждения.

Теорема 3.
Предположим, что в игре $G = \langle I, \{X_i\}_{i\in I}, \{u_i\}_{i\in I}\rangle$ у любого игрока множество стратегий X_i непусто, компактно и выпукло, а функция выигрыша $u_i(\cdot)$ вогнута по x_i и непрерывна. Тогда в игре G существует равновесие Нэша (в чистых стратегиях).

Существование равновесия Нэша в смешанных стратегиях в играх с конечным числом чистых стратегий является следствием того, что равновесие в смешанных стратегиях является равновесием в чистых стратегиях в смешанном расширении игры.

Следствие (Теорема Нэша).
Равновесие Нэша в смешанных стратегиях существует в любой конечной игре.

[19] Этот результат был доказан Нэшем в статье 1950-го года, цитируемой в сноске 15.

Заметим, что существование в игре равновесия в чистых стратегиях не исключает существования равновесия в невырожденных смешанных стратегиях.

Рассмотрим в Игре 1 «Выбор компьютера» случай, когда выгоды от совместимости значительны, т.е. $a < c$ и $b < c$. В этом варианте игры два равновесия в чистых стратегиях: (IBM, IBM) и (Mac, Mac). Обозначим μ и ν вероятности выбора компьютера IBM PC первым и вторым игроком соответственно. Ожидаемый выигрыш 1-го игрока равен

$$\begin{aligned} U_1(\mu,\nu) &= \mu\,[\nu\cdot(a+c) + (1-\nu)\cdot a] + (1-\mu)\,[\nu\cdot 0 + (1-\nu)\cdot c] = \\ &= \mu\,[\nu\cdot 2c - (c-a)] + (1-\nu)\,c, \end{aligned}$$

а его отклик имеет вид

$$\mu(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \nu < (c-a)/2c \\ [0,1], & \text{если } \nu = (c-a)/2c \\ 1, & \text{если } \nu > (c-a)/2c\,. \end{cases}$$

Ожидаемый выигрыш 2-го игрока равен

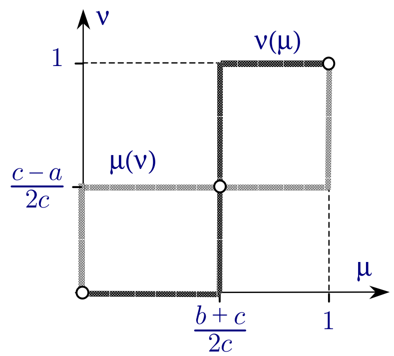


Рисунок 6. Случай, когда в игре «Выбор компьютера» существует три равновесия, одно из которых — равновесие в невырожденных смешанных стратегиях

$$\begin{aligned} U_2(\mu,\nu) &= \nu\,[\mu\cdot c + (1-\mu)\cdot 0] + (1-\nu)\,[\mu\cdot b + (1-\mu)\cdot(b+c)] = \\ &= \nu\,[\mu\cdot 2c - (b+c)] + b + (1-\mu)\,c, \end{aligned}$$

а его отклик имеет вид

$$\nu(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu < (b+c)/2c \\ [0,1], & \text{если } \mu = (b+c)/2c \\ 1, & \text{если } \mu > (b+c)/2c\,. \end{cases}$$

Графики отображений отклика и точки, соответствующие трем равновесиям изображены на Рис.6. Как видно, в рассматриваемой игре кроме двух равновесий в чистых стратегиях имеется одно равновесие в невырожденных смешанных стратегиях. Соответствующие вероятности равны

$$\mu = \frac{b+c}{2c} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{c-a}{2c}.$$

Приложение A

Теорема.
Предположим, что в игре $G = \langle I, \{X_i\}_{i\in I}, \{u_{i0}\}_{i\in I}\rangle$ у любого игрока множество стратегий X_i непусто, компактно и выпукло, а функция выигрыша $u_i(\cdot)$ вогнута по x_i и непрерывна. Тогда существует равновесие Нэша.

Доказательство.

Докажем, что отображение отклика, $R_i(\cdot)$, каждого игрока полунепрерывно сверху и его значение при каждом $\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}$ непусто и выпукло. Непустота следует из теоремы Вейерштрасса (непрерывная функция на компакте достигает максимума).

Докажем выпуклость. Пусть z', $z'' \in R_i(\boldsymbol{x}_{-i})$. Очевидно, что $u(z', \boldsymbol{x}_{-i}) = u(z'', \boldsymbol{x}_{-i})$. Из вогнутости по x_i функции $u_i(\cdot)$ следует, что при $\alpha \in [0, 1]$

$$u(\alpha z' + (1-\alpha)z'', \boldsymbol{x}_{-i}) \geqslant \alpha u(z', \boldsymbol{x}_{-i}) + (1-\alpha)u(z'', \boldsymbol{x}_{-i}) =$$
$$= u(z', \boldsymbol{x}_{-i}) = u(z'', \boldsymbol{x}_{-i}).$$

Поскольку функция $u_i(\cdot)$ достигает максимума в точках z' и z'', то строгое неравенство здесь невозможно. Таким образом,

$$\alpha z' + (1-\alpha)z'' \in R_i(\boldsymbol{x}_{-i}).$$

Докажем теперь полунепрерывность сверху отображения $R_i(\cdot)$. Рассмотрим последовательность x_i^n сходящуюся к $\bar{x}_i$ и последовательность $\boldsymbol{x}_{-i}^n$сходящуюся к $\bar{\boldsymbol{x}}_{-i}$, причем $x_i^n \in R_i(\boldsymbol{x}_{-i}^n)$. Заметим, что в силу компактности множеств X_j $\bar{x}_i \in X_i$ и $\bar{\boldsymbol{x}}_{-i} \in X_{-i}$. Нам нужно доказать, что $\bar{x}_i \in R_i(\bar{\boldsymbol{x}}_{-i})$. По определению отображения отклика

$$u(x_i^n, \boldsymbol{x}_{-i}^n) \geqslant u(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}^n) \quad \forall x_i \in X_i, \forall n.$$

Из непрерывности функции $u_i(\cdot)$ следует, что

$$u(\bar{x}_i, \bar{\boldsymbol{x}}_{-i}) \geqslant u(x_i, \bar{\boldsymbol{x}}_{-i}) \quad \forall x_i \in X_i.$$

Тем самым, по введенному выше определению отображения отклика, $\bar{x}_i \in R_i(\bar{\boldsymbol{x}}_{-i})$.

Опираясь на доказанные только что свойства отображения $R_i(\cdot)$ и на теорему Какутани, докажем существование равновесия по Нэшу, то есть такого набора стратегий $\boldsymbol{x}^* \in X$, для которого выполнено

$$x_i^* \in R_i(\boldsymbol{x}_{-i}^*) \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Определим отображение $R(\cdot)$ из X в X следующим образом:

$$R(\boldsymbol{x}) = R_1(\boldsymbol{x}_{-1}) \times \ldots \times R_n(\boldsymbol{x}_{-n}).$$

Отметим, что это отображение удовлетворяет тем же свойствам, что и каждое из отображений $R_i(\cdot)$, так как является их декартовым произведением.

Отображение $R(\cdot)$ и множество X удовлетворяют свойствам, которые необходимы для выполнения теоремы Какутани. Таким образом, существует неподвижная точка отображения $R(\cdot)$:

$$\boldsymbol{x}^* \in R(\boldsymbol{x}^*).$$

Очевидно, что точка $\boldsymbol{x}^*$ есть равновесие по Нэшу. ■

Приложение B

В этом приложении мы формально докажем утверждения о связи между равновесием Нэша и процедурой последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий.

Сначала определим формально процедуру последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий. Пусть исходная игра задана как

$$G = \langle I, \{X_i\}_I, \{u_i\}_I\rangle.$$

Определим последовательность игр $\{G^{[t]}\}_{t=0,1,2,\ldots}$, каждая из которых получается из последующей игры отбрасыванием строго доминируемых стратегий. Игры отличаются друг от друга множествами допустимых стратегий:

$$G^{[t]} = \langle I, \{X_i^{[t]}\}_I, \{u_i\}_I\rangle.$$

Процедура начинается с $G^{[0]} = G$.

Множество допустимых стратегий i–го игрока на шаге t+1 рассматриваемой процедуры берется равным множеству не доминируемых строго стратегий i–го игрока в игре t-го шага. Множества не доминируемых строго стратегий будем обозначать через ND_i (см. определение строго доминируемых стратегий (Определение 6, стр. 11)). Формально

$$ND_i = \{x_i \in X_i \mid \neg\, \exists\, y_i \in X_i : u_i(y_i, \boldsymbol{x}_{-i}) > u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \ \forall \boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}\}.$$

Таким образом, можно записать шаг рассматриваемой процедуры следующим образом:

$$X_i^{[t+1]} = ND_i^{[t]},$$

где $ND_i^{[t]}$ — множество не доминируемых строго стратегий в игре $G^{[t]}$.

Приведем теперь доказательства Теорем 1 и 2 (стр. 15). Теорема 1 утверждает следующее:

> Если $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ — равновесие Нэша в некоторой игре, то ни одна из стратегий не может быть отброшена в результате применения процедуры последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий.

Если использовать только что введенные обозначения, то Теорема 1 утверждает, что если $\boldsymbol{x}^*$ — равновесие Нэша в исходной игре G, то на любом шаге t выполнено

$$x_i^* \in X_i^{[t]}, \ \forall i \in I, \forall\, t = 1, 2, \ldots$$

или

$$\boldsymbol{x}^* \in X^{[t]}, \ \forall\, t = 1, 2, \ldots\ .$$

***Доказательство Теоремы** 1*:

Пусть есть такой шаг τ, что на нем должна быть отброшена стратегия x_i^* некоторого игрока $i \in I$. Предполагается, что на предыдущих шагах ни одна из стратегий не была отброшена:

$$\boldsymbol{x}^* \in X^{[t]}, \forall t = 1, \ldots, \tau.$$

По определению строгого доминирования существует другая стратегия игрока i, $x_i' \in X_i^{[\tau]}$, которая дает этому игроку в игре $G^{[\tau]}$ более высокий выигрыш при любых выборах других игроков:

$$u_i(x_i', \boldsymbol{x}_{-i}) > u_i(x_i^*, \boldsymbol{x}_{-i}) \ \forall \boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}^{[\tau]}.$$

В том числе, это соотношение должно быть выполнено для $\boldsymbol{x}_{-i}^*$, поскольку мы предположили, что стратегии $\boldsymbol{x}_{-i}^*$ не были отброшены на предыдущих шагах процедуры ($\boldsymbol{x}_{-i}^* \in X_{-i}^{[\tau]}$). Значит,

$$u_i(x_i', \boldsymbol{x}_{-i}^*) > u_i(x_i^*, \boldsymbol{x}_{-i}^*).$$

Однако это неравенство противоречит тому, что $\boldsymbol{x}^*$ — равновесие Нэша. ■

Докажем теперь Теорему 2. Напомним ее формулировку:

> Если в результате последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий у каждого игрока остается единственная стратегия, x_i^*, то $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ — равновесие Нэша в этой игре.

Данная теорема относится к случаю, когда в процессе отбрасывания строго доминируемых стратегий начиная с некоторого шага $\bar{t}$ остается единственный набор стратегий, $\boldsymbol{x}^*$, т.е.

$$X_i^{[t]} = \{x_i^*\}\ , \ \ \forall i \in I, \forall t = 1, \ldots, \bar{t}.$$

Теорема утверждает, что $\boldsymbol{x}^*$ является единственным равновесием Нэша исходной игры.

***Доказательство Теоремы** 2*:

Поскольку, согласно доказанной только что теореме, ни одно из равновесий Нэша не может быть отброшено, нам остается только доказать, что указанный набор стратегий $\boldsymbol{x}^*$ является равновесием Нэша. Предположим, что это не так. Это означает, что существует стратегия $\tilde{x}_i$ некоторого игрока i, такая что

$$u_i(x_i^*, \boldsymbol{x}_{-i}^*) < u_i(\tilde{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}^*).$$

По предположению, стратегия $\tilde{x}_i$ была отброшена на некотором шаге τ, поскольку она не совпадает с x_i^*. Таким образом, существует некоторая строго доминирующая ее стратегия $x_i' \in X_i^{[\tau]}$, так что

$$u_i(x_i', \boldsymbol{x}_{-i}) > u_i(\tilde{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \ \ \forall \boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}^{[\tau]}.$$

В том числе это неравенство выполнено при $\boldsymbol{x}_{-i} = \boldsymbol{x}_{-i}^*$:

$$u_i(x_i', \boldsymbol{x}_{-i}^*) > u_i(\tilde{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}^*).$$

Стратегия x_i' не может совпадать со стратегией x_i^*, поскольку в этом случае вышеприведенные неравенства противоречат друг другу. В свою очередь, из этого следует, что должна существовать стратегия x_i'', которая доминирует стратегию x_i' на некотором шаге $\tau' > \tau$, т.е.

$$u_i(x_i'', \boldsymbol{x}_{-i}) > u_i(x_i', \boldsymbol{x}_{-i}) \ \ \forall \boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}^{[\tau']}.$$

В том числе

$$u_i(x_i'', \boldsymbol{x}_{-i}^*) > u_i(x_i', \boldsymbol{x}_{-i}^*).$$

Можно опять утверждать, что стратегия x_i'' не может совпадать со стратегией x_i^*, иначе вышеприведенные неравенства противоречили бы друг другу.

Продолжая эти рассуждения, мы получим последовательность шагов $\tau < \tau' < \tau'' < \ldots$ и соответствующих допустимых стратегий $x_i', x_i'', x_i''', \ldots$, не совпадающих с x_i^*. Это противоречит существованию шага $\bar{t}$, начиная с которого множества допустимых стратегий состоят только из x_i^*. ■

Задачи

1. Два игрока размещают некоторый объект на плоскости, то есть выбирают его координаты (x, y). Игрок 1 находится в точке (x_1, y_1), а игрок 2 — в точке (x_2, y_2). Игрок 1 выбирает координату x, а игрок 2 — координату y. Каждый стремиться, чтобы объект находился как можно ближе к нему. Покажите, что в этой игре у каждого игрока есть строго доминирующая стратегия.

2. Докажите, что если в некоторой игре у каждого из игроков существует строго доминирующая стратегия, то эти стратегии составляют единственное равновесие Нэша.

3. Объясните, почему равновесие в доминирующих стратегиях должно быть также равновесием в смысле Нэша. Приведите пример игры, в которой существует равновесие в доминирующих стратегиях, и, кроме того, существуют равновесия Нэша, не совпадающие с равновесием в доминирующих стратегиях.

Найдите в следующих играх все равновесия Нэша.

4. Игра 2 (стр. 7), выигрыши которой представлены в Таблице 9.

5. «Орехи»

Два игрока делят между собой 4 ореха. Каждый делает свою заявку на орехи: $x_i = 1,\ 2$ или 3. Если $x_1 + x_2 \leqslant 4$, то каждый получает сколько просил, в противном случае оба не получают ничего.

6. Два преподавателя экономического факультета пишут учебник. Качество учебника (q) зависит от их усилий (e_1 и e_2 соответственно) по функции

$$q = 2(e_1 + e_2).$$

Целевая функция каждого имеет вид

$$u_i = q - e_i$$

— качество минус усилия. Можно выбрать усилия на уровне 1, 2 или 3.

7. «Третий лишний»

Каждый из трех игроков выбирает одну из сторон монеты: «орёл» или «решка». Если выборы игроков совпали, то каждому выдается по 1 рублю. Если выбор одного из игроков отличается от выбора двух других, то он выплачивает им по 1 рублю.

8. Три игрока выбирают одну из трех альтернатив: A, B или C. Альтернатива выбирается голосованием большинством голосов. Каждый из игроков голосует за одну и только за одну альтернативу. Если ни одна из альтернатив не наберет большинство, то будет выбрана альтернатива A. Выигрыши игроков в зависимости от выбранной альтернативы следующие:

$$u_1(A) = 2,\ u_1(B) = 1,\ u_1(C) = 0,$$
$$u_2(A) = 0,\ u_2(B) = 2,\ u_2(C) = 1,$$
$$u_3(A) = 1,\ u_3(B) = 0,\ u_3(C) = 2.$$

9. Формируются два избирательных блока, которые будут претендовать на места в законодательном собрании города N-ска. Каждый из блоков может выбрать одну из трех ориентаций: «левая» (L), «правая» (R) и «экологическая» (E). Каждая из ориентаций может привлечь 50, 30 и 20% избирателей соответственно. Известно, что если интересующая их ориентация не представлена на выборах, то избиратели из соответствующей группы не будут голосовать. Если блоки выберут разные ориентации, то каждый получит соответствующую долю голосов. Если блоки выберут одну и ту же ориентацию, то голоса соответствующей группы избирателей разделятся поровну между ними. Цель каждого блока — получить наибольшее количество голосов.

10. Два игрока размещают точку на плоскости. Один игрок выбирает абсциссу, другой — ординату. Их выигрыши заданы функциями:

а) $u_x(x,y) = -x^2 + x\,(y + a) + y^2,\ \ u_y(x,y) = -y^2 + y\,(x + b) + x^2,$

б) $u_x(x,y) = -x^2 - 2ax\,(y + 1) + y^2,\ \ u_y(x,y) = -y^2 + 2by\,(x + 1) + x^2,$

в) $u_x(x,y) = -x - y/x + 1/2\,y^2,\ \ u_y(x,y) = -y - x/y + 1/2\,x^2,$

(a, b – коэффициенты).

11. «Мороженщики на пляже»

Два мороженщика в жаркий день продают на пляже мороженое. Пляж можно представить как единичный отрезок. Мороженщики выбирают, в каком месте пляжа им находиться, т.е. выбирают координату $x_i \in [0, 1]$. Покупатели равномерно рассредоточены по пляжу и покупают мороженое у ближайшего к ним продавца. Если $x_1 < x_2$, то первый обслуживают $(x_1 + x_2)/2$ долю пляжа, а второй — $1 - (x_1 + x_2)/2$. Будем считать, что в случае, если они расположатся в одной и той же точке ($x_1 = x_2$), покупатели поровну распределятся между ними. Каждый мороженщик стремиться обслуживать как можно большую долю пляжа.

12. «Аукцион»

Рассмотрите аукцион, подобный описанному в Игре 4, при условии, что выигравший аукцион игрок платит названную им цену.

13. Проанализируйте Игру 1 «Выбор компьютера» (стр. 6) и найдите ответы на следующие вопросы:

а) При каких условиях на параметры a, b и c будет существовать равновесие в доминирующих стратегиях? Каким будет это равновесие?

б) При каких условиях на параметры будет равновесием Нэша исход, когда оба выбирают IBM? Когда это равновесие единственно? Может ли оно являться также равновесием в доминирующих стратегиях?

14. Каждый из двух соседей по подъезду выбирает, будет он подметать подъезд раз в неделю или нет. Пусть каждый оценивает выгоду для себя от двойной чистоты в $a > 0$ денежных единиц, выгоду от одинарной чистоты — в $b > 0$ единиц, от неубранного подъезда — в 0, а свои затраты на личное участие в уборке — в $c > 0$. При каких соотношениях между a, b и c в игре сложатся равновесия вида: (0) никто не убирает, (1) один убирает, (2) оба убирают.

15. Предположим, что в некоторой игре двух игроков, каждый из которых имеет 2 стратегии, существует единственное равновесие Нэша. Покажите, что в этой игре хотя бы у одного из игроков есть доминирующая стратегия.

16. Каждый из двух игроков $(i = 1, 2)$ имеет по 3 стратегии: a, b, c и x, y, z соответственно. Взяв свое имя как бесконечную последовательность символов типа *иваниваниван…*, задайте выигрыши первого игрока так: $u_1(a, x)$ = «и», $u_1(a, y)$ = «в», $u_1(a, z)$ = «а», $u_1(b, x)$ = «н», $u_1(b, y)$ = «и», $u_1(b, z)$ = «в», $u_1(c, x)$ = «а», $u_1(c, y)$ = «н», $u_1(c, z)$ = «и». Подставьте вместо каждой буквы имени ее номер в алфавите, для чего воспользуйтесь Таблицей 11. Аналогично используя фамилию, задайте выигрыши второго игрока, $u_2(.)$.

1) Есть ли в Вашей игре доминирующие и строго доминирующие стратегии? Если есть, то образуют ли они равновесие в доминирующих стратегиях?

2) Каким будет результат последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий?

3) Найдите равновесия Нэша этой игры.

Таблица 11

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		а	б	в	г	д	е	ё	ж	з
1	и	й	к	л	м	н	о	п	р	с
2	т	у	ф	х	ц	ч	ш	щ	ъ	ы
3	ь	э	ю	я						

17. Составьте по имени, фамилии и отчеству матричную игру трех игроков, у каждого из которых по 2 стратегии. Ответьте на вопросы предыдущей задачи.

18. Заполните пропущенные выигрыши в следующей таблице так, чтобы в получившейся игре…

(0) не было ни одного равновесия Нэша,

(1) было одно равновесие Нэша,

(2) было два равновесия Нэша,

(3) было три равновесия Нэша,

(4) было четыре равновесия Нэша.

Таблица 10

?, 1	2, ?
4, ?	?, 0

19. 1) Объясните, почему в любом равновесии Нэша выигрыш i-го игрока не может быть меньше, чем

$$\min_{\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}} \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}).$$

2) Объясните, почему в любом равновесии Нэша выигрыш i-го игрока не может быть меньше, чем

$$\max_{x_i \in X_i} \min_{\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}} u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}).$$

20. Задача относится к свойствам **антагонистических игр двух лиц**. Антагонистической игрой двух лиц называется игра, в которой сумма выигрышей обоих игроков постоянна:

$$u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1, x_2) = C.$$

(В частном случае, когда $C = 0$, такая игра **называется игрой с нулевой суммой**.)

Объясните, почему множество седловых точек функции $u_1(x_1, x_2)$ в антагонистической игре двух лиц совпадает с множеством равновесий Нэша.

(Напомним, что **седловой точкой** функции $u_1(x_1, x_2)$, называют такую точку $(x_1^*, x_2^*) \in X_1 \times X_2$, что для любых $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$ выполнено

$$u_1(x_1, x_2^*) \leqslant u_1(x_1^*, x_2^*) \leqslant u_1(x_1^*, x_2).)$$

Проверьте, что в следующих играх нет равновесия Нэша в чистых стратегиях. Найдите равновесие Нэша в смешанных стратегиях.

21. Докажите, основываясь на результатах двух предыдущих задач, что в антагонистической игре двух лиц равновесие Нэша (в чистых стратегиях) существует тогда и только тогда, когда

$$\min_{\boldsymbol{x}_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} u_1(x_1, x_2) = \max_{x_1 \in X_1} \min_{\boldsymbol{x}_2 \in X_2} u_1(x_1, x_2).$$

22. «Орел или решка»

Первый из двух игроков прячет монетку, положив ее по своему выбору вверх орлом или решкой. Второй игрок должен угадать, как лежит монетка. Если второй игрок угадает, то первый должен отдать ему рубль, в противном случае он должен отдать первому рубль.

23. «Камень - ножницы – бумага»

Два игрока играют в следующую игру. Каждый называет один из трех предметов: «камень», «ножницы» или «бумага». Игрок, назвавший камень, выигрывает игрока, назвавшего ножницы (ножницы тупятся о камень), игрок, назвавший ножницы, выигрывает игрока, назвавшего бумагу (ножницы режут бумагу), а игрок, назвавший бумагу, выигрывает игрока, назвавшего камень (камень можно завернуть в бумагу). Выигравший игрок получает 1, проигравший получает -1. Если названные предметы совпали, то каждый игрок получает 0.

24. Идет война между синими и красными. Генерал синих хочет занять город красных, имея две роты. К городу можно подойти по одной из двух дорог. Генерал синих каждую свою роту может послать по любой из дорог. Генерал красных располагает тремя ротами и может приказать любой роте оборонять любую дорогу. Синие займут город в том случае, если на одной из дорог у них будет больше рот, чем у красных. При этом синие получат 1, а красные — -2. Если синие не займут город, то выигрыши составят -1 и 1 соответственно.

25. В некоторой игре двух игроков, каждый из которых имеет 2 стратегии, у каждого из игроков все выигрыши различны, и существует ровно два равновесия Нэша. Покажите, что в этой игре есть еще равновесие в невырожденных смешанных стратегиях.

2. Динамические игры с совершенной информацией

Многие ситуации, включающие взаимодействие индивидуумов, являются по своему смыслу динамическими. Люди взаимодействуют друг с другом во времени и действуют, реагируя на те решения, которые ранее приняли другие. Другими словами, принимая решения, каждый игрок располагает определенной информацией о решениях, принятых другими игроками, что предполагает очередность принятия решений (ходов).

Динамической будем называть такую игру, в которой каждый игрок может сделать несколько ходов и по крайней мере один из игроков, делая ход, знает, какой ход сделал другой игрок (возможно, он сам). В этой ситуации он стоит перед *свершившимися фактами* (уже сделанными ранее и известными ему ходами) и должен учитывать их при выборе своих действий.

Приведем пример динамической игры.

Игра 7. *«Террорист»*

В самолет, который должен лететь из Майами в Нью-Йорк, сел террорист. Террорист требует, чтобы пилот летел на Кубу, угрожая в противном случае взорвать самолет. Предположим, что террорист не может определить, куда действительно летит самолет. Первый ход в этой игре тогда делает пилот. Он может лететь либо на Кубу, либо в Нью-Йорк. Если пилот посадит самолет на Кубе, то его выигрыш составит –1, а выигрыш террориста составит 1. Если же самолет сядет в Нью-Йорке, то делает свой ход террорист. Он может либо взорвать бомбу, либо не

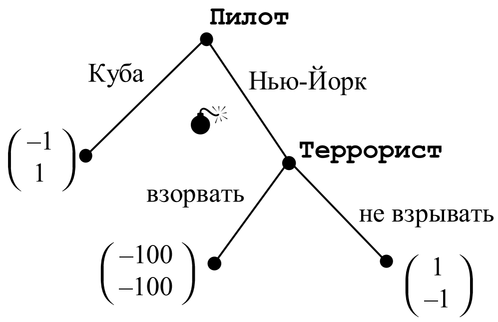


Рисунок 7. Игра «Террорист»

взрывать. Если бомба взорвется, то выигрыши обоих игроков составят –100, в противном случае выигрыш пилота составит 1, а выигрыш террориста составит –1. ⇦

Данную игру удобно представить в виде диаграммы, изображающей **дерево игры** (см. Рис. 7).[20]

Решение игры можно найти, в предположении, что игроки рациональны и что рациональность и структура игры являются общеизвестными фактами. При этом естественно воспользоваться методом **обратной индукции**.

В соответствии с этим методом игру «разматывают» с конца. Рассмотрим последнюю вершину игры, в которой один из игроков делает выбор. В данном случае нам надо спрогнозировать как поступит террорист, оказавшись в Нью-Йорке. От решения террориста в этой ситуации (вершине) зависит исход игры, поскольку пилот уже сделал свой ход, и не может «взять обратно». Если террорист рационален, то он примет решение не взрывать бомбу, поскольку –1 больше –100. Таким образом, действия террориста можно однозначно предсказать.

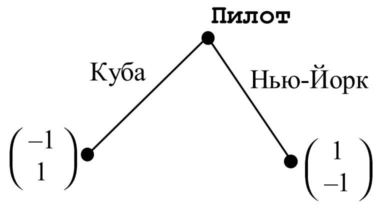


Рисунок 8. Ситуация выбора пилота

Поскольку, как мы предположили, рациональность террориста является общим знанием, то пилот может «просчитать» действия террориста и, тем самым, будет знать, что случиться, если он прилетит в Нью-Йорк.

Чтобы было более понятно, какой выбор стоит перед пилотом, удобно частично «свернуть» дерево игры, учитывая то, что действия террориста в Нью-Йорке известны. Полученная усеченная (редуцированная) игра показана на Рис. 8.

В этой игре действия пилота несложно предсказать — он полетит в Нью-Йорк, поскольку предпочитает выигрыш 1 выигрышу –1. Таким образом, исход игры однозначен: пилот посадит самолет в Нью-Йорке, а террорист не станет взрывать бомбу.

Изобразим полученное решение на дереве (см. Рис. 9). Те действия, которые были выбраны соответствующим игроком в каждой из вершин, изобразим двойными линиями. Исход игры определяется траекторией, состоящей из выбранных действий,

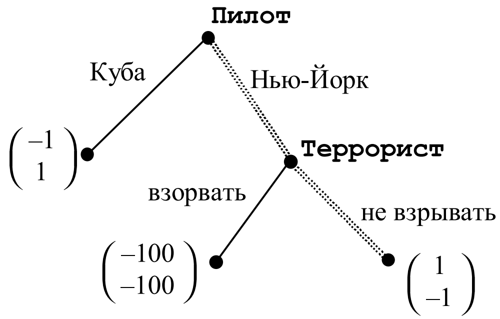


Рисунок 9. Решение игры «Террорист»

[20] Нам удобнее изображать дерево «кроной вниз». Сам термин *дерево* взят из теории графов.

и идущей из начальной вершины в одну из конечных вершин.[21]

В данном случае мы рассмотрели **игру с совершенной информацией**, то есть такую игру, в которой каждый игрок, делая выбор, знает всю предыдущую историю игры, или, если говорить с точки зрения представления игры в виде дерева, каждый игрок знает, в какой из возможных ситуаций (вершин дерева) он находится.

Представление игры в виде дерева соответствует **развернутой форме** игры.[22] В дальнейшем мы увидим, как можно представить динамическую игру в нормальной форме. А сейчас перечислим, что должно включать описание динамической игры (с совершенной информацией) в развернутой форме:

✦ множество вершин дерева игры, в том числе одну начальную вершину;

✦ для каждой вершины, кроме начальной, — единственную вершину, которая непосредственно ей предшествует; при этом не должно быть циклов, то есть цепь предшествующих вершин, построенная из любой вершины, должна заканчиваться в начальной вершине (что предполагает, в том числе, отсутствие циклов);

✦ множество игроков;

✦ для каждой вершины, кроме конечных, — единственного игрока, которому принадлежит ход в данной вершине;

✦ для каждой конечной вершины, то есть такой, которая не предшествует ни одной другой вершине, — вектор выигрышей всех игроков.

(Если в игре есть случайные ходы природы, то следует также задать распределение вероятностей на множестве всех возможных ходов природы.)

Первые два пункта здесь соответствуют описанию дерева игры.

Действие в этой конструкции однозначно задается парой непосредственно следующих одна за другой вершин. Для каждой вершины можно определить множество действий, которые можно осуществить, находясь в данной вершине. Множество возможных действий связано однозначным соответствием с множеством вершин, которые непосредственно следуют за данной вершиной (т.е. которым непосредственно предшествует данная вершина), то есть каждое выбранное действие приводит в одну и только в одну вершину.

Каждой вершине в игре с совершенной информацией соответствует единственная **предыстория** — то есть последовательность действий, которая приводит из начальной вершины в данную вершину.

В случае, когда в динамической игре участвуют два игрока, и игра происходит в 2 этапа, то обратную индукцию удобно провести на основе функции отклика 2-го игрока на действия 1-го. Следующая игра иллюстрирует использование этого приема.

Игра 8 («*Рэкет*»)[23]

Рэкетиры выбирают, какую долю α ($\alpha \in [0,1]$) выручки отбирать у фирмы. Они при этом максимизируют $\alpha p y$, где p — цена, y — выпуск фирмы. Фирма имеет квадратичную функцию издержек, так что ее прибыль (выигрыш) равна

$$(1-\alpha) p y - y^2.$$

Фирма максимизирует прибыль при ограничении $y \geqslant 0$. Рэкетиры делают ход первыми. Зная, какую долю выручки они хотят отбирать, фирма выбирает уровень выпуска. ⇦

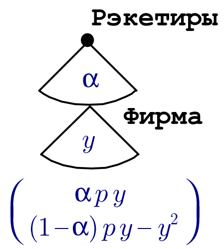


Рисунок 10. Игра «Рэкет»

---

[21] Предсказанный исход игры кажется довольно странным. Ведь вполне естественно, что пилот будет опасаться, что террорист все-таки взорвет самолет. Данный исход, однако, полностью соответствует описанию игры, а также сделанным предположениям. Можно сделать игру более реалистичной, если добавить возможность того, что может встретиться террорист, которому в соответствии с его целевой функции будет выгодно взорвать бомбу. Такую игру мы рассмотрим в дальнейшем, в параграфе, посвященном так называемым *байесовским* динамическим играм.

[22] Как и нормальная форма игры, развернутая форма была впервые в явном виде описана Дж. фон Нейманом (См. ссылки в сноске 8). См также Kuhn, H. W. (1953), "Extensive Games and the Problem of Information," pp. 193-216 in *Contributions to the Theory of Games*, Volume II (*Annals of Mathematics Studies*, **28**) (H.W. Kuhn and A. W. Tucker, eds.), Princeton: Princeton University Press.

[23] Можно интерпретировать игру несколько по другому: вместо рэкетиров рассматривать государство, устанавливающее ставку налога.

На Рисунке 10 изображена структура описанной игры. Поскольку множества возможных действий игроков в рассматриваемой игре не конечны (например, у рэкетиров — интервал $[0, 1] \in \mathbb{R}$), то на рисунке они изображены в виде секторов. При этом каждой точки верхнего сектора, соответствующего выбору α, начинается некий сектор, соответствующий выбору y. На рисунке представлен лишь один из таких нижних секторов. Поскольку в данной игре имеется бесконечное множество (континуум) действий и исходов, на диаграмме уместно представить способы вычисления выигрышей для выбранных действий игроков как функции от действий игроков.

Рэкетиры, зная функцию выигрыша фирмы, могут определить, как скажется на ее выпуске выбор ими экспроприируемой доли выручки этой фирмы. Для того, чтобы предсказать объем выпуска, им необходимо решить задачу фирмы: максимизировать прибыли по y при заданном α. Условия первого порядка такой задачи имеют вид:

$$(1-\alpha)\,p - 2y = 0.$$

Если $\alpha < 1$, то $y > 0$. Поскольку функция прибыли вогнута, то условие первого порядка является достаточным, т.е. определяемый на его основе объем выпуска фирмы является оптимальным. При $\alpha = 1$ получаем решение $y = 0$. Таким образом, рэкетиры могут вывести уравнение оптимального выпуска фирмы как функции доли α:

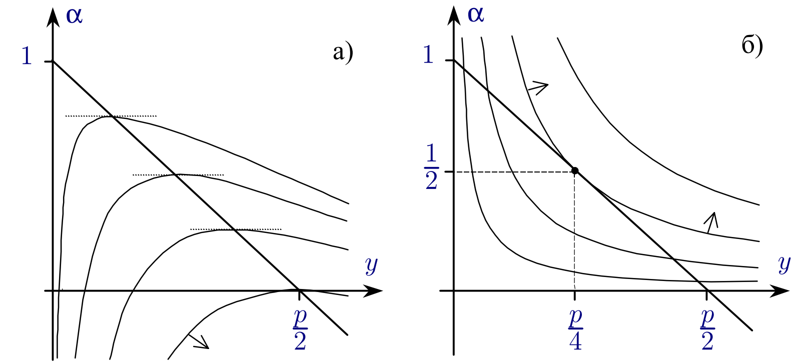


Рисунок 11. (а) Получение функции отклика фирмы. (б) Выбор рэкетирами оптимальной отбираемой доли.

$$y(\alpha) = \frac{(1-\alpha)\,p}{2}.$$

Зная эту функцию отклика, рэкетиры максимизируют свою целевую функцию,[24] т.е. решают следующую задачу

$$\alpha\, p\, y(\alpha) \to \max_{\alpha \in [0,1]}.$$

или, после подстановки $y(\alpha)$,

$$\frac{p^2}{2} \cdot (1-\alpha)\,\alpha \to \max_{\alpha \in [0,1]}.$$

Максимум достигается при $\alpha = 1/2$, то есть рэкетиры будут отбирать у фирмы половину выручки. При этом выпуск фирмы составит $p/4$. Графически поиск решения представлен на Рис. 11.

Мы рассмотрели здесь примеры игр, в которых каждый раз при использовании обратной индукции оптимальный выбор единственен. Если это не так, процесс поиска решения разветвляется — решение будет зависеть от того, какую именно альтернативу из тех, которые дают игроку одинаковый выигрыш, выберет этот игрок. На Рисунке 12 показано использование обратной индукции в такой игре. В этой игре обратная индукция дает два решения: (L_1, R_2) и (L_2, R_1).

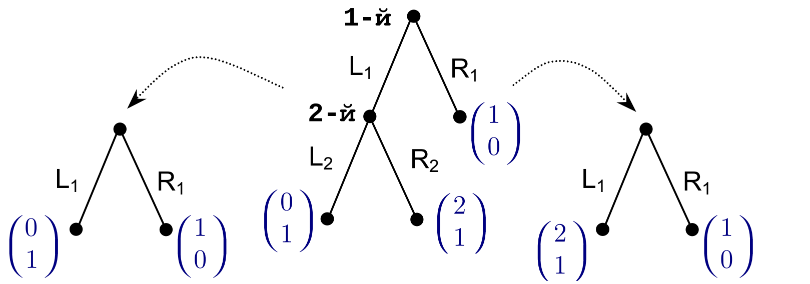


Рисунок 12. Разветвление решения при использовании обратной индукции

Если выигрыши всех игроков во всех конечных вершинах различны, то неоднозначности при использовании обратной индукции не возникает, поэтому решение должно быть единственным.

[24] В моделях налогообложения аналог функции $\alpha p\, y(\alpha)$ известен как кривая Лаффера.

Теорема 4.
В конечной игре с совершенной информацией алгоритм обратной индукции дает хотя бы одно решение.
Если, кроме того, выигрыши всех игроков во всех конечных вершинах различны, то такое решение единственно.

Идея доказательства теоремы состоит в том, что задача оптимизации на конечном множестве альтернатив всегда имеет хотя бы одно решение; если же целевая функция принимает различные значения на множестве альтернатив, то решение этой задачи единственно. Кроме того, каждая из редуцированных игр, получаемых с помощью обратной индукции, будет конечной и с различными выигрышами, если выигрыши были различными в исходной игре.

Мы рассмотрели, как находить решение динамической игры с совершенной информацией с помощью обратной индукции.

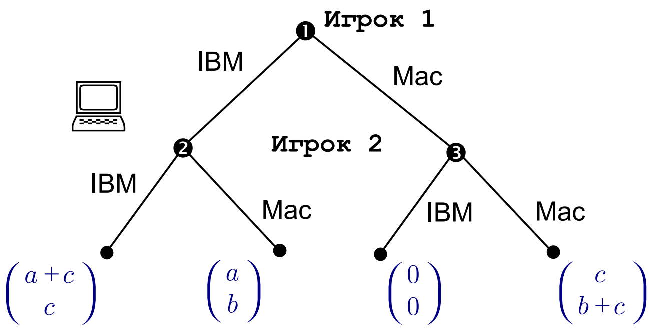


Рисунок 13. Динамический вариант игры «Выбор компьютера»

Другой подход состоит в том, чтобы применить к динамической игре концепцию равновесия Нэша, так же, как мы применяли ее к статическим играм.

Для того, чтобы это сделать, следует записать динамическую игру в нормальной форме. Как мы помним, описание игры в нормальной форме состоит из задания (1) множества игроков, (2) множества стратегий каждого игрока и (3) функции выигрыша каждого игрока на множестве исходов.

Множество игроков, конечно, должно быть одним и тем же в нормальной форме и в развернутой форме игры. Прежде всего уточним понятие стратегии для игр такого типа.

В игре в развернутой форме (чистая) стратегия — это полный план действий игрока: что он будет делать в каждой из вершин, в которой ход принадлежит ему. Это должен быть действительно *полный* план, то есть в нем должно быть определено, что игрок выберет в *любой* своей вершине, даже если из каких-либо соображений ясно, что процесс игры вряд ли может привести в эту вершину. То есть это должен быть настолько полный план, что доверенное лицо игрока может использовать его в качестве инструкции, будучи уверенным, что его поведение будет совпадать с поведением самого игрока.

Процесс игры для динамической игры в нормальной форме можно условно представить себе следующим образом. Каждый игрок до начала игры сообщает выбранную им стратегию организатору игры. Организатор, руководствуясь этими стратегиями, осуществляет за игроков их ходы. Когда последовательность ходов приведет организатора в конечную вершину, он раздает всем игрокам выигрыши, соответствующие этой конечной вершине. При такой интерпретации мы, по сути дела, имеем *статическую* игру в которой выигрыши определяются с помощью описанного только что алгоритма.

Проиллюстрируем, как на основе развернутой формы динамической игры получить ее нормальную форму, на примере динамического варианта Игры 1 «Выбор компьютера» (стр. 6). Предположим, что 1-й игрок выбирает себе компьютер первым. Дерево такой игры представлено на Рисунке 13.

Вершины на дереве пронумерованы для удобства обозначения альтернатив в разных вершинах. Игрок 1 имеет в этой игре две стратегии, совпадающие с альтернативами в вершине ❶. Игрок 2 имеет 4 стратегии. Каждая его стратегия определяет действия в двух вершинах: ❷ и ❸. Таким образом, 2-го игрок имеет следующие стратегии: (❷IBM, ❸IBM), (❷IBM, ❸Mac), (❷Mac, ❸IBM), (❷Mac, ❸Mac). В Таблице 12 представлена та же игра в нормальной форме.

Таблица 12

		Игрок 2			
		❷IBM ❸IBM	❷IBM ❸Mac	❷Mac ❸IBM	❷Mac ❸Mac
Игрок 1	❶IBM	$\underline{a+c}$; $\underline{c}$	$\underline{a+c}$; $\underline{c}$	$\underline{a}$; $\underline{b}$	a ; $\underline{b}$
	❶Mac	0 ; 0	c ; $\underline{b+c}$	0 ; 0	$\underline{c}$; $\underline{b+c}$

План, соответствующий, например, второй из указанный стратегий, второй игрок формулирует следующим образом: я выберу IBM, если первый игрок выберет IBM и Mac, если первый игрок выберет Mac.

Можно заметить, что нормальная форма динамического варианта игры более сложна, чем нормальная форма статического варианта игры (см. Таблицу 1). В игре с тремя типами компьютеров у 2-го игрока было бы уже 9 стратегий. Еще более сложна нормальная форма динамической игры, в которой у игроков — бесконечное множество стратегий.

Для нормальной формы игры естественным решением, как мы уже видели, является равновесие Нэша. Сравним равновесия Нэша с результатом применения метода обратной индукции. По видимому, содержательно наиболее интересен случай, когда $a < c$ и $b < c$.

Сначала разберем, что предсказывает обратная индукция. При сделанных предположениях о параметрах игры можно предсказать, что 2-й игрок в вершине ❷ выберет IBM, поскольку $c < b$ (он совместимость ценит больше, чем использование компьютера любимого типа), а в вершине ❸ выберет Макинтош, поскольку $b + c > 0$. В редуцированной игре 1-й игрок должен сделать выбор между выигрышами $a + c$ (IBM) и c (Макинтош). Он выберет IBM. Таким образом, обратная индукция предсказывает, что игроки выберут следующие стратегии:

1-й — ❶IBM,
2-й — (❷IBM, ❸Mac).

В Таблице 12 подчеркнуты оптимальные отклики игроков на стратегии, выбранные партнером. Из таблицы видно, что в рассматриваемой игре есть 3 равновесия Нэша. Только одно из этих равновесий совпадает с решением, полученным обратной индукцией. Указанная ситуация является типичной, т.е. решение, по-

лученное методом обратной индукции всегда является равновесием по Нэшу, что показывает следующая теорема.

Теорема 5.
В игре с совершенной информацией (и конечным числом ходов) любое решение, полученное методом обратной индукцией, является равновесием по Нэшу.

Опишем идею доказательства данной теоремы. В доказательстве мы используем следующий очевидный факт:

Пусть дан некоторый набор стратегий. Если делать ходы на основе этих стратегий, то каждой вершине соответствует одна и только одна траектория (цепь ходов), соединяющая ее с одной из конечных вершин. Можно сопоставить любой вершине единственный набор выигрышей, взяв его из той конечной вершины, в которой заканчивается соответствующая ей траектория.

Предположим, что набор стратегий, полученный обратной индукцией, $(s_1, \ldots, s_m)$, не является равновесием Нэша. Это означает, что у некоторого игрока i существует стратегия $\tilde{s}_i \neq s_i$, которая может дать ему более высокий выигрыш при тех же стратегиях других игроков, s_{-i}. Набору стратегий $(\tilde{s}_i, s_{-i})$ соответствует некоторая альтернативная траектория игры, идущая из начальной вершины. Можно рассмотреть эту траекторию, начиная с конечной вершины. В какой-то из вершин на данной траектории выигрыш i-го игрока, соответствующий стратегиям (s_i, s_{-i}), должен оказаться ниже выигрыша, соответствующего стратегиям $(\tilde{s}_i, s_{-i})$. Это не может случиться впервые в вершине, где ход принадлежит какому-либо другому игроку, поскольку стратегии остальных игроков не меняются. Но если ход в такой вершине принадлежит i-му игроку, то он должен был в этой вершине сделать выбор соответствующий стратегии $\tilde{s}_i$, а не выбор, соответствующий стратегии s_i, поскольку это ему более выгодно. Это противоречит рациональности, заложенной в алгоритме обратной индукции.

Вообще говоря, не любое равновесие по Нэшу можно получить методом обратной индукции, что видно из рассматриваемого примера. Важно понять, почему это так.

Рассмотрим, например, равновесие ❶Mac и (❷Mac, ❸Mac) (Рис. 13, стр. 26). Содержательно его можно интерпретировать следующим образом: 2-й игрок угрожает 1-му игроку тем, что он выберет Макинтош в случае, если тот выберет IBM; под влиянием этой угрозы 1-й игрок выбирает Макинтош. Но такая ситуация противоречит предположению о рациональности, на которое опирается метод обратной индукции. Действительно, если 2-й игрок окажется в точке ❷, то предпочтет выбрать IBM. Поскольку 1-й игрок знает о том, что второй игрок рационален, он не поверит этой (пустой) угрозе. Таким образом, рассматриваемый набор стратегий вряд ли является естественным решением игры. Другое «добавочное» равновесие, ❶IBM и (❷IBM, ❸IBM), не имеет столь же интересной интерпретации, но вызывает аналогичные подозрения по поводу своей обоснованности.

Таким образом, можно сказать, что равновесия по Нэшу, которые не могут быть получены методом обратной индукции, не совместимы в данном случае с гипотезой рациональности и оказываются «лишними». Как уже было сказано, это типичная ситуация в динамических играх. Как ее можно объяснить? Сделаем по этому поводу два замечания:

★ При представлении динамической игры в нормальной форме теряется информация о последовательности ходов и информации, доступной игрокам на каждом ходе.[25]

★ Сам способ записи динамической игры в нормальной форме, как он описан выше, заключает в себе предположение, что игроки выбирают свои стратегии до начала игры *раз и навсегда* и уже не меняют их в дальнейшем в ходе игры.

Напрашивается вывод, что концепция равновесия по Нэшу в случае динамических игр вообще говоря, не дает удовлетворительного прогноза исхода игры и поэтому ее требуется каким-то образом усилить. Укажем способ такого усиления.[26]

Предположим, что несколько ходов в игре уже сделано. Можно рассматривать оставшуюся часть игры как самостоятельную игру. Выбранные игроками стратегии предписывают, что в этой оставшейся части игры игроки будут действовать строго определенным образом. Однако такое поведение может оказаться невыгодно игрокам — они могут предпочесть изменить свои выборы. С этой точки зрения естественным представляется требование динамической согласованности:

Равновесные стратегии должны быть такими, чтобы ни у одного из игроков не было стимула менять их в процессе игры.

Часть игры, начинающаяся в некоторой вершине и включающая в себя все, что следует за этой вершиной, в теории игр называют подыгрой.

Определение 10.

Подыгра игры G, где G — игра с совершенной информацией в развернутой форме, — это игра, построенная на основе исходной игры. Начальной вершиной подыгры служит любая вершина исходной игры, кроме конечных. В подыгру входят все вершины, следующие за ее начальной вершиной. Выигрыши в подыгре совпадают с выигрышами в соответствующих конечных вершинах полной игры.

Собственная подыгра — это подыгра, начальная вершина которой не совпадает с начальной вершиной полной игры.

В рассматриваемой игре есть 3 подыгры, одна из них — сама игра и две собственных подыгры, начинающиеся в вершинах ❷ и ❸.

Основываясь на требовании динамической согласованности, можно ввести концепцию равновесия, которая усилила бы концепцию Нэша.

Определение 11.

Совершенным в подыграх равновесием[27] называется набор стратегий, такой что он является равновесием Нэша в полной игре, а соответствующие части этого набора стратегий являются равновесиями по Нэшу во всех собственных подыграх этой игры.

[25] В дальнейшем мы увидим, как из нормальной формы получить развернутую форму. При двойном преобразовании получается, что полученная развернутая форма не совпадает с исходной развернутой формой.

[26] По-английски процесс избавления от «лишних» равновесий называют refinement — усовершенствование, уточнение. Особенно много способов уточнения равновесий предложено для динамических игр с несовершенной и/или неполной информацией, о которых пойдет речь ниже.

[27] Немецкий экономист Рейнгард Зельтен предложил концепцию совершенного в подыграх равновесия в статье, посвященной моделям олигополий (R. Selten (1965), "Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetrдgheit," *Zeitschrift fьr die gesamte Staatswissenschaft*, **121**, 301-24, 667-89).

Приложим данное определение к динамической игре «Выбор компьютера» (Рис. 26, стр. 26). Представим подыгру, начинающуюся в вершине ❷ в нормальной форме. Игрок 1 не осуществляет в этой подыгре выбора. Игрок 2 имеет две стратегии: ❷IBM и ❷Mac. Матрица игры представлена в Таблице 13.

В данной игре есть единственное равновесие Нэша. В нем 2-й игрок выбирает IBM. Таким образом, чтобы равновесие Нэша в исходной игре было совершенным, требуется, чтобы оно предписывало в вершине ❷ выбор IBM. Набор стратегий ❶Mac и (❷Mac, ❸Mac) не удовлетворяет этому требованию, поэтому он не может быть совершенным в подыграх равновесием.

Таблица 13

	Игрок 2: ❷IBM	Игрок 2: ❷Mac
Игрок 1	$\underline{a+c}$, $\underline{c}$	$\underline{a}$, b

Во второй собственной подыгре, которая начинается в вершине ❸, в равновесии Нэша 2-й игрок выбирает Макинтош. Поэтому набор стратегий ❶IBM и (❷IBM, ❸IBM) не является совершенным в подыграх равновесием.

С другой стороны, набор ❶IBM и (❷IBM, ❸Mac) является равновесием по Нэшу в полной игре и соответствует равновесиям по Нэшу в каждой из собственных подыгр. Поэтому данный набор стратегий является совершенным в подыграх равновесием. Видим, что он совпал с тем решением, которое мы раньше получили, применив обратную индукцию. Это совпадение не является случайным, как показывает следующая теорема.

Теорема 6.
В игре с совершенной информацией и конечным числом ходов множество решений, получаемых обратной индукцией, совпадает с множеством совершенных в подыграх равновесий.

Рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве предыдущей теоремы (Теоремы 5), позволяют показать, что решение, полученное обратной индукцией, составляет равновесие Нэша в каждой подыгре, то есть оно является совершенным в подыграх равновесием.

Докажем, обратное: любое совершенное в подыграх равновесие может быть получено обратной индукцией. Предположим, что это не так. Рассматривая игру, начиная с конечных вершин,

мы в таком случае найдем некоторую вершину, в которой впервые выбор одного из игроков не соответствует алгоритму обратной индукции. Это означало бы, что выбор, соответствующий равновесной стратегии этого игрока, не является оптимальным. Значит, заменив его на выбор, соответствующий обратной индукции, этот игрок мог бы получить в данной подыгре более высокий выигрыш. Другими словами, если бы сделанное предположение было верным, то у игрока нашлась бы в данной подыгре альтернативная стратегия, которая гарантирует ему более высокий выигрыш при неизменных стратегиях других игроков, что противоречит предположению о том, что стратегия является оптимальным откликом игрока.

Нормальная форма игры может быть очень громоздкой. Использование приведенной только что теоремы позволяет сильно упростить поиск совершенных в подыграх равновесий, поскольку не требуется записывать игры в нормальной форме и находить в них равновесия Нэша.

Например в игре «Рэкет», рассмотренной выше, стратегия фирмы должна указывать, как именно фирма будет реагировать на каждый из возможных уровней α, т.е. функцию $y(\alpha)$. Поэтому процесс поиска равновесия по Нэшу по существу включает максимизацию в функциональном пространстве. Использование обратной индукции позволяет упростить эту задачу.

Следует отметить, что многие игры являются довольно сложными, и, даже применяя обратную индукцию, равновесие в них найти сложно. Характерным примером является игра в шахматы. Поскольку это конечная игра с совершенной информацией, то в ней должно существовать по край ней мере одно решение, получаемое обратной индукцией, и, соответственно, совершенное в подыграх равновесие. Тот факт, что в шахматах существует решение, известен уже давно, однако найти такое решение в настоящее время не представляется возможным даже с применением компьютера. Понятно, что если игроки обладают ограниченными способностями, то совершенное в подыграх равновесие может быть не очень реалистичным предсказанием результата игры.

В сочетании с Теоремой 4 Теоремы 5 и 6 гарантируют существование совершенного в подыграх равновесия в конечных играх с совершенной информацией. Если выигрыши различны, то имеет место и единственность совершенного в подыграх равновесия.

Задачи

В следующих играх найдите решение, используя обратную индукцию.

1. Два школьника играют в следующую игру. Каждый из кучки, состоящей из 6 камней, берет по очереди один или два камня. Проигрывает тот, кто взял последний камень.

2. Муж и жена выбирают, провести вечер дома или у друзей, причем друзья у них разные. Выигрыши заданы следующей матрицей (Таблица 14), где a, b, c, $d > 0$ — параметры. Жена делает свой выбор первой. При каких условиях на параметры супруги проведут вечер дома вместе?

Таблица 14

		муж	
		дома	у друзей
жена	дома	a; b	0; c
	у друзей	d; 0	d; c

3. Барин выбирает, какую долю τ стоимости y урожая забирать у крестьянина в виде издольщины. Он при этом максимизирует функцию вида

$$\tau y - \tau^2,$$

то есть желает побольше получить, но не желает прослыть жадным, что возможно при слишком большом τ ($\tau \in [0,1]$). Крестьянин имеет целевую функцию $(1-\tau)\,y - y^2$, то есть максимизирует прибыль по y ($y \geqslant 0$) при квадратичной функции затрат.

4. Предположите, что в играх, представленных в задаче 10 предыдущего параграфа (стр. 20) игрок, выбирающий абсциссу, ходит первым.

5. «Трудовое соглашение» (В. Леонтьев)

Профсоюз заключает с фирмой контракт на несколько лет, в котором оговаривается уровень заработной платы ($w \geqslant 0$). Предполагается, что профсоюз достаточно мощный, чтобы навязать фирме любой уровень заработной платы.

Фирма в течении срока действия контракта не может изменить уровень заработной платы, но может выбирать количество нанимаемых работников ($l \geqslant 0$, в тыс. чел.). Профсоюз максимизирует следующую целевую функцию:

$$u(w,l) = wl - 2l^2,$$

где $2l^2$ — издержки работы для членов профсоюза.

Фирма максимизирует свою прибыль:

$$\pi(w,l) = 2\sqrt{l} - wl.$$

6. «Справедливый дележ пирога»

В игре участвуют n игроков. Нужно разделить пирог между игроками, то есть выбрать вектор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$.

Предлагается следующая процедура дележа. Игрок с номером 1 режет пирог. Остальные игроки по порядку номеров берут любой из кусков по выбору. Последний кусок достается 1-му игроку.

(1) Нарисуйте дерево игры при $n = 3$. Опишите множество стратегий каждого из игроков.

(2) Найдите совершенное в подыграх равновесие. Докажите, что справедливый дележ $\alpha_i = 1/n$ будет единственным равновесием.

7. Дополните дерево, изображенное на Рис. 14 выигрышами игроков, используя номера букв своего имени и фамилии (см. задачу 16 на стр. 21). Найдите все совершенные в подыграх равновесия в получившейся игре .

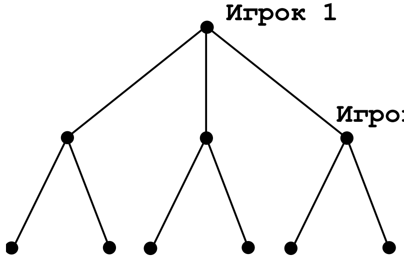


Рисунок 14

8. Рассмотрите динамическую игру, сконструированную на основе статической антагонистической игры двух лиц (см. определение в Задаче 20 преды-

дущего параграфа, стр. 22), так что игроки делают ходы по очереди (например, сначала первый, потом второй), и тот, кто ходит вторым, знает, какое решение принял тот, кто ходит первым. Пусть (x_1^*, x_2^*) — седловая точка функции полезности первого игрока, $u_1(x_1, x_2)$. Докажите, что набор стратегий (x_1^*, x_2^*) является совершенным в подыграх равновесием в этой игре вне зависимости от порядка ходов.

9. Пусть, как и в предыдущей задаче, на основе статической антагонистической игры двух лиц строится динамическая игра. Докажите, что делать ход вторым в общем случае (при отсутствии седловой точки) более выгодно. Предполагается, что соответствующие совершенные в подыграх равновесия существуют.

3. Динамические игры с несовершенной информацией

Особенность рассматриваемых в предыдущем разделе игр — каждый игрок, перед тем, как сделать ход, полностью знает предысторию игры — выборы, сделанные ранее им и другими игроками. Другими словами игрок знает, в какой вершине дерева он оказался. В этом разделе мы рассмотрим класс игр, называемых **играми с несовершенной информацией**,[28] в которых игроки могут не знать полностью предысторию игры. Т.е., осуществляя очередной ход, они знают, что находятся в одной из вершин некоторого подмножества множества всех вершин дерева игры (так называемого **информационного множества**).

Примером игры с несовершенной информацией служит любая статическая игра. Ее можно искусственно «динамизировать», задав произвольным образом порядок ходов и определив подходящим образом информационные множества, как это сделано ниже для Игры 1 (стр. 6) «Выбор компьютера» (см. Рис. 15).

Предположим, что первый игрок ходит первым, второй — вторым. Есть две вершины, в которых ход принадлежит 2-му игроку, однако сам он не может различить, выбирая свои действия, в какой вершине он находится; другими словами, эти две вершины находятся в одном и том же информационном множестве.

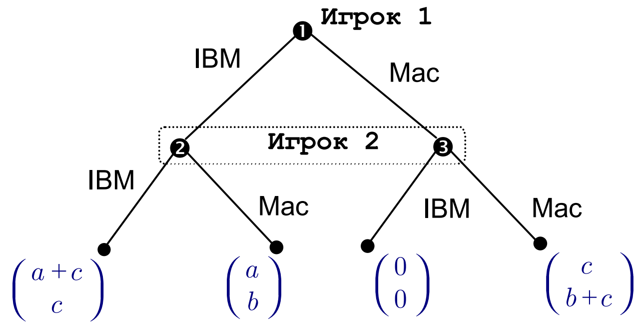


Рисунок 15. Представление статической игры «Выбор компьютера» в виде дерева

Как видим, развернутая форма игр с несовершенной информацией несколько более сложна, чем развернутая форма игр с совершенной информацией. Дополнительно к тем составляющим, которые были указаны в прежнем определении, требуется также перечислить информационные множества, которые задают разбиение множества вершин (кроме конечных). Информационные множества должны быть заданы так, чтобы каждая вершина, кроме конечных, принадлежала одному и только одному из них. Кроме того, по смыслу определения информационного множества, во всех его вершинах ход должен принадлежать одному и тому же игроку.

Дополнительно следует потребовать, чтобы множество возможных действий во всех вершинах одного и того же информационного множества были одинаковыми. В противном случае игрок мог бы по тому, какие альтернативы ему доступны, определить, в какой именно вершине он находится. Дерево игры, представленное на Рис. 15 удовлетворяет этому требованию — и в вершине ❷, и в вершине ❸ 2-й игрок выбирает между IBM и Mac.

Используя понятие информационного множества, мы можем дать формальное определение игр с совершенной информацией: в

[28] Мы используем кальку с английского термина *games of imperfect information*. В русскоязычной литературе использовался термин «игры с неполной информацией», но его предпочтительнее использовать для обозначения игр, которые по-английски называются *games of incomplete information*.

играх с совершенной информацией в каждом информационном множестве находится только одна вершина.[29]

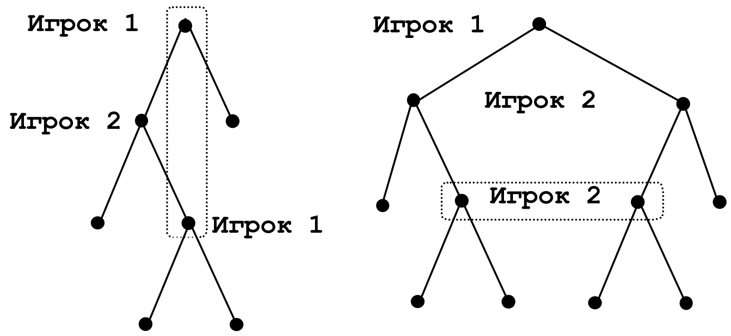


Рисунок 16. Примеры игр, не являющихся играми с идеальной памятью

В приложениях теории игр чаще всего рассматривают так называемые **игры с идеальной памятью**, то есть такие игры, в которых игроки не забывают ту информацию, которой они обладали на предыдущих ходах. Мы не будем давать формального определения таких игр. Приведем только примеры игр, в которых предположение об идеальной памяти не выполняется (см. Рис. 16).

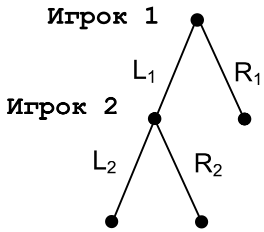


Рисунок 17

Таким образом, существуют два представления любой игры — представление в нормальной и развернутой форме. Выше мы показали, как динамическую игру с совершенной информацией представить в нормальной форме, а статическую игру — в развернутой форме. Таким образом, любую динамическую игру с совершенной информацией можно представить в нормальной форме, а затем, — на основе этой нормальной формы — построить развернутую форму соответствующей игры. Приведем пример такого построения.

Если мы представим игру на Рис. 17 в нормальной форме, то получим Таблицу 15 (для упрощения выигрыши не указаны).

[29] Это определение, по-видимому, не годится в контексте игр с неполной информацией (но это зависит от способа интерпретации).

Таблица 15

		Игрок 2	
		L_2	R_2
Игрок 1	L_1		
	R_1		

Этой нормальной форме соответствует дерево игры, представленное на Рис. 18. Как видим, при таком «двойном переводе» частично потеряна информация о структуре игры и мы получили другую игру в развернутой форме. Очевидно, что принципиально разным играм может соответствовать одна и та же нормальная форма.

Таким образом, нормальная форма игры не является в общем случае адекватной для описания динамических игр. С помощью нее можно представлять корректно только статические игры. Если операцию «двойного перевода» из развернутой формы в нормальную и обратно осуществить со статической игрой, представленной на Рис. 15, то дерево игры не поменяется (с точностью до выбора порядка ходов, что в данном случае несущественно).

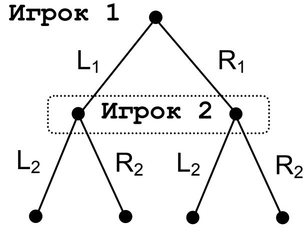


Рисунок 18

Использование нормальной формы для представления статических игр вполне допустимо и даже предпочтительно, так как она более компактна.

Уточним понятие стратегии для рассматриваемого класса игр.

Стратегия игрока в играх с несовершенной информацией должна, указывать, какие этот игрок выберет действия, если окажется в данном информационном множестве. Поскольку в играх с совершенной информацией в каждом из информационных множеств находится только одна вершина, то такая модификация определения стратегии полностью согласуется с данным ранее определением. Пользуясь понятием стратегии, мы можем распространить концепцию равновесия Нэша на динамические игры с несовершенной информацией. Определение ничем не будет отличаться от ранее данного.

Определение совершенного в подыграх равновесия в играх с несовершенной информацией совпадает с данным выше определением для игр с совершенной информацией. Однако, в играх с несовершенной информацией следует дать несколько другое определение подыгры. Отличие состоит в том, что подыгра может начинаться не из любой вершины. Следует потребовать, чтобы если некоторая вершина содержалась в подыгре, то в этой же подыгре содержалось и все информационное множество, содержащее данную вершину. Например в игре, дерево которой показано на Рис. 19, в вершины ❷, ❸ и ❹ не являются начальными вершинами подыгр. Таким образом, в этой игре нет *собственных* подыгр.

Заметим, что не к любой игре с несовершенной информацией можно применить алгоритм обратной индукции. Игра на Рис. 19 представляет собой как раз такую игру, в которой невозможно найти решение с помощью обратной индукции. Игрок 3 в этой игре не знает, в какой именно из двух вершин информационного множества он находится, поэтому он не может без каких-либо дополнительных предположений выбрать между двумя имеющимися альтернативами. Мы рассмотрим концепцию решения подобных игр позже, в параграфе, посвященном совершенному байесовскому равновесию.

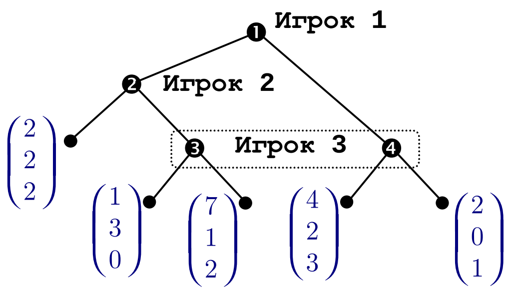


Рисунок 19.

Здесь мы рассмотрим лишь класс игр, для анализа которых можно использовать (при естественной его модификации) алгоритм обратной индукции. Эти игры можно назвать **играми с почти совершенной информацией**. Другое название — многоэтапные игры с наблюдаемыми действиями. Такие игры можно разбить на несколько этапов: $t = 1, ..., T$, каждый из которых представляет собой одну или несколько статических игр. В рамках t-го этапа игроки одновременно выбирают действия, причем каждый игрок знает всю предысторию, т.е. какие действия выбрали другие игроки на предыдущих этапах $(1, ..., t-1)$; более того, предыстория игры является *общеизвестной*. Пример такой игры — по-

вторяющаяся конечное число раз статическая игра. Заметим, что множества стратегий некоторых игроков в этих статических играх могут быть пустыми (как, например, на первом этапе игры, представленной на Рис. 21).

Сначала при использовании обратной индукции последнем, T-м, этапе находятся равновесия по Нэшу всех игр этого этапа. Затем, каждая их этих игр заменяется конечной вершиной. Ей сопоставляются выигрыши, соответствующие равновесию по Нэшу (одному из равновесий, если их несколько). Тем самым мы получаем игру с $T-1$ этапом, и т.д.

Игры с почти полной информацией удобны для анализа, поскольку каждая статическая игра (соответствующего этапа) начинает одну из подыгр. Этапы можно рассматривать последовательно, а это фактически и означает, что в них не возникает трудностей с использованием обратной индукции.

Рассмотрим пример игры с почти полной информацией и использования обратной индукции для поиска решения в таких играх.

Игра 9. *«Набеги на банки»*

Два инвестора вложили в банк одинаковые денежные суммы (например, по 2 рубля). Банк обещает им вернуть через 3 месяца по 3 рубля. Они могут взять деньги из банка через 1, 2 или 3 месяца, однако банк сможет вернуть только половину общей суммы сделанных инвестиций, если вкладчики потребуют деньги раньше срока (через 1 или 2 месяца). При этом если оба потребуют деньги, то получат по 1 рублю, а если деньги потребует только один, то он получит 2 рубля, а другой вкладчик не сможет получить ничего. ⇦

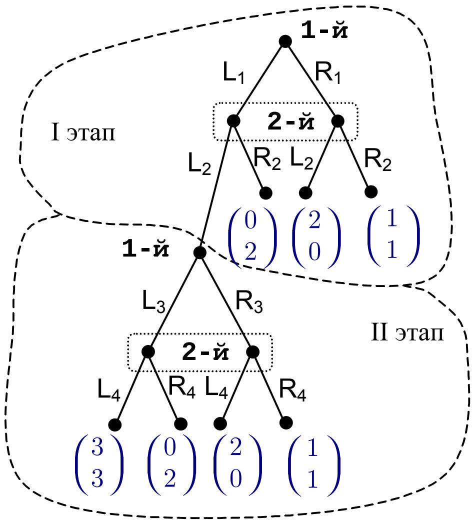


Рисунок 20. Дерево игры «Набеги на банки»

Дерево игры показано на Рис. 20. R обозначает «забрать деньги», L — «не забирать». Игра происходит в 2 этапа, на каждом из которых вкладчики одновременно решают, забирать ли деньги. Первый этап происходит по прошествии 1 месяца после вложения денег, второй — по прошествии 2 месяцев.

Таблица 16. Игра «Набеги на банки» на втором этапе

Игрок 1 \ Игрок 2	L_4	R_4
L_3	$\underline{3}$, $\underline{3}$	0, 2
R_3	2, 0	$\underline{1}$, $\underline{1}$

В Таблице 16 изображена статическая игра, соответствующая второму этапу. В игре имеется два равновесия по Нэшу. Применяя обратную индукцию, мы используем выигрыши, соответствующие этим равновесиям, чтобы сформулировать статическую игру, соответствующую первому этапу.

Таблица 17. Редуцированная игра «Набеги на банки» на первом этапе

Игрок 1 \ Игрок 2	L_2	R_2
L_1	v_1, v_2	0, 2
R_1	2, 0	1, 1

Получающаяся редуцированная игра представлена в Таблице 17. В ней выигрыши второго этапа обозначены через v_1 и v_2 соответственно.

Множество равновесий Нэша в редуцированной игре первого этапа зависит от того, какое из двух равновесий может реализоваться на втором этапе. Если игроки считают, что на втором этапе они оба заберут деньги, то им выгоднее забрать деньги на первом этапе, поскольку $v_1, v_2 = 1 < 2$. Если же игроки считают, что на втором этапе они оба оставят деньги в банке, то на первом этапе может реализоваться одно из двух равновесий Нэша, поскольку $v_1, v_2 = 3 > 2$: либо оба игрока забирают деньги, либо оба оставляют. Таким образом, обратная индукция дает три решения. В двух из этих решений происходит «набег на банк» на первом и втором этапе соответственно. Третье решение соответствует случаю, когда оба вкладчика дожидаются получения максимального выигрыша $(3, 3)$.

Использование обратной индукции в играх с почти совершенной информацией можно дополнительно обосновать тем, что для них выполнен вариант Теоремы 6.

Теорема 6′.
В игре с почти совершенной информацией (и конечным числом ходов) множество решений, получаемых обратной индукцией, совпадает с множеством совершенных в подыграх равновесий.

В отличие от игр с совершенной информацией, в играх с почти совершенной информацией решения в чистых стратегиях может не существовать (как, например в игре на Рис. 21). Выход из положения состоит в том, чтобы ввести в поведение игроков элемент рандомизации, по аналогии со смешанными стратегиями, которые мы рассмотрели в случае статических игр.

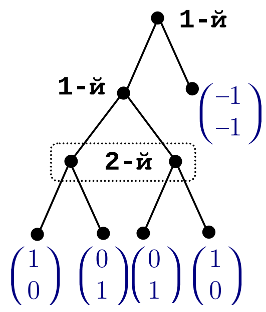


Рисунок 21. Игра, в которой нет равновесия в чистых стратегиях

Конечно, мы можем прямо перенести понятие смешанной стратегии на динамические игры, воспользовавшись представлением этих игр в нормальной форме. Согласно такой интерпретации, *смешанная стратегия* игрока — это вероятности, с которыми игрок выбирает свои чистые стратегии. В этом случае игроки рандомизируют стратегии. Однако более предпочтительной кажется другая концепция: игроки рандомизируют действия. Эта концепция лучше соответствует идеологии динамических игр.

Стратегию с рандомизацией действий принято называть **поведенческой стратегией**. Поведенческая стратегия должна указывать для каждого информационного множества, в котором ход принадлежит игроку, некоторое распределение вероятностей на множестве действий, из которых он выбирает в данном информационном множестве. При этом предполагается, что распределения вероятностей в разных информационных множествах статистически независимы.

Фундаментальный результат, принадлежащий Куну, состоит в том, что в играх с идеальной памятью использование поведенческих стратегий эквивалентно использованию смешанных стратегий (со случайным выбором чистых стратегий). Мы понимаем под эквивалентностью двух наборов стратегий то, что они порождают одно и то же распределение вероятностей на множестве конечных вершин (или, что то же самое, на множестве всех траекторий игры, начинающихся в начальной вершине). Несложно понять, что каждый набор смешанных стратегий однозначно порождает набор поведенческих стратегий, при этом оба они порождают одно и то же распределение на множестве конечных вершин. Обратное утверждение состоит в том, что для любого набора поведенческих стратегий найдется хотя бы один набор смешанных стратегий, который его порождает. В дальнейшем мы везде будем говорить о *смешанных* стратегиях, имея в виду *поведенческие* стратегии.

Алгоритм обратной индукции можно естественных образом распространить на случай случайного выбора игроками своих действий. Заметим, что в играх с совершенной информацией с различными выигрышами такая обратная индукция даст то же самое единственное решение, что и обычная обратная индукция. Смешанные стратегии в этом решении будут вырожденными: каждый игрок будет выбирать одно из действий с единичной вероятностью. По-видимому, смешанные стратегии имеет смысл рассматривать только в играх с несовершенной информацией.

Рассмотрим в качестве примера Игру 9 «Набеги на банки» (стр. 33). Как мы уже видели, в этой игре существует три равновесия в чистых стратегиях. Мы сейчас увидим, что в игре кроме того существуют равновесия в смешанных стратегиях.

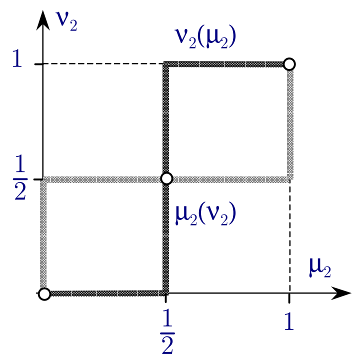


Рисунок 22. Равновесия в смешанных стратегиях второго этапа игры «Набеги на банки»

Обозначим через μ_1 вероятность того, что первый вкладчик не забирает деньги на первом этапе (вероятность выбора L_1), а через ν_1 — вероятность того, что второй вкладчик не забирает деньги на первом этапе (вероятность выбора L_2). Соответствующие вероятности на втором этапе обозначим μ_2 и ν_2 (вероятности выбора L_3 и L_4 соответственно).

В игре второго этапа существуют три равновесия Нэша в смешанных стратегиях (см. Рис. 22). Два из этих равновесий — равновесия в вырожденных смешанных стратегиях. Есть также равновесие в невырожденных смешанных стратегиях: $\mu_2 = 1/2$ и $\nu_2 = 1/2$. Ожидаемые выигрыши вкладчиков составят при этом по $3/2$. Структура равновесий в редуцированной игре 1-го этапа зависит от того, какое из трех возможных равновесий второго этапа ожидают игроки. Равновесия в вырожденных смешанных стратегиях аналогичны рассмотренным выше равновесиям в игре с чистыми стратегиями. Кроме того, в редуцированной игре при $v_1, v_2 = 3$ (когда на втором этапе оба оставляют деньги в банке) существует равновесие в невырожденных смешанных стратегиях: $\mu_1 = 1/2$ и $\nu_1 = 1/2$.

Задачи

1. «Раз-два-три»

Каждый из двух игроков одновременно называет одно из трех чисел: 1, 2 или 3. При совпадении второй игрок дает первому названное и совпавшее число (при несовпадении никто не платит). Дополнительно игроки получают удовольствие от участия в игре, которые они оценивают в $1/2$. Какую сумму z первый игрок должен заплатить второму до начала игры, чтобы тот согласился играть? Нарисуйте дерево, описывающее данную ситуацию.

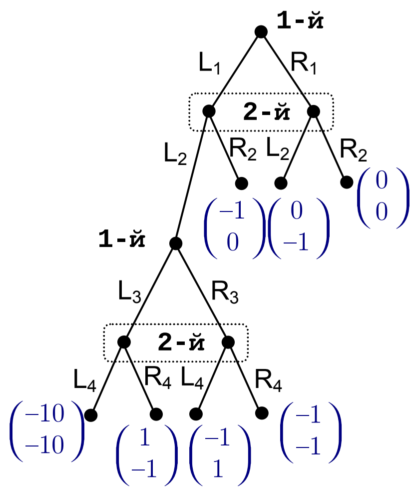


Рисунок 23

2. В игре участвуют 2 игрока. Игра состоит из двух этапов. На первом этапе игроки одновременно решают, хотят ли они участвовать во втором этапе. Если игрок говорит, что хочет участвовать во втором этапе то он платит $1. Второй этап начинается, только если оба решают участвовать во втором

этапе, в противном случае игра заканчивается, и деньги забирает организатор игры. В игре второго этапа игроки одновременно заявляют, хотят ли они забрать имеющиеся \$2. В случае их отказа, деньги достаются организатору этой игры. Если же на эти деньги претендуют оба, то между ними происходит ссора, потери от которой обо игрока оценивают выше, чем достающаяся им доля, так что выигрыш обоих — отрицательный. Полностью эта игра с указанием всех выигрышей изображена на Рис. 23. На первом этапе L обозначает «дать доллар», R — «не давать доллар». На втором этапе L обозначает «попытаться забрать доллары», R — «отказаться от долларов».

Проанализируйте эту игру и найдите в ней все совершенные в подыграх равновесия как в чистых, так и в смешанных стратегиях.

3. Найдите равновесие в смешанных стратегиях для игры, изображенной на Рис. 21 (стр. 34).

4. 50 пиратов делят добычу в 100 дукатов. Правило дележа следующее. В порядке старшинства каждый пират предлагает свою схему дележа. Если большинство пиратов (не менее половины, включая пирата, который предлагает дележ) принимает предложение, то оно выполняется и процедура дележа заканчивается. Если предложение отвергается, то пират, который его сделал, исключается из числа участвующих в дележе, и тогда настает очередь следующего по старшинству пирата предложить схему дележа между оставшимися пиратами.

Объясните, почему описанная игра является игрой с почти совершенной информацией. Как будет поделена добыча? Будет ли равновесие единственным?

4. Статические игры с неполной информацией

Рассматривая статические игры, мы предполагали, что игроки в равной степени информированы о структуре игры, так что каждый из игроков знает множества возможных действий и целевые функции других игроков (более того, мы предполагали, что все это общеизвестно). На самом деле экономические субъекты всегда бывают в разной степени информированы или, другими словами, *асимметрично* информированы, поэтому многие экономические явления невозможно адекватно описать, не отказавшись от этого упрощающего предположения.

Мы рассмотрим здесь разновидность игр, в которых игроки могут не знать точно предпочтения других игроков. Предпочтения игроков в этих играх зависят от случайных событий, при этом игроки в разной степени владеют информацией о том, какое именно событие произошло. Формально это учитывается с помощью введения понятия **типа** игрока: каждый из игроков может быть нескольких типов. При этом считается, что каждый из игроков знает только свой собственный тип. Можно считать, что первый ход делает природа, выбирая типы всех игроков. Такого рода игры называют **играми с неполной информацией** (**байесовскими играми**).

Концепция игр с неполной информацией оказывается очень плодотворной, и позволяет моделировать различные ситуации, содержащие элемент случайности, которые невозможно смоделировать в рамках игр с полной информацией, которые были рассмотрены нами выше. Например, характеристики игрока могут зависеть от некоторых случайных параметров. Стратегия игрока при этом должна описывать, какие действия он выберет при каждом возможном значении параметра.

В этом параграфе мы разберем *статические* игры с неполной информацией. Динамическим играм с неполной информацией посвящен следующий параграф.

Опишем структуру статической игры с неполной информацией (статической байесовской игры).

Как и раньше, $I = \{1,...,m\}$ — множество игроков. В байесовских играх каждый игрок имеет несколько типов, $\theta_i \in \Theta_i$, где Θ_i — множество типов i-го игрока (не обязательно конечное или счетное). Предполагается, что появление того или иного типа — случайное событие. Таким образом, в описании байесовской игры должно быть задано распределение вероятностей на множестве

$$\Theta = \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_m.$$

Если множества типов Θ_i конечны, то достаточно задать вероятности появления сочетаний типов $(\theta_1, ..., \theta_m) \in \Theta$, т.е. функцию

$$\pi(\cdot)\colon \Theta \mapsto \mathbb{R}_+,$$

для которой выполнены стандартные предположения о том, что вероятности должны быть неотрицательны и их сумма должна равняться единице.

В дальнейшем мы, как правило, будем предполагать, что имеет место независимость появления типов у разных игроков (для краткости будем называть это *независимостью типов*). В таком случае достаточно задать вероятности появления каждого из типов для каждого игрока, то есть m функций

$$\pi_i(\cdot)\colon \Theta_i \mapsto \mathbb{R}_+, \quad i = 1, \ldots, m,$$

таких что $\pi_i(\theta)$ — вероятность появления типа $\theta \in \Theta_i$ игрока i. Это случай, когда знание своего типа не дает игроку дополнительной информации о типах других игроков.

Если типы — это действительные числа, то можно считать, что дана функция распределения типов, $F(\theta_1, \ldots, \theta_m)$. Независимость типов в данном контексте означает, что функцию распределения можно представить как произведение функций распределения типов отдельных игроков

$$F(\theta_1, \ldots, \theta_m) = \prod_{i=1}^{m} F_i(\theta_i).$$

Предполагается, что все типы одного и того же игрока имеют одинаковые множества действий X_i.[30] Выигрыш в статических байесовских играх зависит не только от выбранных игроками действий, $(x_1, \ldots, x_m) \in X$, но и от того, какие именно типы, $(\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \Theta$, участвуют в игре. Предпочтения игроков заданы функциями выигрышей:

$$u_i\colon\ X \times \Theta \mapsto \mathbb{R},$$

где $X = X_1 \times \cdots \times X_m$.

Таким образом, описание статической байесовской игры должно включать в себя следующие составляющие:

- ✦ множество игроков;
- ✦ для каждого игрока — множество типов;
- ✦ распределение вероятностей на множествах типов;
- ✦ для каждого игрока — множество возможных действий;
- ✦ для каждого игрока — функции выигрышей.

В частном случае, когда множества типов конечны, статическая байесовская игра есть набор

$$\langle I, \{\Theta_i\}_I, \pi, \{X_i\}_I, \{u_i\}_I \rangle.$$

[30] Если моделируется ситуация, в которой множества возможных действий разные у разных типов, то это можно смоделировать, введя для некоторых действий запретительно маленькие выигрыши («равные минус бесконечности»), так чтобы соответствующий тип их заведомо не стал выбирать.

Стратегии в статических байесовских играх не совпадают с действиями. В соответствии со сложившейся терминологией, стратегия игрока описывает действия *каждого* из типов этого игрока. Можно представить стратегию как функцию $s_i(\cdot)$, которая ставит в соответствие каждому типу $\theta \in \Theta_i$ некоторые действия $s_i(\theta) \in X_i$.

Естественное обобщение понятия рациональности в данном случае состоит в том, что каждый тип каждого игрока максимизирует ожидаемый выигрыш при некоторых ожиданиях относительно стратегий других игроков.[31] Поскольку игрок знает свой тип, то математическое ожидание должно быть *условным* по этому типу. (Условные вероятности в общем случае рассчитываются по формуле Байеса — отсюда и термины «байесовские игры», «байесовское равновесие»). Ожидаемый выигрыш игрока i, имеющего тип θ и выбравшего действия x_i, в предположении, что остальные игроки выбрали стратегии

$$\boldsymbol{s}_{-i}(\cdot) = (s_1(\cdot), \ldots, s_{i-1}(\cdot), s_{i+1}(\cdot), \ldots, s_m(\cdot)),$$

равен

$$U_i(\theta, x_i, \boldsymbol{s}_{-i}(\cdot)) = \mathsf{E}(u_i(x_i, \boldsymbol{s}_{-i}(\boldsymbol{\theta}_{-i}), \theta, \boldsymbol{\theta}_{-i}) \mid \theta_i = \theta),$$

где $\boldsymbol{\theta}_{-i} = (\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_m)$ — типы остальных игроков.

Если имеет место независимость типов, то условное по типу мат. ожидание совпадает с безусловным, т.е.

$$U_i(\theta, x_i, \boldsymbol{s}_{-i}(\cdot)) = \mathsf{E}(u_i(x_i, \boldsymbol{s}_{-i}(\boldsymbol{\theta}_{-i}), \theta, \boldsymbol{\theta}_{-i})).$$

Если множества типов конечны и типы независимы, то ожидаемый выигрыш рассчитывается по формуле

$$U_i(\theta, x_i, \boldsymbol{s}_{-i}(\cdot)) = \sum_{\boldsymbol{\theta}_{-i} \in \Theta_{-i}} \pi_{-i}(\boldsymbol{\theta}_{-i})\, u_i(x_i, \boldsymbol{s}_{-i}(\boldsymbol{\theta}_{-i}), \theta, \boldsymbol{\theta}_{-i}),$$

где мы обозначили

$$\Theta_{-i} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_{i-1}, \Theta_{i+1}, \ldots, \Theta_m)$$

и

$$\pi_{-i}(\boldsymbol{\theta}_{-i}) = \prod_{j \neq i} \pi_j(\theta_j)$$

(вероятность того, что типы остальных игроков окажутся равными $\boldsymbol{\theta}_{-i} = (\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_m)$).

[31] Можно задать целевые функции не для типов, а для игроков. В таком случае игрок максимизирует ожидаемую полезность, исходя из вероятности того, что он окажется того или иного типа. Оба подхода совпадают при естественном предположении, что вероятность появления любого типа не равна нулю.

Таблица 18

Игрок 1		Игрок 2: Любит IBM — IBM	Любит IBM — Mac	Любит Mac — IBM	Любит Mac — Mac	
Любит IBM	IBM	3, 3	1, 0	3, 2	1, 1	[π]
	Mac	0, 1	2, 2	0, 0	2, 3	
Любит Mac	IBM	2, 3	0, 0	2, 2	0, 1	[1–π]
	Mac	1, 1	3, 2	1, 0	3, 3	
		[π]		[1–π]		

Для байесовских игр предложена концепция равновесия,[32] аналогичная равновесию Нэша в играх с полной информацией.

Определение 12.

Набор стратегий $(\bar{s}_1(\cdot), \ldots, \bar{s}_m(\cdot))$ является **равновесием Нэша-Байеса** (байесовским равновесием) в игре с неполной информацией, если для каждого типа $\theta \in \Theta_i$ каждого игрока i действия $\bar{s}_i(\theta)$ максимизируют его ожидаемую полезность в предположении, что все другие игроки выбрали равновесные стратегии:

$$U_i(\theta, \bar{s}_i(\theta), \bar{\boldsymbol{s}}_{-i}(\cdot)) = \max_{x_i \in X_i} U_i(\theta, x_i, \bar{\boldsymbol{s}}_{-i}(\cdot))$$

Для того, чтобы введенные определения стали более понятными, проиллюстрируем их на условном примере.

Игра 10. «Выбор компьютера»

В игре участвуют два игрока, использующие в работе компьютеры. Каждый игрок может быть двух типов — предпочитает работать либо на IBM PC, либо на Макинтоше, причем любители IBM PC попадаются с вероятностью π (для обоих игроков). Каждый из игроков выбирает либо IBM PC, либо Макинтош. Лишь после того, как игрок выбрал тип компьютера, он узнает, с партнером какого типа ему предстоит работать, и какой тот выбрал себе компьютер. Каждый из типов каждого из игроков оценивает пользование компьютером любимой разновидности в 1 у.е., а пользование другим компьютером в 0 у.е. Игроки получают дополнительный выигрыш в 2 у.е., если выберут компьютеры одной и той же разновидности. ⇦

[32] Концепция байесовского равновесия предложена американским экономистом венгерского происхождения Джоном Харшаньи. (Harsanyi, J. C. (1967-8), "Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players," Parts I, II and III, *Management Science*, **14**, 159-182, 320-334, 486-502.

Игра представлена в Таблице 18.

Мы не будем полностью решать эту игру. Найдем только условия для параметра π, при которых набор стратегий «если игрок любит IBM, то оно выбирает IBM; если игрок любит Mac, то он выбирает Mac», т.е. ((IBM, Mac), (IBM, Mac)), будет равновесием Нэша-Байеса.

Рассмотрим выбор 1-го игрока, если он предпочитает IBM PC. Если он ожидает, что стратегией 2-го игрока является (IBM, Mac), то его ожидаемая полезность от выбора компьютеров IBM PC и Макинтош равна соответственно

IBM: $\pi \cdot 3 + (1-\pi) \cdot 1$,

Mac: $\pi \cdot 0 + (1-\pi) \cdot 2$.

Первый игрок такого типа выберет IBM PC, если выполнено условие

$$\pi \cdot 3 + (1-\pi) \cdot 1 \geqslant \pi \cdot 0 + (1-\pi) \cdot 2$$

или

$$\pi \geqslant 1/4.$$

Рассмотрим теперь выбор 1-го игрока, если он предпочитает Макинтош. Поскольку в равновесии он ожидает, что стратегией 2-го игрока является (IBM, Mac), то его ожидаемая полезность от выбора компьютеров IBM PC и Макинтош равна соответственно

IBM: $\pi \cdot 2 + (1-\pi) \cdot 0$,

Mac: $\pi \cdot 1 + (1-\pi) \cdot 3$.

Первый игрок такого типа выберет Макинтош, если выполнено условие

$$\pi \cdot 2 + (1-\pi) \cdot 0 \leqslant \pi \cdot 1 + (1-\pi) \cdot 3$$

или

$$\pi \leqslant 3/4.$$

Таблица 19

		Посетитель A		Посетитель B	
Вахтер a	проверять	-1	π_{Aa}	1	π_{Ba}
	не проверять	0		0	
Вахтер b	проверять	-1	π_{Ab}	1	π_{Bb}
	не проверять	0		0	

Для второго игрока рассуждения аналогичные и приводят к тем же условиям, поскольку игроки одинаковы. Таким образом, условие

$$1/4 \leqslant \pi \leqslant 3/4$$

гарантирует, что набор стратегий ((IBM, Mac), (IBM, Mac)) будет байесовским равновесием.

Следующий пример не является полноценной игрой, поскольку выбор в нем делает только один игрок, однако он включает все те компоненты байесовской игры, о которых здесь говорилось. Этот пример показывает, как можно моделировать то, что один и тот же игрок может в зависимости от некоторых случайных обстоятельств обладать разным объемом информации. Размышления над примером позволяет «сломать» некоторые стереотипы, которые могут сложиться на основе формального определения байесовской игры.

Игра 11. «Вахтер»

На входе в некоторое учреждение стоит вахтер. В учреждение могут войти посетители двух типов: «свои» и «чужие» (будем их для краткости обозначать A и B). Некоторые посетители кажутся вахтеру своими, а некоторые — чужими. Таким образом, в данной игре есть 2 типа вахтера (обозначим их соответственно a и b). Вахтер может проверить у посетителя наличие пропуска. При этом, если посетитель окажется своим, то выигрыш вахтера составит -1, а если чужим, то 1. ⇦

Матрица игры приведена в Таблице 19. Вероятность того, что свой посетитель кажется вахтеру своим обозначена π_{Aa} и т. д. Заметим, что по смыслу игры, если вахтер достаточно опытен, то вероятности появления типов не должны быть независимыми.

Условная вероятность того, что посетитель свой, если он кажется своим, равна $\pi_{Aa}/(\pi_{Aa}+\pi_{Ba})$, а условная вероятность того, что посетитель чужой, если он кажется своим, равна $\pi_{Ba}/(\pi_{Aa}+\pi_{Ba})$. Таким образом, ожидаемый выигрыш вахтера типа **a**, если он проверяет документы, равен

$$\frac{\pi_{Aa}}{\pi_{Aa}+\pi_{Ba}}\cdot(-1)+\frac{\pi_{Ba}}{\pi_{Aa}+\pi_{Ba}}\cdot 1,$$

а если не проверяет, то 0. Аналогично, ожидаемый выигрыш вахтера типа **b**, если он проверяет документы, равен

$$\frac{\pi_{Ab}}{\pi_{Ab}+\pi_{Bb}}\cdot(-1)+\frac{\pi_{Bb}}{\pi_{Ab}+\pi_{Bb}}\cdot 1,$$

а если не проверяет, то 0.

Если вахтер опытен, то вероятность π_{Aa} велика по сравнению с вероятностью π_{Ba}, а вероятность π_{Ab} велика по сравнению с вероятностью π_{Bb}, и естественно ожидать, что вахтер будет проверять документы у тех, кто ему кажется чужими и не будет проверять документы у тех, кто ему кажется своими.

Разберем также пример, в котором множества типов являются континуумами.

Игра 12. «Аукцион с заявками в запечатанных конвертах»

Некий предмет продается с аукциона. Участники аукциона ($i=1, \ldots, n$), подают свои заявки, $p_i \geqslant 0$, в запечатанных конвертах. Побеждает тот, кто предложит самую высокую цену. (Если самую высокую цену предложат сразу несколько участников, то победитель определяется жребием.) Победивший участник платит заявленную цену и получает предмет. Если i-й участник окажется победителем, то его выигрыш составит $v_i - p_i$, где v_i — ценность для него данного предмета; выигрыш всех остальных участников будет равен нулю. Известно, что оценки v_i распределены равномерно на отрезке $[0, 1]$ и независимы. ⇦

В данном случае можно считать, что множество типов каждого игрока совпадает с отрезком $[0, 1]$. Удобно рассматривать стратегию i–го игрока как функцию, ставящую в соответствие типу v цену, которую он предложит, $p_i(v)$:

$$p_i(\cdot)\colon\ [0, 1] \mapsto \mathbb{R}_+.$$

Решить эту задачу непосредственно затруднительно. Можно предложить следующий путь решения: предположить, что равновесные стратегии обладают некоторыми естественными свойствами, затем вычислить, исходя из этого, равновесные стратегии и показать, что на самом деле найдено равновесие.

По смыслу задачи естественно искать симметричное равновесие, то есть такое равновесие, в котором игроки выбирают одинаковые стратегии:

$$p_i(v) \equiv p_0(v) \ \ \forall i,$$

Кроме того, предположим, что одинаковая для всех стратегия $p_0(\cdot)$ является возрастающей дифференцируемой функцией. Найдем, исходя из этих предположений, оптимальный отклик i–го игрока. Если этот игрок выберет цену p, то вероятность того, что другой игрок, j, предложил более низкую цену равна

$$\text{Prob}(p_0(v_j) < p) = \text{Prob}(v_j < p_0^{-1}(p)) = p_0^{-1}(p) = \varphi(p),$$

где мы воспользовались тем, что оценка v_j равномерно распределена на $[0, 1]$, и обозначили через $\varphi(p)$ функцию, обратную к $p_0(\cdot)$. Поскольку по предположению v_j распределены независимо, то события $p_0(v_j) < p$ независимы, и вероятность того, что i–й игрок выиграет аукцион, заявив цену p, равна $\varphi(p)^{n-1}$. (Здесь мы пользуемся тем, что, поскольку $p_0(\cdot)$ — возрастающая функция, то вероятность события $p_0(v_j) = p$ равна нулю.) Таким образом, ожидаемый выигрыш i–го игрока с оценкой v, предложившего цену p, в предположении, что все остальные игроки выбрали стратегии $p_0(\cdot)$, равен

$$\varphi(p)^{n-1}\cdot(v-p) + (1-\varphi(p)^{n-1})\cdot 0 = (v-p)\varphi(p)^{n-1}.$$

Условия первого порядка для задачи максимизации ожидаемого выигрыша имеют вид

$$(n-1)(v-p)\,\varphi(p)^{n-2}\,\varphi'(p) - \varphi(p)^{n-1} = 0$$

или

$$(n-1)(v-p)\varphi'(p) - \varphi(p) = 0.$$

В равновесии игрок, имеющий оценку v, должен предлагать цену $p = p_0(v)$. Подставив это в условия первого порядка, получаем:

$$(n-1)(v-p_0(v))\,\varphi'(p_0(v)) - \varphi(p_0(v)) = 0.$$

Поскольку $\varphi(\cdot)$ — функция, обратная к $p_0(\cdot)$, то

$$\varphi(p_0(v)) = v \qquad \text{и} \qquad \varphi'(p_0(v)) = \frac{1}{p_0'(v)}.$$

Получим дифференциальное уравнение

$$(n-1)\,[v-p_0(v)] - p_0'(v)\,v = 0.$$

Решением этого уравнения, как несложно проверить, является

$$p_0(v) = \frac{n-1}{n}v + \frac{C}{v^{n-1}},$$

где C — константа интегрирования. Найдем эту константу. По смыслу игры $p_0(v)$ не должна превышать v. С другой стороны, по условию заявленная цена не может быть отрицательной. Поэтому должно выполняться граничное условие $p_0(0) = 0$, откуда $C = 0$. Таким образом, наши рассуждения приводят к стратегиям вида

$$p_0(v) = \frac{n-1}{n}v.$$

В самом деле, при таких стратегиях других игроков ожидаемый выигрыш игрока с оценкой v,

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}(v-p)\,p^{n-1},$$

достигает глобального максимума на $\mathbb{R}_+$ при $p = \frac{n-1}{n}v$, то есть условия первого порядка дали нам правильное решение. Заметим, что хотя мы нашли равновесие, но не можем быть уверены, что полученное нами решение единственно.

Если в аукционе участвуют 2 игрока, то в равновесии каждый предложит цену на уровне половины своей оценки. С ростом количества участников равновесные стратегии все больше приближаются к «правдивым» стратегиям $p_i(v) = v$.

Выше уже упоминалось, что равновесие в смешанных стратегиях в играх с полной информацией можно представить как байесовское равновесие (в чистых стратегиях) в играх с неполной информацией. Рассмотрим в качестве примера Игру 6 «Инспекция».

С помощью байесовского равновесия можно имитировать эффект смешанных стратегий при использовании только чистых стратегий. Рассмотрим, как это можно сделать на примере Игры 6 «Инспекция» (стр. 15). Предположим, что оба игрока могут быть разных типов. Для упрощения предположим, что множество типов у каждого из игроков — отрезок $[0, 1]$. При этом предполагаем, что разные типы одного и того же игрока имеют одинаковые предпочтения (те, что заданны Таблицей 8). Несложно проверить, что следующий набор стратегий является байесовским равновесием расширенной игры: налогоплательщик платит налог, если его тип удовлетворяет условию $\theta_1 \leqslant 1/2$, в противном случае он налог не платит; аналогично налоговый инспектор проверяет, если его тип удовлетворяет условию $\theta_2 \leqslant 1/2$. Это байесовское равновесие полностью воспроизводит равновесие в смешанных стратегиях исходной игры: в половине случаев налогоплательщик платит налог, и в половине случаев налоговый инспектор проверяет налогоплательщика. Рандомизирует при этом не игрок, а природа, когда выбирает тот или иной тип игрока.

Конечно, в расширенной игре существует не одно, а бесконечно много байесовских равновесий. Для получения другого байесовского равновесия требуется только произвольным образом разбить множество типов каждого игрока на две части, вероятности попадания в которые равны вероятностям использования чистых стратегий в исходном равновесии в смешанных стратегиях.

Можно также имитировать равновесие в смешанных стратегиях с помощью слегка измененной игры, в которой к выигрышам добавляются малые случайные возмущения, зависящие от типов игроков. Такой подход позволяет избавится от множественности байесовских равновесий, о котором только что говорилось. При этом равновесие в смешанных стратегиях будет пределом байесовских равновесий в «возмущенных» играх. (См. Задачу 3).

Таблица 20

		Инспектор	
		проверять	Не проверять
Проверяемый	нарушать	-1 ; $1+\varepsilon_2$	$1+\varepsilon_1$; 0
	не нарушать	0 ; -1	0 ; 0

Задачи

1. Как представить Игру 2 (стр. 7) в виде байесовской игры?

2. Богатство отца составляет $\$3$ с вероятностью $1/5$, $\$6$ с вероятностью $1/5{\cdot}4/5$, $\$12$ с вероятностью $1/5{\cdot}(4/5)^2$, и т.д. (то есть, $\$3{\times}2^k$ с вероятностью $1/5{\cdot}(4/5)^k$ для каждого $k \geqslant 0$). В один конверт он кладет две трети своего богатства, в другой — одну треть. Он дает по конверту каждому из двух сыновей (каждый из сыновей

с одинаковой вероятностью получит любой конверт). Каждый из сыновей видит, сколько денег в его собственном конверте, но не знает, сколько денег в конверте брата. Каждый из сыновей имеет функцию полезности от богатства $\ln(w)$. [Подсказка: $3^9 > 2^{14}$].

(A) Рассмотрим следующую игру. Каждый из братьев решает, разделить ли деньги, находящиеся в конвертах. Таким образом каждый из братьев говорит «Да» или «Нет» (одновременно). Если оба говорят «Да», они делят деньги поровну. Если хотя бы один из братьев говорит «Нет», то они остаются с деньгами, находящимися в их собственных конвертах.

(i) Каждый брат знает только количество денег в его собственном конверте. Таким образом тип каждого брата — это элемент множества $\{1; 2; 4; 8; \ldots\}$. Каково распределение вероятностей по типам?

(ii) Опишите эту ситуацию формально как игру с неполной информацией.

(iii) Опишите равновесие (Байеса-Нэша) в чистых стратегиях, в котором братья делят деньги. Проверьте, что это действительно равновесие. Существует ли в этой игре другое равновесие?

(B) Предположите теперь, что отец объявил, что ни в одном из конвертов не может находиться больше чем $\$3{\times}2^K$ (для некоторого $K \geqslant 1$). Охарактеризуйте равновесия Байеса-Нэша в чистых стратегиях получившейся в результате игры.

3. В Таблице 20 показана «возмущенная» игра «Инспекция». В ней ε_1 и ε_2 — случайные возмущения, соответствующие типу 1-го и 2-го игрока соответственно, причем ε_1 и ε_2 равномерно распределены на отрезке $[0, \delta]$ $(\delta > 0)$ и независимы между собой.[33] Найдите байесовское равновесие (в чистых стратегиях) в этой игре. Докажите, что при $\delta \to 0$ найденное байесовское равновесие стремится к равновесию в смешанных стратегиях исходной игры (Игра 6 на стр. 15).

[*Указание*: Подскажем, равновесие какого вида здесь искать. Каждый игрок выбирает некоторый пороговый уровень, $\bar{\varepsilon}_i$. Равновесные стратегии выглядят следующим образом: если $\varepsilon_1 < \bar{\varepsilon}_1$, то первый игрок выбирает стратегию «нарушать», а если $\varepsilon_1 > \bar{\varepsilon}_1$ — то

[33] Равномерное распределение выбрано нами только из соображений удобства. В данном случае подошло бы любое разумное непрерывное распределение.

стратегию «не нарушать» (вероятность того, что $\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1$ равна нулю, поэтому этот случай можно не рассматривать); аналогичным образом второй игрок выбирает стратегию «проверять», если $\varepsilon_2 < \bar{\varepsilon}_2$ и стратегию «не проверять», если $\varepsilon_2 > \bar{\varepsilon}_2$.]

5. Динамические байесовские игры. Совершенное байесовское равновесие

В этом параграфе мы рассмотрим разновидность игр, которые являются таким же обобщением статических байесовских игр, каким являются динамические игры с полной информацией для статических игр с полной информацией, т.е. динамические байесовские игры (динамические игры с неполной информацией).

В качестве примера динамической байесовской игры рассмотрим модификацию Игры 7 «Террорист» (стр. 23).

Игра 13. «*Террорист*»

Ситуация в данной игре такая же, как в Игре 7, однако террорист может быть двух типов: «нормальный» и «сумасшедший».

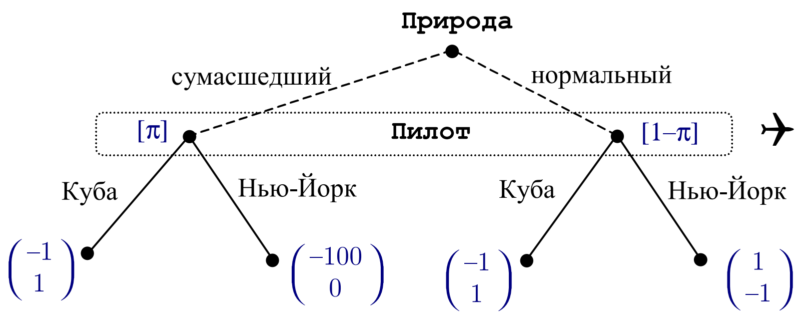


Рисунок 24.

Нормальный террорист так же, как и в Игре 7, получает выигрыш -100 в случае, если взорвет бомбу в Нью-Йорке. Сумасшедший же террорист получает в этом случае выигрыш 0. Вероятность того, что террорист окажется сумасшедшим, равна π. Пилот не знает, с террористом какого типа он имеет дело, но сам террорист знает свой тип. ⇦

Игра схематически показана на Рисунке 28. В игру был добавлен дополнительный фиктивный игрок, природа.[34] Это сделано для того, чтобы показать на схеме случайный выбор типа террориста. Природа не имеет никакой целевой функции, поэтому на схеме показаны только выигрыши двух исходных игроков.

Первый ход делает природа. С вероятностью π природа создает сумасшедшего террориста и с вероятностью $1-\pi$ — нормального. Пунктирной рамкой показано информационное множество пилота, соответствующее условию, что он не знает типа террориста.

Решение этой игры можно найти, применяя обратную индукцию. Сначала нужно рассмотреть поведение террористов обоих типов. Нормальный террорист, как мы видели раньше в Игре 7, не будет взрывать бомбу в Нью-Йорке. Сумасшедший же террорист, наоборот, предпочтет взорвать бомбу (так как 0 больше -1). В результате этих рассуждений (которые, как предполагается, должен проводить рациональный пилот) получим свернутую игру, которая показана на Рисунке 24.

Если пилот выберет Кубу, то в любом случае поучит -1. Если же пилот выберет Нью-Йорк, то с вероятностью π он получит -100, а с вероятностью $1-\pi$ получит 1, то есть его ожидаемый выигрыш составит

$$\pi\cdot(-100) + (1-\pi)\cdot 1 = 1 - 101\pi.$$

Пилот должен сравнить выигрыш -1 с выигрышем $1-101\pi$ и выбрать максимальный. Таким образом, вид решения будет зависеть от параметра π. Если вероятность встретить сумасшедшего террориста мала, т.е. $\pi < 2/101$, то пилот полетит в Нью-Йорк, а если эта вероятность велика, т.е. $\pi > 2/101$, то он предпочтет полететь на Кубу. При $\pi = 2/101$ пилоту все равно, куда лететь.

Заметим, что в рассмотренном примере не содержится специфических элементов, которые придают динамическим байесовским играм принципиально иной характер по сравнению с динамическими играми с совершенной и полной информацией или статическими байесовскими играми. Поэтому здесь для нахождения решения нам достаточно было воспользоваться обратной индукцией. Мы смогли проанализировать выбор пилота, по-

---

[34] Отметим, что можно рассматривать байесовские игры (игры с неполной информацией) как игры с несовершенной информацией, в которых одним из игроков является *природа*.

скольку знали, с какой вероятностью он мог в своем информационном множестве оказаться в левой вершине, а с какой — в правой.

Однако зачастую такие вероятности неизвестны. Мы сталкивались уже с этой проблемой, рассматривая динамические игры с полной, но несовершенной информацией. В подобных ситуациях, коль скоро игрок стоит перед выбором в некотором информационном множестве, состоящем более чем из одной вершины, то ему приходится делать некоторые предположения относительно того, с какой вероятностью он может оказаться в той или иной вершине. Если игрок имеет такого рода ожидания, то на их основе он выбирает ту альтернативу, которая может обеспечить ему наибольший ожидаемый выигрыш. Эти рассуждения приводят к понятию **совершенного байесовского равновесия**.

Совершенное байесовское равновесие состоит из следующих компонент:

✦ набор стратегий $(s_1, ..., s_m)$ всех игроков;

✦ для каждого игрока i — набор ожидаемых им стратегий остальных игроков, $\boldsymbol{s}_{-i}^{e}$;

✦ для каждого игрока в каждом информационном множестве, в котором ему принадлежит ход, — ожидаемое им распределение, заданное на вершинах этого информационного множества.

Для того, чтобы описанный набор стратегий и ожиданий составлял совершенное байесовское равновесие, необходимо выполнение следующих условий:

1) Ожидания любого игрока согласованы: ожидаемое распределение на вершинах информационных множеств для каждого игрока i соответствует выбранной игроком стратегии (s_i) и тем стратегиям, которые, как он ожидает, выберут другие игроки $(\boldsymbol{s}_{-i}^{e})$.

2) Выбранная стратегия последовательно оптимальна при данных ожиданиях, то есть выбор в каждом информационном множестве должен быть таким, чтобы максимизировать ожидаемый выигрыш в предположении, что после этого информационного множества игра будет идти в соответствии с набором стратегий $(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}^{e})$.

3) Ожидаемые стратегии совпадают с фактически выбранными стратегиями: $\boldsymbol{s}_{-i}^{e} = \boldsymbol{s}_{-i}$.

Первое условие требует специального пояснения. Поясним сначала это условие для случая чистых стратегий. Рассмотрим некоторого игрока i и информационное множество, в котором

этому игроку принадлежит ход. Какими должны быть его ожидания в данном информационном множестве? Предположим, что траектория, соответствующая набору стратегий $(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}^{e})$ и выходящая из начальной вершины, проходит через одну из вершин данного информационного множества. В таком случае, если игрок рационален, то он должен ожидать, что будет находиться именно в этой вершине, коль скоро игра достигнет данного информационного множества и ему придется делать в нем выбор.

В качестве примера рассмотрим статическую игру, изображенную на Рис. 25. Если второй игрок ожидает, что первый игрок выберет правую стратегию, то он должен ожидать также, что будет находиться в правой вершине своего информационного множества. Следует отметить, что если второй игрок будет исходить из сформированных таким способом ожиданий, то, выбирая свои действия оптимальным образом, он повторит ту функцию отклика, которую мы рассматривали при анализе равновесия Нэша.

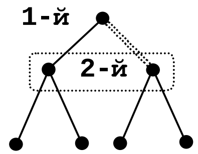


Рисунок 25

В случае смешанных стратегий общего вида рассуждения должны быть похожими. Следует вычислить, с какой вероятностью будет достигаться каждая из вершин некоторого информационного множества в процессе игры, если игра будет происходить в соответствии с набором стратегий $(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}^{e})$. Тогда ожидаемая вероятность того, что игрок может находиться в некоторой вершине рассматриваемого информационного множества, равна вероятности достижения этой вершины деленной на сумму вероятностей достижения вершин рассматриваемого информационного множества. Указанная сумма вероятностей есть просто вероятность достижения рассматриваемого информационного множества, если игра будет происходить в соответствии с набором стратегий $(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}^{e})$. Понятно, что эта вероятность не должна быть равна нулю, чтобы можно было произвести деление. (Если же вероятность равна нулю, т.е. данное информационное множество не может быть достигнуто, то указанное правило не применимо.) Описанный способ вычисления вероятностей соответствует классическому правилу Байеса для условных вероятностей.

Напомним, что правило Байеса применимо к событиям A и B_j $(j=1, ..., m)$, таким что:

(1) B_j $(j=1, ..., m)$ — несовместные события, т.е.

$$B_j \cap B_k = \varnothing, \forall j, k = 1, ..., m;$$

(2) тот факт, что произошло одно из событий B_j гарантирует, что произошло также событие A, т.е.

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_j .$$

При этом верна следующая формула Байеса:

$$P\{B_j \mid A\} = \frac{P\{B_j\}P\{A \mid B_j\}}{\sum_{k=1}^{m} P\{B_k\}P\{A \mid B_k\}} = \frac{P\{B_j\}P\{A \mid B_j\}}{P\{A\}}.$$

В этой формуле $P\{B_j\}$ — вероятность события B_j, $P\{B_j \mid A\}$ — вероятность события B_j при условии, что произошло событие A, $P\{A\}$ — вероятность события A, $P\{A \mid B_j\}$ — вероятность события A при условии, что произошло событие B_j. В знаменателе первой дроби стоит формула полной вероятности для $P\{A\}$. Чтобы можно было применить правило Байеса, нужно чтобы знаменатель не был равен нулю ($P\{A\} \neq 0$).

В применении к рассматриваемой проблеме можно считать, что событие B_j означает, что процесс игры привел в определенную вершину, а событие — A, что процесс игры привел в данное информационное множество. Если брать только такие вершины, которые содержатся в рассматриваемом информационном множестве, то $P\{A \mid B_j\} = 1$ и формула упрощается:

$$P\{B_j \mid A\} = \frac{P\{B_j\}}{P\{A\}},$$

где $P\{A\} = \sum_{k=1}^{m} P\{B_k\}$.

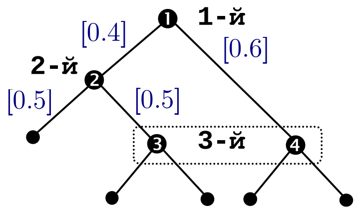


Рисунок 26

Поясним сказанное на примере игры, изображенной на Рис. 26. Если 3-й игрок считает, что 1-й игрок выбирает левую сторону с вероятностью 0.4, и что 2-й игрок выбирает левую и правую сторону с равными вероятностями, то он должен считать, что вершина ❸ будет достигаться в процессе игры с вероятностью $0.4 \cdot 0.5 = 0.2$, а вершина ❹ — с вероятностью 0.6. Таким образом, он должен сопоставить вершине ❸ вероятность

$$0.2/(0.2+0.6) = 0.25,$$

а вершине ❹ — вероятность

$$0.6/(0.2+0.6) = 0.75.$$

Это только одно из требований. Даже если при наборе стратегий $(s_i, \boldsymbol{s}^e_{-i})$ процесс игры никогда не может привести в некоторое информационное множество, ожидания игрока в данном информационном множестве должны соответствовать $(s_i, \boldsymbol{s}^e_{-i})$. Так в игре изображенной на Рис. 27 (а), при указанных ожиданиях относительно стратегий 1-го и 2-го игроков 3-й игрок должен ожидать, что может оказаться в левой вершине с вероятностью 0.1, а в правой вершине с вероятностью 0.9, хотя вероятность достижения информационного множества равна нулю. Ограничимся только этими пояснениями и не станем давать более точного определения. Заметим, что не всегда можно по данному набору стратегий сформировать ожидания. Например, в игре изображенной на Рис. 27 (б), при указанных ожиданиях о стратегии 1-го игрока 2-й игрок не может сформировать ожиданий в своем информационном множестве. Второй игрок может получить ход только в результате ошибки первого игрока и трудно судить, какая из ошибок более вероятна. В таких случаях мы будем только требовать, чтобы у игрока были *некоторые* ожидания, и он выбирал стратегию на основе этих ожиданий.[35]

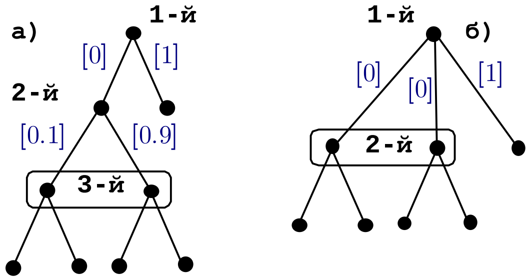


Рисунок 27

Отличительной особенностью совершенного байесовского равновесия является то, что для его поиска в общем случае невозможно использовать обратную индукцию, кроме случая игр с почти совершенной информацией. Если в игре нет подыгр, то совершенное байесовское равновесие приходится находить как решение системы уравнений: ожидаемые распределения на вершинах информационных множеств находятся в соответствии с равновесным набором стратегий, а равновесная стратегия выбирается каждым игроком на основе предположений об ожидаемых распределениях на вершинах информационных множеств.

[35] Для таких случаев в теории игр к настоящему времени разработано насколько различных концепций решений. Однако все они являются в той или иной степени спорными. Интересующийся читатель, владеющий английским языком, может обратиться к соответствующей литературе.

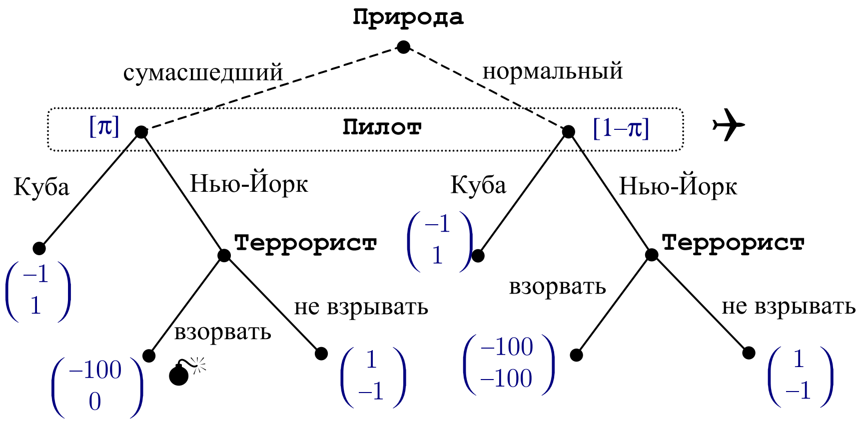


Рисунок 28. Игра «Террорист»

Для иллюстрации использования совершенного байесовского равновесия рассмотрим модификацию Игры 13 (стр. 42) с двумя типами террористов, в которой террорист предварительно решает, хочет ли он проводить операцию. Если он не станет осуществлять задуманную акцию, то вне зависимости от типа выигрыш террориста составит 0, и выигрыш пилота составит 0. Дерево игры показано на Рис. 29. Как и прежде, первый элемент вектора — выигрыш пилота. Поскольку выбор террориста в Нью-Йорке можно предсказать однозначно, то будем рассматривать «частично свернутую» игру. Совершенное байесовское равновесие должно состоять из следующих величин:

1) вероятность, с которой сумасшедший террорист проводит операцию, $\mu_1 \in [0, 1]$;

2) вероятность, с которой нормальный террорист проводит операцию, $\mu_2 \in [0, 1]$;

3) вероятность, с которой пилот ожидает встретить сумасшедшего террориста, $\alpha \in [0, 1]$;

4) вероятность, с которой пилот летит в Нью-Йорк, $\mu_3 \in [0, 1]$.

Этого достаточно для описания равновесия. Все остальные вероятности очевидным образом рассчитываются как функции указанных.

Рассмотрим сначала поведение пилота при ожиданиях, заданных параметром α. Ожидаемые выигрыши пилота от двух возможных действий равны:

Куба:	-1
Нью-Йорк:	$\alpha \cdot (-100) + (1-\alpha) \cdot 1$

Таким образом, если $-1 < \alpha \cdot (-100) + (1-\alpha) \cdot 1$, т.е. $\alpha < 2/101$, то пилот предпочтет полететь в Нью-Йорк ($\mu_3 = 1$), если $\alpha > 2/101$, то на Кубу ($\mu_3 = 0$), а в случае, когда $\alpha = 2/101$, ему все равно, куда лететь (μ_3 любое). Т.е. зависимость стратегии от ожидания имеет вид:

$$\mu_3(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha < 2/101, \\ [0, 1], & \text{если } \alpha = 2/101, \\ 0, & \text{если } \alpha > 2/101. \end{cases}$$

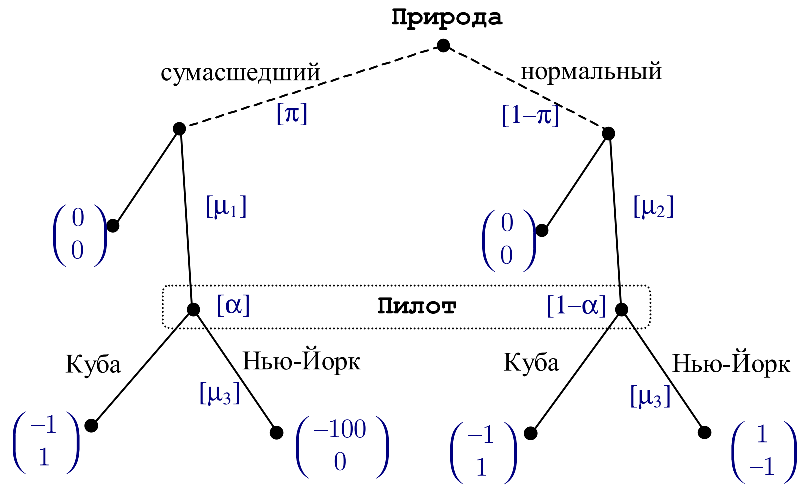


Рисунок 29.

Далее рассмотрим, какими должны быть ожидания пилота, α, в зависимости от вероятностей μ_1 и μ_2. Если $\mu_1 \neq 0$ или $\mu_2 \neq 0$, то можно использовать формулу Байеса. В рассматриваемой игре можно считать, что события следующие: B_1 — террорист сумасшедший, B_2 — террорист нормальный, A — в процессе игры пилот получил ход и должен выбирать, куда ему лететь. (Проверьте, что эти события удовлетворяют требованиям, необходимым для использования правила Байеса). При этом, используя введенные обозначения,

$$P\{B_1\} = \pi, \quad P\{B_2\} = 1 - \pi, \quad P\{B_1 \mid A\} = \alpha,$$

$P\{A \mid B_1\} = \mu_1, \quad P\{A \mid B_2\} = \mu_2.$

Получаем по формуле Байеса, что

$$\alpha(\mu_1, \mu_2) = \frac{\pi\,\mu_1}{\pi\,\mu_1 + (1-\pi)\,\mu_2}.$$

при $\mu_1 \neq 0$ или $\mu_2 \neq 0$. Если $\mu_1 = 0$ и $\mu_2 = 0$, то, согласно принятому нами определению байесовского равновесия, ожидания пилота α могут быть любыми: $\alpha(\mu_1, \mu_2) = [0, 1]$.

Рассмотрим теперь выбор каждого из типов террориста. Если террорист сумасшедший, то его ожидаемый выигрыш от задуманной акции при стратегии пилота, заданной вероятностью μ_3, равен

$$(1-\mu_3)\cdot 1 + \mu_3 \cdot 0 = 1 - \mu_3.$$

Он сравнивает этот выигрыш с 0. Таким образом,

$$\mu_1(\mu_3) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_3 < 1, \\ [0, 1], & \text{если } \mu_3 = 1. \end{cases}$$

Если террорист нормальный, то его ожидаемый выигрыш от задуманной акции равен $1 - 2\mu_3$. Он тоже сравнивает этот выигрыш с 0, т.е.

$$\mu_2(\mu_3) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_3 < 1/2, \\ [0, 1], & \text{если } \mu_3 = 1/2, \\ 0, & \text{если } \mu_3 > 1/2. \end{cases}$$

Набор вероятностей $(\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*, \alpha^*)$, задает совершенное байесовское равновесие, если выполнены четыре условия:

$$\mu_3^* \in \mu_3(\alpha^*), \qquad \alpha^* \in \alpha(\mu_1^*, \mu_2^*),$$
$$\mu_1^* \in \mu_1(\mu_3^*), \qquad \mu_2^* \in \mu_2(\mu_3^*).$$

Для того, чтобы найти решения этой системы, следует разобрать несколько случаев. По-видимому, проще всего проанализировать по отдельности следующие три возможности:

(1) нормальный террорист не проводит операцию ($\mu_2 = 0$);

(2) нормальный террорист проводит операцию ($\mu_2 = 1$);

(3) у нормального террориста невырожденная смешанная стратегия ($\mu_2 \in (0, 1)$).

(1) Рассмотрим случай, когда $\mu_2 = 0$. Предположим, что при этом $\mu_1 \neq 0$. Тогда пилот наверняка будет знать, что он может иметь дело только с сумасшедшим террористом ($\alpha = 1$). Зная это, пилот выберет Кубу ($\mu_3 = 0$). Но в таком случае нормальному террористу тоже выгодно проводить операцию. Мы пришли к противоречию. Значит, единственная возможность состоит в том, что сумасшедший террорист не проводит операцию ($\mu_1 = 0$). Но такое может быть только если он знает, что пилот полетит в Нью-Йорк ($\mu_3 = 1$). Однако, такое поведение пилота возможно только в том случае, если вероятность того, что он имеет дело с сумасшедшим террористом мала ($\alpha \leqslant 2/101$).

Мы нашли в рассматриваемой игре одно из равновесий (точнее, множество равновесий определенного вида):

$$\mu_3^* = 1, \qquad \alpha^* \in [0, 2/101],$$
$$\mu_1^* = 0, \qquad \mu_2^* = 0.$$

Это равновесие поддерживается уверенностью пилота, что вероятность встречи с сумасшедшим террористом мала. Заметим, что эти ожидания ни на чем не основаны, ведь в рассматриваемом равновесии пилот не может сформировать свои ожидания на основе правила Байеса.

(2) Рассмотрим теперь случай, когда $\mu_2 = 1$. Такое поведение нормального террориста возможно только, если пилот с достаточно большой вероятностью полетит на Кубу, а именно, если $\mu_3 \leqslant 1/2$. При такой стратегии пилота сумасшедшему террористу выгодно проводить операцию ($\mu_1 = 1$). Но если оба террориста проводят операцию, то для пилота вероятность встретить сумасшедшего террориста совпадает с вероятностью, с которой такие террористы встречаются вообще, т.е. $\alpha = \pi$. Пилот может выбрать $\mu_3 \leqslant 1/2$ только если $\alpha \geqslant 2/101$. Таким образом, равновесие может достигаться только при $\pi \geqslant 2/101$. При $\pi > 2/101$, имеем $\mu_3 = 0$. Таким образом, если сумасшедшие террористы встречаются на свете достаточно часто, т.е. если $\pi > 2/101$, то в рассматриваемой игре может иметь место следующее равновесие:

$$\mu_3^* = 0, \qquad \alpha^* = \pi,$$
$$\mu_1^* = 1, \qquad \mu_2^* = 1.$$

В вырожденном случае, когда $\pi = 2/101$, получаем, следующее множество равновесий:

$$\mu_1^* = 1, \qquad \mu_2^* = 1,$$
$$\mu_3^* \in [0, 1/2], \qquad \alpha^* = \pi = 2/101.$$

(3) И, наконец, рассмотрим случай, когда нормальный террорист использует невырожденную смешанную стратегию ($\mu_2 \in (0, 1)$). Условием использования такой стратегии является то, что обе альтернативы дают ему одинаковую полезность, то есть то, что пилот летит в Нью-Йорк с вероятностью $1/2$ ($\mu_3 = 1/2$). Такая стратегия пилота может поддерживаться только ожиданиями $\alpha = 2/101$. Учитывая, что сумасшедшему террористу выгодно участвовать в акции ($\mu_1 = 1$), из формулы Байеса получим следующее уравнение:

$$\alpha = \frac{2}{101} = \frac{\pi}{\pi + (1-\pi)\mu_2}.$$

Значит, пилот может сформировать такие ожидания только если

$$\mu_2 = \frac{99\pi}{2(1-\pi)}.$$

Поскольку вероятность μ_2 должна быть меньше единицы, то вероятность, с которой природа порождает сумасшедших террористов должна быть достаточно мала: $\pi < 2/101$.

Таким образом, при $\pi < 2/101$ следующая точка является равновесием:

$$\mu_3^* = \frac{1}{2}, \qquad \alpha^* = \frac{2}{101},$$

$$\mu_1^* = 1, \qquad \mu_2^* = \frac{99\pi}{2(1-\pi)}.$$

Поскольку проанализированы все три возможных случая, то мы нашли все возможные равновесия игры.

Задачи

1. Найдите совершенные байесовские равновесия в игре, изображенной на Рис. 19.

2. «Карточный блеф»

В начале игры игроки (A и B) вносят по 1 д.е. После этого с равной вероятностью игрок A получает одну из двух возможных карт, «старшую» или «младшую». Далее игрок может A повысить ставку, добавив 2 д.е. Если он этого не сделает, то игра заканчивается и деньги забирает игрок B. Если A повышает, то делает ход игрок B. Он либо уравнивает, добавляя 2 д.е., либо пасует. В первом случае карта открывается и деньги забирает игрок A, если карта старшая, и игрок B, если карта младшая. Во втором случае деньги забирает игрок A.

Покажите, что в этой игре нет совершенного байесовского равновесия в чистых стратегиях. Найдите равновесие в смешанных стратегиях. Как часто игрок A будет блефовать, т.е. повышать, имея младшую карту? Как часто игрок B будет уравнивать?

6. Игры и Парето-оптимальность

В этой главе мы приведем укажем на условия, гарантирующие Парето-оптимальность решений некоторых игр, рассматриваемых в книге.

Пусть задана игра с полной информацией в нормальной форме:

$$G = \langle I, \{X_i\}_I, \{u_i\}_I \rangle.$$

Напомним определение Парето-оптимальности.

Определение 13.

Исход $\boldsymbol{y} \in X$ **доминирует по Парето** исход $\boldsymbol{x} \in X$ (является **Парето-улучшением** по сравнению с $\boldsymbol{x}$) , если в нем каждый игрок получает выигрыш не меньше, чем в исходе $\boldsymbol{x}$, а хотя бы один из игроков получает выигрыш строго больше, чем в $\boldsymbol{x}$, т.е.

$$u_i(y_i) \geqslant u_i(x_i) \quad \forall\, i \in I,$$

и

$$\exists\, j \in I: \quad u_j(y_i) > u_j(x_i).$$

Исход $\hat{\boldsymbol{x}} \in X$ называется **Парето-оптимальным**, если не существует другого исхода $\tilde{\boldsymbol{x}} \in X$, такого что он доминирует $\hat{\boldsymbol{x}}$ по Парето.

Множество всех Парето-оптимальных точек называют **границей Парето**.

Рассмотренные выше решения (равновесия) не являются в общем случае Парето-оптимальными, что, в частности, показывает следующая игра.

Игра 14. *«Игра Ауманна»*[36]

Перед двумя участниками игры стоит следующий выбор. Каждый может потребовать, чтобы организатор игры дал сто долларов другому игроку, либо потребовать, чтобы он дал один доллар ему самому. Участники одновременно и независимо де-

[36] Эта игра представляет собой вариант известнейшей игры «Дилемма заключенных». Сюжет «Дилеммы заключенных» следующий. Двух человек арестовали по подозрению в совершении некоторого преступления. Судья предложил каждому следующую сделку. Если он сознается в преступлении, а другой нет, то сознавшийся получает 1 год наказания, а не сознавшийся — 10 лет. Если сознаются оба, то каждый получит по 7 лет. Заключенным также известно, что если никто из них не сознается, то оба получат по 3 года. (Цифры у разных авторов разные.)

лают выбор, после чего организатор игры исполняет их требования. ⇦

Игру можно представить с помощью следующей матрицы (см. Таблицу 21).

Таблица 21

		Второй игрок	
		$100 другому	$1 ему
Первый игрок	$100 другому	100 \ 100	0 \ 101
	$1 ему	101 \ 0	1 \ 1

В этой игре у каждого игрока существует строго доминирующая стратегия — потребовать 1 доллар себе. Соответствующий исход является и равновесием в доминирующих стратегиях, и равновесием Нэша. Примечательным является то, что этот исход является единственным не Парето-оптимальным исходом. Так, исход, в котором оба игрока требуют отдать сто долларов другому строго доминирует его по Парето.

Сотрудничество в повторяющихся играх

Ситуации, аналогичные той, которая описана в игре Ауманна, являются примерами фиаско координации. Одно из объяснений этого фиаско состоит в том, что в игре Ауманна игроки только один раз должны сделать выбор. В ситуациях, когда игра повторяется и игроки, играя в игру, «помнят» всю все принятые ими ранее решения (предысторию игры), между ними вполне может возникнуть сотрудничество.

Чтобы проанализировать эту догадку формально, введем понятие **повторяющейся игры**. Под повторяющейся игрой понимают такую динамическую игру, которая является последовательным повторением некоторой исходной игры (неважно, статической или динамической). Чтобы получить дерево дважды повторяющейся игры, следует к каждой конечной вершине исходной игры «прикрепить» дерево исходной игры. Рис. 30 показывает как это сделать на примере игры Ауманна.

Аналогично, чтобы получить дерево n раз повторяющейся игры, следует к каждой конечной вершине n–1 раз повторяющейся игры «прикрепить» дерево исходной игры. Конечно, для описания повторяющейся игры не обязательно задавать все дерево игры, достаточно указать исходную игру и сколько раз она повторяется. В отличие от обычных игр, в повторяющихся играх принято сопоставлять выигрыши не только конечным вершинам, но и тем промежуточным, которые соответствуют конечным вершинам исходной игры. Общий выигрыш рассчитывается суммированием выигрышей в вершинах, лежащих на траектории игры. Таким образом, если u_{ij} — выигрыш, полученный i-м игроком в результате j-го повторения игры (на j-м «раунде»), то общий выигрыш в n раз повторяющейся игре составит

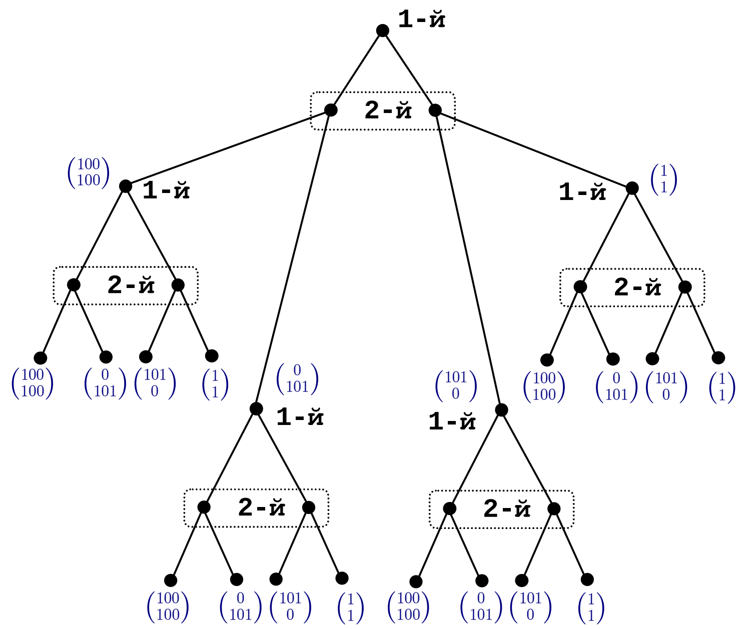


Рисунок 30. Дважды повторяющаяся игра Ауманна

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}.$$

Часто в повторяющихся играх выигрыши дисконтируют, что отражает тот факт, что игроки больше предпочитают получить выигрыш сейчас, а не в будущем. Другими словами, пусть $\delta_{ij} \in (0,\ 1)$ — дисконтирующий множитель i-го игрока для j-го раунда. Тогда общий выигрыш рассчитывается по формуле

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij})^{j-1} u_{ij}.$$

Будем считать в дальнейшем, что $\delta_{ij} = \delta_i$, т.е. дисконтирующий множитель не зависит от раунда.

Как нетрудно заметить, повторяющиеся игры являются разновидностью игр с почти совершенной информацией, поэтому совершенное в подыграх равновесие в них можно находить обратной индукцией.

Проанализируем повторяющуюся игру Ауманна. Используя обратную индукцию, рассмотрим последний раунд игры. Заметим, что все, что происходило в предыдущих раундах, влияет только на выигрыши, но не на множества стратегий. Однако влияние на выигрыши сводится только к тому, что ко всем выигрышам данного раунда добавляется одна и та же константа, определяемая предысторией игры. Таким образом, при анализе можно не принимать во внимание выигрыши предыдущих раундов. Тем самым, все сводится к анализу однократно повторенной игры Ауманна, равновесие которой нам известно: каждый игрок попросит 1 доллар себе.

Далее рассмотрим игры предпоследнего раунда, которые становятся играми последнего раунда в редуцированной игре. «Свертывание» последнего раунда добавляет к выигрышам предпоследнего раунда одну и ту же константу (в нашем случае это 1 для обоих игроков). Предыстория игры тоже влияет только тем, что добавляет константу к выигрышам. Таким образом, опять с точностью до константы получаем исходную игру. Продолжая редуцировать игру, мы на всех раундах получим одно и то же решение, совпадающее с равновесием исходной игры. Таким образом, равновесная траектория будет представлять собой n раз повторенное равновесие обычной игры Ауманна. Догадка о возникновении сотрудничества в повторяющейся игре в данном случае не подтверждается.

Можно сформулировать общую теорему для повторяющихся игр.

Теорема 7.
Пусть в игре G с совершенной информацией (и конечным числом ходов) существует единственное совершенное в подыграх равновесие. Тогда в повторенной n раз игре G, G^n,существует единственное совершенное в подыграх равновесие, причем равновесные стратегии в игре G^n являются повторениями равновесных стратегий в игре G.

Мы не будем приводить формальное доказательство. Доказательство очевидным образом конструируется по схеме, которую мы применили, анализируя повторяющуюся игру Ауманна.

То, что гипотеза о возникновении сотрудничества не подтверждается может быть связано с тем, что игроки знают, что игра закончится на n-м ходу. И в самом деле, если бы игра Ауманна в повторялась бесконечное число раз, то сотрудничество между игроками могло бы иметь место.

Мы ранее не вводили в рассмотрение бесконечные игры, однако их основные элементы можно определить по аналогии с конечными играми. Выигрыш в **бесконечно повторяющейся игре** рассчитывается по формуле[37]

$$u_i = \sum_{j=1}^{\infty} (\delta_i)^{j-1} u_{ij}.$$

В отличие от игры с конечным числом повторений, в бесконечно повторяющейся игре Ауманна возможно возникновение сотрудничества. Рассмотрим стратегии следующего вида:

- Сотрудничать, если на предыдущих ходах другой игрок сотрудничал (в том числе, в первом раунде тоже сотрудничать).
- Не сотрудничать, если хотя бы на одном из предыдущих раундов другой игрок взял 1 доллар себе.

Такую стратегию называют **триггерной**.

Если дисконтирующие множители δ_1, δ_2 достаточно высоки, то такие стратегии будут составлять совершенное в подыграх равновесие.

Рассмотрим, при каких условиях игроку выгодно придерживаться триггерной стратегии, если его партнер также ее придерживается.

Поскольку после того, как игрок взял 1 доллар себе, его партнер во всей дальнейшей игре будет поступать таким же образом, то отказавшемуся от сотрудничества игроку будет выгодно брать 1 доллар себе во всей дальнейшей игре. Таким образом, если отказ от сотрудничества произойдет в k-м раунде, то игрок не может получить больше, чем

[37] Поскольку $\delta_i \in (0, 1)$, то при ограниченности выигрышей в исходной игре ряд сходится.

$$\sum_{j=1}^{k-1}(\delta_i)^{j-1}\cdot 100+(\delta_i)^{k-1}\cdot 101+\sum_{j=k+1}^{\infty}(\delta_i)^{j-1}\cdot 1.$$

Если же не один из игроков не будет отклонятся от триггерной стратегии, то их выигрыши составят

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\delta_i)^{j-1}\cdot 100.$$

Таким образом, чтобы отклоняться было не выгодно, должно быть выполнено неравенство

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\delta_i)^{j-1}\cdot 100 \geqslant \sum_{j=1}^{k-1}(\delta_i)^{j-1}\cdot 100+(\delta_i)^{k-1}\cdot 101+\sum_{j=k+1}^{\infty}(\delta_i)^{j-1}\cdot 1$$

или

$$\sum_{j=k+1}^{\infty}(\delta_i)^{j-1}\cdot 99 \geqslant (\delta_i)^{k-1}\cdot 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{99\,\delta_i}{1-\delta_i}\geqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad 99\,\delta_i \geqslant 1-\delta_i \quad\Leftrightarrow\quad \delta_i \geqslant \frac{1}{100}.$$

Таким образом, если дисконтирующие множители малы, то будущие выигрыши имеют малое значение для игроков и им будет выгодно отклонится от триггерных стратегий. Если же дисконтирующие множители достаточно велики, то триггерные стратегии будут составлять равновесие, в котором будет иметь место сотрудничество.

Следует отметить, однако, что рассмотренное равновесие будет не единственным совершенным в подыграх равновесием в бесконечно повторяющейся игре Ауманна. На самом деле в бесконечно повторяющихся играх практически всегда равновесий бесконечно много. В частности, стратегии в которых независимо от предыстории игроки всегда берут 1 доллар себе тоже составляют равновесие.

Существует теорема (в англоязычной литературе она известна под названием *Folk Theorem*, что на русский можно перевести как «Народная теорема»), утверждающая, что в бесконечно повторяющейся конечной статической игре с полной информацией любой «разумный» вектор выигрышей может возникнуть в некотором совершенном в подыграх равновесии, если дисконтирующие множители достаточно близки к единице. Под разумным вектором выигрышей мы понимаем такой вектор выигрышей, который является выпуклой комбинацией выигрышей исходной игры (с точностью до множителей $1-\delta_i$, необходимых для того, чтобы сделать выигрыши сопоставимыми), и кроме того, в нем каждый элемент должен быть не меньше некоторой пороговой величины. В разных вариантах теоремы пороговая величина разная: это либо выигрыш в каком-либо равновесии Нэша исходной игры, либо минимаксный выигрыш.[38]

Эту теорему можно интерпретировать как утверждение о том, что в бесконечно повторяющейся игре «почти все возможно». Кроме того, из теоремы можно сделать вывод, что в бесконечно повторяющейся игре совершенных в подыграх равновесий бывает, как правило, «слишком много». Понятно, что это снижает ценность полученного выше результата о возникновении сотрудничества в игре Ауманна.

Игры торга

Теперь мы рассмотрим важный класс игр, моделирующих достижение соглашений между экономическими субъектами, — так называемые **игры торга**. В таких играх в условиях полной информации решения всегда Парето-оптимальны.

Игра 15. *«Торг»*[39]

Два игрока (A и B) делят между собой некоторую сумму денег (или любое бесконечно делимое благо). Будем считать, что общее количество равно 1. Дележ можно задать долей, $x \in [0, 1]$, достающейся игроку A. Если игрок A получает x, то игрок B, соответственно, получает $1-x$. Торг происходит в несколько раундов. На каждом раунде один из игроков предлагает дележ x_j, где j — номер раунда. Другой игрок может либо отклонить, либо принять этот дележ. Если дележ принимается, то торг заканчивается и игроки получают свои доли $(x_j,\ 1-x_j)$. Если дележ отклоняется, то настает очередь другого игрока предложить свой дележ. Игрок A предлагает дележ в раундах с нечетными номерами, а игрок B — в раундах с четными номерами. Если за n раундов игроки не договорятся, то игра заканчивается и каждый игрок получает 0.

Предполагается, что игроки предпочитают получить деньги как можно раньше, поэтому полученная сумма денег умножается

---

[38] См. Friedman, J. (1971), "A Noncooperative Equilibrium for Supergames," *Review of Economic Studies*, **28**, 1-12. Fudenberg, D., and E. Maskin (1986), "The Folk Theorem for Repeated Games with Discounting and Incomplete Information," *Econometrica*, **54**, 533-54.

[39] Rubinstein, A. (1982), "Perfect Equilibrium in a Bargaining Model," *Econometrica*, **50**, 97-109.

на дисконтирующий множитель, то есть если игроки договорятся на j–м раунде, то их выигрыши составят $\delta_A^{j-1} x_j$ и $\delta_B^{j-1}(1-x_j)$ соответственно, где $\delta_A, \delta_B \in (0,1)$ — дисконтирующие множители. ⇦

Рассмотрим эту игру при $n=3$. На Рис. 31 показано дерево игры.

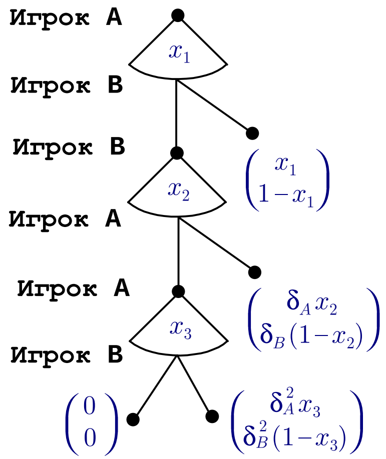


Рисунок 31

Проанализируем эту игру, используя обратную индукцию. В последнем раунде игрок B заведомо примет предложение игрока A, если $\delta_B^2(1-x_3) > 0$, т.е. если $x_3 < 1$. Если $x_3 = 1$, то игроку B все равно, принять или отклонить предложение. Игроку A выгодно назвать x_3 как можно бо́льшим. Значит, в равновесной стратегии не может быть $x_3 < 1$, ведь игрок A тогда мог бы немного увеличить x_3, не изменив выбора игрока B, и увеличил бы при этом свой выигрыш. Таким образом, в равновесии $x_3 = 1$. Чтобы при этом действительно было равновесие, игрок B должен в своей стратегии быть «благожелательным» по отношению к A, то есть принять его предложение; в противном случае игрок A мог бы предложить x_3 меньше 1 и увеличить при этом свой выигрыш.

Анализ 3-го раунда показывает, что игрок A должен будет предложить $x_3 = 1$, а игрок B должен будет принять этот дележ. Мы можем теперь «свернуть» игру, заменив 3-й раунд на конечный узел с выигрышами δ_A^2 и 0.

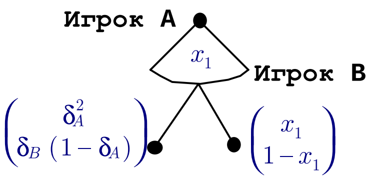


Рисунок 32

Во 2-м раунде игрок A выбирает между δ_A^2 (если отклоняет предложение) и $\delta_A x_2$ (если принимает). Таким образом, если $x_2 > \delta_A$, то он примет предложенный дележ, а если $x_2 < \delta_A$, то отклонит. При $x_2 = \delta_A$ игроку A все равно, какой выбор сделать. Игрок B предпочтет получить выигрыш $\delta_B(1-x_2)$, а не 0, поэтому он не станет предлагать $x_2 < \delta_A$. С другой стороны любой дележ $x_2 > \delta_A$ не является равновесным, поскольку игрок B в этом случае может уменьшить x_2, не меняя выбора игрока A, и, тем самым, увеличить свой выигрыш. Таким образом, в равновесии $x_2 = \delta_A$. Чтобы этот выбор был равновесным, требуется, чтобы в равновесии игрок A принял дележ $x_2 = \delta_A$, несмотря на то, что отказ от этого дележа должен принести ему такой же выигрыш.[40]

Остается торг, состоящий из одного раунда, в котором игроки получат δ_A^2 и $\delta_B(1-\delta_A)$, если не придут к соглашению. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что уже в первом раунде игроки придут к соглашению: игрок B примет дележ $x_1 = 1 - \delta_B(1-\delta_A)$, предложенный игроком A. Выигрыши при этом составят $1-\delta_B(1-\delta_A)$ и $\delta_B(1-\delta_A)$.

О торге в условиях полной информации можно сделать два замечания:

1) *Торг заканчивается на первом раунде.*

2) *Равновесный исход Парето-оптимален.*

Рис. 33 показывает графический способ нахождения равновесия в игре «Торг» при $n=3$. На этом графике видно, как изменяется граница Парето от раунда к раунду, сжимаясь в сторону начала координат из-за дисконтирования. Процесс нахождения решения изображен толстой кривой, выходящей из начала координат.

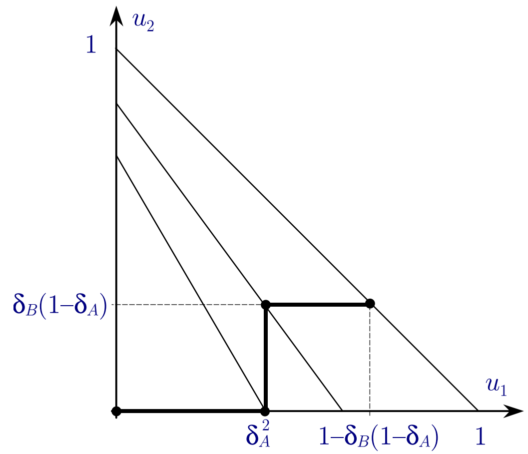


Рисунок 33

[40] Это довольно естественно, если взглянуть на ситуацию с той точки зрения, что игрок B всегда может предложить игроку A дележ $x_2 = \delta_A - \varepsilon$, где ε — малое положительное число, тем самым гарантируя, что A примет дележ. Число ε здесь можно выбрать произвольно малым.

Задачи

1. Постройте по своему имени и фамилии игру, как это описано в задаче 16 на стр. 21. Найдите в этой игре границу Парето. Есть ли среди равновесий Нэша Парето-оптимальные?

2. Объясните, почему в антагонистической игре (игре, в которой сумма выигрышей игроков — постоянная величина) любой исход является Парето-оптимальным.

3. Объясните, в чем состоит аналогия между аукционом, в котором игрок платит названную им цену, и игрой Ауманна (дилеммой заключенных). Представьте аукцион с двумя участниками как игру и сравните множество равновесий Нэша с границей Парето.

4. Рассчитайте общие выигрыши (в каждой из конечных вершин) в повторяющейся дважды игре Ауманна, изображенной на Рис. 30, считая, что дисконтирующие множители обоих игроков равны $1/2$.

5. При каких значениях дисконтирующих множителей пара стратегий следующего вида будет совершенным в подыграх равновесием в повторяющейся игре Ауманна: «В первом раунде сотрудничать. В остальных раундах поступать так же, как другой игрок в предыдущем раунде»?[41]

6. Найдите совершенное в подыграх равновесие в бесконечно продолжающемся торге. Решение может опираться на тот факт, что через каждые два раунда подыгра, начинающаяся с текущей вершины, повторяет исходную игру с точностью до дисконтирования. Таким образом, естественно искать стационарное равновесие. Найдите такое равновесие и покажите, что оно является совершенным в подыграх равновесием. Будет ли это равновесие оптимальным по Парето?

---

[41] По-английски эту стратегию называют *tit-for-tat*, что может означать как «око за око», так и «услуга за услугу».

Квазилинейная экономика и частное равновесие

В этой главе мы рассмотрим теоретическое основание моделей **частного равновесия**, то есть таких моделей, в которых рассматривается равновесие на рынке одного товара в предположении, что цены всех остальных товаров остаются фиксированными.

Как известно, спрос и предложение каждого блага в моделях *общего равновесия* зависят, вообще говоря, от цен всех рассматриваемых благ. Такая зависимость не позволяет анализировать рынки благ по отдельности, поскольку изменения на одном рынке влияют на ситуацию на других рынках, приводя к сдвигу кривых спроса и предложения на этих рынках. Это, в свою очередь, приводит к сдвигам кривых спроса и предложения на данном рынке и т.д. Поэтому частный равновесный анализ оказывается корректным только в ситуациях, когда указанные зависимости отсутствуют или когда ими в первом приближении можно пренебречь. Это случай так называемых квазилинейных предпочтений. Если предпочтения потребителей квазилинейны, то функция спроса, соответствующая этим предпочтениям характеризуется отсутствием эффекта дохода. Если к тому же предпочтения и технологии сепарабельны, то рынки оказываются полностью независимыми и при изменениях на одном из них состояния прочих рынков остаются неизменными. В данном разделе нам предстоит проиллюстрировать сказанное.

Приведем соответствующие обозначения и определения. Рассмотрим экономику с $l+1$ благом, m потребителями и n производителями. Будем обозначать через $I = \{1, ..., m\}$ множество потребителей, а через $J = \{1, ..., n\}$ множество производителей.

Предположим, что предпочтения i-го потребителя описываются функцией полезности следующего вида: $u_i(x_{i1},..., x_{il}, z_i) = v_i(x_{i1},..., x_{il}) + z_i$. Эту функцию полезности принято называть **квазилинейной**. Последнее благо будем интерпретировать как деньги.[42] В дальнейшем, если не оговорено противное, будем предполагать что величина z_i может принимать и отрицательные значения.[43] Будем предполагать, что множество физически допустимых потребительских наборов потребителя i задано ограничениями $x_{ik} \geqslant 0$.

Каждый потребитель сталкивается с бюджетным ограничением, формируемым его начальными запасами и доходами, получаемыми от владения финансовыми активами. Пусть каждый потребитель обладает начальными запасами только $(l+1)$-го блага. Другими словами, начальный запас потребителя i имеет вид $(0, 0, ..., 0, \omega_i)$, причем $\omega_i \geqslant 0$. Предполагается также, что потребитель $i \in I$ получает доход от владения активами в виде долей от прибыли фирм. Числа $\gamma_{ij} \geqslant 0$, $i \in I$, $j \in J$ задают распределение прав на получение прибыли, т.е. γ_{ij} обозначает долю потребителя i в прибыли фирмы j.

Производители в модели представлены технологиями вида $(y_1,..., y_l, -r)$, где $y_k \geqslant 0$ для всех $k = 1, ..., l$ — объемы выпуск первых l благ, а $r \geqslant 0$ — затраты последнего $l+1$-го блага на производства первых l благ. Таким образом предполагается, что единственным затрачиваемым благом в каждом технологическом процессе является $(l+1)$-ое благо — деньги.[44] В анализе удобно описывать технологии с помощью **функции издержек** $c_j(y_1,..., y_l)$ (которая каждому вектору объемов первых l благ сопоставляет необходимые для производства этих объемов затраты $(l+1)$-го блага). Для того, чтобы формально установить связь функции издержек с технологическим множеством предприятия j (Z_j), рассмотрим следующую задачу:

$$r \to \min_r$$
$$(y_1,..., y_l, -r) \in Z_j.$$

Функция $c_j(\boldsymbol{y})$ сопоставляет каждому вектору выпусков $\boldsymbol{y} = (y_1,..., y_l)$ значение этой задачи. В предположении замкнутости технологического множества оптимальное решение существует, если существует хотя бы одно допустимое решение[45]. В даль-

[42] Тем самым мы имеем в виду следующую интерпретацию: рассматриваемая нами экономика является малой частью некоторой большей экономики, в которой эти деньги можно потратить на покупку производящихся там товаров.

[43] Это предположение введено для упрощения анализа. В дальнейшем предлагаются условия, которые гарантируют неотрицательность значений z_i в рассматриваемых состояниях равновесия.

[44] Вообще говоря, мы можем предполагать, что некоторые из первых l благ затрачиваются в производстве, и для них может выполняться $y_j < 0$; это никак не изменит выводов.

[45] Подробное рассмотрение используемых далее элементов теорий потребителя и производителя читатели могут найти в следующих источ-

нейшем мы будем предполагать, что множество значений выпусков $\boldsymbol{y}$, при которых существует допустимое решение рассматриваемой задачи, совпадает с $\mathbb{R}^l_+$. Это означает, что функция издержек $c_j(\cdot)$ определена на множестве $\mathbb{R}^l_+$, т.е. все неотрицательные выпуски возможны. Заметим, что выпуклость множества Z_j гарантирует выпуклость функции $c_j(\cdot)$.

Заметим, что функция издержек однозначно описывает технологическое множество в том случае, когда набор $(\boldsymbol{y}, -r)$ удовлетворяет неравенствам

$$r \geqslant c_j(\boldsymbol{y}),$$
$$\boldsymbol{y} \geqslant 0,$$

тогда и только тогда, когда он принадлежит множеству допустимых технологий: $(\boldsymbol{y}, -r) \in Z_j$. Для этого можно дополнительно потребовать, чтобы технологическое множество Z_j удовлетворяло свойству свободы расходования (можно «выбрасывать» блага):

$$(\boldsymbol{y}, -r) \in Z_j \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{y}', -r') \in Z_j \ \forall\, (\boldsymbol{y}', -r') \leqslant (\boldsymbol{y}, -r).$$

Мы будем рассматривать два типа экономик. В одной из них (экономика $\mathcal{E}_1$) предполагается, что потребитель не сталкивается с ограничением типа $z_i \geqslant 0$ (может «брать в долг» неограниченную сумму денег). В другой это ограничение принимается (экономика $\mathcal{E}_2$).

Под допустимым состоянием квазилинейной экономики $\mathcal{E}_1$ мы будем понимать такое состояние $\{(\boldsymbol{x}_1, z_1), \ldots, (\boldsymbol{x}_m, z_m), (\boldsymbol{y}_1, r_1), \ldots, (\boldsymbol{y}_n, r_n)\}$, что выполнены неравенства:

$$\sum_{i\in I} x_{ik} \leqslant \sum_{j\in J} y_{jk}, \quad k = 1, \ldots, l,$$
$$\sum_{i\in I} z_i + \sum_{j\in J} r_j \leqslant \sum_{i\in I} \omega_i,$$
$$r_j \geqslant c_j(\boldsymbol{y}_j), \quad j \in J,$$
$$\boldsymbol{x}_i \geqslant 0, \quad i \in I, \qquad \boldsymbol{y}_j \geqslant 0, \quad j \in J.$$

Соответственно, под допустимым состоянием квазилинейной экономики $\mathcal{E}_2$ мы будем понимать такое состояние $\{(\boldsymbol{x}_1, z_1), \ldots, (\boldsymbol{x}_m, z_m), (\boldsymbol{y}_1, r_1), \ldots, (\boldsymbol{y}_n, r_n)\}$, что выполнены все вышеприведенные условия, и, кроме того, $z_i \geqslant 0, i \in I$.

никах: Mas-Colell A., Whinston M., Green J. *Microeconomic Theory* Oxford University Press, 1995; Varian H. *Microeconomic Analysis*, 3rd ed., Norton, 1992; Бусыгин В.П., Желободько Е.В., Цыплаков А.А. *Лекции по микроэкономической теории*, Новосибирск, 1998.

1. Характеристика Парето-оптимальных состояний в квазилинейных экономиках

Квазилинейностью предпочтений потребителей объясняется ряд особых свойств рассматриваемой экономики. В частности, анализировать Парето-оптимальные состояния в квазилинейной экономике можно с помощью следующей задачи оптимизации:

$$\begin{aligned} &\sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i) - \sum_{j\in J} c_j(y_j) \to \max \\ &\sum_{i\in I} x_{ik} \leqslant \sum_{j\in J} y_{jk}, \quad k = 1,\ldots,l, \\ &x_i \geqslant 0, \quad i \in I, \\ &y_j \geqslant 0, \quad j \in J. \end{aligned} \qquad (\mathcal{W})$$

Другими словами, верна следующая теорема.

Теорема 8.

1) Пусть

$$\{(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{z}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{z}_m), (\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{r}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{y}}_n, \hat{r}_n)\} \text{ —}$$

Парето-оптимальное состояние в квазилинейной экономике $\mathcal{E}_1$. Тогда набор

$$(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{\boldsymbol{y}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{y}}_n)$$

является решением задачи ($\mathcal{W}$).

2) Обратно, пусть

$$(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{\boldsymbol{y}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{y}}_n)$$

является решением задачи ($\mathcal{W}$).

Тогда существуют такие $(\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_m, \hat{r}_1, \ldots, \hat{r}_n)$, что

$$\{(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{z}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{z}_m), (\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{r}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{y}}_n, \hat{r}_n)\} \text{ —}$$

Парето-оптимальное состояние в квазилинейной экономике $\mathcal{E}_1$.

Доказательство.

1) Напомним, что каждое Парето-оптимальное состояние,

$$\{(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{z}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{z}_m), (\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{r}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{y}}_n, \hat{r}_n)\}$$

при любом $i_0 \in I$ является решением следующей задачи математического программирования:

$$v_{i_0}(\boldsymbol{x}_{i_0}) + z_{i_0} \to \max$$
$$v_i(\boldsymbol{x}_i) + z_i \geqslant v_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i) + \hat{z}_i, \qquad i \neq i_0$$

$$\sum_{i\in I} x_{ik} \leqslant \sum_{j\in J} y_{jk}, \quad k = 1, \ldots, l,$$

$$\sum_{i\in I} z_i + \sum_{j\in J} r_j \leqslant \sum_{i\in I} \omega_i,$$

$$r_j \geqslant c_j(\boldsymbol{y}_j), \quad j \in J,$$

$$\boldsymbol{x}_i \geqslant 0, \quad i \in I, \qquad \boldsymbol{y}_j \geqslant 0, \quad j \in J.$$

Как несложно показать, в этой задачи первое, третье и четвертое неравенства можно заменить на равенства, не изменяя множество решений задачи. Выражая из этих равенств z_i и r_j и исключая их из оставшихся неравенств, видим, что данная задача сводится к задаче $(\mathcal{W})$.

2) Пусть теперь $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{\boldsymbol{y}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{y}}_n)$ является решением задачи $(\mathcal{W})$. Мы можем взять $\hat{r}_j = c_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j)\ \forall j$. Рассмотрим произвольные $\hat{z}_j$, такие что их сумма равна

$$\sum_{i\in I} \hat{z}_i = \sum_{i\in I} \omega_i - \sum_{j\in J} \hat{r}_j. \qquad (\star)$$

Легко увидеть, что состояние

$$\hat{S} = \{(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{z}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{z}_m), (\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{r}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{y}}_n, \hat{r}_n)\}$$

является допустимым состоянием экономики $\mathcal{E}_1$. Докажем, что оно Парето-оптимально. Пусть это не так, и существует другое допустимое состояние экономики $\mathcal{E}_1$,

$$\tilde{S} = \{(\tilde{\boldsymbol{x}}_1, \tilde{z}_1), \ldots, (\tilde{\boldsymbol{x}}_m, \tilde{z}_m), (\tilde{\boldsymbol{y}}_1, \tilde{r}_1), \ldots, (\tilde{\boldsymbol{y}}_n, \tilde{r}_n)\},$$

такое что для всех потребителей $(i \in I)$

$$v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i) + \tilde{z}_i \geqslant v_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i) + \hat{z}_i,$$

и существует по крайней мере один потребитель i_0, для которого выполнено

$$v_{i_0}(\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0}) + \tilde{z}_{i_0} > v_{i_0}(\hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}) + \hat{z}_{i_0}.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\sum_{i\in I} v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i) + \sum_{i\in I} \tilde{z}_i > \sum_{i\in I} v_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i) + \sum_{i\in I} \hat{z}_i. \qquad (\star\star)$$

Поскольку $\tilde{S}$ — допустимое состояние, то

$$\sum_{i\in I} \tilde{z}_i + \sum_{j\in J} \tilde{r}_j \leqslant \sum_{i\in I} \omega_i$$

и

$$\tilde{r}_j \geqslant c_j(\tilde{\boldsymbol{y}}_j), \quad j \in J,$$

откуда

$$\sum_{i\in I} \tilde{z}_i \leqslant \sum_{i\in I} \omega_i - \sum_{j\in J} c_j(\tilde{\boldsymbol{y}}_j). \qquad (\star\star\star)$$

Складывая $(\star)$, $(\star\star)$ и $(\star\star\star)$, получаем

$$\sum_{i\in I} v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i) - \sum_{j\in J} c_j(\tilde{\boldsymbol{y}}_j) > \sum_{i\in I} v_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i) - \sum_{j\in J} c_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j).$$

Поскольку $(\tilde{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{x}}_m, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{y}}_n)$ является допустимым в задаче $(\mathcal{W})$, то это означает, что существование состояния $\tilde{S}$ противоречит оптимальности $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{\boldsymbol{y}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{y}}_n)$ в задаче $(\mathcal{W})$. ■

В случае экономики $\mathcal{E}_2$ первая часть доказанной теоремы для экономики $\mathcal{E}_2$ в общем случае не верна (см. нижеприведенный пример). Вторая часть верна при дополнительном предположении о том, что совокупные начальные запасы достаточно велики.

Как видно из вышеприведенной теоремы, задача поиска Парето-оптимума для экономики $\mathcal{E}_1$ эквивалентна задаче $(\mathcal{W})$. В то же время множество допустимых состояний для экономики $\mathcal{E}_2$ является подмножеством множества допустимых состояний для экономики $\mathcal{E}_1$. Поэтому не исключена ситуация, в которой Парето-оптимум экономики $\mathcal{E}_2$ не является Парето-оптимумом экономики $\mathcal{E}_1$ и, следовательно, не будет решением задачи $(\mathcal{W})$.

Несложно придумать пример экономики $\mathcal{E}_2$ и Парето-оптимума этой экономики, так чтобы в этом Парето-оптимуме ограничение $z_i \geqslant 0$ оказалось существенным для одного из потребителей, и при снятии этого ограничения можно было бы увеличить полезность одного из потребителей, не уменьшая полезность остальных. Читатель может сконструировать такой пример самостоятельно.

Но даже если в Парето-оптимуме экономики $\mathcal{E}_2$ все ограничения $z_i \geqslant 0$ выполняются как строгие неравенства, снятие данных ограничений может позволить осуществить Парето-улучшение. Приведем пример.

Пример 1.

Рассмотрим экономику с одним потребителем $(m = 1)$, одним производителем $(n = 1)$ и двумя благами $(l+1 = 2)$. Для упрощения обозначений индексы будем опускать. Предпочтения потребителя заданы функцией $v(x) = 5x^3 - 9x^2 + 6.9x$, а технологическое множество фирмы — функцией издержек $c(x) = x^4$. Обе функции являются возрастающими при $x \geqslant 0$, поэтому $y = x$, $r = c(x)$ и $z + r = \omega$, так что поиск Парето-оптимума сводится к максимизации функции

$$v(x) - c(x)$$

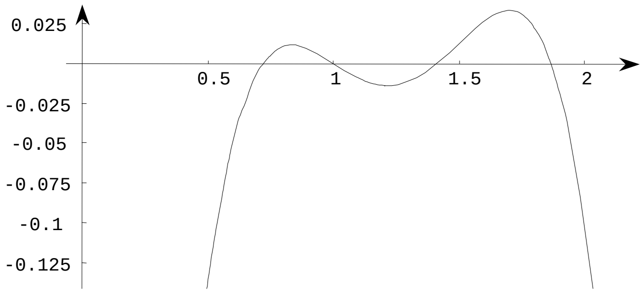


Рисунок 34

при ограничениях $x \geqslant 0$ и $c(x) \leqslant \omega$. Здесь ограничение $c(x) \leqslant \omega$ соответствует ограничению $z \geqslant 0$. Можно переписать последнее ограничение в виде $x \leqslant c^{-1}(\omega)$.

Пусть $\omega = 1$, при этом $c^{-1}(\omega) = 1$. Как видно на Рис. 34 функция $v(x) - c(x)$ имеет два локальных максимума: $x_1 \approx 0.83473$ и $x_2 \approx 1.6988$. Только второй из этих максимумов является глобальным. Парето-оптимум экономики $\mathcal{E}_2$ достигается при $x = x_1$, поскольку максимизация идет на отрезке $[0, 1]$. В то же время Парето-оптимум экономики $\mathcal{E}_1$ и, следовательно, решение задачи ($\mathcal{W}$) достигается при $x = x_2$. ⇦

В этом примере ключевым моментом является то, что функция $v(\cdot)$ не является вогнутой. Можно было построить подобный пример иначе: так, чтобы функция $v(\cdot)$ была вогнутой, но функция издержек не была выпуклой. Таким образом, для доказательства аналога первой части предыдущей теоремы в «выпуклой» экономике $\mathcal{E}_2$ следует потребовать, чтобы все функции $v_i(\cdot)$ были вогнутыми, а функции $c_j(\boldsymbol{y}_j)$ — выпуклыми. Аналогом этой теоремы для случая экономики $\mathcal{E}_2$ является следующая теорема.

Теорема 9.
1) Предположим, что функции $v_i(\cdot)$ вогнуты, а функции издержек $c_j(\cdot)$ выпуклы, и пусть

$$\hat{S} = \{(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{z}_1), ..., (\hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{z}_m), (\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{r}_1), ..., (\hat{\boldsymbol{y}}_n, \hat{r}_n)\} \text{ —}$$

Парето-оптимальное состояние в квазилинейной экономике $\mathcal{E}_2$, причем $\hat{z}_i > 0\ \forall i$. Тогда набор

$$(\hat{\boldsymbol{x}}_1, ..., \hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{y}_1, ..., \hat{y}_n)$$

является решением задачи ($\mathcal{W}$).

2) Обратно, пусть

$$(\hat{\boldsymbol{x}}_1, ..., \hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{\boldsymbol{y}}_1, ..., \hat{\boldsymbol{y}}_n)$$

является решением задачи ($\mathcal{W}$), причем

$$\sum_{i \in I} \omega_i - \sum_{j \in J} c_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j) \geqslant 0.$$

Тогда существуют такие $(\hat{z}_1, ..., \hat{z}_m, \hat{r}_1, ..., \hat{r}_n)$, что

$$\{(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{z}_1), ..., (\hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{z}_m), (\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{r}_1), ..., (\hat{\boldsymbol{y}}_n, \hat{r}_n)\} \text{ —}$$

Парето-оптимальное состояние в квазилинейной экономике $\mathcal{E}_2$.

Доказательство.

1) Доказательство опирается на следующее вспомогательное утверждение: если $\hat{S}$ — Парето-оптимум в экономике $\mathcal{E}_2$, удовлетворяющий условиям теоремы, то он также является Парето-оптимумом в соответствующей экономике $\mathcal{E}_1$. Если это утверждение верно, то доказываемое является тривиальным следствием предыдущей теоремы.

Докажем это вспомогательное утверждение от противного. Пусть в соответствующей экономике $\mathcal{E}_1$ существует допустимое состояние

$$\tilde{S} = \{(\tilde{\boldsymbol{x}}_1, \tilde{z}_1), ..., (\tilde{\boldsymbol{x}}_m, \tilde{z}_m), (\tilde{\boldsymbol{y}}_1, \tilde{r}_1), ..., (\tilde{\boldsymbol{y}}_n, \tilde{r}_n)\},$$

которое доминирует по Парето состояние $\hat{S}$.

Рассмотрим выпуклую комбинацию этих двух состояний:

$$S(\alpha) = \alpha\hat{S} + (1-\alpha)\tilde{S}, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Существует достаточно малое $\alpha > 0$, такое что $S(\alpha)$ является допустимым в экономике $\mathcal{E}_2$. Однако при $\alpha > 0$ состояние $S(\alpha)$ представляет собой Парето-улучшение в экономике $\mathcal{E}_2$ по сравнению с $\hat{S}$, что противоречит предположению теоремы.

Подробное изложение доказательства оставляется в качестве упражнения.

2) Доказательство оставляется в качестве упражнения. ■

Приведенные выше результаты позволяют нам в случае квазилинейной экономики использовать задачу ($\mathcal{W}$) для анализа Парето-оптимальных состояний. Так как в достаточно широком классе случаев решения задачи ($\mathcal{W}$) описывают Парето-границу, то целевую функцию задачи ($\mathcal{W}$) можно использовать для решения вопроса о принадлежности некоторого допустимого состояния к Парето-границе. В связи с этим, естественно рассматривать функцию

$$W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i) - \sum_{j\in J} c_j(\boldsymbol{y}_j)$$

в качестве индикатора благосостояния.Основанием для этого является следующая теорема.

Пусть

$\tilde{S} = \{(\tilde{\boldsymbol{x}}_1, \tilde{z}_1), \ldots, (\tilde{\boldsymbol{x}}_m, \tilde{z}_m), (\tilde{\boldsymbol{y}}_1, \tilde{r}_1), \ldots, (\tilde{\boldsymbol{y}}_n, \tilde{r}_n)\}$,

$\check{S} = \{(\check{\boldsymbol{x}}_1, \check{z}_1), \ldots, (\check{\boldsymbol{x}}_m, \check{z}_m), (\check{\boldsymbol{y}}_1, \check{r}_1), \ldots, (\check{\boldsymbol{y}}_n, \check{r}_n)\}$ —

допустимые состояния экономики $\mathcal{E}_1$ ($\mathcal{E}_2$). Тогда выполнено следующая теорема.

Теорема 10.

1) Если каждый из потребителей в состоянии $\tilde{S}$ имеет не меньшую полезность, чем в состоянии $\check{S}$, т.е.

$$v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i) + \tilde{z}_i \geqslant v_i(\check{\boldsymbol{x}}_i) + \check{z}_i \ \forall i,$$

и

$$\sum_{i\in I} \check{z}_i + \sum_{j\in J} c_j(\check{\boldsymbol{y}}_j) = \sum_{i\in I} \omega_i,$$ [46]

то

$$W(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \geqslant W(\check{\boldsymbol{x}}, \check{\boldsymbol{y}}),$$

причем если существует потребитель i_0, такой что

$$v_{i_0}(\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0}) + \tilde{z}_{i_0} > v_{i_0}(\check{\boldsymbol{x}}_{i_0}) + \check{z}_{i_0}$$

(т.е. состояние $\tilde{S}$ доминирует $\check{S}$ по Парето), то

$$W(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) > W(\check{\boldsymbol{x}}, \check{\boldsymbol{y}}).$$

2) Для экономики $\mathcal{E}_1$ выполнено и обратное: если $W(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) > W(\check{\boldsymbol{x}}, \check{\boldsymbol{y}})$, и

$$\sum_{i\in I} \tilde{z}_i + \sum_{j\in J} c_j(\tilde{\boldsymbol{y}}_j) = \sum_{i\in I} \omega_i,$$

то существуют $\tilde{z}_i$ и $\tilde{r}_j$ такие, что состояние экономики

$$\{(\tilde{\boldsymbol{x}}_1, \tilde{z}_1), \ldots, (\tilde{\boldsymbol{x}}_m, \tilde{z}_m), (\tilde{\boldsymbol{y}}_1, \tilde{r}_1), \ldots, (\tilde{\boldsymbol{y}}_n, \tilde{r}_n)\},$$

является допустимым, причем

$$v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i) + \tilde{z}_i > v_i(\check{\boldsymbol{x}}_i) + \check{z}_i \ \forall i.$$

[46] Это условие будет, например, выполнено в равновесии, таком что $\check{\boldsymbol{x}}_i$ является решением задачи потребителя, а $\check{\boldsymbol{y}}_j$ является решением задачи производителя при неотрицательности цен.

Доказательство.

Доказательство оставляется в качестве упражнения. ■

Первая часть данного утверждения говорит о том, что любое Парето-улучшение сопровождается ростом индикатора $W(\cdot)$. Смысл второй части приведенного утверждения состоит в том, что если $W(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) > W(\check{\boldsymbol{x}}, \check{\boldsymbol{y}})$, то можно в состоянии $\tilde{S}$ произвести такие трансферты (перераспределить деньги), что новое состояние будет строго доминировать состояние $\check{S}$ по Парето. Заметим, что некоторые z_i при этом могут быть отрицательны.

В Парето-оптимуме квазилинейной экономики индикатор благосостояния достигает максимума. Пусть $\hat{W}$ — это максимальное значение. Сравнение уровней благосостояния в анализируемом состоянии и в идеальной ситуации позволяют количественно оценить потери благосостояния. Разность между $\hat{W}$ и уровнем индикатора $W(S)$ в некотором состоянии S называется **чистыми потерями благосостояния**:

$$DL = \hat{W} - W(S).$$

Заметим, что на основе Теоремы 8 можно получить полное описание границы Парето экономики $\mathcal{E}_1$:

Теорема 11.

Состояние $\{(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{z}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{z}_m), (\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{r}_1), \ldots, (\hat{\boldsymbol{y}}_n, \hat{r}_n)\}$ является Парето-оптимальным состоянием в квазилинейной экономике $\mathcal{E}_1$ тогда и только тогда, когда

$$(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_m, \hat{\boldsymbol{y}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{y}}_n)$$

является решением задачи ($\mathcal{W}$),

$$\hat{r}_j = c_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j)$$

и

$$\sum_{i\in I} \hat{z}_i = \sum_{i\in I} \omega_i - c_j(\hat{\boldsymbol{y}}_j).$$

Доказательство.

Доказательство оставляется в качестве упражнения. ■

В ситуации, когда функции $v_i(\cdot)$ строго вогнуты, а функции $c_j(\cdot)$ выпуклы, решение задачи ($\mathcal{W}$) единственно, поэтому два Парето-оптимальных состояния в экономике $\mathcal{E}_1$ (в экономике $\mathcal{E}_2$, если $\tilde{z}_i$ и $\check{z}_i$ положительны)

$$\{(\tilde{\boldsymbol{x}}_1, \tilde{z}_1), \ldots, (\tilde{\boldsymbol{x}}_m, \tilde{z}_m), (\tilde{\boldsymbol{y}}_1, \tilde{r}_1), \ldots, (\tilde{\boldsymbol{y}}_n, \tilde{r}_n)\},$$
$$\{(\check{\boldsymbol{x}}_1, \check{z}_1), \ldots, (\check{\boldsymbol{x}}_m, \check{z}_m), (\check{\boldsymbol{y}}_1, \check{r}_1), \ldots, (\check{\boldsymbol{y}}_n, \check{r}_n)\}, \text{ —}$$

могут различаться лишь объемами потребления $(l+1)$-го блага. Другими словами, $\tilde{\boldsymbol{x}}_i = \check{\boldsymbol{x}}_i \; \forall\, i \in I$ и $\tilde{\boldsymbol{y}}_j = \check{\boldsymbol{y}}_j \; \forall\, j \in J$.

Поэтому, как несложно заметить в случае экономики $\mathcal{E}_1$ граница Парето представляет собой гиперплоскость вида (читателю предлагается доказать этот результат самостоятельно)

$$\sum_{i \in I} u_i = const.$$

В экономике $\mathcal{E}_2$ граница Парето может «загибаться» из-за того, что некоторые из ограничений $z_i \geqslant 0$ являются существенными, что иллюстрирует следующий пример.

Пример 2.

На Рис. 36. изображена Парето-граница в экономике типа $\mathcal{E}_2$ со следующими параметрами: 2 блага ($l+1=2$), 2 потребителя, с функциями полезности

$$u_1 = 2\sqrt{x_1} + z_1 \quad \text{и} \quad u_2 = 4\sqrt{x_2} + z_2,$$

и один производитель с функцией издержек

$$c(y) = y.$$

Начальные запасы 2-го блага равны 10.

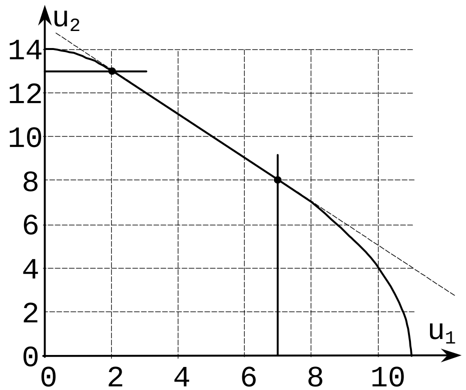


Рисунок 36. Парето-граница в экономике типа $\mathcal{E}_2$

Несложно проверить, что решение задачи $(\mathcal{W})$ дает $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$. Однако это решение описывает точки границы Парето только при $u_1 \in [2, 7]$. Парето-граница при этом имеет вид

$$u_2 = 15 - u_1.$$

При $u_1 \in [0, 2]$ Парето-граница имеет вид

$$u_2 = 14 - \frac{u_1^2}{4}.$$

При $u_1 \in [7, 11]$ Парето-граница имеет вид

$$u_2 = 4\sqrt{11 - u_1}.$$

⇦

В случае двух благ можно привести графическую иллюстрацию Парето границы экономики типа $\mathcal{E}_2$ на основе диаграммы Эджворта (см. Рис. 35). Жирная линия представляет собой границу Парето.

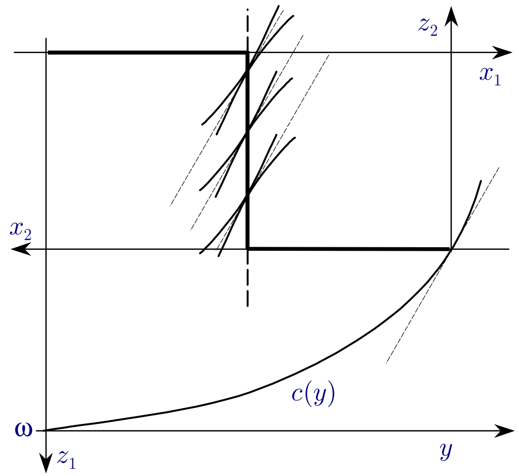


Рисунок 35

2. Характеристика поведения потребителей в квазилинейных экономиках

В дальнейшем сравниваются потребительские наборы, которые оказываются рыночными равновесиями при различных организациях рынков (совершенная конкуренция, монополия, олигополия и т.д.). При этом всюду предполагается, что потребители рассматривают рыночные цены как данные. Другими словами, определяя предпочитаемый потребительский набор $(\boldsymbol{x}_i, z_i)$ при рыночных ценах благ $(p, 1)$, потребитель в экономике $\mathcal{E}_1$ решает следующую задачу:

$$\begin{aligned} & v_i(x_{i1},\dots, x_{il}) + z_i \to \max \\ & \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i + z_i \leqslant \beta_i(\boldsymbol{p}) \qquad\qquad (\,\mathcal{C}_1(\boldsymbol{p})\,) \\ & x_{ik} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Соответствующая задача в экономике $\mathcal{E}_2$ включает дополнительное ограничение $z_i \geqslant 0$. (Будем обозначать эту задачу через $\mathcal{C}_2(\boldsymbol{p})$)

Здесь через $\beta_i(\boldsymbol{p})$ обозначен доход потребителя при данных ценах:

$$\beta_i(\boldsymbol{p}) = \omega_i + \sum_{j\in J}\gamma_{ij}\pi_j(\boldsymbol{p}),$$

где $\pi_j(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j - c_j(\boldsymbol{y}_j)$ — прибыль производителя j при ценах $(\boldsymbol{p}, 1)$.

Имеют место следующие результаты, характеризующие оптимальный выбор потребителя.

Теорема 12.

Предположим, что $(\boldsymbol{x}_i, z_i)$ — решение задачи потребителя $\mathcal{C}_1(\boldsymbol{p})$. Тогда $\boldsymbol{x}_i$ является решением следующей задачи

$$\begin{aligned} & v_i(x_{i1},\dots, x_{il}) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i \to \max \\ & x_{ik} \geqslant 0. \qquad\qquad (☺) \end{aligned}$$

И обратно, пусть $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ – решение задачи (☺), тогда существует такое $\bar{z}_i$, что $(\bar{\boldsymbol{x}}_i, \bar{z}_i)$ – решение задачи $\mathcal{C}_1(\boldsymbol{p})$.

Доказательство.

Доказательство оставляется в качестве упражнения. ■

Это означает, что спрос потребителя на первые l благ не зависит от его дохода. Аналог этого результата верен и в случае задачи $\mathcal{C}_2(\boldsymbol{p})$, когда допустимые потребительские наборы удовлетворяют дополнительному условию $z_i \geqslant 0$, что показывает следующая теорема.

Теорема 13.

Предположим, что $v_i(\cdot)$ — вогнутая функция, а $(\boldsymbol{x}_i, z_i)$, — решение задачи потребителя $\mathcal{C}_2(\boldsymbol{p})$ (соответствующей экономике $\mathcal{E}_2$), такое что $z_i > 0$. Тогда $\boldsymbol{x}_i$ является решением следующей задачи

$$\begin{aligned} & v_i(x_{i1},\dots, x_{il}) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i \to \max \\ & x_{ik} \geqslant 0 \ \forall k \qquad\qquad (😐) \end{aligned}$$

И обратно, пусть $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ – решение задачи (😐) и $\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \beta_i(\boldsymbol{p})$, тогда существует такое $\bar{z}_i \geqslant 0$, что $(\bar{\boldsymbol{x}}_i, \bar{z}_i)$ — решение задачи $\mathcal{C}_2(\boldsymbol{p})$.

Доказательство.

Доказательство оставляется в качестве упражнения.

■

Предположим дополнительно, что $v_i(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда для решения задачи оптимального выбора потребителя $\mathcal{C}_1(\boldsymbol{p})$ (или $\mathcal{C}_2(\boldsymbol{p})$ при $z_i > 0$) должно выполняться следующее условие

$$\nabla v_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i) \leqslant \boldsymbol{p},$$

причем если $\bar{x}_{ik} > 0$, то

$$\frac{\partial v_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)}{\partial x_{ik}} = p_k.$$

Таким образом, если решение задачи потребителя внутреннее $(\bar{\boldsymbol{x}}_i > \mathbb{0})$ и, кроме того, $z_i > 0$ в случае задачи $\mathcal{C}_2(\boldsymbol{p})$), то

$$\nabla v_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i) = \boldsymbol{p}.$$

Другими словами, градиент функции $v_i(\cdot)$, вычисленный для набора благ, совпадающего с рыночным спросом потребителя, равен вектору рыночных цен этих благ. Таким образом, градиент функции $v_i(\cdot)$ представляет собой обратную функцию спроса $\boldsymbol{p}_i(\boldsymbol{x}_i)$ i-го потребителя — вектор цен первых l благ, при котором потребитель предъявляет спрос именно на этот набор благ.

В классе квазилинейных экономик важную роль играет случай когда предпочтения всех потребителей, помимо свойства квазилинейности обладают свойством сепарабельности, т.е. функции полезности таких потребителей представимы в виде

$$u_i(x_{i1},\dots, x_{il}, z_i) = v_i(x_{i1},\dots, x_{il}) + z_i = \sum_k v_{ik}(x_{ik}) + z_i.$$

Если функция полезности i-го потребителя имеет такой вид, то задачу потребителя $\mathcal{C}_1(\boldsymbol{p})$ можно разложить на l задач — по одной на каждое благо кроме $(l{+}1)$-го:

$$\begin{aligned} & v_i(x_{i1},\dots, x_{il}) - p_k x_{ik} \to \max \\ & x_{ik} \geqslant 0 \ \ \forall k \qquad\qquad (\mathcal{C}_{1k}(p_k)) \end{aligned}$$

Теорема 14.
Если $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ — решение задачи потребителя $\mathcal{C}_1(\boldsymbol{p})$, то $\bar{x}_{ik}$ — решение задачи $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$. Обратно, если $\bar{x}_{ik}$ — решение задачи $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$ при $k = 1, \ldots, l$, то $\bar{\boldsymbol{x}}_i = (\bar{x}_{i1}, \ldots, \bar{x}_{il})$ — решение задачи $\mathcal{C}_1(\boldsymbol{p})$ при $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_l)$.

Доказательство.
Доказательство оставляется в качестве упражнения. ■

Из данной теоремы следует, что функция спроса на k-е благо зависит только от цены на это благо, т.е. имеет вид $x_{ik}(p_k)$.

В этом случае (при условии дифференцируемости) необходимое условие оптимальности потребительского набора $(\bar{\boldsymbol{x}}_i, \bar{z}_i)$ (как в случае экономики $\mathcal{E}_1$, так и в случае $\mathcal{E}_2$ при $z_i > 0$) имеет вид:

$$\frac{\partial v_{ik}(\bar{x}_{ik})}{\partial x_{ik}} \leqslant p_k,$$

причем если $\bar{x}_{ik} > 0$, то

$$\frac{\partial v_{ik}(\bar{x}_{ik})}{\partial x_{ik}} = p_k.$$

Это условие является также и достаточным, если $v_{ik}(\cdot)$ — вогнутые функции.

Из Теоремы 14 следует, что, вместо исходной задачи мы можем использовать для анализа спроса на k-е благо задачу $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$. Мы будем предполагать, что функция $v_{ik}(x_{ik})$ дважды дифференцируема, имеет положительную производную и строго вогнута. Строгая вогнутость гарантирует, в числе прочего, что если решение задачи $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$ существует, то оно единственно. Очевидно, что это решение есть значение функции спроса рассматриваемого потребителя на k-е благо при данном p_k, $x_{ik}(p_k)$.

Рассмотрим условия существования решения задачи $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$. (Заметим, что из Теоремы 14 следует, что решение исходной задачи $\mathcal{C}_1(\boldsymbol{p})$ в случае сепарабельной функции полезности существует тогда и только тогда, когда существуют решения задач $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$ при любом $k = 1, \ldots, l$.)

Введем обозначения [47]

$$\bar{p} = \sup{}_{x_{ik}>0} \frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}}$$

и

$$\underline{p} = \inf{}_{x_{ik}>0} \frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}}.$$

Легко видеть, что при любом p_k, таком что $\underline{p} < p_k < \bar{p}$, решение задачи $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$ существует. Действительно в силу непрерывности функции $\partial v_{ik}(x_{ik})/\partial x_{ik}$, существует x_{ik}, такое что

$$\frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_k} = p_k.$$

Это x_{ik} должно быть решением задачи потребителя при ценах p_k.

Кроме того, при ценах $p_k \leqslant \underline{p}$ задача $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$ не имеет решения. Покажем это. Пусть при $p_k \leqslant \underline{p}$ существует решение $x_{ik}(p_k) \geqslant 0$. Тогда должно выполняться необходимое условие оптимума (условие первого порядка)

$$\frac{\partial v_{ik}(x_{ik}(p_k))}{\partial x_{ik}} \leqslant p_k.$$

Откуда в силу того, что $p_k \leqslant \underline{p}$ имеем

$$\frac{\partial v_{ik}(x_{ik}(p_k))}{\partial x_{ik}} \leqslant \inf{}_{x_{ik}>0} \frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}}$$

Рассмотрим теперь значение функции $\dfrac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}}$ в точке $x_{ik}(p_k) + \varepsilon$. В силу убывания функции $\dfrac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}}$ имеем

$$\frac{\partial v_{ik}(x_{ik}(p_k) + \varepsilon)}{\partial x_{ik}} < \frac{\partial v_{ik}(x_{ik}(p_k))}{\partial x_{ik}}$$

при любом $\varepsilon > 0$. Откуда получаем

$$\frac{\partial v_{ik}(x_{ik}(p_k) + \varepsilon)}{\partial x_{ik}} < \frac{\partial v_{ik}(x_{ik}(p_k))}{\partial x_{ik}} \leqslant \inf{}_{x_{ik}>0} \frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}} = \underline{p}.$$

Так как $x_{ik}(p_k) + \varepsilon > 0$, мы получили противоречие с определением инфимума. Тем самым предположив существование решения задачи $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$ при $p_k \leqslant \underline{p}$ мы пришли к противоречию, а значит полностью обосновали что при $p_k \leqslant \underline{p}$ задача $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$ не имеет решения.

Покажем теперь, что $x_{ik}(p_k) \to 0$ при $p_k \to \infty$. Рассмотрим для этого два случая: $\bar{p} = \infty$ и $\bar{p} < \infty$.

Пусть $\bar{p} = \infty$. При $p_k > \underline{p}$, по доказанному ранее решение $x_{ik}(p_k)$ задачи $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$ существует, причем оно будет внутренним ($x_{ik}(p_k) > 0$), так как любое значение $p_k > \underline{p}$ по непрерывности функции

[47] $\bar{p}$ — это так называемая цена «удушения» спроса.

$\dfrac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}}$ может быть реализовано при соответствующем подборе x_{ik}. Это означает что условие первого порядка в этой задаче выполнено как равенство $\dfrac{\partial v_{ik}(x_{ik}(p_k))}{\partial x_k} = p_k$ при $p_k > \underline{p}$, и определяет функцию спроса $x_{ik}(p_k)$ при $p_k > \underline{p}$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{p_k^n\}$, такую что

$$\lim_{n\to\infty} p_k^n = \infty.$$

Выделим из последовательности $\{p_k^n\}$ возрастающую подпоследовательность $\{p_k^{n_s}\}$. На основании подпоследовательности цен $\{p_k^{n_s}\}$ построим соответствующую ей последовательность объемов спроса $\{x_{ik}^{n_s}\}$ по правилу $\dfrac{\partial v_{ik}(x_{ik}^{n_s})}{\partial x_{ik}} = p_k^{n_s}$. Так как $\lim_{s\to\infty} p_k^{n_s} = \infty$, то в силу строгой вогнутости функции полезности имеем, что последовательность объемов спроса $\{x_{ik}^{n_s}\}$ убывает, причем $x_{ik}^{n_s+1} < x_{ik}^{n_s}$. Как мы отметили выше при $p_k > \underline{p}$ решение задачи $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$ является внутренним и, таким образом, $x_{ik}^{n_s} > 0 \;\forall\; n_s$, но каждая убывающая и ограниченная снизу последовательность имеет предел. Пусть $\tilde{x}_{ik}$ — предел этой последовательности объемов спроса и $\tilde{x}_{ik} > 0$. Тогда, как нетрудно заметить, подпоследовательность $\{p_k^{n_s}\}$ имеет (в силу непрерывности $\dfrac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}}$) конечный предел $\dfrac{\partial v_{ik}(\tilde{x}_{ik})}{\partial x_{ik}}$, что противоречит ее построению. Получив противоречие, мы доказали, тем самым, что $\tilde{x}_{ik} = 0$ и тем самым, что $x_{ik}(p_k) \to 0$ при $p_k \to \infty$.

Пусть теперь $\overline{p} < \infty$. Тогда в силу убывания функции $\partial v_{ik}(x_{ik})/\partial x_{ik}$ имеет место равенство

$$\overline{p} = \lim_{x_{ik}\to 0} \frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}} = \max_{x_{ik}\geqslant 0} \frac{\partial v_{ik}(x_{ik})}{\partial x_{ik}}.$$

Тогда при любой цене $p_k \geqslant \overline{p}$ выполнено

$$\frac{\partial v_{ik}(0)}{\partial x_{ik}} \leqslant p_k.$$

Отсюда следует, что при $p_k \geqslant \overline{p}$ спрос на данное благо равен нулю, т.е. $x_{ik}(p_k) = 0$, поскольку в силу вогнутости целевой функции это необходимое условие оптимальности является также и достаточным. Отметим, что так как функция полезности в задаче $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$ является *строго* вогнутой, то $x_{ik}(p_k) = 0$ — *единственное* решение этой задачи. Тем самым мы доказали, что в общем случае $x_{ik}(p_k) \to 0$ при $p_k \to \infty$.

Потребительский излишек: определение, связь с прямой и обратной функциями спроса

Пользуясь выведенными выше характеристиками потребительского выбора, проанализируем связь индикатора благосостояния $W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ с площадью под кривой спроса.

Величина $CS_i = v_i(x_{i1},\ldots, x_{il}) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i - v_i(0,\ldots, 0)$ называется **потребительским излишком**.[48] В дальнейшем без потери общности будем предполагать, что $v_i(0,\ldots, 0) = 0$.

Мы рассмотрим случай квазилинейных сепарабельных функций полезности, т.е. $v_i(x_{i1},\ldots, x_{il}) = \sum_{k=1}^{l} v_{ik}(x_{ik})$. Потребительский излишек при этом получается суммированием потребительских излишков, получаемых потребителем на рынках отдельных благ:

$$CS_i = \sum_{k=1}^{l}(v_{ik}(x_{ik}) - p_k x_{ik}) = \sum_{k=1}^{l} CS_{ik},$$

где $CS_{ik} = v_{ik}(x_{ik}) - p_k x_{ik}$.

В этом случае геометрически излишек потребителя на рынке k-го блага равен площади фигуры, лежащей под графиком функции обратного спроса выше цены этого блага (см. Рис. 37).

Поясним это. Рассмотрим потребительский излишек как функцию цен:

$$CS_i(\boldsymbol{p}) = \sum_{k=1}^{l}[v_{ik}(x_{ik}(p_k)) - p_k x_{ik}(p_k)] = \sum_{k=1}^{l} CS_{ik}(p_k).$$

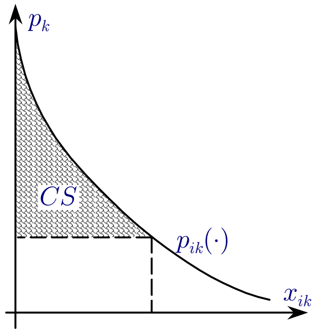


Рисунок 37. Излишек потребителя

Функции $CS_{ik}(p_k) = v_{ik}(x_{ik}(p_k)) - p_k x_{ik}(p_k)$ определены при всех ценах $p_k \geqslant \underline{p}$ и, кроме того, не могут быть отрицательными.[49]

Как было доказано, $x_{ik}(p_k) \to 0$ при $p_k \to \infty$, откуда $v_{ik}(x_{ik}(p_k)) \to 0$ при $p_k \to \infty$. Поскольку $p_k x_{ik}(p_k) \leqslant v_{ik}(x_{ik}(p_k))$, то при росте цены блага расходы на его при-

[48] В случае произвольной функции полезности рассмотрение потребительского излишка и связанных с ним понятий компенсирующей и эквивалентной вариации можно найти, например в источниках, указанных в сноске 45.

[49] Так как $x_{ik} = 0$ является допустимым в задаче $\mathcal{C}_{1k}(p_k)$, то $CS_{ik}(p_k) = v_{ik}(x_{ik}(p_k)) - p_k x_{ik}(p_k) \geqslant v_{ik}(0) - p_k \cdot 0 = 0$, и, тем самым, $CS_{ik}(p_k) \geqslant 0$.

обретение стремятся к нулю, т.е. $p_k x_{ik}(p_k) \to 0$ при $p_k \to \infty$.

Функция $CS_i(\boldsymbol{p})$ является дифференцируемой, если функция полезности дважды дифференцируема. Дифференцируя ее, получаем (с учетом условий первого порядка для задачи потребителя), что при $x_k(p_k) > 0$

$$x_k(p_k) = -\frac{\partial CS_i(\boldsymbol{p})}{\partial p_k} = -\frac{\partial CS_{ik}(p_k)}{\partial p_k}.$$

(Читателю предоставляется проверить этот факт самостоятельно).

Если $x_k(t) > 0$ при всех $t \geqslant p_k$, то проинтегрировав обе части этого дифференциального уравнения, получим

$$-\int_{p_k}^{\infty} \frac{\partial CS_{ik}(t)}{\partial t} dt = \int_{p_k}^{\infty} x_{ik}(t) dt.$$

Откуда

$$CS_{ik}(p) - \lim_{t\to\infty} CS_{ik}(t) = \int_{p}^{\infty} x_{ik}(t) dt,$$

что позволяет выразить излишек потребителя i от потребления блага k в виде

$$CS_{ik}(p) = \int_{p}^{\infty} x_{ik}(t) dt + \lim_{t\to\infty} CS_{ik}(t).$$ [50]

Поскольку второе слагаемое в этом соотношении равно нулю:

$$\lim_{t\to\infty} CS_{ik}(t) = 0,$$

то

$$CS_{ik}(p) = \int_{p}^{\infty} x_{ik}(t) dt.$$

В силу того, что функция $p_{ik}(\cdot)$ является обратной к функции $x_{ik}(\cdot)$, имеет место соотношение[51]

$$CS_{ik}(p) = \int_{0}^{x_{ik}(p)} p_{ik}(q) dq - p x_{ik}(p),$$

В итоге, общий потребительский излишек получаем суммированием этих интегралов по всем рынкам:

$$CS_i(\boldsymbol{p}) = \sum_{k=1}^{l} CS_{ik}(p) = \sum_{k=1}^{l} \int_{p_k}^{\infty} x_{ik}(t) dt =$$

[50] Заметим, что если существует цена $\bar{p}_k$, такая что $x_k(t) > 0$ при всех $t < \bar{p}_k$ и $x_k(t) = 0$ при всех $t \geqslant \bar{p}_k$, то при $p_k \leqslant \bar{p}_k$

$$-\int_{p_k}^{\bar{p}_k} \frac{\partial CS_{ik}(t)}{\partial t} dt = \int_{p_k}^{\bar{p}_k} x_{ik}(t) dt.$$

[51] Равенство доказывается интегрированием по частям и заменой переменных.

$$= \sum_{k=1}^{l} \int_{0}^{x_{ik}(p)} p_{ik}(t) dt - p \sum_{k=1}^{l} x_{ik}(p).$$

3. Характеристика поведения производителей в квазилинейных экономиках

Напомним, что в рассматриваемом случае технологию каждого производителя представляет функция издержек. Если технологическое множество выпукло, то функция издержек является выпуклой. В этом параграфе мы приведем постановки задачи потребителя при различных предположениях о типе конкуренции с которым сталкивается производитель.

Предположим, что j-й производитель сталкивается с функцией обратного спроса на производимые им блага вида

$$\boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{p}_j(\boldsymbol{y}_j).$$

Здесь мы отходим от предположения о совершенстве конкуренции — производители не рассматривают цены как данные.

В предположении (обычном для неоклассической парадигмы), что производитель выбирает объемы производства соответствующих благ, максимизирующие прибыль, задача j-го производителя имеет вид:

$$\pi_j = \boldsymbol{p}_j(\boldsymbol{y}_j)\boldsymbol{y}_j - c_j(\boldsymbol{y}_j) \to \max_{\boldsymbol{y}_j \geqslant 0}.$$

Если функции $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}_j)$ и $c_j(\boldsymbol{y}_j)$ дифференцируемы, то необходимое условие оптимальности выпуска $\boldsymbol{y}_j$ производителя j имеет вид

$$\nabla p_{jk}(\boldsymbol{y}_j)\boldsymbol{y}_j + p_{jk}(\boldsymbol{y}_j) - c'_{jk}(\boldsymbol{y}_j) \leqslant 0,$$

причем если $y_{jk} > 0$, то

$$\nabla p_{jk}(\boldsymbol{y}_j)\boldsymbol{y}_j + \boldsymbol{p}_k(\boldsymbol{y}_j) - c'_{jk}(\boldsymbol{y}_j) = 0, .$$

В случае, если функции полезности сепарабельны, спрос на каждое благо зависит только от его цены. В этом случае цена любого блага зависит только от продаваемого количества блага:

$$p_{jk} = p_{jk}(y_{jk}).$$

Предположим также, что функция издержек производителя также сепарабельна, т.е.

$$c_j(\boldsymbol{y}_j) = \sum_{k=1}^{l} c_{jk}(y_{jk}).$$

В этом случае прибыль имеет вид

$$\pi_j = \sum_{k=1}^{l} [p_{jk}(y_{jk}) y_{jk} - c_{jk}(y_{jk})].$$

Задача максимизации прибыли распадается, таким образом на l задач. Условия первого порядка приобретают более простой вид:

$$p'_{jk}(y_{jk})y_{jk} + p_{jk}(y_{jk}) \leqslant c'_{jk}(y_{jk}),$$

причем при $y_{jk} > 0$

$$p'_{jk}(y_{jk})y_{jk} + p_{jk}(y_{jk}) = c'_{jk}(y_{jk}).$$

И наконец, если цена спроса не зависит от продаваемого объема блага,

$$p_{jk}(y_{jk}) = const,$$

(производители принимают цены как данные, в отрасли складывается ситуация совершенной конкуренции), то $p'_{jk}(y_{jk}) = 0$ и условия первого порядка приобретают вид

$$p_{jk} \leqslant c'_{jk}(y_{jk}),$$

причем при $y_{jk} > 0$

$$p_{jk} = c'_{jk}(y_{jk}).$$

Последнее соотношение задает функцию предложения k-го блага j-м предприятием. Это функция зависит только от цены k-го блага.

Излишек производителя

Предположим, что производитель рассматривает цену как данную, или, другими словами, цена спроса не зависит от продаваемого объема, и цены у всех производителей одинаковы и равны $\boldsymbol{p}$. В качестве излишка производителя при ценах $\boldsymbol{p}$ будем рассматривать его прибыль при этих ценах, т.е.

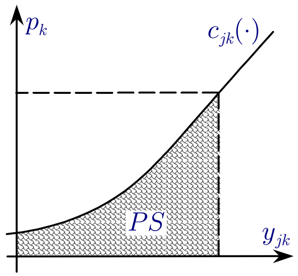


Рисунок 38. Излишек производителя

$$PS_j = \pi_j = \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j - c_j(\boldsymbol{y}_j).$$

В случае, если функция издержек сепарабельна, излишек производителя можно представить как сумму излишков по l рынкам:

$$PS_j = \sum_{k=1}^{l}[p_k y_{jk} - c_{jk}(y_{jk})] = \sum_{k=1}^{l} PS_{jk}.$$

Можно представить излишек производителя на k-м рынке в виде интеграла:

$$PS_{jk} = \int_0^{y_{jk}} [p_k - c'_{jk}(t)]dt - c_{jk}(0).$$

Он равен (с точностью до константы $c_{jk}(0)$) площади фигуры, образуемой прямой, проходящей через точку $(0,\ p_{jk})$ параллельно оси абсцисс, и кривой предельных издержек $c'_{jk}(y_{jk})$ (кривой предложения). В случае, когда $c_{jk}(0) = 0$ получаем, что излишек производителя равен

$$PS_{jk} = \int_0^{y_{jk}} [p_k - c'_{jk}(t)]dt.$$

4. Связь излишков потребителя и производителя с индикатором благосостояния

Предположим, что $\{(\boldsymbol{x}_1, z_1), \ldots, (\boldsymbol{x}_m, z_m), (\boldsymbol{y}_1, r_1), \ldots, (\boldsymbol{y}_n, r_n)\}$ — допустимое состояние экономики, причем $(\boldsymbol{x}_i, z_i)$ — решение задачи $\mathcal{C}_1(\boldsymbol{p})$ i-го потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$ и

$$\boldsymbol{p}\sum_{i\in I}\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{p}\sum_{j\in J}\boldsymbol{y}_j$$

Тогда

$$W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i) - \sum_{j\in J} c_j(\boldsymbol{y}_j) =$$

$$= \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i) - \boldsymbol{p}\sum_{i\in I}\boldsymbol{x}_i + \sum_{j\in J}(\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j - c_j(\boldsymbol{y}_j)) = CS + PS,$$

где

$$CS = \sum_{i\in I} CS_i$$

— суммарный потребительский излишек,

$$PS = \sum_{j\in J}\pi_j(\boldsymbol{p}) = \sum_{j\in J} PS_j(\boldsymbol{p})$$

— суммарный излишек производителей.

Другими словами, индикатор благосостояния $W(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$, соответствующий любому равновесию, равен сумме излишков потребителей и производителей.

Заметим, что если $\boldsymbol{p}$ — равновесный вектор, предпочтения локально ненасыщаемы, то условия

$$\boldsymbol{p}\sum_{i\in I}\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{p}\sum_{j\in J}\boldsymbol{y}_j$$

выполнены. Заметим также, что в этом случае состояние экономики Парето-оптимально, и поэтому $W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ достигает максимума на множестве допустимых состояний.

В сепарабельной экономике излишки потребителей и производителей представляют собой суммы соответствующих излишков на l рынках:

$$CS = \sum_{k=1}^{l} CS_k, \qquad PS = \sum_{k=1}^{l} PS_k.$$

5. Представление суммарного спроса посредством модели репрезентативного потребителя

Очень часто при изучении моделей частного равновесия бывает удобно использовать предположение о том, что суммарный спрос порождается решением задачи *одного* потребителя. В том случае, когда такой потребитель существует, его называют **репрезентативным потребителем**.

Покажем, что в экономике $\mathcal{E}_1$ репрезентативный потребитель всегда существует.

Пусть $\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})$ — вектор спроса i-го потребителя на первые l благ при ценах $\boldsymbol{p}$. Тогда суммарный спрос всех потребителей равен

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p}) = \sum_{i\in I} \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}).$$

В этих обозначениях репрезентативный потребитель будет порождать своими предпочтениями суммарный спрос $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})$.

Покажем что репрезентативный потребитель в этих условиях существует, причем его предпочтения на множестве потребительских наборов $(\boldsymbol{x}, z)$, $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$, могут быть представлены квазилинейной функцией полезности вида:

$$u(\boldsymbol{x}, z) = v(\boldsymbol{x}) + z.$$

Рассмотрим следующую задачу (задачу максимизации суммы полезностей от потребления 1-го блага при фиксированном количестве $\bar{x}$ этого блага):

$$\sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i) \to \max{}_{x_1,\dots,x_m}$$

$$\sum_{i\in I} \boldsymbol{x}_i \leqslant \bar{\boldsymbol{x}}. \qquad (❄)$$

$$\boldsymbol{x}_i \geqslant 0$$

Тогда в качестве $v(\boldsymbol{x})$ мы можем взять значение этой задачи при $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$. Покажем, что $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})$ является решением задачи репрезентативного потребителя с функцией полезности, $u(\boldsymbol{x}, z) = v(\boldsymbol{x}) + z$, при любом векторе цен $\boldsymbol{p} > \boldsymbol{0}$.

Предположим противное. Как мы видели, задачу представительного потребителя в случае квазилинейных предпочтений можно записать в эквивалентной форме:

$$v(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x} \to \max{}_{x\geqslant 0}.$$

Пусть существует $\tilde{\boldsymbol{x}} \geqslant \boldsymbol{0}$, такой что

$$v(\tilde{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}} > v(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p}).$$

При этом, так как $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p}) = \sum_{i\in I} \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})$, и $\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})$ допустимы в задаче (❄) при $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})$, то должно быть выполнено

$$v(\tilde{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}} > \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})) - \boldsymbol{p}\sum_{i\in I} x_i(\boldsymbol{p}).$$

Заметим, что $v(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \sum_{i\in I} v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i)$, где $(\tilde{\boldsymbol{x}}_1, \dots, \tilde{\boldsymbol{x}}_m)$ — решение задачи (❄) при $\bar{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{x}}$. Таким образом имеем

$$\sum_{i\in I} v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i) - \boldsymbol{p}\sum_{i\in I}\tilde{\boldsymbol{x}}_i \geqslant \sum_{i\in I} v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i) - \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}} > \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})) - \boldsymbol{p}\sum_{i\in I}\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}).$$

Но это означает, что по крайней мере для одного из потребителей выполнено

$$v_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i) - \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}}_i > v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}),$$

что противоречит оптимальности набора $\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})$.

Докажем, что

$$v(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})) = \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})),$$

другими словами, индикатор благосостояния в экономике с одним представительным потребителем упорядочивает интересующие нас состояния экономики так же, как и индикатор благосостояния первоначальной экономики.

Предположим противное. Случай $v(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})) < \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}))$ невозможен, т.к. $\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})$ допустимы в задаче (❄) при $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})$. Поэтому предположим, что существует $\boldsymbol{p}$ такое, что

$$v(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})) > \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})).$$

Пусть $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{x}}_m)$ — решение задачи (❄) при $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})$. По определению $v(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})) = \sum_{i\in I} v_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)$. Значит,

$$\sum_{i\in I} v_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i) > \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})).$$

С другой стороны,

$$\sum_{i\in I} \hat{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \boldsymbol{X}(\boldsymbol{p}) = \sum_{i\in I} \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}).$$

Умножим на $\boldsymbol{p}$:

$$\boldsymbol{p}\sum_{i\in I} \hat{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \boldsymbol{p}\sum_{i\in I} \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}).$$

Складывая два неравенства, получаем

$$\sum_{i\in I} v_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i) - \boldsymbol{p}\sum_{i\in I} \hat{\boldsymbol{x}}_i > \sum_{i\in I} v_i(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})) - \boldsymbol{p}\sum_{i\in I} \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}).$$

Получили требуемое противоречие.

Задачи

1. Докажите вторую часть Теоремы 9.

2. а) Постройте контрпример с вогнутыми функциями $v_i(\cdot)$ и выпуклыми функциями $c_j(\cdot)$, который бы показывал, что условие $\hat{z}_i > 0\ \forall i$ существенно в первой части Теоремы 9.

б) Постройте контрпример, который бы показывал, что условие выпуклости функции издержек существенно в первой части Теоремы 9.

3. Докажите Теорему 10.

4. Покажите, что в случае квазилинейной экономики $\mathcal{E}_1$ Парето-граница представляет собой гиперплоскость вида

$$\sum_{i\in I} u_i = const$$

5. Докажите Теоремы 12, 13 и 14.

6. Докажите, что при $x_k(p_k) > 0$ выполнено

$$x_k(p_k) = -\frac{\partial CS_i(\boldsymbol{p})}{\partial p_k} = -\frac{\partial CS_{ik}(p_k)}{\partial p_k}.$$

7. Пусть $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — допустимое состояние квазилинейной экономики, и $\boldsymbol{p} \geqslant \boldsymbol{0}$ — некоторый вектор цен, причем $\boldsymbol{x}_i$ является решением задачи потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$, и

$$\boldsymbol{p}\sum_{i\in I} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{p}\sum_{j\in J} \boldsymbol{y}_j$$

Докажите, что

$$\sum_{i\in I} u_i(\boldsymbol{x}_i, z_i) = W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \sum_{i\in I} \boldsymbol{\omega}_i$$

8. В экономике два блага ($l + 1 = 2$) и два потребителя, имеющие функции полезности $u_1 = \sqrt{x_1} + z_1$ и $u_2 = 2\sqrt{x_2} + z_2$. Найдите функцию полезности репрезентативного потребителя.

9. Пусть предпочтения потребителей представляются квазилинейными сепарабельными функциями полезности. Тогда без потери общности можно считать, что в экономике два блага ($l + 1 = 2$). Пусть $x_i(p)$ — спрос на первое благо i-го потребителя при ценах p,

$$D(p) = \sum_{i\in I} x_i(p) \text{ —}$$

суммарный спрос потребителей на первое благо, и $p(x) = D^{-1}(x)$ — обратная функция спроса. Предположим, что функция $p(x)$ является непрерывной и убывающей при $x \geqslant 0$. Докажите, что если

$$v(x) = \int_0^x p(q)dq,$$

то $v(x) + z$ является функцией полезности репрезентативного потребителя.

10. В ситуации предыдущей задачи функция спроса на благо имеет вид

$$D(p) = \frac{1}{4p^2}.$$

Найдите функцию полезности репрезентативного потребителя.

Монополия

Как показывают теоремы благосостояния,[52] мир совершенной конкуренции достаточно просто и хорошо устроен: каждое равновесие оказывается (при естественных предположениях) Парето-оптимальным и каждое оптимальное по Парето состояние экономики можно реализовать (при подходящем перераспределении начальных запасов, прав собственности, налогах и т.д.) как равновесие. Предположения совершенной конкуренции, однако, не всегда достаточно удовлетворительно описывают ситуации на существующих рынках. Так, с гипотезой рационального поведения несовместима предположение о том, что производитель рассматривает цену как «данную» в ситуации, когда у него нет конкурентов или их немного. В этой главе мы изучим, чем принципиально рынки, где отсутствуют условия совершенной конкуренции (так называемые несовершенные рынки), отличаются от совершенных рынков.

Анализ естественно начать с наиболее простого для анализа случая несовершенного рынка, когда имеется всего один производитель рассматриваемого продукта.

1. Модель обычной монополии

Монополией называют фирму, которая является единственным производителем некоторого блага. Напомним классическую (статическую) модель поведения монополиста.

Предположим, что существует «много» потребителей данного блага, и поэтому условия совершенной конкуренции выполняются «на стороне потребителей». Мы предполагаем, таким образом, что потребители рассматривают условия покупки, предлагаемые монополистом, как данные.[53] Монополист предлагает всем потребителям производимое благо по одной и той же цене p. Исходя из этой цены, каждый потребитель предъявляет свой спрос на благо. Сумму индивидуальных функций спроса (функцию совокупного спроса) мы обозначим через $D(p)$. Будем считать также, что рассматриваемое благо — нормальное, т.е. функция спроса $D(p)$ не возрастает.

Предположим далее, что функция издержек монополиста равна $c(y)$. Обычно предполагается, что цель монополиста состоит в максимизации прибыли. Таким образом, объем производства монополиста $y^{\text{м}}$ находится как решение следующей задачи:[54]

$$\Pi(y) = p(y)\,y - c(y) \to \max_{y \geqslant 0},$$

где $p(y) = D^{-1}(y)$ — обратная функция спроса. Этот объем производства $y^{\text{м}}$ и соответствующий ему вектор цен $p^{\text{м}} = p(y^{\text{м}})$ называется **равновесием при монополии**[55].

Существование равновесия при монополии

Заметим, что множество допустимых решений задачи монополиста ($y \geqslant 0$) неограниченно, и поэтому мы можем гарантировать существование равновесия лишь при некоторых предположениях относительно поведения функций спроса и издержек. Приведенная ниже теорема существования указывает на такие условия.

Идея доказательства состоит в том, чтобы выделить множество «возможных» монопольных выпусков, показать его ограниченность (при данных предположениях относительно функций спроса и издержек), а затем использовать теорему Вейерштрасса о существовании экстремумов непрерывной функции на компактном множестве. Другими словами, мы доказываем, что при естественных условиях относительно функций издержек и спроса

---

[52] Смотри: Mas-Colell A., Whinston M., Green J. *Microeconomic Theory* Oxford University Press, 1995; Varian H. *Microeconomic Analysis*, 3$^{\text{rd}}$ ed., Norton, 1992; Бусыгин В.П., Желободько Е.В., Цыплаков А.А. *Лекции по микроэкономической теории*, Новосибирск, 1998; Бусыгин В.П., Коковин С.Г., Цыплаков А.А. *Методы микроэкономического анализа: фиаско рынка*, Новосибирск, 1996.

[53] Заметим, что модель монополии можно рассматривать как двухэтапную игру с почти совершенной информацией. На первом этапе монополия выбирает цену. На втором этапе потребители одновременно выбирают количества блага, которые они хотели бы приобрести при данной цене. Модель монополии является при такой интерпретации редуцированной игрой первого этапа для описанной динамической игры.

[54] Здесь и далее, если не оговорено противное, мы не накладываем ограничение на положительность прибыли. Предполагается, что производитель не может свернуть производство и уйти из отрасли.

[55] Равновесие при монополии можно рассматривать как исход, соответствующий совершенному в подыграх равновесию в описанной выше двухэтапной игре с почти совершенной информацией.

задача максимизации прибыли монополиста на $y \geqslant 0$, эквивалентна задаче максимизации на некотором отрезке действительной прямой (в том смысле, что множества решений этих двух задач совпадают). А для этого достаточно доказать, что прибыль вне этого отрезка ниже, чем в какой-либо точке, принадлежащей этому отрезку.

Теорема 15.
Пусть выполнены следующие условия:
1) функция издержек, $c(y)$, дифференцируема на $[0, \infty)$,
2) обратная функция спроса $p(y)$ дифференцируема[56] и $p'(y) < 0$ при $[0, \infty)$,
3) существует $\tilde{y} > 0$ такой, что $p(y) < c'(y)$ при $y \geqslant \tilde{y}$.
Тогда равновесие при монополии существует.

Доказательство.
Докажем, что при сделанных предположениях $\Pi(y) < \Pi(\tilde{y})$ при $y > \tilde{y}$. Действительно, при $y > \tilde{y}$

$$\Pi'(y) = p(y) - c'(y) + p'(y)\, y < 0.$$

Это неравенство следует из убывания обратной функции спроса и предположения 3) теоремы. Таким образом, прибыль в точке $\tilde{y}$ выше, чем в любой большей точке $y > \tilde{y}$, поэтому задача максимизации прибыли при $y \geqslant 0$ сводится к задаче максимизации прибыли на отрезке $[0, \tilde{y}]$.

Из предположений теоремы следует, что функция прибыли $\Pi(y)$ непрерывна. Непрерывная функция прибыли по теореме Вейерштрасса должна достигать максимума на компактном множестве $[0, \tilde{y}]$, откуда следует существование точки $y^{\text{м}}$, которая максимизирует прибыль при ограничении $y \geqslant 0$. ■

Заметим, что предположения теоремы можно ослабить, сделав предположения относительно поведения совокупного излишка, а не относительно его производной $p(y) - c'(y)$ (предположение 3) теоремы). Под совокупным излишком мы будем понимать

[56] Данное условие предполагает, в числе прочего, что функция $p(y)$ определена при $y = 0$, что, безусловно, является слишком ограничительным предположением. Так, оно не выполнено для функции $p(y) = 1/\sqrt{y}$. Тем не менее несложно доказать аналог данного утверждения для этой функции и ей подобных.

$$GS(y) = \int_0^y p(t)dt - [c(y) - c(0)].$$

При этом, если функция издержек дифференцируема, то

$$GS(y) = \int_0^y [p(t) - c'(t)]dt.$$

Другими словами, совокупный излишек равен площади фигуры заключенной между кривой спроса, кривой предельных издержек, осью ординат и параллельной ей прямой, проходящей через точку $(y, 0)$.

Нам достаточно предположить, что существует объем производства $\tilde{y} > 0$ такой, что $GS(y) \leqslant GS(\tilde{y})$ при $y \geqslant \tilde{y}$. Поскольку совокупный излишек используется как показатель благосостояния, указанное условие означает, что нельзя увеличивать благосостояние простым увеличением выпуска одного блага.

Теорема 16.
Пусть выполнены следующие условия:
1) функция издержек, $c(y)$, непрерывна на $[0, \infty)$,
2) обратная функция спроса $p(y)$ непрерывна и убывает на $[0, \infty)$,
3) существует $\tilde{y} > 0$ такой, что $GS(y) \leqslant GS(\tilde{y})$ при $y \geqslant \tilde{y}$.
Тогда равновесие при монополии существует.

Доказательство.
Представим функцию прибыли в следующем виде:

$$\Pi(y) = p(y)\, y - c(y) = p(y)\, y - \int_0^y p(t)dt + GS(y) - c(0).$$

Достаточно доказать, что при сделанных предположениях $\Pi(y) < \Pi(\tilde{y})$ при $y > \tilde{y}$. Разность прибылей равна

$$\Pi(y) - \Pi(\tilde{y}) = p(y)\, y - p(\tilde{y})\, \tilde{y} - \int_{\tilde{y}}^y p(t)dt + GS(y) - GS(\tilde{y}).$$

Поскольку $p(y)$ убывает, то $p(y) < p(t)$ при $t < y$, и поэтому

$$\int_{\tilde{y}}^y p(t)dt > p(y)(y - \tilde{y}).$$

Воспользовавшись этой оценкой интеграла имеем:

$$\Pi(y) - \Pi(\tilde{y}) < [p(y) - p(\tilde{y})]\tilde{y} + GS(y) - GS(\tilde{y}) < 0.$$

Дальнейшие рассуждения совпадают с соответствующей частью доказательства Теоремы 15. ■

Свойства монопольного равновесия

Если решение задачи существует и внутреннее ($y^{\text{м}} > 0$), то условие первого порядка имеет следующий вид:

$$y^{\text{м}} p'(y^{\text{м}}) + p(y^{\text{м}}) = c'(y^{\text{м}}),$$

где $y^{\text{м}}$ — выпуск, максимизирующий прибыль. Таким образом, так же, как и в условиях совершенной конкуренции предельная выручка равна предельным издержкам

$$y^{\text{м}} p'(y^{\text{м}}) + p(y^{\text{м}}) = MR(y^{\text{м}}) = MC(y^{\text{м}}) = c'(y^{\text{м}}).$$

Отличие состоит в том, что в ситуации монополии цена, по которой фирма-монополист может продать продукцию, $p(y)$, меняется в зависимости от количества, поэтому предельная выручка не равна цене.

Приведем стандартную графическую иллюстрацию равновесия при монополии. Укажем сначала простой способ построения на графике точек $MR(y)$. Проведем касательную к кривой спроса в точке, отвечающая объему производства $\tilde{y}$. Соответствующая объему производства $\tilde{y}$ точка кривой предельной выручки строится следующим образом: проекция точки $(\tilde{y}, p(\tilde{y}))$ на ось ординат отстоит от точки пересечения с этой осью касательной на в два раза большее расстояние, чем проекция самой этой точки $(\tilde{y}, MR(\tilde{y}))$ на кривую спроса (см. Рис. 39).[57]

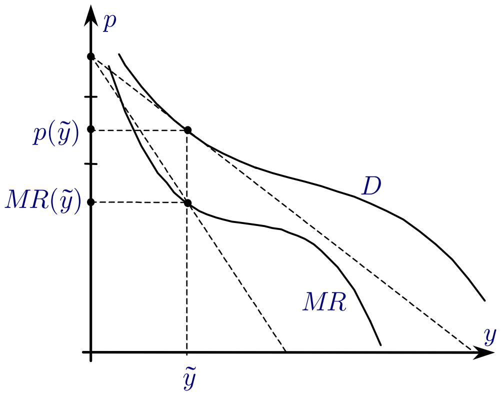


Рисунок 39

Другими словами, точка предельной выручки для объема производства $\tilde{y}$ лежит на медиане треугольника, отсекаемого от положительного ортанта касательной к кривой спроса в той же точке $\tilde{y}$. В случае же линейной функции спроса кривая предельной выручки оказывается просто соответствующей медианой треугольника, гипотенуза которого — кривая спроса.

[57] Этот способ построения кривой предельного дохода основывается на определении и свойствах касательной в точке $\tilde{y}$ к кривой спроса.

Для решения монополиста можно привести графическую иллюстрацию (Рис. 40). Здесь $MR(y) = p(y) + p'(y)\,y$ — кривая предельной выручки монополиста, а $MC(y) = c'(y)$ — кривая предельных издержек.

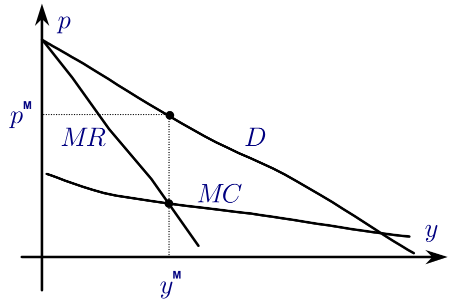


Рисунок 40

Пример 3.

Пусть обратная функция спроса линейна: $p(y) = a - b\,y$, и издержки заданы функцией $c(y) = cy$ (a, b, c – константы). Тогда прибыль монополии равна

$$\Pi(y) = y\,(a - by) - c\,y = (a - c)\,y - b\,y^2.$$

Максимум прибыли будет достигнут при

$$y^{\text{м}} = \frac{a-c}{2b} \quad \text{и} \quad p^{\text{м}} = \frac{a+c}{2}.$$

⇦

Условие равновесия при монополии можно представить в виде, где явно указывается зависимость монопольной цены от издержек производителя и эластичности спроса на его продукцию.

Напомним определение эластичности спроса по цене в заданной точке:

$$\varepsilon = D'(p)\frac{D(p)}{p}.$$

С учетом наших предположений о функции спроса эластичность как функцию от объема производства можно записать как

$$\varepsilon(y)=\frac{1}{p'(y)}\frac{y}{p(y)}.$$

Поскольку мы предполагаем, что функция спроса убывает, то эластичность отрицательна, и

$$|\varepsilon(y)|=-\varepsilon(y)=-\frac{1}{p'(y)}\frac{y}{p}.$$

Используя эластичность, условие первого порядка можно записать в виде

$$p(y^{м})\left[1-\frac{1}{|\varepsilon(y^{м})|}\right]=c'(y^{м}).$$

Заметим, что из условий первого порядка при естественном предположении о положительности предельных издержек ($c'(y)>0$) следует, что выбранный монополистом объем производства лежит на «эластичном» участке кривой спроса, т.е.

$$|\varepsilon(y^{м})|>1.$$

Другая форма записи условия первого порядка максимума прибыли монополии имеет вид:

$$\frac{p(y^{м})-c'(y^{м})}{p(y^{м})}=\frac{1}{|\varepsilon(y^{м})|}.$$

Выражение справа называется **индексом Лернера**.[58] Он измеряет степень монополизации отрасли (монопольную силу производителя) через относительную величину отклонения цены от предельных издержек. Заметим, что индекс Лернера принимает значения меньшие единицы и равен нулю в условиях, когда спрос на продукция данного производителя является совершенно эластичным (при монопольном выпуске $y^{м}$).

Если обратная функция спроса $p(\cdot)$ и функция издержек монополиста $c(\cdot)$ дважды дифференцируемы, то объем производства $y^{м}$ максимизирующий прибыль, удовлетворяет также и условию второго порядка:

$$2p'(y^{м})+y^{м}p''(y^{м})-c''(y^{м})\leqslant 0.$$

Это условие можно также представить в виде

$$MR'(y^{м})\leqslant MC'(y^{м}).$$

[58] Абба Лернер — американский экономист российского происхождения. Он предложил использовать показатель монопольной силы, который впоследствии был назван по его имени, в статье A. P. Lerner, "The Concept of Monopoly and the Measurement of Monopoly Power", *Review of Economics and Statistics*, Vol. **1** (1934), pp. 157-75.

Данное соотношение означает, что тангенс угла наклона кривой предельной выручки не превышает тангенс угла наклона кривой предельных издержек в точке их пересечения $y^{м}$. Другими словами, кривая предельной выручки пересекает кривую предельных издержек сверху вниз. В дальнейшем будем считать, что условие второго порядка выполняется как строгое неравенство, т.е.

$$2p'(y^{м})+y^{м}p''(y^{м})-c''(y^{м})<0.$$

Это условие вместе с условием первого порядка гарантирует, что удовлетворяющий им объем производства $y^{м}$ отвечает точке локального максимума прибыли.

Докажем, что если $p(0)>c'(0)$, то выпуск монополии будет положительным. Выполнение этого условия необходимо, чтобы сделать анализ содержательным, так как при $p(0)\leqslant c'(0)$ предмет анализа — рынок — отсутствует, поскольку максимум прибыли как монополиста, так и производителя в условиях совершенной конкуренции достигается при нулевом объеме производства (предполагается убывающая отдача, т.е. возрастание функции предельных издержек).

Теорема 17.
Пусть функция издержек $c(y)$ и обратная функция спроса $p(y)$ дифференцируемы и $p(0)>c'(0)$. Тогда в равновесный выпуск при монополии положителен, т.е. $y^{м}>0$.

Доказательство.

Объем производства $y^{м}$, являющийся решением задачи максимизации прибыли:

$$\Pi(y)=p(y)\,y-c(y)\to\max_{y\geqslant 0},$$

должен удовлетворять условию первого порядка

$$\Pi'(y^{м})=p(y^{м})+p'(y^{м})\,y^{м}-c'(y^{м})\leqslant 0$$

(причем по условию дополняющей нежесткости $\Pi'(y^{м})=0$, если $y^{м}>0$).

Максимум не может достигаться в нуле, так как если $y^{м}=0$, то по условию оптимальности должно быть выполнено

$$\Pi'(0)=p(0)-c'(0)\leqslant 0,$$

что противоречит предположению $p(0)>c'(0)$. Таким образом, $y^{м}>0$. ■

Поскольку монополия учитывает, что ее выпуск влияет на цену, то она при прочих равных условиях не может производить больше, чем фирма в условиях совершенной конкуренции, которая этого не учитывает.

Теорема 18.
Предположим, что (обратная) функция спроса убывает, $y^{м} > 0$ — объем производства, выбранный монополией, а $\bar{y}$ — объем производства, который был бы выбран фирмой с такой же функцией издержек при конкурентном поведении.[59] Тогда
1. $y^{м} \leqslant \bar{y}$.
2. Если, кроме того, функция спроса и функция издержек дифференцируемы и $p'(y^{м}) < 0$, то $y^{м} < \bar{y}$.

Доказательство.
По определению, $y^{м}$ максимизирует прибыль монополии. Поэтому
$$p(y^{м})\,y^{м} - c(y^{м}) \geqslant p(\bar{y})\,\bar{y} - c(\bar{y}).$$
С другой стороны, поскольку при конкурентном поведении фирма, выбирая выпуск $\bar{y}$, максимизирующий прибыль, рассматривает цену как данную, то
$$p(\bar{y})\,\bar{y} - c(\bar{y}) \geqslant p(\bar{y})\,y^{м} - c(y^{м}).$$
Сложив эти два неравенства, получим
$$p(y^{м})\,y^{м} \geqslant p(\bar{y})\,y^{м}.$$
Поскольку, по предположению, $y^{м} > 0$, то $p(y^{м}) \geqslant p(\bar{y})$, откуда, при убывании обратной функции спроса, следует, что $y^{м} \leqslant \bar{y}$.

Докажем вторую часть теоремы. Так как $y^{м} > 0$, функции спроса и издержек дифференцируемы, то выполнено условие первого порядка в следующем виде:
$$y^{м}p'(y^{м}) + p(y^{м}) = c'(y^{м}).$$
Другими словами,
$$p(y^{м}) - c'(y^{м}) = -\,y^{м}p'(y^{м}) > 0,$$
Выпуск $\bar{y}$ по определению максимизирует прибыль в условиях, когда производитель рассматривает цены $p(\bar{y})$ как данные. Так как $\bar{y}$ положителен ($\bar{y} \geqslant y^{м} > 0$), то выполнено соотношение
$$p(\bar{y}) - c'(\bar{y}) = 0.$$
Отсюда следует, что $\bar{y}$ не может совпадать с $y^{м}$, следовательно, $y^{м} < \bar{y}$. ■

Монотонности функции спроса, вообще говоря, недостаточно для справедливости второй части утверждения (т.е. условие $p'(y^{м}) < 0$ теоремы существенно), что показывает контрпример, показанный на Рис. 41, где $p(y) = (y-1)^3 + 1$ и $c(y) = y^2/2$. В этом примере кривая предельной выручки касается кривой спроса в точке $y = 1$, и через ту же самую точку проходит кривая предельных издержек.

Помимо вышеприведенных свойств монопольного равновесия, представляет интерес поведение решения и его характеристик при изменении параметров модели, что составляет предмет сравнительной статики, рассматриваемой в следующем параграфе.

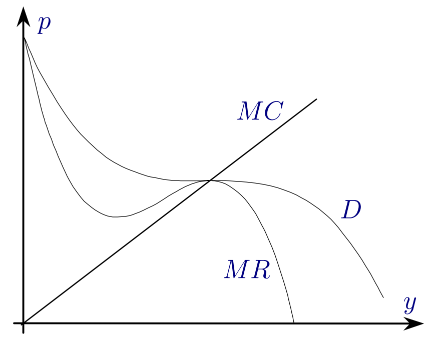


Рисунок 41

Сравнительная статика

Сравнительная статика — это изучение поведения оптимального решения или равновесия при изменении экзогенных параметров. Мы рассмотрим здесь сравнительную статику равновесия при монополии. Связь монопольного равновесия с функцией издержек описывает следующее утверждение.

[59] Понятно, что «конкурентного» объема $\bar{y}$ может не существовать, если предельные издержки убывают.

Теорема 19.
Пусть $c_1(\cdot)$ и $c_2(\cdot)$ — дифференцируемые функции издержек такие, что $c_1'(y) \leqslant c_2'(y)$ при всех $y \geqslant 0$, и пусть $y_1^{\text{м}} \geqslant 0$ дает максимум прибыли при издержках $c_1(\cdot)$, а $y_2^{\text{м}} \geqslant 0$ — при издержках $c_2(\cdot)$. Тогда $y_1^{\text{м}} \geqslant y_2^{\text{м}}$.[60]

Доказательство.
По условиям максимальности прибыли в обеих сравниваемых точках $y_1^{\text{м}}$ и $y_2^{\text{м}}$ имеем:

$$p(y_1^{\text{м}})\, y_1^{\text{м}} - c_1(y_1^{\text{м}}) \geqslant p(y_2^{\text{м}})\, y_2^{\text{м}} - c_1(y_2^{\text{м}}),$$
$$p(y_2^{\text{м}})\, y_2^{\text{м}} - c_2(y_2^{\text{м}}) \geqslant p(y_1^{\text{м}})\, y_1^{\text{м}} - c_2(y_1^{\text{м}}).$$

Складывая эти соотношения и приводя подобные члены, получим

$$[c_2(y_1^{\text{м}}) - c_1(y_1^{\text{м}})] - [c_2(y_2^{\text{м}}) - c_1(y_2^{\text{м}})] \geqslant 0,$$

т.е.

$$\int_{y_2^{\text{м}}}^{y_1^{\text{м}}} [c_2'(y) - c_1'(y)]\, dy \geqslant 0$$

Поскольку подынтегральное выражение положительно, то нижний предел интегрирования не может превышать верхний: $y_1^{\text{м}} \geqslant y_2^{\text{м}}$. ■

Доказанное утверждение можно проиллюстрировать с помощью рисунка, на котором кривая предельных издержек смещается вверх ($MC_1 \to MC_2$, см. Рис. 42).

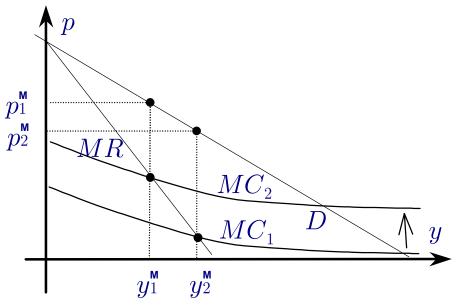


Рисунок 42

Для частного случая постоянных предельных издержек вышеприведенная теорема может быть получена непосредственным использованием условий первого и второго порядка.

Условие первого порядка для случая постоянных предельных издержек ($c'(y) = c$) имеет следующий вид:

$$y^{\text{м}} p'(y^{\text{м}}) + p(y^{\text{м}}) = c.$$

Оно задает в виде неявной функции зависимость объема производства, выбираемого монополистом, от величины предельных издержек $y^{\text{м}} = y(c)$. В предположении существования производных обратной функции спроса $p(y)$ и функции $y(c)$, продифференцируем по c тождество

$$y(c)\, p'(y(c)) + p(y(c)) = c.$$

Получим соотношение

$$2\, p'(y(c))\, y'(c) + y(c)\, p''(y(c))\, y'(c) = 1,$$
$$y'(c) = \frac{1}{2\, p'(y(c)) + y(c)\, p''(y(c))}.$$

В знаменателе дроби стоит вторая производная прибыли, которая (по условиям второго порядка) неположительна. Отсюда следует, что $y(c)$ — убывающая функция.

По изменению выпуска можно найти изменение цен по следующей формуле.

$$\frac{dp}{dc} = p'(y(c))\, y'(c) = \frac{1}{2 + y(c)\, p''(y(c))/p'(y(c))} > 0.$$

Это соотношение показывает, что равновесная цена растет при росте издержек.

Приведенные соотношения можно применять для анализа влияния на монопольное равновесие изменения в величине издержек (шоков со стороны предложения). В качестве примера такого изменения можно рассмотреть введение налога с продаж. Так, при линейной функции спроса и постоянных средних издержках введение налога с единицы продукции при ставке t приводит к росту цены на $t/2$. В случае же функции спроса с постоянной эластичностью $\varepsilon < 0$ (т.е., $y(p) = ap^{\varepsilon}$) введение такого налога приводит к росту цены на величину $t\,|\varepsilon|\,/(1+|\varepsilon|)$. (Справедливость этих утверждений проверьте самостоятельно.)

Приведенные свойства позволяют провести анализ потерь благосостояния, связанных с монопольной организацией рынка,

[60] Отметим, что мы не предполагаем единственности решения задачи монополиста. В случае множественности *каждое* решение, соответствующее меньшим по величине издержкам, больше *каждого* решения, соответствующего большим по величине издержкам.

что является основной задачей нашего анализа несовершенных рынков.

Анализ благосостояния в условиях монополии

Предположим, что предпочтения потребителей описываются квазилинейной функцией полезности $u_i(x_i, z_i) = v_i(x_i) + z_i$, где x_i — объем потребления потребителем i блага, рынок которого мы рассматриваем, а z_i — сумма денег, расходуемых им на приобретение прочих благ. Ниже, если не оговорено противное, предполагается, что функция полезности строго вогнута, функции $v_i(x_i)$ дифференцируемы, причем $v_i'(\cdot) > 0$.[61] По этим функциям полезности может быть построена функция совокупного спроса $D(p)$ на рассматриваемое благо. Тогда, как было показано ранее, при естественных условиях на функции $v_i(x_i)$ агрегированный спрос $D(p)$ порождается задачей максимизации полезности репрезентативного потребителя с некоторой квазилинейной функцией полезности вида, $u(x, z) = v(x) + z$, причем $v(x)$ вогнута и $v'(\cdot) > 0$. Свойства предпочтений гарантируют при этом, что рассматриваемое благо нормальное, т.е. функция спроса $D(p)$ убывает.

Как известно, если предпочтения потребителей описываются квазилинейными функциями полезности, то в качестве индикатора благосостояния может использоваться величина

$$W(y) = v(y) - c(y).$$

При этом множество объемов, которые максимизируют индикатор благосостояния, является множеством Парето-оптимальных состояний.

Покажем, что выпуск при монополии не может превышать Парето-оптимальный объем производства данного блага. Более того, при естественных предположениях он оказывается не оптимальным, и поэтому меньше оптимального. Доказательство во многом похоже на доказательство Теоремы 18.

Теорема 20.
Если обратная функция спроса $p(y)$ порождается решением задачи репрезентативного потребителя и убывает, $y^{\text{м}}$ — объем производства, выбранный монополией, а $\hat{y} > 0$ — Парето-оптимальный объем производства, то[62]
1. $y^{\text{м}} \leqslant \hat{y}$.
2. Если, кроме того, функция спроса и функция издержек дифференцируемы и $p'(y^{\text{м}}) < 0$,[63] то $y^{\text{м}} < \hat{y}$.

Доказательство.
Пусть $v(y) + z$ — функция полезности рассматриваемого репрезентативного потребителя. Так как $p(y)$ — его обратная функция спроса, то должно выполняться неравенство

$$v(y^{\text{м}}) - p(y^{\text{м}})\, y^{\text{м}} \geqslant v(\hat{y}) - p(y^{\text{м}})\, \hat{y}.$$

С другой стороны, по определению оптимума Парето

$$W(\hat{y}) = v(\hat{y}) - c(\hat{y}) \geqslant v(y^{\text{м}}) - c(y^{\text{м}}) = W(y^{\text{м}}).$$

Сложим эти два неравенства:

$$p(y^{\text{м}})\, \hat{y} - c(\hat{y}) \geqslant p(y^{\text{м}})\, y^{\text{м}} - c(y^{\text{м}}).$$

Поскольку $y^{\text{м}}$ максимизирует прибыль монополии, то

$$p(y^{\text{м}})\, y^{\text{м}} - c(y^{\text{м}}) \geqslant p(\hat{y})\, \hat{y} - c(\hat{y}).$$

Таким образом, имеем

$$p(y^{\text{м}})\, \hat{y} - c(\hat{y}) \geqslant p(\hat{y})\, \hat{y} - c(\hat{y})$$

или

$$p(y^{\text{м}})\, \hat{y} \geqslant p(\hat{y})\, \hat{y}.$$

Поскольку, по предположению $\hat{y} > 0$, а $p(y)$ убывает, то $y^{\text{м}} \leqslant \hat{y}$.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Предположим противное, т.е. $y^{\text{м}} = \hat{y}$.

Выбор монополиста при $y^{\text{м}} > 0$ должен удовлетворять условиям первого порядка:

$$p(y^{\text{м}}) + p'(y^{\text{м}})\, y^{\text{м}} - c'(y^{\text{м}}) = 0,$$

откуда $p(y^{\text{м}}) - c'(y^{\text{м}}) > 0$ (цена выше предельных издержек).

[61] Отметим, что фактически все утверждения, с известными модификациями, справедливы и при выполнении условия $v_i'(\cdot) \geqslant 0$. Читателю предлагается проверить это самостоятельно.

[62] В доказательстве не используется ни единственность монопольного равновесия, ни единственность оптимального с точки зрения общества объема выпуска. Результат теоремы следует понимать как соотношение между двумя любыми представителями соответствующих множеств.

[63] что можно гарантировать в условии, когда $v_i''(\cdot)$ существуют и отрицательны.

Рассматривая задачу репрезентативного потребителя для квазилинейной функции полезности легко получить, что обрат-

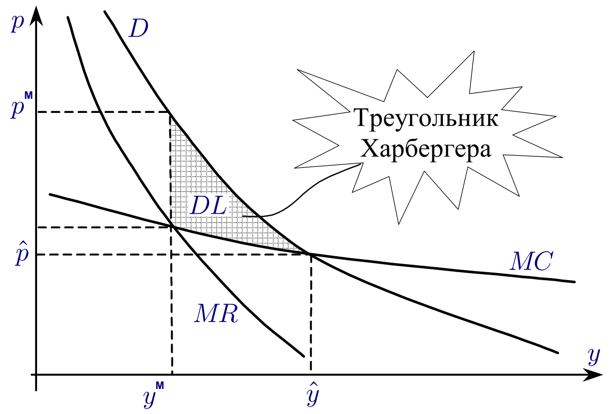


Рисунок 43

ная функция спроса $p(\cdot)$ задается формулой

$$p(y) = v'(y) \quad \forall y > 0,$$

поэтому, учитывая, что $y^{м} = \hat{y} > 0$,

$$v'(y^{м}) - c'(y^{м}) > 0.$$

Однако $v'(y^{м}) - c'(y^{м})$ есть значение производной функции благосостояния в точке $y^{м}$. Таким образом, $W(y)$ не достигает максимума в точке $y^{м}$. Мы получили противоречие. Значит, $y^{м} < \hat{y}$. ■

Отметим, что принимая во внимание первую теорему благосостояния, говорящую о Парето-оптимальности множества конкурентных равновесий, из только что доказанной теоремы следуют все результаты, доказанные нами ранее в Теореме 18.

В предположениях доказанной только что теоремы (пункт 2) мы имеем, что $W'(y^{м}) > 0$, $W'(\hat{y}) = 0$ и $y^{м} < \hat{y}$. Из этого следует, что уровень благосостояния в ситуации монополии ниже оптимального, т.е.

$$W(y^{м}) < W(\hat{y}).$$

Другими словами, при монополии возникают чистые потери благосостояния ($DL > 0$), которые вычисляются по формуле:

$$DL = W(\hat{y}) - W(y^{м}) = v(\hat{y}) - c(\hat{y}) - [v(y^{м}) - c(y^{м})] =$$

$$= [(v(\hat{y}) - p\hat{y}) - (v(y^{м}) - py^{м})] + [(p\hat{y} - c(\hat{y})) - (py^{м} - c(y^{м}))] =$$
$$= \Delta CS + \Delta PS,$$

где ΔCS — изменение потребительского излишка, а ΔPS — изменение излишка производителя. Напомним, что величины излишков потребителя и производителя можно рассчитать по формулам

$$CS(y) = \int_0^y [v'(t) - p(y)]\,dt = \int_0^y [p(t) - p(y)]\,dt.$$

и

$$PS(y) = \int_0^y [p(y) - c'(t)]\,dt.$$

Чистые потери от монополии также можно представить в виде интеграла:

$$DL = \int_{\hat{y}}^{y^{м}} [p(t) - c'(t)]\,dt.$$

Графически чистые потери благосостояния, которые несет общество от монополизации рынка, представляют собой площадь (криволинейного) «треугольника», называемого **треугольником Харбергера** (см. Рис. 43).[64]

Пример 4 (продолжение Примера 3).

Вычислим чистые потери от монополии в случае линейной функции спроса и постоянных предельных издержек, т.е. когда $p(y) = a - by$ и $c'(y) = c$.

Оптимальный объем производства составит

---

[64] По-видимому, впервые понятие чистых потерь было использовано французским инженером Жюлем Дюпюи (A. J. E. Dupuit (1844), "De la Mesure de l'Utilite des Travaux Publiques," *Annales des Ponts et Chaussees*. Рус. пер.: Ж. Дюпюи, «О мере полезности гражданских сооружений» // Сб. «Теория потребительского поведения и спроса», под ред. В.М.Гальперина. — СПб: Экономическая школа, 1993, стр.28-66. См. также статью Гарольда Хотеллинга: H. Hotelling, (1938) "The General Welfare in Relation to Problems of Taxation of Railway and Utility Rates", *Econometrica*, **6** (No. 3), 242-269. Рус. пер.: Г.Хотеллинг, «Общее благосостояние в связи с проблемами налогообложения и установления железнодорожных тарифов и тарифов на коммунальные услуги» // Там же, стр.142-174.) Количественные измерения чистых потерь были популяризированы Арнольдом Харбергером (Harberger, A.C. (1964), "The measurement of waste," *American Economic Review*, **54** (3), 58-76).

$$\hat{y} = \frac{a-c}{b},$$

монополия же, как мы видели, будет производить

$$y^{\text{м}} = \frac{a-c}{2b},$$

т.е. выпуск монополии в два раза меньше Парето-оптимального количества блага. Чистые потери от монополии составляют величину

$$DL = \int_{y^{\text{м}}}^{\hat{y}} [(a-bt)-c]\,dt = \frac{(a-c)^2}{8b}.$$

Таким образом, чистые потери от монополии в данном случае составляют четверть (исходного) потребительского излишка:

$$CS(\hat{y}) = \int_0^{\hat{y}} [(a-bt)-(a-b\hat{y})]\,dt = \frac{(a-c)^2}{2b}.$$

Рассматриваемый пример изображен на Рис. 44.

⇦

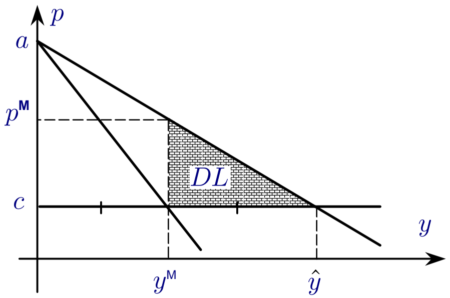


Рисунок 44

Задачи

1. Пусть $D(p) = 10p^{-3}$, $c(y) = 2y$. Каковы оптимальный выпуск и цена устанавливаемые монополистом?

2. Обоснуйте предложенный в тексте (стр. 68) способ построения кривой предельного дохода по кривой спроса. (Подсказка приведена в сноске.)

3. Пусть спрос на монопольном рынке порожден двумя группами потребителей, функции спроса которых имеют вид:

$$p_1(y) = a_1 - b_1 y \quad \text{и} \quad p_2(y) = a_2 - b_2 y.$$

Какова общая функция спроса на продукцию данного монополиста? Какой объем производства окажется оптимальным для монополиста при разных значениях параметров?

4. Приведите пример, показывающий, что условия непрерывности функций спроса и издержек являются, вообще говоря, существенными для существования равновесия при монополии.

5. Приведите пример, показывающий, что условие:
«Существует $\tilde{y} > 0$ такой, что $p(y) < c'(y)$ при $y \geqslant \tilde{y}$»
является существенными для существования равновесия при монополии.

6. Приведите пример, показывающий, что условие:
«Существует $\tilde{y} > 0$ такой, что $GS(y) \leqslant GS(\tilde{y})$ при $y \geqslant \tilde{y}$»
является существенными для существования равновесия при монополии.

7. Вычислите индекс Лернера, если предельные издержки монополиста постоянны, а функция спроса на его продукцию имеет вид:

1) $p(y) = a - by$, 2) $p(y) = ay^{-b}$,
3) $p(y) = a - by^d$, 4) $p(y) = a - b\ln(y)$,

(Параметры должны быть такими, чтобы равновесие существовало.)

8. Вычислите в условиях предыдущей задачи как в первом приближении изменится цена, назначаемая монополистом, если его продукция облагается налогом по ставке t.

9. Покажите прямыми вычислениями, что в ситуациях, описанных в задаче 7, объем производства, оптимальный с точки зрения монополиста, меньше такого объема производства, при котором цена равна предельным издержкам.

10. Предположив, что, $p'(\cdot) < 0$, покажите, что дотация на продукцию монополии приведет к увеличению объема производства. Рассчитайте величину дотацию, обеспечивающую совпадение величин $y^{\text{м}}$ и $\hat{y}$?

Какой величины дотации обеспечивают совпадение величин $y^{\text{м}}$ и $\hat{y}$ в ситуациях, описанных в задаче 7?

11. При каких значениях параметров функций спроса и издержек, описанных в задаче 7, функция прибыли окажется вогнутой функцией объемов выпуска?

12. Приведите пример, показывающий, что условия убывания функция спроса $p(y)$, вообще говоря, недостаточно, чтобы гарантировать, что выпуск при монополии $y^{м}$ не является Парето-оптимальным.

2. Ценовая дискриминация

Внутри треугольника Харбергера (см. Рис. 43) лежат сделки, которые являются взаимовыгодными для производителя и потребителя, т.е. любой точке внутри треугольника соответствует цена, по которой монополист готов произвести и продать, а потребитель — купить дополнительную единицу блага. Другими словами, чистые потери благосостояния представляют собой результат нереализованных взаимовыгодных сделок, но эти сделки можно осуществить только при более низких ценах, чем та, которая обеспечивает монопольную прибыль. Единственное, что сдерживает монополиста от предложения таких сделок — это то обстоятельство, что каждую единицу блага он должен продавать *по одной и той же цене*. От сделок внутри треугольника Харбергера он что-то выиграет за счет дополнительных продаж, но этот выигрыш будет более чем компенсирован потерями от снижения цены продажи $y^{м}$ единиц блага.

Однако, если бы монополист мог проводить **ценовую дискриминацию**, то есть продавать разные единицы блага по разным ценам, то он увеличил бы свою прибыль. И действительно, мир вокруг нас полон примеров ценовой дискриминации. Например, кинотеатры часто предлагают скидки для возрастных групп потребителей. Стоимость проезда на некоторых видах транспорта зависит от признаков, отделяющих бизнесменов от туристов, и др.

Ниже мы рассмотрим различные схемы ценовой дискриминации, обратив прежде всего внимание на влияние дискриминации на благосостояние потребителей (измеренное совокупным излишком).

Различают следующие три типичные вида ценовой дискриминации:

• **Дискриминация первого типа**, когда монополист может как назначать разные цены за разные проданные количества отдельному потребителю, так и проводить дискриминацию среди разных потребителей.

• **Дискриминация второго типа** — когда цена блага зависит от количество приобретаемых единиц данного блага. В качестве примера можно привести скидки для оптовых покупателей или зависимость тарифа на телефонные переговоры от их длительности. Если сравнивать этот тип дискриминации с дискриминацией первого типа, то при дискриминации второго типа с разных потребителей монополист берет *одинаковую* плату за одно и то же количество товара.

• **Дискриминация третьего типа**, по группам потребителей (сегментированным рынкам). В качестве примера можно привести скидки студентам и пенсионерам. Дискриминация третьего типа осуществляется монополистом относительно типов потребителей вне зависимости от количества приобретаемых благ.

Данная классификация была предложена английским экономистом Артуром Пигу в работе «Экономическая теория благосостояния» (1920).[65] Далее мы разберем эти три типа дискриминации более подробно.

Анализируя ценовую дискриминацию мы продолжаем исходить из предположения, что потребители рассматривают условия

---

[65] Pigou, A.C. «The economics of welfare» 4–th ed., London, Macmillan (А. Пигу, «Экономическая теория благосостояния», М.: Прогресс, 1985).

> «Первый уровень выражается в назначении различных цен на все различные единицы товара, так что цена каждой из этих единиц равна соответствующей цене спроса, и у покупателя не остается какого-либо излишка для потребителя. Второй уровень предполагает, что монополист в состоянии установить n различных цен, вот почему все единицы товара, на которые назначена цена спроса, превышающие x, продаются по цене x, а все единицы с ценой спроса меньше x, но превышающей y, продаются по цене y и т.д. Третий уровень означает, что монополист в состоянии выделить среди своих покупателей n различных групп, которые можно в большей или меньшей мере практически различать между собой, и монополист способен назначать свою монопольную цену покупателям из каждой группы» (т.I, стр. 348).

Как видно из приведенного отрывка, «второй уровень» дискриминации Пигу соответствует скорее неидеальной дискриминации первого типа в нашей терминологии. Мы следуем здесь сложившемуся на данный момент в экономической литературе толкованию этих терминов.

покупки, предлагаемые монополистом, как данные.[66] Заметим, что при этом возникают затруднения с интерпретацией дискриминации первого типа: монополист в этом случае имеет дело с каждым потребителем индивидуально, и поэтому ситуация может рассматриваться как двусторонняя монополия. Таким образом, наше предположение в этом случае эквивалентно тому, что «переговорная сила» принадлежит монополии.

Дискриминация первого типа. Идеальная дискриминация

Как уже говорилось, особенность дискриминации первого типа состоит в том, что монополист может назначать разные цены в зависимости от того, какое количество блага и какому потребителю он продает. Таким образом, можно сказать, что при дискриминации первого типа каждая продаваемая единица блага имеет свою цену, в общем случае не совпадающую с ценой другой единицы блага.

В рамках дискриминации первого типа мы изучим так называемую **идеальную дискриминацию**. Под идеальной дискриминацией понимают ситуацию, при которой монополист выбирает *оптимальную* для себя схему ценообразования в условиях, когда

1) он знает индивидуальные функции спроса каждого потребителя;

2) может различать потребителей;

3) и невозможен так называемый **арбитраж** — перепродажа благ потребителями друг другу.[67]

Очевидно, что этот тип дискриминации имеет лишь теоретическое значение, как труднодостижимая идеальная для монополиста ситуация.

Пусть имеется m потребителей, предпочтения которых представимы квазилинейными функциями полезности $u_i(x_i, z_i) = v_i(x_i) + z_i$. Мы будем предполагать, что функции полезности $u_i(x_i, z_i)$ — строго вогнута, дифференцируема и $v_i'(x_i) > 0$. Потребители обладают фиксированными доходами (запасами «квазилинейного» блага) ω_i. О функции издержек монополиста, $c(\cdot)$, мы будем предполагать, что она выпукла, дифференцируема и $c'(y) > 0$.

Проанализируем сначала условную ситуацию, в которой монополист может назначить количество блага, x_i, которое купит у него каждый потребитель, а также ту сумму денег, t_i, которую заплатит ему потребитель за полученное количество блага. Единственное ограничение, которое мы наложим на выбор x_i и t_i состоит в том, что монополист не может назначить их такими, что

$$u_i(x_i, \omega_i - t_i) < u_i(0, \omega_i),$$

т.е. такими, что потребителю более выгодно «уйти с рынка», чем приобрести x_i, заплатив t_i. Таким образом, мы вводим ограничение

$$v_i(x_i) - t_i \geqslant v_i(0).$$

Это ограничение принято называть **условием участия**. С целью упрощения мы будем предполагать, что функции полезности нормированы так, что $v_i(0) = 0$. При этом условие участия принимает вид

$$v_i(x_i) \geqslant t_i.$$

Таким образом, мы рассмотрим сначала следующую оптимизационную задачу:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{m} t_i - c\Big(\sum_{i=1}^{m} x_i\Big) \to max_{\,t_i,\, x_i \geqslant 0}$$

$$v_i(x_i) \geqslant t_i,\ \forall i.$$

В оптимуме все ограничения участия выходят на равенство, поскольку монополисту выгодно установить плату для каждого потребителя как можно выше:

$$t_i = v_i(x_i),\ \forall i.$$

Подставляя эти равенства в целевую функцию, получаем эквивалентную задачу:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{m} v_i(x_i) - c\Big(\sum_{i=1}^{m} x_i\Big) \to max_{\,x_1, \ldots, x_m \geqslant 0}.$$

Несложно заметить, что эта целевая функция в точности совпадает с индикатором благосостояния. Это означает, что решение данной задачи совпадает с Парето-оптимумом.

[66] Если рассматривать модели дискриминации как динамические игры, то наше предположение состоит в том, что монополист делает ход первым.

[67] Если монополист не может различать потребителей, то одни потребители могли бы покупать те единицы блага, которые предназначены для других потребителей. Такую ситуацию можно назвать «персональным арбитражем».

Будем предполагать, что такое «идеальное» решение $(x_i^*,\ t_i^*)$ существует.[68] Найдя решение этой задачи, мы покажем, что монополист, во-первых, не может получит более высокую прибыль, и во-вторых, может реализовать эти оптимальные сделки.

Предположим, что решение является внутренним: $x_i^* > 0\ \forall i$, т.е. каждый потребитель покупает положительное количество.[69] Внутреннее решение удовлетворяет условию первого порядка:

$$v_i'(x_i^*) = c'(\sum_{i=1}^{m} x_i^*),\ \forall i.$$

Из этого следует, в частности, равенство предельных норм замещения

$$v_i'(x_i^*) = v_j'(x_j^*)\ \forall i,\ j.$$

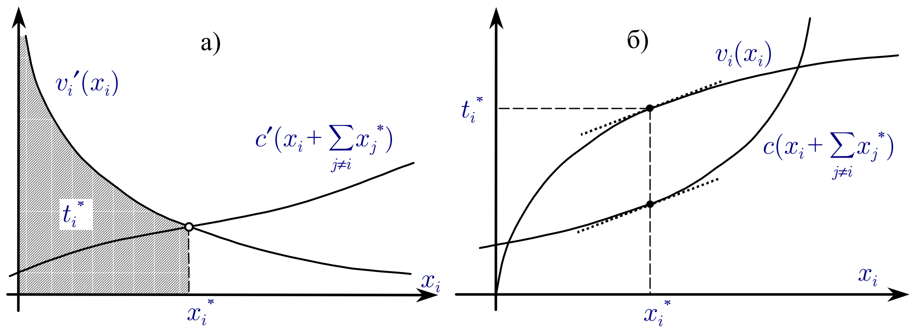


Рисунок 45

«Идеальная» плата t_i^* находится по формуле:

$$t_i^* = CS_i(x_i^*) = v_i(x_i^*) = \int_0^{x_i^*} v_i'(x)dx,\ \forall i.$$

На графиках, представленных на Рис. 45 изображены две различные интерпретации нахождения «идеальной» пары $(x_i^*,\ t_i^*)$ монополистом. На рисунке (б) точка x_i^* должна быть выбрана таким образом, чтобы в этой точке разность между кривыми $c(x_i + \sum_{j\neq i} x_j^*)$ и $v_i(x_i)$ была максимальной. В этой точке касательные обеих кривых должны иметь одинаковый наклон.

[68] При постоянных предельных издержках существование решения следует из непрерывности функций $v_i(\cdot)$ и того, что существуют $\tilde{y}_i > 0$, такие что $v_i(\tilde{y}_i) - c(\tilde{y}_i) > v_i(y) - c(y)$ при $y > \tilde{y}_i$.

[69] В случае, если предельные издержки не возрастают и $v_i'(0) > c'(0)\ \forall i$, то из существования оптимального решения следует положительность: $x_i^* > 0\ \forall i$.

Пример 5.

Пусть функция полезности i-го потребителя имеет вид $u_i(x_i, z_i) = \sqrt{x_i} + z_i$ и функция издержек линейна: $c(x) = cx$. Тогда объем потребления этого потребителя, x_i^*, находится из уравнения

$$c = \frac{1}{2\sqrt{x_i^*}},$$

и равен

$$x_i^* = \frac{1}{4c^2}.$$

При этом плата за приобретаемое благо t_i^* равна $\sqrt{x_i^*} = \sqrt{\frac{1}{4c^2}} = \frac{1}{2c}$. ⇦

Мы рассмотрели, конечно, идеальную ситуацию, однако сконструированная система контрактов могла бы быть реализована монополистом, если бы (1) он знал функции $v_i(\cdot)$, и (2) то количество благо, которое монополист продает i-му потребителю, совпадало с тем количеством блага, x_i, которое тот реально потребляет (невозможен арбитраж). Более того, существует *бесконечно много* способов реализовать эти сделки.

В моделях дискриминации первого типа монополист может предложить каждому потребителю некоторую схему оплаты (схему ценообразования) — функцию $t_i(\cdot)$. Согласно схеме $t_i(\cdot)$ потребитель может приобрести количество x за $t_i(x)$. Обычную схему ценообразования,

$$t_i(x_i) = px_i,$$

называют *линейной*. Ценообразование по любой другой схеме, в том числе схеме вида

$$t_i(x_i) = A + px_i,$$

которая будет рассмотрена ниже, принято называть **нелинейным ценообразованием**.

Задача монополиста состоит в том, чтобы выбрать функции $t_i(\cdot)$ таким образом, чтобы получить максимальную прибыль. Если при данной системе сделок потребители выбрали объемы покупок x_i, $i = 1, \ldots, n$, то прибыль монополиста составит

$$\Pi = \sum_{i=1}^{m} t_i(x_i) - c(\sum_{i=1}^{m} x_i).$$

Конечно, эта формула верна только в случае, когда все потребители решают остаться на рынке. В противном случае $x_i = 0$ и соответствующее слагаемое, $t_i(x_i)$, в первой сумме отсутствует.

При выборе схемы оплаты монополист должен учитывать, как столкнувшись с ней будет действовать потребитель, которому она предназначена. Если потребитель не уходит с рынка, то его задача имеет вид:

$$v_i(x_i) + z_i \to max_{x_i \geqslant 0}$$
$$t_i(x_i) + z_i \leqslant \omega_i$$
$$x_i \geqslant 0.$$

Кратко задачу потребителя можно переписать в виде

$$v_i(x_i) - t_i(x_i) \to max_{x_i \geqslant 0}$$

Если значение целевой функции этой задачи в точке оптимума меньше нуля, то не выполнено ограничение участия, и потребителю выгоднее уйти с рынка. Заметим, что если потребитель уйдет с рынка, то монополист получит такую же прибыль, как и в случае, когда потребитель остается на рынке, но покупает нулевой объем $(x_i = 0)$ и ничего не платит $t_i(x_i) = 0$. Таким образом, ни при каком выборе схемы оплаты монополист не может получить больше, чем в «идеальном» случае (x_i^*, t_i^*).

Заметим, что если условие участия выполняется как равенство, то сделка не увеличивает полезность потребителя. Тем не менее, мы предполагаем, что такие сделки совершаются, ведь у монополиста всегда есть возможность назначить плату немного ниже $t_i(x_i)$.

В дальнейшем мы для упрощения записи будем опускать индекс потребителя, i, поскольку в каждом случае будем рассматривать поведение одного потребителя. При сделанном нами предположениях, несложно найти схемы оплаты, которые позволяют реализовать оптимальный контракт (x^*, t^*).

Самая простая схема оплаты заключается в том, что монополист предлагает потребителю приобрести количество x за плату t. (Так называемый тип «не хочешь — не бери» (*take-it-ot-leave-it*)). Такую схему можно условно представить в виде следующей функции:

$$t(x) = \begin{cases} t^*, & x \leqslant x^*, \\ +\infty, & x > x^*. \end{cases}$$

Если потребитель столкнется с такой схемой оплаты, то его оптимальным выбором будет $x = x^*$. Рис. 46 иллюстрирует выбор потребителя при этой схеме оплаты.

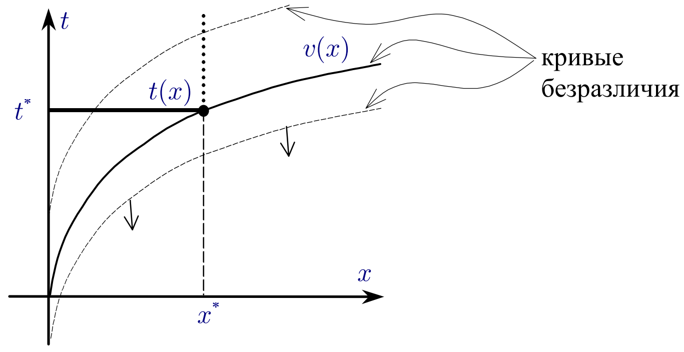


Рисунок 46

Пример 6 (продолжение Примера 5).

Для рассмотренного выше примера схема оплаты «не хочешь — не бери» примет вид

$$t(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2c}, x \leqslant \dfrac{1}{4c^2}, \\ +\infty, x > \dfrac{1}{4c^2}. \end{cases}$$

⇦

Идеальную дискриминацию можно проводить и в других формах. Наиболее известная из них — так называемый двухкомпонентный тариф: оплата состоит из двух частей: фиксированная сумма $A > 0$ за право приобретения (любого количества товара) и части, пропорциональной количеству приобретенного товара (x) — $p\,x$, т.е.

$$t(x) = A + p\,x.$$

Подобная практика, например, действует в увеселительных парках, где платят и за право входа, и за каждый аттракцион в отдельности. Для реализуемости схемы важно, что купивший право входа не может перепродать благо (вынести и перепродать аттракцион).

Идеальную схему дискриминации при двухкомпонентном тарифе можно реализовать, если установить цену единицы блага p на уровне $v'(x^*)$, а A выбрать равным (чистому) потребительскому излишку, соответствующему этому выпуску и этой цене (см. Рис. 47 а), т.е.

$$A = \int_p^{\infty} x(p')\,dp' = \int_0^{x^*} (v'(x) - p)\,dx = v(x^*) - px^*.$$

При такой схеме оплаты потребитель так же, как и в случае схемы «бери или уходи» выберет $x = x^*$ (при строгой вогнутости функции полезности) (см. Рис. 47 б).

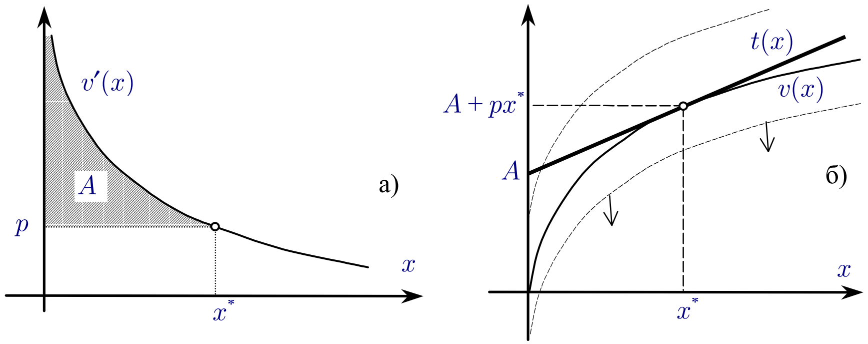


Рисунок 47

Пример 7 (продолжение Примера 5).

Для рассмотренного выше примера в схеме оплаты по типу двухкомпонентного тарифа

$$A = \frac{1}{4c} \quad \text{и} \quad p = c.$$

Схема оплаты имеет вид

$$t(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4c} + c\,x, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

⇦

Другая схема совершенной дискриминации состоит в установлении индивидуализированных цен за каждую «единицу» приобретаемого блага.

Пусть Δx — (произвольная) единица блага, и N таково, что $N\Delta x = x^*$. Зададим цену каждой j-й единицы товара по формуле:

$$p_j = v(j\,\Delta x) - v((j-1)\,\Delta x).$$

Покупая благо в количестве x^*, потребитель должен заплатить сумму $\sum_j p_j$, равную потребительскому излишку $v(x^*) - v(0) = v(x^*)$, в чем легко убедиться, сложив индивидуализированные цены.

Графическая иллюстрация данной схемы приведена на Рис. 48. Можно считать, что функция $t(\cdot)$ в рассматриваемом случае имеет ступенчатую форму (см. Рис. 48 б), так что размер «ступеньки» равен цене единицы блага.

В пределе, при $N \to \infty$ ($\Delta x \to 0$) данная схема все больше приближается к схеме

$$t(x) = v(x).$$

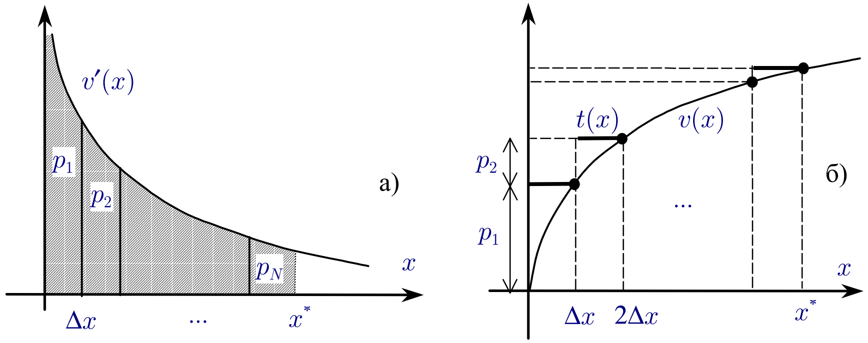


Рисунок 48

Пример 8 (продолжение Примера 5).

Пусть $N = 4$. Тогда $\Delta x = \frac{1}{4} x_i^* = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4c^2} = \frac{1}{16c^2}$.

Поскольку $v(x) = \sqrt{x}$, то цены находятся по формуле

$$p_j = \sqrt{j\,\Delta x} - \sqrt{(j-1)\,\Delta x}, \quad i = 1, \ldots, 4.$$

Т.е.

$$p_1 = 1/4c, \qquad p_2 = (\sqrt{2} - 1)/4c,$$
$$p_3 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})/4c, \qquad p_4 = (2 - \sqrt{3})/4c.$$

⇦

Мы рассмотрели три различные схемы, к которым может прибегнуть монополист. Но это не единственные возможные схемы. В общем случае нелинейная схема оплаты $t_i(\cdot)$ при идеальной дискриминации должна быть такой, чтобы соответствующая кривая всюду лежала выше кривой $v_i(\cdot)$, и касалась кривой $v_i(\cdot)$ в точке x_i^*. Первое требование соответствует тому, что потребитель должен добровольно выбрать $x_i = x_i^*$, второе требование соответствует тому, что потребитель должен добровольно участвовать в сделке — прирост его полезности в результате сделки должен равняться нулю. Графическая иллюстрация дана на Рис. 49.

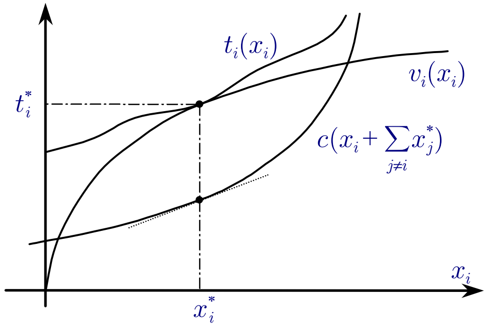


Рисунок 49

Количество блага, покупаемое каждым потребителем, таково, что предельные полезности равны предельным издержкам. То есть ситуация с производством этого блага такая же, как при совершенной конкуренции, чего нельзя сказать о процессе распределения дохода от этой деятельности. В условиях совершенной конкуренции потребительский излишек остается у каждого потребителя, а здесь он целиком достается монополисту. Если нас не интересует проблема справедливости распределения доходов, например, если мы считаем, что ее можно решить в рамках эффективной системы налогов и трансфертов, то мы видим, что первая схема дискриминации в рассматриваемых условиях приводит к эффективным вариантам производственной деятельности монополиста. Т.о. проблема с неэффективностью монополии состоит не в том, что монополист получает «сверхприбыль», а в том, что он не может осуществлять идеальную дискриминацию, которая приводит к эффективности по Парето.

Что мешает монополисту осуществлять идеальную дискриминацию? Перечислим некоторые возможные причины.

1) *Существует вторичный рынок (арбитраж).* Те сделки, которые монополист сконструировал для каждого покупателя, вполне могут не реализоваться. Потребитель может купить не то количество x_i^*, которое ему предлагается, а большее количество, $x_i > x_i^*$, и перепродать $x_i - x_i^*$ по выгодной цене другому потребителю.

2) *Монополист должен знать слишком много.* Он должен знать функцию полезности каждого потребителя. Если он не знает функцию полезности каждого потребителя или не может различать потребителей, то он просто не может проводить идеальную дискриминацию.

3) По каким-то соображениям, например, по соображениям, связанным с обеспечением равенства доходов, *дискриминация первого типа может быть запрещена*.

Могут возникнуть и другие обстоятельства, которые способны помешать реализации данного варианта дискриминации. Любая дискриминация в реальных условиях не может быть идеальной. Эта схема является точкой отсчета для сравнения идеального, с точки зрения эффективности, с тем, что в реальности является возможным.

Дискриминация второго типа (нелинейное ценообразование)

Предположим теперь, что монополист не имеет возможности предлагать разным потребителям разные сделки (либо потому, что не умеет их различать, либо потому, что ограничен законодательством в праве такой «персонифицированной» дискриминации).

Поскольку монополист не может различать потребителей, то он должен предложить общую для всех потребителей нелинейную схему оплаты $t(\cdot)$. Заметим, что если бы не было никаких препятствий для перепродаж, то любая схема оплаты свелась бы к обычной линейной схеме вида $t(x_i) = px_i$. Тем самым, анализ при наличие арбитража совпадает с анализом классической модели монополии, рассмотренной нами ранее. Как и ранее, мы будем предполагать отсутствие арбитража, что означает, что каждый потребитель потребляет то же самое количество блага, которое он купил.

Понятно, что, как и дискриминация первого типа, дискриминация второго типа может осуществляться различными способами. Однако, результаты дискриминации второго типа могут быть различными в зависимости от выбранной схемы. Ниже мы рассмотрим две простейшие схемы — пакетную дискриминацию и двухкомпонентный тариф.

В дальнейшем для простоты мы будем предполагать, что на рынке есть всего два типа потребителей. Типичного потребителя первого типа, назовем господином Low, а типичного потребителя второго типа — господином High.[70] В дальнейшем будем предполагать, что господин Low при любых количествах оценивает рассматриваемое благо ниже, чем господин High, т.е.

$$v_l'(x) < v_h'(x) \ \forall x,$$

что влечет за собой, при $v_i(0) = 0$ ($i = l, h$) также и соотношение

$$v_l(x) < v_h(x) \ \forall x > 0.$$

Дискриминация второго типа: пакетная дискриминация

В общем случае монополист может предложить потребителям на выбор k пакетов: (x_j, t_j), $j = 1, \ldots, k$. Задача монополиста состоит в том, чтобы выбрать пакеты так, чтобы получить наибольшую прибыль (от тех пакетов, которые ему удастся продать). Прежде всего, приведем модель к эквивалентному, но более простому виду.

Во-первых, отметим, что нам достаточно рассмотреть случай, когда монополист предлагает только два пакета ($k = 2$). (Читатель может сам провести рассуждения, доказывающие это.)

Во-вторых, вспомним факт, упоминавшийся выше в контексте дискриминации первого типа, что если ограничение участия не выполнено, то потребитель уйдет с рынка, и монополист получит такую же прибыль, как и в случае, когда потребитель выбрал пакет вида $(x_i, t_i) = (0, 0)$. Поэтому можно ограничится рассмотрением только таких схем, при которых ни один потребитель не уйдет с рынка. Добавим это ограничение — *условие участия* — к задаче монополиста. Тем самым мы получим эквивалентную задачу (с точки зрения прибыли монополиста), но анализ упростится, так как целевая функция перестанет быть разрывной.

В-третьих, мы можем считать, что пакеты помечены индексом участников:

$$(x_l, t_l) \ \text{ и } \ (x_h, t_h).$$

Первый из пакетов предназначен для господина Low, а второй — для господина High. При этом в задачу монополиста добавляется ограничение, которое гарантирует, что ни одному потребителю не выгодно выбирать пакет, который ему не предназначен — так называемое **условие самовыявления**.

Для «господина Low» условие самовыявления имеет вид

[70] Тот, кто не приемлет англицизмы, может заменить, например, имена на «Коротышку» и «Дылду».

$$v_l(x_l) - t_l \geqslant v_l(x_h) - t_h,$$

а для «господина High» —

$$v_h(x_h) - t_h \geqslant v_h(x_l) - t_l.$$

При добавлении этих ограничений задача остается эквивалентной исходной. Действительно, если потребители «поменяются пакетами», то можно просто поменять индексы пакетов. Если же все потребители выберут один и тот же пакет, то можно сделать другой пакет совпадающим с выбранным потребителями. В обоих случаях прибыль не изменится.

Таким образом, мы будем анализировать модель, в которой монополист выбирает сделки из семейства сделок (x_l, t_l), (x_h, t_h), задаваемого условиями участия и самовыявления. Если $x_l < x_h$, то соответствующая схема оплаты имеет вид

$$t(x) = \begin{cases} t_l, & x \leqslant x_l, \\ t_h, & x_l < x \leqslant x_h, \\ +\infty, & x > x_h. \end{cases}$$

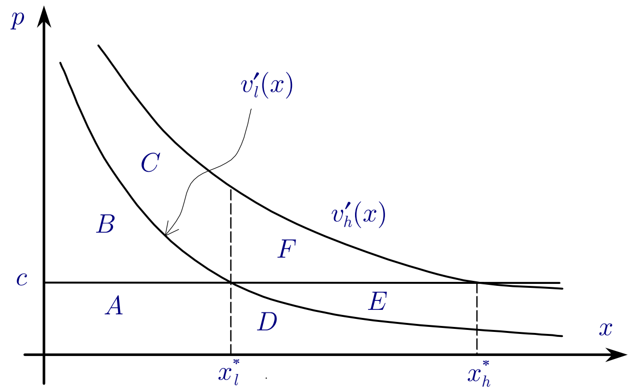


Рисунок 50. «Персонифицированная» дискриминация возможна

Сначала покажем графически (см. Рис. 50), что те пакеты, которые монополист выбрал бы при идеальной дискриминации, в данном случае не являются оптимальными. При этом будем использовать дополнительное упрощающее предположение, что предельные издержки постоянны, $c > 0$. Каждому из типов потребителей при идеальной дискриминации будет предложена сделка

$$(x_i, t_i) = (x_i^*, t_i^*),$$

причем объем x_i^* будет выбран так, чтобы выполнялось

$$v_i'(x_i^*) = c,$$

а плата t_i^* будет выбрана равной потребительскому излишку.

На Рис. 50 плате господина Low, t_l^*, соответствует площадь $A+B+C$, а плате господина High, t_h^*, — площадь $A+B+C+D+E+F$.

Если «персонифицированная» дискриминация неосуществима и потребители обоих типов могут выбирать любую из двух предложенных им сделок, то все они предпочтут сделку первого типа, (x_l^*, t_l^*). Господин High предпочтет сделку первого типа, поскольку если он покупает x_l^* блага по цене, равной площади $A+B$, то его излишек составит величину C, в то время как в случае, когда он соглашается на сделку второго типа, его излишек равен нулю.

Таким образом, производитель должен так сконструировать второй тип сделки, чтобы он кому-то был нужен. Для того, чтобы сделка второго типа для господина High оказалась не менее привлекательной, чем сделка первого типа, монополист должен уменьшить взимаемую с него плату на величина не меньшую, чем площадь фигуры C (т.е. $v_h(x_l^*) - v_l(x_l^*)$). При этом господин High оказывается безразличным к выбору между сделкой первого и второго типа, но мы будем считать, как и ранее, что из каких-то внемодельных соображений он всегда будет предпочитать то, что ему предназначено, т.е. сделку второго типа. Таким образом, оптимальные сделки будут иметь вид

$$(x_l^*, v_l(x_l^*)) \quad \text{и} \quad (x_h, v_h(x_h^*) - [v_h(x_l^*) - v_l(x_l^*)]).$$

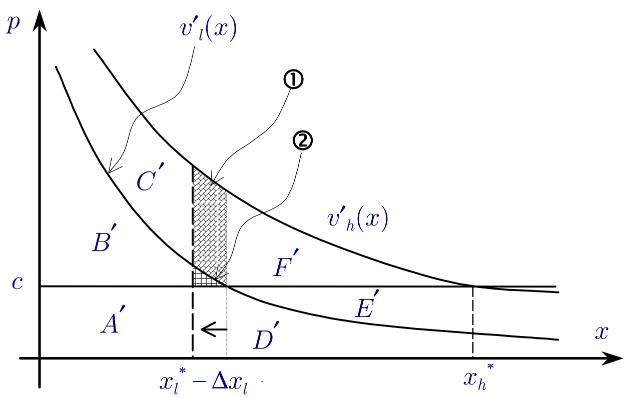


Рисунок 51. Данная система сделок не оптимальна с точки зрения монополиста

Эта система сделок удовлетворяет условию самовыявления: потребитель каждого типа предпочитает предназначенную для него сделку. На Рисунке 50 плата по сделкам второго типа равна площади $A+B+D+E+F$.

Хотя данная система сделок удовлетворяет условиям участия и самовыявления, она не оптимальна с точки зрения производителя, что проиллюстрировано на Рис. 51. Действительно, монополист может увеличить совокупную прибыль от этих сделок, понижая x_l^* на Δx_l.

Если уменьшим x_l^* на $\Delta x_l > 0$, тогда прибыль монополиста упадет от того, что он сокращает количество, предлагаемое для сделки первому потребителю на величину площади треугольника ② (раньше монополист получал всю площадь B, а сейчас — площадь B за вычетом площади малого треугольника ②, т.е. площадь B'). При этом в первом приближении прибыль от каждой сделки первого типа уменьшится на величину, пропорциональную квадрату Δx_l (при достаточно малом Δx_l площадь треугольника ② величина того же порядка, что и $(\Delta x_l)^2$).

Напомним, что монополист вынужден обеспечить господину High некоторый излишек, для того, чтобы он не претендовал на сделку, предназначенную для господина Low. Прежнему количеству x_l^* соответствовал излишек C. Сократив количество x_l^*, предлагаемое господину Low, на величину Δx_l, монополист должен обеспечить господину High излишек C', который меньше C на площадь трапеции ①. Площадь этой трапеции в первом приближении пропорциональна Δx_l.

Таким образом при малых Δx_l потери прибыли от сделки с господином Low будут компенсированы увеличением прибыли от сделки с господином High. Тем самым, прибыль монополиста вырастет.

Можно продолжать сокращать x_l. При некоторой величине x_l прирост прибыли от сделки с господином High не будет покрывать падение прибыли от сделки с господином Low. По-видимому, должна существовать некоторая величина x_l, которая соответствует оптимальной системе сделок, дающей монополисту максимальную прибыль.

Проанализируем теперь задачу отыскания оптимальной системы сделок формально. Мы будем далее предполагать, что монополист имеет дело с $m_l > 0$ одинаковыми участниками типа «господин Low» и $m_h > 0$ одинаковыми участниками типа «господин High». Таким образом, оптимальная система сделок $\{(x_l^P, t_l^P), (x_h^P, t_h^P)\}$ определяется решением следующей задачи:

$$\Pi = m_l t_l + m_h t_h - c(m_l x_l + m_h x_h) \to max_{x_l, t_l, x_h, t_h \geqslant 0}.$$

при ограничениях:

$$t_l \leqslant v_l(x_l), \qquad (1l)$$

$$t_h \leqslant v_h(x_h), \qquad (1h)$$

(условия участия)

$$v_l(x_l) - t_l \geqslant v_l(x_h) - t_h, \qquad (2l)$$

$$v_h(x_h) - t_h \geqslant v_h(x_l) - t_l. \qquad (2h)$$

(условия самовыявления)

Поскольку монополист максимизирует прибыль, то по крайней мере одно из каждой пары ((1l), (2l)) или ((1h), (2h)) ограничений является существенным в точке максимума. В противном случае возможно увеличить прибыль, повысив, не нарушая ограничений, плату для того участника, для которого это не выполняется.

Покажем, что для господина Low активным окажется только первое из его ограничений (добровольность), а для господина High, наоборот, только второе (самовыявление).

Предположим противное. Пусть выполнено соотношение $t_h^P = v_h(x_h^P)$. Подставляя данное соотношение в ограничение самовыявления этого же участника и произведя соответствующие упрощения, получим $t_l^P \geqslant v_h(x_l^P)$.

И используя предположение, что $v_l(x) < v_h(x)\ \forall x > 0$, придем к соотношению $t_l^P > v_l(x_l^P)$, которое противоречит ограничению добровольности (1l). Таким образом,

$$v_h(x_h^P) - t_h^P = v_h(x_l^P) - t_l^P. \qquad (2h=)$$

Предположим теперь, что (2l) выполнено как равенство, т.е. имеет место соотношение $v_l(x_l^P) - t_l^P = v_l(x_h^P) - t_h^P$. Сложив его с (2$h$=), получим

$$v_h(x_h^P) - v_h(x_l^P) = v_l(x_h^P) - v_l(x_l^P).$$

Представим это соотношение в виде

$$\int_{x_l^P}^{x_h^P} v'_h(x)dx = \int_{x_l^P}^{x_h^P} v'_l(x)dx.$$

Это равенство противоречит условию, что $v_l'(x) < v_h'(x)\ \forall x > 0$, (подынтегральное выражение справа всегда меньше, чем подынтегральное выражение слева). Здесь предполагается, что $x_h^P \neq x_l^P$, что

читателю предлагается установить самостоятельно. Таким образом, для решения задачи выполняется соотношение

$$t_l^P = v_l(x_l^P), \qquad (1l=)$$

Используя существенность ограничений (2l) и (1l), т.е. соотношения (2l=), (1h=), мы можем упростить задачу монополиста, сведя ее к следующей задаче безусловной максимизации:

$$m_l v_l(x_l) + m_h[v_h(x_h) - v_h(x_l) + v_l(x_l)] - c(m_l x_l + m_h x_h) \to max_{x_l, x_h}$$

В предположении, что монополист предлагает сделки покупателям обоих типов, т.е. x_l^P, x_h^P положительны, необходимым (и достаточным при данных предположениях о функциях полезности) условием оптимальности сделок является, равенство нулю первых производных максимизируемой функции, т.е. оптимум должен удовлетворять двум следующим соотношениям:

$$(m_l + m_h)\, v'_l(x_l^P) - m_h v'_h(x_l^P) = m_l c'(m_l x_l^P + m_h x_h^P),$$

$$v'_h(x_h^P) = c'(m_l x_l^P + m_h x_h^P).$$

Итак, в сделке, предназначенной господину High, предлагаемое количество $\bar{x}_h$ совпадает с оптимальным количеством x_h^*, (которое он получил бы и при совершенной конкуренции, и при идеальной дискриминации). Но присутствие господина High оказывает отрицательное внешнее влияние на господина Low — в предлагаемой ему сделке количество блага ниже, чем при идеальной дискриминации (и в условиях совершенной конкуренции). Действительно, первое условие оптимальности, можно представить в виде

$$m_l v_l'(x_l^P) = m_l c'(m_l x_l^P + m_h x_h^P) + m_h[v_h'(x_l^P) - v_l'(x_l^P)].$$

Откуда следует, что

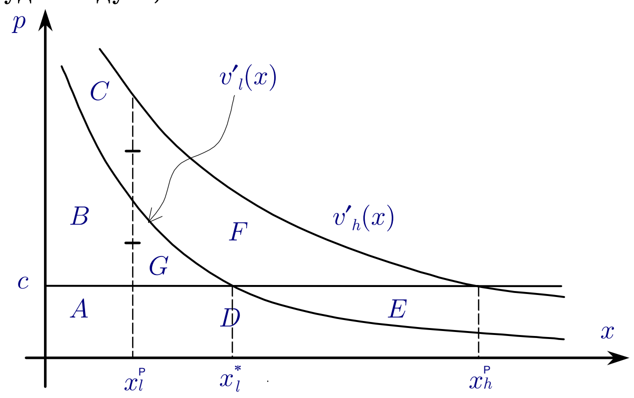


Рисунок 52

$$v_l'(x_l^P) > c'(m_l x_l^P + m_h x_h^P).$$

Поясним оптимальную систему сделок на графике в случае постоянных предельных издержек, $c'(y) = c$ (см. Рис. 52).

Отметим, что оптимальный контракт для господина Low характеризуется тем, что в точке $x_l = x_l^P$ отношение расстояния между кривыми предельной полезности двух участников к расстоянию между кривой предельной полезности господина Low и кривой предельных издержек равно отношению количества участников типа господина Low к количеству участников типа господина High:

$$\frac{v_h'(x_l^P) - v_l'(x_l^P)}{v_l'(x_l^P) - c'(m_l x_l^P + m_h x_h^P)} = \frac{v_h'(x_l^P) - v_l'(x_l^P)}{v_l'(x_l^P) - c} = \frac{m_l}{m_h}.$$

Когда количество потребителей каждого типа одинаково, соответствующие отрезки равны, что и изображено на графике.

Согласно оптимальной системе сделок господин High заплатит за свой пакет сумму, равную площади $A + B + D + E + F + G$, а господин Low заплатит за свой пакет сумму, равную площади $A + B$.

Приведем сравнение оптимальной пакетной дискриминации с идеальной в частном случае, когда предельные издержки постоянны. Напомним, что при идеальной дискриминации монополист предлагает два пакета $\{(x_l^*, t_l^*), (x_h^*, t_h^*)\}$, такие, что

$$v_l'(x_l^*) = c \quad \text{и} \quad v_h'(x_h^*) = c,$$
$$t_l^* = v_i(x_l^*) \quad \text{и} \quad t_h^* = v_i(x_h^*).$$

1. Поскольку $v'_h(x_h^P) = c'(m_l x_l^P + m_h x_h^P) = c$, то $x_h^P = x_h^*$, т.е. господин High приобретает то же количество благ. Однако он заплатит меньше, чем при идеальной дискриминации. Действительно плата господина High, $t_h^* = v_i(x_h^*)$, равна площади $A + B + C + D + E + F + G$, что больше, чем

$$t_h^P = t_h^* + t_l^P - v_h(x_l^P) = t_h^* - [v_h(x_l^P) - v_l(x_l^P)]$$

(см. равенство (2*h*=)), что равно площади $A + B + D + E + F + G$. Разница, $v_h(x_l^P) - v_l(x_l^P)$, есть площадь фигуры C. Таким образом присутствие господина Low (и то обстоятельство, что монополист их не может различать) оказывает благоприятное влияние на уровень благосостояния господина High (тем большее, чем больше число участников первого типа).

2. При идеальной дискриминации если $v_l'(0) > c$ (и, следовательно, $v_h'(0) > 0$), то $x_l^* > 0$ и $x_h^* > 0$. При оптимальной пакетной дискриминации эти условия гарантируют лишь, что $x_h^P > 0$ (вне зависимости от количества участников обоих типов, m_l и m_h), т.е. любой участник типа «господин High» будет обслуживаться. Однако участники типа «господин Low» будут обслуживаться только если доля таких участников достаточно велика. (Докажите это самостоятельно.)

3. Если присутствует хотя бы один участник типа «господин High», объем потребления блага потребителями типа «господин Low» будет меньше, чем при идеальной дискриминации. Это означает, что будут иметь место потери благосостояния:

$$DL = m_l \cdot \left([v_l(x_l^*) + v_h(x_h^*) - (x_l^* + x_h^*)c] - [v_l(x_l^P) + v_h(x_h^P) - (x_l^P + x_h^P)c]\right) =$$
$$= m_l \cdot \left(v_l(x_l^*) - v_l(x_l^P) - (x_l^* - x_l^P)c\right) > 0.$$

Итак, от невозможности различения участников монополистом при пакетной дискриминации Low ничего не выиграл и не проиграл (он выплачивает весь свой потребительский излишек), хотя его уровень потребления изменился, выиграл High (получил выигрыш, равный площади C), а монополист проиграл (его прибыль уменьшилась на величину $m_h\cdot$(площадь C) + $m_l\cdot$(площадь G)). В результате возникли чистые потери благосостояния, измеряемые величиной $m_l\cdot$(площадь G).

На Рис. 53 представлена оптимальная схема в другой системе координат. Поскольку у господина Low не остается потребительского излишка, то его кривая безразличия, проходящая через точку (x_l^P, t_l^P), должна также проходить через начало координат (напомним, что мы приняли $v_l(0) = 0$). Господин High безразличен к выбору между пакетами, поэтому его кривая безразличия,

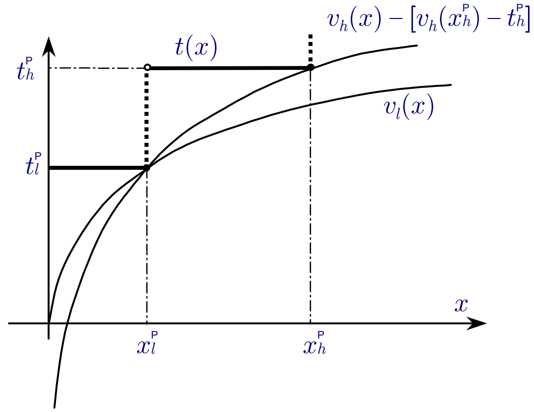


Рисунок 53

проходящая через точку (x_l^P, t_l^P), должна проходить также и через точку (x_h^P, t_h^P).

Пример 9.

Пусть функции полезности господина Low и господина High имеют вид $u_l(x_l, z_l) = \sqrt{x_l} + z_l$ и $u_h(x_h, z_h) = 2\sqrt{x_h} + z_h$, соответственно, а функция издержек линейна: $c(x) = cx$. Тогда оптимальные объемы x_i^P, где $i = l, h$, для этих типов потребителей находятся из системы уравнений:

$$(m_l + m_h)\frac{1}{2\sqrt{x_l^P}} - m_h\frac{1}{\sqrt{x_l^P}} = m_l c,$$
$$\frac{1}{\sqrt{x_h^P}} = c.$$

Если $m_l > m_h$, то решение этой системы уравнений существует (в противном случае будут предлагаться сделки только одного типа):

$$x_l^P = \left(\frac{m_l - m_h}{2m_l c}\right)^2 \qquad x_h^P = \frac{1}{c^2}.$$

При этом плата за приобретаемое благо будет равна:

$$t_l^P = v_l(x_l^P) = \frac{m_l - m_h}{2m_l c},$$
$$t_h^P = v_h(x_h^P) - v_h(x_l^P) + v_l(x_l^P) = \frac{3m_l + m_h}{2m_l c}.$$

В частном случае, когда m_l относится к m_h как 2 к 1, получим

$$x_l^P = \frac{1}{16c^2}, \qquad x_h^P = \frac{1}{c^2},$$
$$t_l^P = \frac{1}{4c}, \qquad t_h^P = \frac{7}{4c}.$$

Получается, что господин Low платит за единицу блага $4c$, а господин High — $\frac{7c}{4}$.

Найдем также чистые потери общественного благосостояния. Они равны:

$$DL = m_l\cdot\left(v_l(x_l^*) - v_l(x_l^P) + c(x_l^P + x_h^P) - c(x_l^* + x_h^P)\right) =$$
$$= m_l\cdot\left(v_l(x_l^*) - v_l(x_l^P) + (x_l^P - x_l^*)c\right).$$

Напомним, что $x_l^* = \frac{1}{4c^2}$, поэтому

$$DL = m_l\cdot\left(\frac{1}{2c} - \frac{m_l - m_h}{2m_l c} + \left[\left(\frac{m_l - m_h}{2m_l c}\right)^2 - \frac{1}{4c^2}\right]c\right) = \frac{m_h^2}{4m_l c}.$$

Когда доля участников типа «господин High» пренебрежимо мала по сравнению с долей участников типа «господин Low», то

схема оплаты приближается к схеме оплаты при идеальной дискриминации, и потери благосостояния близки к нулю. ⇦

Дискриминация второго типа: двухкомпонентный тариф

Вторая (по порядку, но не по значению) рассматриваемая нами схема реализации второго типа дискриминации – это двухкомпонентный тариф. Определение двухкомпонентного тарифа рассматривалось нами на стр. 78. Напомним, что схема реализации двухкомпонентного тарифа имеет вид: $t(x) = A + px$. Тот факт, что потребители имеют возможность ничего не покупать на рынке, можно учесть в функции $t(x)$, так что она в результате приобретет вид:

$$t(x) = \begin{cases} A + px, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Для того, чтобы найти характеристики оптимального двухкомпонентного тарифа (A, p), необходимо прежде всего рассмотреть поведение потребителей, сталкивающихся с такой схемой оплаты. Если потребитель покупает благо в положительном количестве $(x_i > 0)$, то из-за квазилинейного характера функции полезности величина A не влияет на выбор x_i. По сути дела, бюджетное ограничение, при двухкомпонентном тарифе можно рассматривать как обычное бюджетное ограничение, соответствующее доходу $\omega_i - A$. Спрос потребителя при данной величине p находится из условия первого порядка:

$$v'_i(x_i) = p.$$

При этом функция $v'_i(\cdot)$ представляет собой обратную функцию спроса. В дальнейшем мы будем обозначать прямые функции спроса, задаваемые условиями первого порядка, через $D_h(p)$ и $D_l(p)$ для господина High и господина Low соответственно. В этих обозначениях совокупный спрос, с которым столкнется монополист, назначив цену p, будет равен

$$D(p) = m_h D_h(p) + m_l D_l(p).$$

Если оказывается, что $v_i(D_i(p)) - A - pD_i(p)$ меньше $v_i(0) = 0$, то потребителю выгодно выбрать $x_i = 0$, а не $x_i = D_i(p)$. Отсюда получим условие участия:

$$v_i(D_i(p)) - A - pD_i(p) \geqslant 0.$$

Мы в дальнейшем разберем только случай, когда оптимальное для монополиста решение внутреннее, в том смысле, что каждый потребитель покупает благо в положительном количестве, т.е. $x_i > 0$. Это подразумевает, что условие участия выполнено для каждого потребителя. (Очевидно, что если оптимальное решение не внутреннее, то оно должно иметь следующий вид: потребление потребителей типа «господин Low» равно нулю, а в отношении потребителей типа «господин High» монополист проводит идеальную дискриминацию по двухкомпонентной схеме. Читатель может доказать это самостоятельно.)

По крайней мере одно из условий участия в точке оптимума должно выполняться как равенство. В противном случае монополист мог бы увеличить прибыль, увеличив фиксированную плату A. Несложно показать, что оно должно быть выполнено как равенство для потребителей типа «господин Low». Действительно, пусть это не так, и для господина High выполнено

$$v_h(x_h) - A - px_h = 0.$$

Поскольку господин High выбрал x_h, а не x_l, то данное допущение влечет

$$v_h(x_l) - A - px_l \leqslant v_h(x_h) - A - px_h = 0.$$

По предположению, $v_h(x) > v_l(x)\ \forall x$, поэтому

$$v_l(x_l) - A - px_l < v_h(x_l) - A - px_l \leqslant 0.$$

Но это означает невыполнение условия участия для господина Low, поэтому наше предположение не может быть верным. Значит, $v_h(x_h) - A - px_h > 0$ и

$$v_l(x_l) - A - px_l = 0.$$

Тем самым мы получили, что при данной цене p монополисту выгодно назначить фиксированную плату на уровне потребительского излишка господина Low.

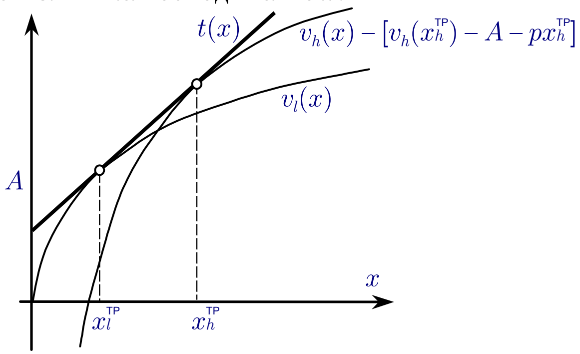


Рисунок 54

$$A(p) = v_l(D_l(p)) - pD_l(p).$$

Теперь мы можем представить прибыль монополиста как функцию цены p:

$$\Pi(p) = (m_l + m_h)[v_l(D_l(p)) - pD_l(p)] + pD(p) - c(D(p)).$$

Последние два слагаемых представляют собой прибыль монополии, которая не применяет ценовую дискриминацию. Обозначим ее через $\Pi^{\text{ND}}(p)$. В этих обозначениях

$$\Pi(p) = (m_l + m_h)[v_l(D_l(p)) - pD_l(p)] + \Pi^{\text{ND}}(p).$$

Продифференцировав по p, получим

$$\frac{d\Pi}{dp}(p) = (m_l + m_h)[(v_l'(D_l(p)) - p)\cdot D_l'(p) - D_l(p)] + \frac{d\Pi^{\text{ND}}}{dp}(p).$$

Воспользуемся условием первого порядка для решения задачи потребителя:

$$v_l'(D_l(p)) = p.$$

Имеем

$$\frac{d\Pi}{dp}(p) = -(m_l + m_h)D_l(p) + \frac{d\Pi^{\text{ND}}}{dp}(p).$$

Если обозначить через p^{TP} оптимальную цену, являющуюся решением задачи

$$\Pi(p) \to max_{p \geqslant 0},$$

то

$$-(m_l + m_h)D_l(p^{\text{TP}}) + \frac{d\Pi^{\text{ND}}}{dp}(p^{\text{TP}}) \leqslant 0,$$

причем если решение внутреннее ($p^{\text{TP}} > 0$), то

$$-(m_l + m_h)D_l(p^{\text{TP}}) + \frac{d\Pi^{\text{ND}}}{dp}(p^{\text{TP}}) = 0.$$

Отсюда следует, что $\frac{d\Pi^{\text{ND}}}{dp}(p^{\text{TP}}) > 0$, откуда следует, что p^{TP} не может совпадать с ценой p^{ND}, которую бы назначила недискриминирующая монополия. Покажем, что в действительности $p^{\text{TP}} < p^{\text{ND}}$.

Прибыль монополиста состоит из постоянной величины, «платы за вход», равной потребительскому излишку господина Low, и переменной части, зависящей от объема продаж. Переменная часть достигает максимума при $p = p^{\text{ND}}$, а постоянная часть убывает как функция цены. Формально:

$$p^{\text{ND}}D(p^{\text{ND}}) - c(D(p^{\text{ND}})) \geqslant pD(p) - c(D(p))\ \ \forall p \geqslant 0.$$

С другой стороны, при $p \geqslant p^{\text{ND}}$

$$A(p^{\text{ND}}) = v_l(D_l(p^{\text{ND}})) - p^{\text{ND}}D_l(p^{\text{ND}}) \geqslant v_l(D_l(p)) - pD_l(p) = A(p),$$

откуда

$$(m_l + m_h)A(p^{\text{ND}}) + p^{\text{ND}}D(p^{\text{ND}}) - c(D(p^{\text{ND}})) \geqslant$$
$$\geqslant (m_l + m_h)A(p) + pD(p) - c(D(p)).$$

Это и означает, что прибыль монополиста при любом $p \geqslant p^{\text{ND}}$ не превышает прибыль при $p = p^{\text{ND}}$.

Таким образом, $p^{\text{TP}} < p^{\text{ND}}$. Из убывания функции спроса следует, что производимое количество блага при использовании двухкомпонентного тарифа, $y^{\text{TP}} = D(p^{\text{TP}})$, выше, чем без дискриминации: $y^{\text{TP}} > y^{\text{ND}}$.

С другой стороны, расписывая

$$\frac{d\Pi^{\text{ND}}}{dp}(p^{\text{TP}}) = D(p^{\text{TP}}) + [p^{\text{TP}} - c'(D(p^{\text{TP}}))]\, D'(p^{\text{TP}}),$$

и подставляя

$$D(p^{\text{TP}}) = m_h D_h(p^{\text{TP}}) + m_l D_l(p^{\text{TP}})$$

получим, что

$$m_h[D_h(p^{\text{TP}}) - D_l(p^{\text{TP}})] + [p^{\text{TP}} - c'(D(p^{\text{TP}}))]\, D'(p^{\text{TP}}) = 0.$$

При сделанном нами предположении, что $v'_l(x) < v'_h(x)$, должно выполняться неравенство

$$D_l(p) < D_h(p),$$

поэтому

$$p^{\text{TP}} > c'(D(p^{\text{TP}})).$$

Отсюда следует, что правило оптимального ценообразования — равенство цены предельным издержкам — не выполнено, и производимое количество блага, $y^{\text{TP}} = D(p^{\text{TP}})$, меньше оптимального с общественной точки зрения количества, $\hat{y}$, которое должно удовлетворять условию

$$D(c'(\hat{y})) = \hat{y}.$$

Таким образом, при этой схеме ценообразования цена, которую каждый потребитель платит за единицу продукции ниже, чем при линейном тарифе. А поэтому величина потребительского излишка каждого потребителя, а значит и величина совокупного излишка, выше, чем при линейном (недискриминирующем) ценообразовании. Другими словами, использование двухкомпонентного тарифа уменьшает чистые потери благосостояния по сравнению с недискриминирующей монополией, хотя величина чистых потерь остается положительной.

Пример 10.

Пусть, как и в предыдущем примере, функции полезности господина Low и господина High имеют вид $u_l(x_l, z_l) = \sqrt{x_l} + z_l$ и $u_h(x_h, z_h) = 2\sqrt{x_h} + z_h$, соответственно, а функция издержек, а функция издержек линейна: $c(x) = cx$.

Функции спроса имеют вид

$$D_l(p) = \frac{1}{4p^2} \quad \text{и} \quad D_h(p) = \frac{1}{p^2}.$$

Отсюда функция совокупного спроса равна

$$D(p) = \frac{m_l + 4m_h}{4p^2},$$

а ее производная —

$$D'(p) = -\frac{m_l + 4m_h}{2p^3}.$$

Подставляя в условия первого порядка,

$$m_h[D_h(p^{\text{TP}}) - D_l(p^{\text{TP}})] + [p^{\text{TP}} - c'(D(p^{\text{TP}}))]\, D'(p^{\text{TP}}) = 0,$$

получим

$$\frac{3m_h}{4(p^{\text{TP}})^2} - [p^{\text{TP}} - c]\frac{m_l + 4m_h}{2(p^{\text{TP}})^3} = 0,$$

откуда

$$p^{\text{TP}} = \frac{2m_l + 8m_h}{2m_l + 5m_h} c > c.$$

Фиксированная плата равна

$$A = v_l(D_l(p^{\text{TP}})) - p^{\text{TP}} D_l(p^{\text{TP}}) = \frac{1}{2p^{\text{TP}}} - \frac{1}{4p^{\text{TP}}} = \frac{1}{4p^{\text{TP}}}.$$

Для того чтобы сравнить цену назначаемую дискриминирующим монополистом с ценой недискриминирующего рассмотрим условия первого порядка для недискриминирующей монополии:

$$D(p^{\text{ND}}) + [p^{\text{ND}} - c'(D(p^{\text{ND}}))]\, D'(p^{\text{ND}}) = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{(p^{\text{ND}})^2}(m_l/4 + m_h) - [p^{\text{ND}} - c]\frac{2}{(p^{\text{ND}})^3}(m_l/4 + m_h) = 0$$

и

$$p^{\text{ND}} = 2c > p^{\text{TP}}.$$

Теперь сравним результаты применением двухкомпонентного тарифа и пакетной дискриминации как с точки зрения общества, так и с точки зрения монополиста. Для этого вычислим чистые потери благосостояния для двухкомпонентного тарифа (в случае пакетной дискриминации чистые потери были вычислены нами ранее) и прибыль монополиста в этих ситуациях. Чистые потери благосостояния в случае двухкомпонентного тарифа равны:

$$DL = m_l\sqrt{D_l(c)} + m_h \cdot 2\sqrt{D_h(c)} - cD(c) -$$
$$- [m_l\sqrt{D_l(p^{\text{TP}})} + m_h \cdot 2\sqrt{D_h(p^{\text{TP}})} - cD(p^{\text{TP}})] =$$
$$= \frac{m_l + 4m_h}{2c} - \frac{m_l + 4m_h}{4c} - \frac{m_l + 4m_h}{2p^{\text{TP}}} + c\,\frac{m_l + 4m_h}{4(p^{\text{TP}})^2} =$$
$$= \frac{m_l + 4m_h}{4c}\left(1 - \frac{2c}{p^{\text{TP}}} + \frac{c^2}{(p^{\text{TP}})^2}\right) = \frac{m_l + 4m_h}{4c}\left(1 - \frac{c}{p^{\text{TP}}}\right)^2 =$$

$$= \frac{m_l + 4m_h}{4c}\left(1 - \frac{2m_l + 5m_h}{2m_l + 8m_h}\right)^2 = \frac{9m_h^2}{16(m_l + 4m_h)c}.$$

С точки зрения благосостояния общества однозначного выбора между двумя схемами сделать невозможно. В зависимости от соотношения между m_l и m_h чистые потери могут быть меньше либо в том, либо в другом случае.

Прибыль монополиста в случае применения пакетной дискриминации равна $\frac{(m_l + m_h)^2}{4m_l c}$, а прибыль в случае применения двухкомпонентного тарифа равна $\frac{(2m_l + 5m_h)^2}{16(m_l + 4m_h)c}$. Легко проверить, что вне зависимости от соотношения между m_l и m_h монополист предпочтет использовать пакетную дискриминацию.

⇦

Сравнительный анализ схем ценообразования при дискриминации второго типа

Пакетная схема ценообразования является оптимальной для монополиста. Объясним, почему это так. Предположим, что в результате использования некоторой схемы ценообразования $t(\cdot)$ господин Low выберет сделку, при которой он приобретает x_l блага и платит за него t_l, а господин High — x_h и t_h соответственно. Тогда монополист мог бы использовать пакетную дискриминацию, предложив потребителям «пакеты» (x_l, t_l) и (x_h, t_h), первый из которых предпочитает господин Low, а второй — господин High. Таким образом, пара (x_l, t_l) и (x_h, t_h) является допустимой в задаче выбора оптимальных пакетных сделок, и поэтому прибыль, получаемая монополистом при использовании любой другой схемы $t(\cdot)$ не может превышать прибыль, получаемую при использовании оптимальных пакетных сделок.

В частности, без использования дискриминации $(^{\text{ND}})$ и при использовании двухкомпонентного тарифа $(^{\text{TP}})$ монополист не может получить более высокую прибыль, чем при использовании оптимальных пакетных сделок $(^{\text{P}})$, т.е.

$$\Pi^{\text{ND}} \leqslant \Pi^{\text{P}} \quad \text{и} \quad \Pi^{\text{TP}} \leqslant \Pi^{\text{P}}.$$

Как было показано выше:

$$\Pi^{\text{ND}} < \Pi^{\text{TP}}$$

Покажем, что при сделанных предположениях справедливо также следующее соотношение:

$$\Pi^{\text{TP}} < \Pi^{\text{P}}.$$

Для этого установим, что если x_l^{TP} (x_h^{TP}) — объем покупок рассматриваемого блага потребителями первого типа (соответственно, потребителями второго типа) при двухкомпонентном тарифе, то для двух пакетных сделок $(x_l^{\text{TP}}, t_l^{\text{TP}})$, $(x_h^{\text{TP}}, t_h^{\text{TP}})$, где

$$t_l^{\text{TP}} = A(p^{\text{TP}}) + p^{\text{TP}} D_l(p^{\text{TP}}),$$
$$t_h^{\text{TP}} = A(p^{\text{TP}}) + p^{\text{TP}} D_h(p^{\text{TP}}).$$

построенных на их основе, справедливы утверждения:

1. Ограничения самовыявления не является связывающим и поэтому прибыль монополиста может быть увеличена за счет увеличения платы с каждого потребителя второго типа.

Действительно, функция $v_h(x) - A - px$ достигает максимальной величины при $x = x_h^{\text{TP}}$. Поэтому

$$v_h(x_h^{\text{TP}}) - A - px_h^{\text{TP}} \geqslant v_h(x_l^{\text{TP}}) - A - px_l^{\text{TP}}.$$

С другой стороны, $v'_h(x_l^{\text{TP}}) - p > 0$, и поэтому монополист может повысить t_h по сравнению с t_h^{TP}, не нарушая условие самовыявления. Тем самым, его прибыль возрастет, что и доказывает, что неравенство в вышеприведенном соотношении строгое: $\Pi^{\text{TP}} < \Pi^{\text{P}}$.

2. Поскольку $\bar{p} > c'(D(\bar{p}))$, то количество блага в сделке, предназначенной для покупателей второго типа, может быть увеличено, при соответствующем увеличении прибыли производителя, без нарушения условия самовыявления потребителей второго типа. Второе утверждение указывает еще один способ повышения прибыли — за счет увеличения x_h.

Сказанное иллюстрирует рисунок 55. Площадь фигуры B на нижней части рисунка равна величине прироста платы за предлагаемое покупателю второго типа количество блага (x_h^{TP}), при котором он все еще предпочитает сделку (x_h^{TP}, $t_h^{\text{TP}} + B$) сделке (x_l^{TP}, t_l^{TP}) (точнее, эти сделки для него эквивалентны). На верхнем графике сделка (x_h^{TP}, $t_h^{\text{TP}} + B$) лежит на кривой безразличия (пунктирная линия), полученной сдвигом первоначальной кривой безразличия потребителя второго типа, влево до точки, представляющей сделку (x_l^{TP}, t_l^{TP}).

Площадь фигуры C представляет величину прироста прибыли монополиста за счет *увеличения количества блага* в сделке, предназначенной для потребителя второго типа.

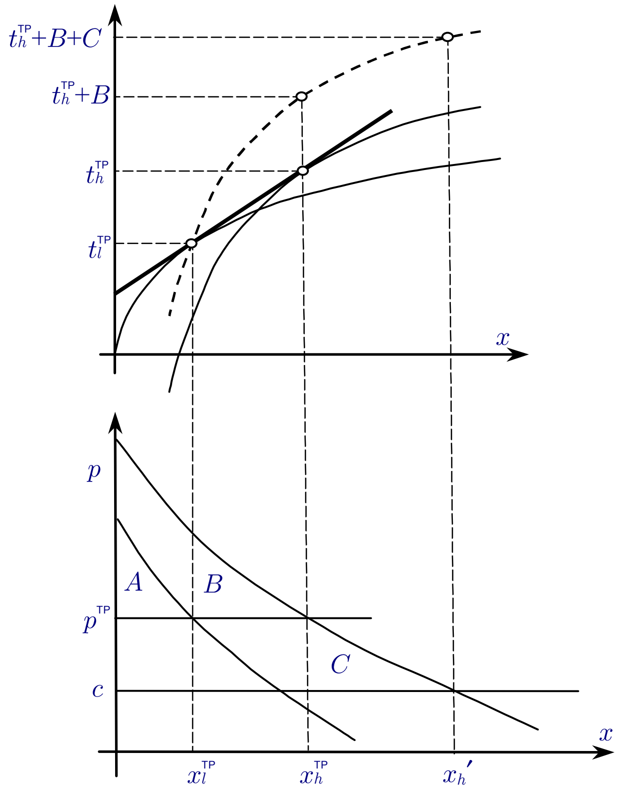


Рисунок 55

3-й тип ценовой дискриминации: «сегментация рынка»

Предположим теперь, что монополисту по каким-то причинам недоступны первые два типа дискриминации, но зато он имеет возможность продавать на k *сегментах* рынка или *подрынках*. Мы будем предполагать, что арбитраж между подрынками отсутствует, а именно, (1) невозможна покупка на одном рынке и перепродажа на другом, (2) каждый потребитель может покупать на одном, и только на одном подрынке (отсутствует персональный арбитраж). В этом случае монополист может установить разные цены на разных подрынках при том, что в пределах од-

ного подрынка все потребители покупают благо по одной и той же цене.

При отсутствии арбитража подрынки независимы, в том смысле, что спрос на благо на каждом подрынке зависит только от цены на этом подрынке:

$$D_i = D_i(p_i), \ \forall i = 1, \ldots, k.$$

Покажем, что при дискриминации третьего типа *монополист установит цену выше на том рынке, где эластичность спроса по цене (точнее, ее абсолютная величина) меньше*.

Задача монополиста состоит в том, чтобы установить цены таким образом, чтобы получить максимальную прибыль:

$$\sum_{i=1}^{k} p_i D_i(p_i) - c\left(\sum_{i=1}^{k} D_i(p_i)\right) \to max_{\ p_i \geq 0}.$$

Из условия первого порядка при предположении $p_i > 0 \ \forall i$ имеем

$$D_i(p_i) + p_i D_i'(p_i) = c'\left(\sum_{s=1}^{k} D_s(p_s)\right) \cdot D_i'(p_i), \ \forall i.$$

Используя определение эластичности спроса на i–м подрынке,

$$\varepsilon_i(p_i) = D_i'(p_i)\frac{D_i(p_i)}{p_i},$$

получим

$$p_i\left[1 - \frac{1}{|\varepsilon_i(p_i)|}\right] = c'\left(\sum_{s=1}^{k} D_s(p_s)\right), \ \forall i.$$

Поскольку правая часть во всех условиях первого порядка одинакова, то для любых двух подрынков, i, s, мы можем записать

$$\frac{p_i}{p_s} = \frac{1 - \dfrac{1}{|\varepsilon_s(p_s)|}}{1 - \dfrac{1}{|\varepsilon_i(p_i)|}}.$$

Поэтому, если в равновесии $|\varepsilon_i(p_i)| < |\varepsilon_s(p_s)|$, то $p_i > p_s$, что и требовалось доказать.

Понятно, что монополист не может проиграть от дискриминации, но выигрывает ли он за счет потребителя, или за счет уменьшения чистых потерь, которые существуют при недискриминирующей монополии? Оценим возможное влияние дискриминации третьего типа на благосостояние.

По тем же причинам, которые были рассмотрены ранее, мы можем анализировать влияние дискриминации третьего типа на благосостояние, считая, что спрос на каждом из подрынков порождается поведением репрезентативных потребителей, по одному на каждый подрынок, имеющих квазилинейные функции полезности:

$$u_i(x_i, z_i) = v_i(x_i) + z_i.$$

Поскольку репрезентативный потребитель покупает все на данном рынке ($x_i = y_i$), то в дальнейшем будем писать y_i.

Сравним рынок без дискриминации, на котором монополист устанавливает единую оптимальную цену $\bar{p}$, с рынком в условиях дискриминации третьего типа, когда на каждом из подрынков монополист устанавливает свою цену $\tilde{p}_i$.

Общая формула для индикатора благосостояния имеет вид:

$$W = \sum_{i=1}^{k} v_i(y_i) - c(\sum_{i=1}^{k} y_i).$$

Если подставить в эту формулу функции спроса, получим

$$W = \sum_{i=1}^{k} v_i(D_i(p_i)) - c(\sum_{i=1}^{k} D_i(p_i)).$$

В ситуации без дискриминации $p_i = \bar{p}$

Мы должны сравнить

$$\bar{W} = \sum_{i=1}^{k} v_i(D_i(\bar{p})) - c(\sum_{i=1}^{k} D_i(\bar{p})),$$

с

$$\tilde{W} = \sum_{i=1}^{k} v_i(D_i(\tilde{p}_i)) - c(\sum_{i=1}^{k} D_i(\tilde{p}_i)).$$

Предположим, что у каждого репрезентативного потребителя $v_i(\cdot)$ — строго вогнутая возрастающая функция.

Напомним, что вогнутая функция обладает тем свойством, что лежит ниже своей касательной. Для любой вогнутой дифференцируемой функции $f(\cdot)$ имеет место неравенство

$$\nabla f(x^1)\,(x^1 - x^0) \leqslant f(x^1) - f(x^0) \leqslant \nabla f(x^0)\,(x^1 - x^0)$$

для любых x^0, x^1 из ее области определения. Применив это свойство к функции $v_i(\cdot)$, получим, что

$$v_i'(\tilde{y}_i)\,(\tilde{y}_i - \bar{y}_i) \leqslant v_i(\tilde{y}_i) - v_i(\bar{y}_i) \leqslant v_i'(\bar{y}_i)\,(\tilde{y}_i - \bar{y}_i),$$

или

$$v_i'(\tilde{y}_i)\,\Delta y_i \leqslant \Delta v_i \leqslant v_i'(\bar{y}_i)\,\Delta y_i,$$

где $\Delta v_i = v_i(\tilde{y}_i) - v_i(\bar{y}_i)$, $\Delta y_i = \tilde{y}_i - \bar{y}_i$.

Поскольку спрос порождается максимизацией квазилинейной функции полезности, то выполняются соотношения

$$\bar{p} = v_i'(\bar{y}_i);$$
$$\tilde{p}_i = v_i'(\tilde{y}_i).$$

Используя их можно переписать неравенство (4) в виде

$$\tilde{p}_i \Delta y_i \leqslant \Delta v_i \leqslant \bar{p}\,\Delta y_i.$$

Суммируя по всем подрынкам, получим:

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{p}_i \Delta y_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} \Delta v_i = \sum_{i=1}^{k} v_i(\tilde{y}_i) - \sum_{i=1}^{k} v_i(\bar{y}_i) \leqslant \bar{p} \sum_{i=1}^{k} \Delta y_i \qquad (\#)$$

Мы рассмотрим только случай, когда монополист имеет постоянные предельные издержки, равные c:

$$c(\sum_{i=1}^{k} y_i) = \sum_{i=1}^{k} y_i\, c$$

где c — некоторая константа. Вычитая из всех трех частей соотношения (#) изменение издержек при введении дискриминации,

$$c(\sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i) - c(\sum_{i=1}^{k} \bar{y}_i) = (\sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i)c - (\sum_{i=1}^{k} \bar{y}_i)c = \sum_{i=1}^{k} \Delta y_i c,$$

можно оценить изменение индикатора благосостояния $\Delta W = \tilde{W} - \bar{W}$:

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{p}_i \Delta y_i - \sum_{i=1}^{k} \Delta y_i c \leqslant \sum_{i=1}^{k} v_i(\tilde{y}_i) - (\sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i)c - \sum_{i=1}^{k} v_i(\bar{y}_i) - (\sum_{i=1}^{k} \bar{y}_i)c \leqslant$$
$$\leqslant \bar{p} \sum_{i=1}^{k} \Delta y_i - \sum_{i=1}^{k} \Delta y_i c$$

или

$$\sum_{i=1}^{k} (\tilde{p}_i - c)\Delta y_i \leqslant \Delta W \leqslant (\bar{p} - c) \sum_{i=1}^{k} \Delta y_i$$

Вторая часть последнего неравенства говорит нам, что в ситуации. когда суммарный объем продаж не изменится, т.е. $\sum \Delta y_i = 0$, то прирост совокупного излишка (в данном случае совокупного потребительского излишка, так как предельные издержки по предположению постоянны) при переходе к дискриминации благосостояние не может вырасти, $\Delta W \leqslant 0$. Таким образом, необходимым условием того, что совокупный потребительский излишек в результате дискриминации не упадет, является рост совокупных продаж. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 21.
Пусть монополист перешел от единой цены ($\bar{p}$) к дискриминации по сегментам рынка. Если предельные издержки монополии постоянны, то совокупное благосостояние общества может возрасти только в случае роста суммарного выпуска.

Заметим, что полученная оценка изменения благосостояния опирается только на анализ поведения потребителей, но не на анализ поведения монополии. Смысл утверждения в том, что дискриминация вносит искажения в предельные нормы замещения по подрынкам: без дискриминации они одинаковы, а в случае дискриминации 3-го типа в общем случае разные. Если отрицательный эффект этих искажений не перекрывается ростом общего потребления, то излишек потребителей, а, следовательно, и общее благосостояние не может вырасти.

Если судить по тем результатам которые были получены при анализе первого и второго типов дискриминации, то наблюдается тенденция к падению чистых потерь от монополии при использовании монополистом дискриминации. Однако в случае использования дискриминации второго типа чистые потери могут вырасти по сравнению с недискриминирующей монополией. Пример такой ситуации построить очень просто.

Пример 11. («Теорема Дж. Робинсон и Р. Шмалензи»[71])

Предположим, что функции спроса линейны, а предельные издержки равны c. Обратные функции спроса также должны быть линейными. Пусть они имеют вид

$$p_i(y_i) = a_i - b_i y_i \ (a_i, b_i > 0).$$

Тогда недискриминирующий монополист, продающий на всех рынках, сталкивается на них со спросом при цене p:

$$y_i(p) = \frac{a_i}{b_i} - \frac{1}{b_i}p.$$

Мы предполагаем здесь, что цена не слишком велика, и спрос не равен нулю. Суммируя по подрынкам, получим функцию общего спроса

[71] Джоан Робинсон — британский экономист, в своей работе «Economics of imperfect competitions» (1933г.), London, Macmillan (Д. Робинсон «Экономическая теория несовершенной конкуренции» М., 1986) показала, что в случае линейных функций спроса и издержек суммарный выпуск монополии, не проводящей дискриминацию, совпадает с выпуском монополии, проводящей дискриминацию третьего типа. Американский экономист Ричард Шмалензи показал, что в случае линейных функций спроса и издержек благосостояние ниже при использовании дискриминации (Schmalensee, R. (1981), "Output and welfare implications of monopolistic third-degree price discrimination," *American Economic Review*, **71** (March), 242–247).

$$y(p) = \sum_{i=1}^{k} y_i(p) = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i} - \left(\sum_{i\in I}\frac{1}{b_i}\right)p.$$

Функция обратного спроса при этом имеет вид:

$$p(y) = \frac{\sum_{i\in I} a_i/b_i}{\sum_{i\in I} 1/b_i} - \frac{1}{\sum_{i\in I} 1/b_i}y,$$

и поэтому оптимальный объем продаж равен (см. Пример 3 на стр. 68)

$$y^* = \frac{1}{2}\left(\sum_{i\in I}\frac{a_i}{b_i} - c\sum_{i\in I}\frac{1}{b_i}\right)$$

При дискриминации по подрынкам монополист продает на i-м подрынке объем

$$\tilde{y}_i = \frac{a_i - c}{2b_i}.$$

Суммируя по подрынкам, получим

$$\sum_{i=1}^{k}\tilde{y}_i = \sum_{i=1}^{k}\frac{a_i - c}{2b_i} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i\in I}\frac{a_i}{b_i} - c\sum_{i\in I}\frac{1}{b_i}\right).$$

Поскольку объем продаж не меняется, то по Теореме 21 благосостояние не может возрасти, и, следовательно, чистые потери не могут уменьшиться. Более того, при том же объеме производства благосостояние при использовании дискриминации должно быть меньше, поскольку цены, а, следовательно, и предельные нормы замещения у разных потребителей оказываются разными. Совпадение чистых потерь возможно только при совпадении цен на всех подрынках, т.е. когда

$$p_i = \frac{a_i + c}{2} = p_s = \frac{a_s + c}{2} \quad \forall i, s$$

или

$$a_i = a_s \quad \forall i, s.$$

Можно также непосредственно вычислить чистые потери в двух ситуациях и затем сравнить их. Читатель может проделать это самостоятельно. Мы дадим лишь графическое сравнение в случае двух подрынков.

На Рис. 56 первый подрынок изображен в правой системе координат, а второй — в левой. Соответствующие функции спроса обозначены через D_1 и D_2. Предполагаем, что $a_1 > a_2$. Совокупный излишек на первом рынке равен площади фигур A и B, а на втором рынке — площади фигуры C. Чистые потери составляют четверть этих площадей, поскольку можно рассматривать дискриминирующую монополию как недискриминирующую на ка-

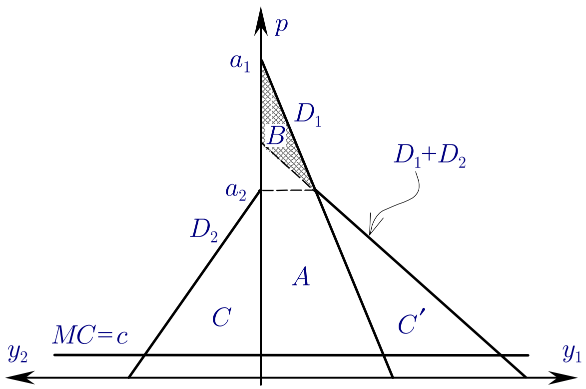


Рисунок 56

ждом из подрынков (см. Пример 4 на стр. 73). Таким образом, если монополист дискриминирует по подрынкам, то чистые потери составляют $(A+B+C)/4$.

Если монополист не проводит дискриминацию, то он сталкивается со спросом $D_1(p) + D_2(p)$ при низких ценах и со спросом $D_1(p)$ при высоких (так как при $a_1 > p > a_2$ спрос на втором подрынке равен нулю, в то время как спрос на первом подрынке все еще остается положительным). Таким образом, кривая спроса представляет собой ломаную. Пусть параметры функций спроса и предельных издержек таковы, что в оптимуме монополист продает на обоих подрынках, и следовательно оптимальная цена $\bar{p}$ лежит на нижнем участке кривой спроса ($\bar{p} < a_2$). При нахождении чистых потерь (в этом случае) важна форма кривой спроса только при ценах не превышающих $\bar{p}$. Таким образом, можно считать, что в верхней части кривая спроса не изгибается, что показано на Рис. 56 пунктиром. При этом чистые потери должны составлять четверть треугольника, составленного из фигур A и C'. Т.е. без дискриминации чистые потери составляют $(A + C')/4$.

Заметим теперь, что площади треугольников C и C' равны, поскольку высоты и основания у них равны. Получаем, что без дискриминации чистые потери меньше на величину $B/4$. ⇦

Задачи

1. Сравните рассмотренные схемы (поведение недискриминирующего монополиста или схему линейного тарифа, схему двухкомпонентного тарифа, пакетную дискриминацию и идеальную дискриминацию) в случае, когда предпочтения потребителей имеют следующий вид

$$u_i(y_i,w_i) = 0.5\theta_i\,[1-(1-y_i)^2] + w_i.$$

2. Докажите существование решения задачи идеальной дискриминации при следующих условиях:

♦ предельные издержки постоянны, $v_i(\cdot)$, $\forall i$ дифференцируемы;

♦ $v_i'(0) > c'(0)\ \forall i$;

♦ существуют $\tilde{y}_i > 0$, такие что $v_i(\tilde{y}_i) - c(\tilde{y}_i) > v_i(y) - c(y)$ при $y > \tilde{y}_i$.

3. Представьте проанализированные способы дискриминации в виде динамических игр. Объясните, почему рассмотренные решения соответствуют совершенным в подыграх равновесиям данных игр.

4. Представьте проанализированные схемы дискриминации второго типа в виде динамических байесовских игр в случае постоянных предельных издержек, рассматривая доли участников разных типов как вероятности. Объясните, почему рассмотренные решения соответствуют совершенным байесовским равновесиям данных игр.

5. Предположим, что функции спроса потребителей и функция издержек линейны, а число участников типа «господин Low» не превышает число участников типа «господин High». Покажите, что если при линейном тарифе монополисту невыгодно обслуживать потребителей типа «господин Low», то их оказывается невыгодным обсуживать и при пакетной дискриминации. Покажите, построив контрпример, что обратное неверно.

6. Проверьте, что когда функции спроса имеют вид $D(p_i) = \alpha_i(\beta - p)$, тогда монополисту не выгодно применять дискриминацию третьего типа.

7. Потребитель имеет функцию спроса $D(p) = 10 - p$. Предельные издержки монополии постоянны $MC = 5$. Какие сделки может предложить ему монополия, чтобы получить весь излишек (идеальная ценовая дискриминация). Для каждого вида сделок найти все параметры.

8. Фирма-монополист может разделить своих потребителей на n непересекающихся групп. Функция спроса каждой группы $(i = 1,\ldots,n)$ от цены равна $y_i(p_i)$ $(y'_i > 0)$, общая функция издержек: $c(y)$, где $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$ ($c'>0$).

Пусть $n = 2$,

$$y_1 = (a_1 + a_2 + b_1) - b_1 p_1,$$
$$y_2 = (a_2 + b_1 + b_2) - (b_1 + b_2) p_2,$$
$$c(y) = y,$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — положительные константы.

1) Возьмите конкретные числа a_1, a_2, b_1, b_2 и найдите максимум прибыли при использовании дискриминации и без (когда цена одинакова). В каком случае объем производства выше?

2) Покажите, что при любом наборе констант цену для первой группы выгодно установить более высокую.

9. В той же ситуации взять $y_i = b_i p_i^{(1+1/ai)}$, a_i, $b_i > 0$. Доказать, при произвольном n, что отношения цен в равновесии не зависят от $c(.)$ и найти их.

10. Пусть монополист продает на двух независимых рынках, где эластичность спроса постоянна и составляет ε_1, на одном, ε_2 на другом. предельные издержки $c'(y) = c$ постоянны. Какие цены установятся на обоих рынках?

11. Как в ситуации Примера 11 (стр. 91) соотносятся цены на каждом из подрынков при дискриминации с ценой, назначаемой монополистом без применения дискриминации?

12. В ситуации Примера 11 (стр. 91), вычислив чистые потери благосостояния при дискриминации, проверьте, проведя соответствующие алгебраические преобразования, что они не меньше, чем потери без дискриминации. Для упрощения считайте, что предельные издержки нулевые. При доказательстве воспользуйтесь неравенством Коши–Буняковского:

$$(x_1 y_1 + \cdots + x_k y_k)^2 \leqslant (x_1^2 + \cdots + x_k^2)(y_1^2 + \cdots + y_k^2).$$

13. Постройте пример, в котором при дискриминации третьего типа чистые потери были бы меньше, чем без дискриминации.

14. Пусть в случае дискриминации второго типа монополист сталкивается на каждом из подрынков с обратной функцией спроса p_i, которая зависит не только от объема продаж на данном подрынке, но и от объемов продаж на других подрынках, т.е. $p_i = p_i(y_i,\ y_{-i})$. Рассмотрите случай двух подрынков, когда емкость подрынка с меньшей эластичностью спроса (точнее, ее абсолютная величина) больше. Докажите, что монополист установит цену выше на том подрынке, где эластичность спроса по цене меньше.

15. Используя результаты Примеров 9 и 11 покажите, что предпочтение монополиста относительно применения конкретной схемы реализации дискриминации второго типа зависит от структуры рынка (количества потребителей каждого вида).

Олигополия

Олигополией называют ситуацию, когда на рынке несколько производителей, и каждый из них может влиять на цену. Если производителей двое, то такую олигополию называют **дуополией**.

В отличие от моделей монополии, где рассматривается принятие решений единственной фирмой — монополией, в моделях олигополии рассматривается принятие решений сразу несколькими экономическими агентами — олигополистами, причем результат функционирования каждого из них зависит не только от предпринимаемых им самим действий, но и от действий его конкурентов.[72] Таким образом мы сталкиваемся здесь с феноменом так называемого стратегического поведения — предмета теории игр. В связи с этим практически все модели олигополии представляют собой игры различного рода, и моделирование олигополистических рынков в существенной степени использует аппарат теории игр.

Мы будем предполагать здесь, если не оговорено иное, что общая структура олигополистической отрасли (технология, количество производителей, тип конкуренции и т.д.) заданы экзогенно. Логически возможны разные гипотезы о поведении участников олигополии. Участники могут демонстрировать либо некооперативное, либо кооперативное поведение (сговор, картель). Поэтому типы некооперативного поведения можно классифицировать по следующим признакам:

(I) Одновременное принятие решений.

(II) Последовательное принятие решений. Традиционно рассматриваемый — один из участников лидер, остальные подстраиваются к его решению. Возможны и более сложные цепочки ходов.

Нас прежде всего интересует некооперативное поведение олигополистов, хотя попутно мы будем рассматривать и кооперативное поведение (картель). Для каждой из этих гипотез о последовательности принятия решений можно, кроме того, предполагать, что стратегии всех участников (при одновременном принятии решений) или лидера (при последовательном принятии решений) сводятся к назначению либо цен, либо объемов выпуска. Таким образом, получаем четыре типа некооперативного поведения (см. Таблицу 22).

[72] Нужно оговориться, что модели монополии, особенно модели дискриминации, все же включают в себя некоторые элементы теории игр, поскольку кроме решений монополиста рассматривается также реакция на них потребителей.

Таблица 22

	Одновременно	Последовательно
Количество	Модель Курно	Модель Штакельберга
Цена	Модель Бертрана	Ценовое лидерство

В дальнейшем будем считать, что некоторую однородную продукцию производят n фирм, технологии которых представлены возрастающими функциями издержек $c_j(y_j)$, $j = 1, \ldots, n$, а спрос на продукцию задается убывающей обратной функцией спроса $p(Y)$. Областью определения для выпусков y_j везде будем считать $[0, +\infty)$. Кроме того в дальнейшем мы не будем учитывать требование неотрицательности прибыли отдельного олигополиста. Под равновесием совершенной конкуренции будем понимать такое равновесие, которое установилось бы, если бы производители игнорировали влияние своего объема выпуска на цену.[73]

1. Модель Курно

В модели Курно производители принимают решение относительно объемов производства и принимают эти решения одновременно, исходя из своих предположений о решениях, принятых другими (их конкурентами).

Пусть y^e_{ji} — ожидаемый (производителем j) объем производства производителя i, $\boldsymbol{y}^e_{-j}$ — составленный из этих ожиданий вектор $(y^e_{j1}, \ldots, y^e_{j,j-1}, y^e_{j,j+1}, \ldots, y^e_{jn})$. Тогда при выпуске y_j его (ожидаемая) прибыль составит величину $\Pi^e_j(y_j, \boldsymbol{y}^e_{-j}) = p(y_j + \sum_{i \neq j} y^e_{ji}) \cdot y_j - c_j(y_j)$. Выпуск, максимизирующий прибыль при ограничении $y_j \geqslant 0$, зависит, таким образом, от ожидаемого объема производства других производителей. Если ожидаемые объемы производства совпадают с фактическими, то такое состояние можно назвать равновесием олигополии. Описанное понятие равновесия было введено в

[73] То есть, были бы, пользуясь английским термином, price-taker'ами.

прошлом веке французом Антуаном Огюстеном Курно.[74] Это равновесие часто называют **равновесием Курно**. Следует отметить, однако, что было бы точнее говорить о *равновесии Нэша в модели Курно*.[75]

Определение 14.

Равновесие Курно — это совокупность выпусков $(y_1^*, ..., y_n^*)$ и ожиданий $(\boldsymbol{y}_{-1}^e, ..., \boldsymbol{y}_{-n}^e)$, таких что выпуск любого производителя, y_j^*, максимизирует его прибыль на $[0, +\infty)$ при ожиданиях $\boldsymbol{y}_{-j}^e$, и ожидания всех производителей оправдываются, т.е. $\boldsymbol{y}_{-j}^e = \boldsymbol{y}_{-j}^*$, $j = 1, ..., n$.

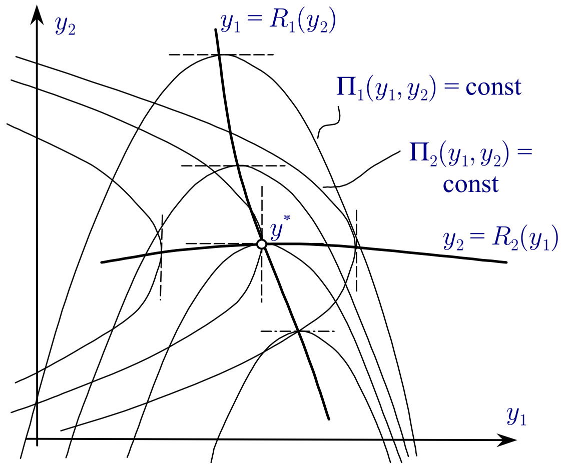


Рисунок 57

Другими словами, y_j^* является решением задачи

$$\Pi_j(y_j) = p(y_j + \sum_{i \neq j} y_i^*) \cdot y_j - c_j(y_j) \to max_{\,y_j \geqslant 0}.$$

Зависимость оптимального объема производства y_j от $\sum_{i \neq j} y_i^e$ называют функцией отклика, если решение задачи единственно

[74] Cournot, A. A. (1838), «Recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richesses».

[75] Часто равновесие в рассмотренной модели называют также равновесием по Нэшу-Курно.

(отображением отклика в общем случае). Будем обозначать ее через $R_j(Y_{-j})$, где $Y_{-j} = \sum_{i \neq j} y_i$ — (ожидаемый) суммарный объем производства блага всеми другими производителями. Если оптимальный отклик однозначен, то равновесие Курно $(y_1^*, ..., y_n^*)$ является решением следующей системы уравнений:[76]

$$y_j^* = R_j(\sum_{i \neq j} y_i^*),\ j = 1, ..., n.$$

Пусть $(y_1^*, ..., y_n^*)$ — равновесие Курно. Тогда выполняются следующие соотношения (условия первого порядка):

$$\Pi_j'(y_j^*) = p(Y^*) + p'(Y^*) \cdot y_j^* - c_j'(y_j^*) \leqslant 0,$$

где $Y^* = \sum_{i=1}^n y_i^*$, причем

$$\Pi_j'(y_j^*) = 0, \quad \text{если } y_j^* > 0.$$

Данные соотношения — необходимые условия первого порядка, представляют дифференциальную характеристику равновесия Курно.

Проиллюстрируем с помощью графика равновесие Курно для случая двух фирм (дуополии) (Рис. 57). На рисунке изображены кривые постоянной прибыли ($\Pi_1(y_1,y_2) = const$ и $\Pi_2(y_1,y_2) = const$) и кривые отклика ($y_1 = R_1(y_2)$ и $y_2 = R_2(y_1)$), которые можно определить как множество точек, где касательные к кривым равной прибыли параллельны соответствующим осям координат. Точка пересечения кривых отклика является равновесием Нэша-Курно ($\boldsymbol{y}^*$).

Свойства равновесия Курно в случае постоянных и одинаковых предельных издержек

Проведем анализ модели Курно в упрощенном варианте, предположив, что предельные издержки постоянны и совпадают у всех производителей, т.е. $c_j'(y_j) = c$. Кроме того будем предполагать выполнение условий:

(C_1) $p(0) > c$,

(C_2) существует $\tilde{Y}$, такой что $p(\tilde{Y}) < c$,

[76] Если отклики неоднозначны, то нужно решить аналогичную систему включений.

(C_3) функция $p(\cdot)$ дифференцируема и $p'(y) < 0\ \forall y > 0$.

Симметричность равновесия и положительность выпусков

Докажем, что объемы производства у всех олигополистов совпадают. Пусть это не так, и существуют два производителя, j и k, такие что $y_j^* > y_k^*$. Запишем условия первого порядка, учитывая, что выпуск y_j^* положителен, а y_k^* может быть равен нулю:

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\cdot y_j^* - c = 0$$

и

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\cdot y_k^* - c \leqslant 0.$$

Вычитая из второго неравенства первое, получим

$$p'(Y^*)\,(y_k^* - y_j^*) \leqslant 0.$$

Поскольку $p'(Y^*) < 0$, то $y_k^* \geqslant y_j^*$. Получили противоречие. Таким образом, объем производства у каждой фирмы в равновесии Курно одинаков: $$y_j^* = \frac{Y^*}{n}\ \forall j = 1, \ldots, n,$$

а условия первого порядка совпадают и приобретают вид

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\frac{Y^*}{n} - c \leqslant 0,$$

причем неравенство заменяется на равенство, если суммарный выпуск Y^* положителен.

Если $p(0) > c$, то в равновесии Курно суммарный выпуск не может быть нулевым, поскольку, подставляя $Y^* = 0$ в условия первого порядка, получаем

$$p(0) - c \leqslant 0.$$

Существование и единственность равновесия

Таким образом, при $p(0) > c$, выпуск общий положителен и условия первого порядка имеют вид

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\frac{Y^*}{n} - c = 0,$$

Заметим, что существование корня этого уравнения можно гарантировать, если выполнены условия C_1–C_3 и, кроме того, функция $p(\cdot)$ *непрерывно* дифференцируема, поскольку в этих условиях непрерывная функция $p(Y) + p'(Y)\dfrac{Y}{n} - c$ принимает значения разных знаков на концах интервала $[0, \tilde{Y}\,]$.

Если дополнительно потребовать, чтобы функция $p(y + y')\cdot y$ была вогнута по y при любом $y' \geqslant 0$, то можно утверждать, что $\left(\dfrac{Y^*}{n}, \ldots, \dfrac{Y^*}{n}\right)$ — равновесие Курно (выполнено условие второго порядка).

Заметим при этом, что поскольку при сделанном предположении функция $p(y)\,y$ вогнута, то равновесие Курно единственно, поскольку условие первого порядка выполнено в одной точке.

Действительно, функцию $p(Y) + p'(Y)\dfrac{Y}{n} - c$ можно представить в виде

$$\frac{1}{n}[p(Y) + p'(Y)Y] + p(Y)\frac{n-1}{n} - c.$$

Первое слагаемое здесь не возрастает, а второе убывает при $n > 1$, поэтому функция $p(Y) + p'(Y)\dfrac{Y}{n} - c$ убывает и может быть равной нулю не более чем в одной точке.

В точке $Y = 0$ (в которой условие первого порядка может не выполняться как равенство) равновесия быть не может, поскольку, как мы предположили, $p(0) > c$.

Сравнение равновесия Курно с равновесиями при монополии и совершенной конкуренции

Следует отметить три характеристики равновесия Курно:

1. Объем выпуска Y^* в равновесии Курно выше, чем объем выпуска $y^м$ при монополии (или картеле, когда производители выбирают выпуск, максимизирующий суммарную прибыль).
2. Объем выпуска Y^* в равновесии по Курно ниже, чем объем выпуска $\bar{Y}$ в условиях совершенной конкуренции (ситуации, когда производители рассматривают цены как данные).
3. При росте числа участников объем выпуска в равновесии Курно приближается к равновесию при совершенной конкуренции.

> **Теорема 22.**
> Пусть $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$ — равновесие Курно, и $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ — равновесие при совершенной конкуренции, $y^м$ — равновесие при монополии.[77] Предположим, что выполнены условия C_1–C_3. Тогда

[77] Как нетрудно показать, тот же самый объем производства будет выбран, если олигополисты образуют картель (см. ниже).

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i > Y^* = \sum_{i=1}^{n} y_i^* > y^M$$

Доказательство.

Как было показано выше, равновесие Курно удовлетворяет условию

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\frac{Y^*}{n} - c = 0.$$

Как было доказано в главе о монополии, выполнение C$_1$–C$_3$ гарантирует, что $y^M > 0$, поэтому y^M удовлетворяет условию первого порядка

$$p(y^M) + p'(y^M)y^M - c = 0.$$

С другой стороны, при совершенной конкуренции, как известно, цена равна предельным издержкам:

$$p(\bar{Y}) - c = 0.$$

Вычитая из третьего соотношения первое, получим

$$p(\bar{Y}) - p(Y^*) = p'(Y^*)\frac{Y^*}{n}.$$

Поскольку правая часть соотношения отрицательна, а функция $p(\cdot)$ убывает, то

$$Y^* > \bar{Y}.$$

Предположим, что $y^M > Y^*$. Тогда увеличение выпуска одного из производителей (например, первого) на величину $Y^* - y^M$ приводит к росту суммарной прибыли (до монопольно высокой). Поскольку при этом прибыль остальных производителей может только уменьшиться, прибыль первого возрастает, что противоречит предположению о том, что Y^* — совокупный выпуск в равновесии Курно. ■

Рост выпуска с ростом числа участников

Теорема 23.
Предположим, что выполнены условия C$_1$–C$_3$ и, кроме того, функция $p(\cdot)$ непрерывно дифференцируема. Пусть Y_n^* — суммарный выпуск в равновесие Курно с n участниками. Тогда

$$lim_{n\to\infty} Y_n^* = \bar{Y}.$$

Доказательство.

Для любого Y_n^* выполняются соотношения (условия первого порядка)

$$p(Y_n^*) + p'(Y_n^*)\frac{Y_n^*}{n} - c = 0.$$

Предыдущая теорема гарантирует ограниченность последовательности Y_n^* ($Y_n^* \in (0, \bar{Y})$). Так как функция $p(\cdot)$ непрерывно дифференцируема, то из этого следует ограниченность $p'(Y_n^*)Y_n^*$. Отсюда

$$lim_{n\to\infty}[p'(Y_n^*)\frac{Y_n^*}{n}] = 0.$$

Следовательно,

$$lim_{n\to\infty} p(Y_n^*) = c. \quad ■$$

Свойства равновесия Курно в случае функций издержек общего вида

Вышеприведенные результаты получены при достаточно сильном предположении о функции издержек. Ниже будут приведены естественные обобщения полученных результатов при отказе от этого предположения.

Существование равновесия

Прежде обсудим условия на функции издержек и функции спроса, при которых равновесие Курно существует.

Теорема 24.
Предположим, что в модели Курно выполнены следующие условия:
1) функции издержек $c_j(y)$ дифференцируемы при всех возможных объемах выпуска (неотрицательных y),
2) обратная функция спроса $p(y)$ непрерывна и убывает при всех неотрицательных y,
3) функция $p(y + y')\cdot y$ вогнута по y при любом $y' \geqslant 0$,
4) функции издержек $c_j(y)$ выпуклы (функции предельных издержек не убывают)[78],

[78] Обычно условия 3) и 4) теоремы существования заменяют следующие условия Хана: $p'(Y) + p''(Y)y_j < 0$ и $p'(Y) - c_j''(y_j) < 0 \ \forall\ j, Y, y_j$ (Hahn, F. (1962) "The Stability of the Cournot Oligopoly Solution," *Review of Economic Studies*, **29**, 329-31). Заметим, что они также гарантирует строгую

5) существуют $\tilde{y}_j > 0$ $j = 1, ..., n$ такие, что $p(y_j) < c_j'(y_j)$ при $y_j \geqslant \tilde{y}_j$.
Тогда равновесие Курно $(y_1^*, ..., y_n^*)$ существует, причем $0 \leqslant y_j^* < \tilde{y}_j \; \forall j$.[79]

Доказательство.

Доказательство оставляется в качестве упражнения. Ниже приводится возможная схема такого доказательства.

1) Докажите, что при любых (разумных) ожиданиях относительно выпуска конкурентов ни одному из производителей не выгодно выбирать объем производства, превышающий объем $\tilde{y}_j$. Тем самым, выбор каждого участника может быть ограничен компактным множеством. Можно использовать тот же способ доказательства, что и для монополии. При этом аналогом совокупного излишка будут функции $\int_0^y p(t)dt - c_j(y) - c_j(0)$. При доказательстве удобно учитывать, что для каждой фирмы j суммарный выпуск других фирм Y_{-j} есть константа, поэтому задача максимизации прибыли по y_j сводится к максимизации прибыли по Y при ограничении $Y \geqslant Y_{-j}$.

2) Докажите непрерывность и вогнутость функции прибыли каждого участника при любых ожиданиях относительно выбора других.

3) Воспользуйтесь теоремой Нэша. ■

вогнутость функции прибыли и, таким образом, вместе с другими условиями теоремы — существование равновесия Курно. Анализ поведения олигополии в ситуации, когда выполнено условие Хана, оказывается достаточно простым и приводится в задачах. Условие 5) заменяет условие: существуют $\tilde{Y}$ такое, что $p(Y) = 0$ для всех $Y \geqslant \tilde{Y}$. В приводимых ниже доказательствах существования и свойств равновесия Курно акцент делается на свойствах равновесия и рационального поведения, которые можно рассматривать как аналоги выявленных предпочтений.

[79] Условия данной теоремы гарантируют нам существование равновесия Нэша-Курно в чистых стратегиях. Если мы откажемся от предположений 3)-4), то, применяя теорему Гликсберга:

> «Пусть $\langle I, \{X_i\}_I, \{u_i\}_I \rangle$ — игра m лиц в нормальной форме. Если для каждого i X_i — компактное выпуклое подмножество метрического пространства, а u_i — непрерывная функция, тогда в этой игре существует равновесие Нэша в смешанных стратегиях» —

(См. Glicksberg, I.L. (1952), "A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem with Application to Nash Equilibrium Points," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **38**,170-174, Рус. пер: И. Л. Гликсберг, «Дальнейшее обобщение теоремы Какутани о неподвижной точке с приложением к ситуациям равновесия в смысле Нэша», в сб. «Бесконечные антагонистические игры», под ред. Н. Н. Воробьева, Гос. изд. физ.-мат. лит-ры., М. 1963, стр. 493-503), можно доказать существование равновесия в смешанных стратегиях. При этом поменяется только вторая этап доказательства теоремы.

Сам факт существования равновесия, хоть и повышает доверие к модели Курно, но мало полезен для анализа олигополистического рынка. Без информации, характеризующей равновесие, модель Курно, как и любая модель, оказывалась бы мало пригодной. Следующие далее утверждения позволяют сравнить равновесие Курно с монопольным равновесием и равновесием в ситуации совершенной конкуренции.

Сравнение равновесия Курно с равновесием при совершенной конкуренции

Нижеследующие результаты дают сравнительную характеристику объемов производства в отрасли при разных типах ее организации.

Теорема 25.
(1) Предположим, что равновесие Курно, $(y_1^*, ..., y_n^*)$, и равновесие при совершенной конкуренции, $(\bar{y}_1, ..., \bar{y}_n)$, существуют, и обратная функция спроса $p(y)$ убывает. Тогда суммарный выпуск в равновесии Курно, $Y^* = \sum_{i=1}^n y_i^*$, не превышает суммарный выпуск в условиях совершенной конкуренции, $\bar{Y} = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i$.
(2) Если, кроме того, выполнены следующие условия:
- $\bar{Y} > 0$,
- обратная функция спроса, $p(y)$, и функции издержек, $c_j(y)$, $j = 1, ..., n$ дифференцируемы при всех неотрицательных y, причем $p'(Y^*) < 0$
- функции издержек, $c_j(y)$, выпуклы,

то Y^* меньше $\bar{Y}$.

Доказательство.

(1) Поскольку выпуск y_j^* максимизирует прибыль j-ого производителя в предположении, что суммарный объем производства остальных равен Y_{-j}^*, то должно выполнятся неравенство

$$p(Y^*)\,y_j^* - c_j(y_j^*) \geqslant p(Y_{-j}^* + \bar{y}_j)\,\bar{y}_j - c_j(\bar{y}_j).$$

С другой стороны, $\bar{y}_j$ дает j-му производителю максимум прибыли в предположении, что цена неизменна и равна $p(\bar{Y})$, поэтому

$$p(\bar{Y})\,\bar{y}_j - c_j(\bar{y}_j) \geqslant p(\bar{Y})\,y_j^* - c_j(y_j^*).$$

Если сложить эти два неравенства, то получается

$$p(Y^*)\,y_j^* + p(\bar{Y})\,\bar{y}_j \geqslant p(Y_{-j}^* + \bar{y}_j)\,\bar{y}_j + p(\bar{Y})\,y_j^*. \qquad (*)$$

Предположим, что существует такая фирма j, которая в равновесии Курно производила бы больше, чем в конкурентном равновесии:

$$y_j^* > \bar{y}_j.$$

При убывающей функции спроса из этого неравенства следует, что

$$p(Y_{-j}^* + \bar{y}_j) > p(Y^*).$$

Поскольку $\bar{y}_j \geqslant 0$, то из этого следует, что

$$p(Y_{-j}^* + \bar{y}_j)\,\bar{y}_j \geqslant p(Y^*)\,\bar{y}_j.$$

Сложив это неравенство с неравенством (*), получим

$$p(Y^*)\,y_j^* + p(\bar{Y})\,\bar{y}_j \geqslant p(Y^*)\,\bar{y}_j + p(\bar{Y})\,y_j^*$$

или

$$[p(Y^*) - p(\bar{Y})]\,(y_j^* - \bar{y}_j) \geqslant 0.$$

Поскольку мы предположили, что $y_j^* > \bar{y}_j$, то

$$p(Y^*) \geqslant p(\bar{Y}).$$

В силу убывания функции спроса это означает, что

$$Y^* \leqslant \bar{Y}.$$

С другой стороны, пусть наше предположение неверно, и для всех фирм выполнено $y_j^* \leqslant \bar{y}_j$. Суммируя по j, получаем, что $Y^* \leqslant \bar{Y}$
.

(2) Докажем, использовав дополнительные условия, что неравенство здесь строгое. Предположим, что это не так, и суммарные выпуски совпадают, т.е. $Y^* = \bar{Y}$.

Может быть только два случая: либо $y_j^* = \bar{y}_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$, либо $\bar{y}_j < y_j^*$ для некоторого j. И в том и в другом случае существует производитель j, для которого $y_j^* > 0$ и $\bar{y}_j \leqslant y_j^*$.

Для этого производителя дифференциальная характеристика равновесия Курно имеет вид

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\,y_j^* = c_j'(y_j^*).$$

Из выпуклости функции издержек следует, что

$$c_j'(\bar{y}_j) \leqslant c_j'(y_j^*).$$

Таким образом

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\,y_j^* \geqslant c_j'(\bar{y}_j) = p(\bar{Y}).$$

С учетом того, что $Y^* = \bar{Y}$, имеем $p(Y^*) = p(\bar{Y})$, откуда

$$p'(Y^*)\,y_j^* \geqslant 0,$$

что противоречит убыванию функции спроса. Таким образом $Y^* < \bar{Y}$.

■

Симметричность равновесия, положительность выпусков и единственность

В частном случае, когда издержки у всех производителей одинаковы, т.е. $c_j(y) = c(y)$, можно доказать, что в равновесии выпуски всех производителей одинаковы (равновесие будет симметричным), и положительны. Кроме того, в предположении одинаковости издержек несложно доказать единственность равновесия.

Теорема 26.

Предположим, что равновесие Курно $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$ существует и выполнены следующие условия:

1) издержки у всех производителей одинаковы, $c_j(y) = c(y), j = 1, \ldots, n$, причем $c(y)$ — выпуклая функция;

2) обратная функция спроса, $p(y)$, и функция издержек, $c(y)$, дифференцируемы;

3) $p(0) > c'(0)$;

4) $p(y)$ убывает.

Тогда верно следующее:

(i) Равновесие симметрично:

$$y_j^* = \frac{Y^*}{n}\ \forall j = 1, \ldots, n.$$

и каждая фирма выпускает в равновесии положительное количество продукции, т.е.

$$y_j^* > 0, \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

(ii) Если, кроме того, функция $p(y)y$ вогнута, то равновесие единственно.

Доказательство.

(i) Покажем, что если функции издержек одинаковы, то каждый производитель в равновесии Курно выпускает одинаковое количество продукции. Действительно, предположим, что существуют производители j и k, такие что $y_j^* > y_k^*$. Тогда из условий первого порядка следует, что

$$p'(Y^*)\,(y_k^* - y_j^*) \leqslant c'(y_k^*) - c'(y_j^*).$$

Но левая часть данного соотношения положительна, а правая — неположительна. Таким образом, выпуски всех производителей совпадают:

$$y_j^* = \frac{Y^*}{n}\,\forall j.$$

Суммарный выпуск отрасли, Y^*, не может быть равным нулю. В противном случае из условия первого порядка любого из участников следует, что

$$p(0) - c'(0) \leqslant 0,$$

а это противоречит условию теоремы. Таким образом, $y_j^* > 0, \forall j$.

(ii) Дифференциальную характеристику равновесия Курно можно в данном случае переписать в виде

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\,\frac{Y^*}{n} - c'(\frac{Y^*}{n}) = 0,$$

или

$$\frac{n-1}{n}p(Y^*) + \frac{1}{n}[p(Y^*) + p'(Y^*)Y^*] - c'(\frac{Y^*}{n}) = 0.$$

Из вогнутости функции $p(y)y$ следует, что ее производная $p(y) + p'(y)y$ не возрастает. Аналогичным образом, из выпуклости функции $c(y)$ следует неубывание предельных издержек. Учитывая убывание обратной функции спроса $p(y)$, получаем, что выражение в левой части дифференциальной характеристики убывает. Отсюда следует единственность объема Y^*, удовлетворяющего данному уравнению. ■

Нижеприведенный пример показывает, что в случае, если функции издержек олигополистов не совпадают, то нельзя гарантировать симметричность равновесия и положительность выпусков; объемы выпуска в модели Курно у некоторых участников могут быть и нулевыми.

Пример 12.

Пусть в дуопольной отрасли $p(y) = 4 - 4y$, $c_1(y_1) = 2y_1^2$, $c_2(y_2) = 2y_2^2 + 3y_1$. Легко проверить, что равновесием Курно в этом случае будет точка $y_1 = 1/3$, $y_2 = 0$. ⇦

Еще один пример показывает, что условие дифференцируемости функции спроса важно для симметричности и единственности равновесия Курно.

Пример 13.

Пусть в дуопольной отрасли

$$p(y) = \begin{cases} \dfrac{7-y}{6}, & y \leqslant 1, \\ 7 - 6y, & y \geqslant 1 \end{cases}$$

и $c_j(y) = y^2/4$, $j = 1, 2$. В такой отрасли помимо симметричного равновесия, $(1/2, 1/2)$, существует бесконечно много асимметричных равновесий, в которых суммарное производство равно 1, например, $(1/3, 2/3)$.[80] ⇦

Поведение равновесия в модели Курно при росте количества фирм

Тот, кто изучал начальный курс микроэкономики, мог встретить неформальное утверждение о том, что если в отрасли достаточно много примерно одинаковых предприятий, так что доля отдельного предприятия в общем выпуске отрасли мала, то каждое предприятие можно рассматривать как не обладающего рыночной властью (принимающего цены как данные[81]), и ситуация в отрасли может быть довольно точно описана моделью совершенной конкуренции. Смысл утверждения состоит в том, что с ростом количества участников олигополии отрасль в некотором смысле все более приближается к конкурентной. Докажем вари-

---

[80] Заметим, что если выполнены условия теоремы существования (Теорема 24), то при одинаковости функций издержек *всегда* существует симметричное равновесие. В силу симметричности задач олигополистов мы имеем одинаковые отображения отклика $R(y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, y_n)$. Предположим, что $y_k = y_s$, где $k, s \neq i$ и рассмотрим отображение $R(y, ..., y, y, y)$. Оно по теореме Какутани (с помощью которой доказывается теорема Нэша) имеет неподвижную точку, что и доказывает существование симметричного равновесия.

[81] англ. *price-taker*

ант этого утверждения в частном случае, когда в модели Курно издержки у всех производителей одинаковы, т.е. $c_j(y) = c(y)$.

Теорема 27.
Предположим, что равновесие Курно, $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$, и равновесие при совершенной конкуренции, $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$, существуют при любом $n \geqslant 2$, и выполнены следующие условия:
1) $c_j(y) = c(y)$, $j = 1, \ldots, n$, причем $c(y)$ — выпуклая функция;
2) обратная функция спроса $p(y)$ строго убывает, а функция $p(y)\,y$ вогнута[82];
3) обратная функция спроса, $p(y)$, и функция издержек, $c(y)$, непрерывно дифференцируемы при всех неотрицательных y;
4) $c'(0) > 0$, $p(0) > c'(0)$ и существует величина Y° такая, что $p(Y^\circ) = c'(0)$.
Тогда
(i) суммарный выпуск в равновесии Курно с n участниками, Y_n^*, растет с ростом n и меньше величины Y°;
(ii) выпуск отдельного участника, Y_n^*/n, падает с ростом n, причем $lim_{\,n\to\infty} Y_n^*/n = 0$;
(iii) прибыль отдельного участника, $p(Y_n^*)\dfrac{Y_n^*}{n} - c(\dfrac{Y_n^*}{n})$, падает с ростом n;
(iv) $\lim_{n\to\infty} Y_n^* = \lim_{n\to\infty} \bar{Y}_n = Y^\circ$,
где $\bar{Y}_n$ — суммарный выпуск тех же предприятий в условиях совершенной конкуренции.

Доказательство.
Как доказано выше, при сделанных предположениях каждый из участников в равновесии Курно будет выпускать положительное и одинаковое количество продукции:
$$y_j^* = \frac{Y^*}{n}\ \forall j,$$
и дифференциальную характеристику равновесия Курно можно в данном случае переписать в виде

[82] Эта величина равна суммарной выручке предприятий отрасли от продажи продукции в объеме y.

$$p(Y^*) + p'(Y^*)\,\frac{Y^*}{n} = c'(\frac{Y^*}{n}).$$
Решение этого уравнение будет единственным (по Теореме 26) равновесием Курно.

(i) Учитывая это соотношение, запишем дифференциальные характеристики равновесий Курно в ситуации с $n+1$ и n олигополистами:
$$p(Y_{n+1}^*) + p'(Y_{n+1}^*)\,\frac{Y_{n+1}^*}{n+1} = c'(\frac{Y_{n+1}^*}{n+1}).$$
и
$$p(Y_n^*) + p'(Y_n^*)\,\frac{Y_n^*}{n} = c'(\frac{Y_n^*}{n}).$$
Используя эти соотношения, мы можем показать, что суммарное выпуск в олигополистической отрасли возрастает с ростом числа олигополистов.

Предположим, обратное: существует такое n, что $Y_{n+1}^* \leqslant Y_n^*$. При этом из убывания обратной функции спроса следует, что
$$np(Y_{n+1}^*) \geqslant np(Y_n^*) \quad \text{и} \quad 0 > p'(Y_n^*)\,\frac{Y_n^*}{n}.$$
Из вогнутости функции $p(y)\,y$ следует, что ее производная не возрастает, т.е.
$$p(Y_{n+1}^*) + p'(Y_{n+1}^*)\,Y_{n+1}^* \geqslant p(Y_n^*) + p'(Y_n^*)\,Y_n^*.$$
Сложив три последние неравенства, получим
$$np(Y_{n+1}^*) + p(Y_{n+1}^*) + p'(Y_{n+1}^*)\,Y_{n+1}^* > np(Y_n^*) + p'(Y_n^*)\,\frac{Y_n^*}{n} + p(Y_n^*) + p'(Y_n^*)\,Y_n^*.$$
или
$$(n+1)[p(Y_{n+1}^*) + p'(Y_{n+1}^*)\,\frac{Y_{n+1}^*}{n+1}] > (n+1)[p(Y_n^*) + p'(Y_n^*)\,\frac{Y_n^*}{n}].$$
Выражения в квадратных скобках представляют собой левые части условий первого порядка для Y_{n+1}^* и Y_n^* соответственно, поэтому
$$c'(\frac{Y_{n+1}^*}{n+1}) > c'(\frac{Y_n^*}{n}).$$
Из выпуклости функции издержек следует, что предельные издержки растут, поэтому данное неравенство может быть выполнено только если
$$\frac{Y_{n+1}^*}{n+1} > \frac{Y_n^*}{n},$$

но это противоречит исходному предположению о том, что $Y^*_{n+1} \leqslant Y^*_n$. Таким образом, мы доказали, что последовательность объемов производства Y^*_n возрастает по n.[83]

Чтобы доказать, что $Y^*_n < Y^\circ$ достаточно доказать, что $\bar{Y}_n \leqslant Y^\circ$, поскольку, согласно Теореме 25, $Y^*_n < \bar{Y}_n$.

Воспользовавшись дифференциальной характеристикой конкурентного равновесия, возрастанием предельных издержек и определением величины Y°, запишем

$$p(\bar{Y}_n) = c'(\frac{\bar{Y}_n}{n}) \geqslant c'(0) = p(Y^\circ).$$

Поскольку, по предположению, обратная функция спроса убывает, это означает, что $\bar{Y}_n \leqslant Y^\circ$.

(ii) Мы хотим доказать, что Y^*_n/n является убывающей последовательностью.

Поскольку $p(y)\,y$ — вогнутая функция, то она лежит под своей касательной. Поэтому

$$p(Y^*_{n+1})Y^*_{n+1} \leqslant p(Y^*_n)Y^*_n + [p(Y^*_n) + p'(Y^*_n)Y^*_n](Y^*_{n+1} - Y^*_n)$$

или

$$[p(Y^*_{n+1}) - p(Y^*_n)]Y^*_{n+1} \leqslant p'(Y^*_n)Y^*_n(Y^*_{n+1} - Y^*_n).$$

Поскольку суммарный выпуск положителен, то это неравенство можно переписать в виде

$$\frac{n+1}{n}[p(Y^*_{n+1}) - p(Y^*_n)] \leqslant (n+1)\frac{Y^*_{n+1} - Y^*_n}{Y^*_{n+1}}p'(Y^*_n)\frac{Y^*_n}{n}. \qquad (*)$$

Пусть доказываемое неверно и для какого-то n выполнено

$$\frac{Y^*_{n+1}}{n+1} \geqslant \frac{Y^*_n}{n},$$

т.е.

$$(n+1)\frac{Y^*_{n+1} - Y^*_n}{Y^*_{n+1}} \geqslant 1.$$

Из (*) и последнего неравенства следует в силу того, что $p'(Y^*_n) < 0$, что

$$\frac{n+1}{n}[p(Y^*_{n+1}) - p(Y^*_n)] \leqslant p'(Y^*_n)\frac{Y^*_n}{n},$$

поскольку $p'(Y^*_n) < 0$.

Так как $Y^*_{n+1} > Y^*_n$, то из убывания обратной функции спроса при $n \geqslant 2$ следует, что

$$[p(Y^*_{n+1}) - p(Y^*_n)]\Big(n - \frac{n+1}{n}\Big) < 0.$$

Из вогнутости функции $p(y)\,y$ следует, что ее производная не возрастает, т.е. при $Y^*_{n+1} > Y^*_n$ выполнено

$$p(Y^*_{n+1}) + p'(Y^*_{n+1})\,Y^*_{n+1} \leqslant p(Y^*_n) + p'(Y^*_n)\,Y^*_n.$$

Складывая три последние неравенства, получим, что

$$np(Y^*_{n+1}) + p(Y^*_{n+1}) + p'(Y^*_{n+1})\,Y^*_{n+1} < np(Y^*_n) + p'(Y^*_n)\frac{Y^*_n}{n} + p(Y^*_n) + p'(Y^*_n)\,Y^*_n.$$

Приводя подобные и разделив на $n+1$, получим

$$p(Y^*_{n+1}) + p'(Y^*_{n+1})\frac{Y^*_{n+1}}{n+1} < p(Y^*_n) + p'(Y^*_n)\,\frac{Y^*_n}{n}.$$

Учитывая дифференциальные характеристики равновесия Курно, это означает, что

$$c'\left(\frac{Y^*_{n+1}}{n+1}\right) < c'\left(\frac{Y^*_n}{n}\right).$$

Из выпуклости функции издержек получаем требуемое

$$\frac{Y^*_{n+1}}{n+1} < \frac{Y^*_n}{n}.$$

Далее, убывание выпуска отдельного участника до нуля, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Y^*_n}{n} = 0,$$

следует из того, что суммарный выпуск Y^*_n ограничен сверху величиной Y°.

(iii) Так как спрос убывает, то при $Y^*_{n+1} > Y^*_n$

$$p(Y^*_{n+1})\,Y^*_{n+1} < p(Y^*_n)\,Y^*_{n+1}.$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$p(Y^*_{n+1})\frac{Y^*_{n+1}}{n+1} < p(Y^*_n)\frac{Y^*_n}{n} + p(Y^*_n)\left(\frac{Y^*_{n+1}}{n+1} - \frac{Y^*_n}{n}\right).$$

С другой стороны, функция издержек, как выпуклая функция, должна лежать выше своей касательной, поэтому

$$c(\frac{Y^*_{n+1}}{n+1}) \geqslant c(\frac{Y^*_n}{n}) + c'(\frac{Y^*_n}{n})\left(\frac{Y^*_{n+1}}{n+1} - \frac{Y^*_n}{n}\right).$$

Комбинируя два неравенства, получим, что

$$\Pi_{n+1} < \Pi_n - \left(c'(\frac{Y^*_n}{n}) - p(Y^*_n)\right)\left(\frac{Y^*_{n+1}}{n+1} - \frac{Y^*_n}{n}\right),$$

где мы обозначили через Π_n прибыль отдельного участника в отрасли с n фирмами в точке равновесия Курно:

$$\Pi_n = p(Y^*_n)\frac{Y^*_n}{n} - c(\frac{Y^*_n}{n}).$$

Из условий первого порядка

[83] Величина Y^*_1 представляет собой монопольный выпуск, т.е. $Y^*_1 = y^M$. Из доказанного следует, что $Y^*_n > y^M$ при всех $n \geqslant 1$.

$$c'(\frac{Y_n^*}{n}) - p(Y_n^*) = p'(Y_n^*)\frac{Y_n^*}{n} < 0.$$

Поскольку $\frac{Y_{n+1}^*}{n+1} < \frac{Y_n^*}{n}$, то $\Pi_{n+1} < \Pi_n$.

(iv) Запишем еще раз дифференциальную характеристику равновесия Курно:

$$p(Y_n^*) + p'(Y_n^*)\frac{Y_n^*}{n} = c'(\frac{Y_n^*}{n}).$$

Здесь Y_n^* лежит в интервале $[0, Y^\circ]$. Так как производная обратной функции спроса непрерывна, то первый сомножитель во втором слагаемом — величина ограниченная, на этом интервале она достигает своего максимального значения. Делая оценки, мы можем первый сомножитель заменить его максимальным значением. Второй сомножитель представляет собой величину, которая убывает до нуля при $n \to \infty$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} p'(Y_n^*)\frac{Y_n^*}{n} = 0.$$ [84]

Так как Y_n^*/n стремится к нулю, то в силу непрерывной дифференцируемости функции издержек

$$c'(\frac{Y_n^*}{n}) \to c'(0).$$

Таким образом,

$$p(Y_n^*) \to c'(0)$$

Вспоминая, что $c'(0) = p(Y^\circ)$, получим из непрерывности и убывания обратной функции спроса, что

$$Y_n^* \to Y^\circ.$$

Поскольку конкурентный объем производства, $\bar{Y}_n$, лежит между Y_n^* и Y°, то он стремится к тому же пределу:

$$\bar{Y}_n \to Y^\circ.$$

■

Уменьшение монопольной власти при росте числа конкурентов — это довольно реалистическая, согласующаяся с нашим представлением о монопольной власти картина. Когда производителей много, то каждый из них оказывает малое влияние на рынок, на цену, по которой может продаваться продукция, и поэтому сама модель Курно как модель, описывающая феномен несовершенной конкуренции, оказывается привлекательной.

[84] Т.о. мы видим, что при большом количестве олигополистов, $p(Y_n^*) \approx c'(Y_n^*/n)$, т.е. цена, по которой они продают продукцию, близка к предельным издержкам.

Следующий пример иллюстрирует приведенные выше утверждения в случае линейной функции спроса и постоянных предельных издержек.

Пример 14.

Пусть обратная функция спроса линейна: $p(y) = a - by$, а функции издержек имеют вид $c_j(y_j) = cy_j$ $(j = 1,..,n)$, так что каждая фирма максимизирует

$$\Pi_j = (a - bY)\,y_j - cy_j.$$

Условия первого порядка максимума прибыли имеет вид

$$a - bY^* - b\,y_j = c.$$

Просуммировав по j, получим

$$na - nbY^* - bY^* = nc.$$

Таким образом, равновесный объем выпуска равен

$$Y^* = \frac{n\,(a-c)}{(n+1)\,b}.$$

В частности, при дуополии

$$Y^* = \frac{2(a-c)}{3b}.$$

Равновесная цена равна

$$p^* = a - b\frac{n\,(a-c)}{(n+1)\,b} = \frac{a+n\,c}{n+1} = c + \frac{b}{n+1}\frac{a-c}{b}$$

Выпуск в случае совершенной конкуренции был бы равен

$$\bar{Y} = \frac{a-c}{b}.$$

То есть, как и следует из теории, $Y^* \leqslant \bar{Y}$. При увеличении количества фирм в олигополии суммарный объем производства все больше сближается с объемом при совершенной конкуренции:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\,(a-c)}{(n+1)\,b} = \frac{a-c}{b},$$

а цена стремится к предельным издержкам:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a+n\,c}{n+1} = c.$$ ⇦

Равновесие Курно и благосостояние

Рассмотрим олигопольную отрасль, характеристики которой удовлетворяют условиям Теоремы 26, в том числе, все фирмы имеют одинаковые функции издержек, $c(\cdot)$. Как было доказано в

Теореме 26, в такой отрасли существует симметричное равновесие Курно, причем объем производства положителен:

$$y_j^* = \frac{Y^*}{n} > 0 \ \forall j.$$

Проанализируем это равновесие с точки зрения благосостояния общества.

Предположим, что спрос на продукцию олигополистов в модели Курно получается как результат выбора репрезентативного потребителя с квазилинейной функцией полезности:

$$u(x, z) = v(x) + z.$$

Напомним, что в этом случае для положительных x выполнено соотношение (при отсутствии ограничений на знак z или достаточно больших доходах потребителя)

$$p(x) = v'(x).$$

Индикатор благосостояния имеет вид

$$W(Y) = v(Y) - n\,c(\frac{Y}{n}),$$

а ее производная равна

$$W'(Y) = v'(Y) - c'(\frac{Y}{n}) = p(Y) - c'(\frac{Y}{n}).$$

В равновесии Курно

$$p'(Y^*)\frac{Y^*}{n} + p(Y^*) \ - c'(\frac{Y^*}{n}) = 0,$$

откуда видна его неоптимальность с точки зрения благосостояния:

$$W'(Y^*) = -p'(Y^*)\frac{Y^*}{n} > 0.$$

Отсюда следует, что если немного увеличить суммарный выпуск по сравнению с Y^*, то благосостояние общества возрастет.

Рассмотрим функцию

$$\breve{W}(Y, n) = \frac{1}{n}\,(p(Y)Y - n\,c(\frac{Y}{n})) + \frac{n-1}{n}(v(Y) - n\,c(\frac{Y}{n})).$$

Ее можно проинтерпретировать, как взвешенное среднее совокупной прибыли и индикатора благосостояния.[85] Покажем, что равновесный объем продаж олигополистического рынка в модели Курно максимизирует данную функцию. Производная этой функции равна

[85] Эта интерпретация предложена в статье Bergstrom, T.C., and H. Varian (1985) "Two Remarks on Cournot Equilibria," *Economic Letters*, **19**, 5-8. К сожалению, данная интерпретация не распространяется на случай неодинаковых функций издержек.

$$\breve{W}'(Y, n) = \frac{1}{n}\,(p'(Y)Y + p(Y) - c'(\frac{Y}{n})) + \frac{n-1}{n}(v'(Y) \ - c'(\frac{Y}{n})) =$$

$$= \frac{1}{n}\,(p'(Y)Y + p(Y) - c'(\frac{Y}{n})) + \frac{n-1}{n}(p(Y) - c'(\frac{Y}{n})) =$$

$$= p'(Y)\frac{Y}{n} + p(Y) \ - c'(\frac{Y}{n}).$$

Как мы видели, в равновесии Курно ($Y = Y^*$) данная величина равна нулю. Если предположить, как и ранее, вогнутость функции $p(Y)Y$, убывание функции спроса и выпуклость издержек, то производная функции $\breve{W}(Y,\ n)$ убывает по Y, поэтому $\breve{W}(Y,\ n)$ строго вогнута по Y, откуда следует, что в точке Y^* достигается ее (единственный) максимум.

При $n \to \infty$ доля первого слагаемого в функции $\breve{W}$ стремиться к нулю, а доля второго слагаемого — к единице, так что функция $\breve{W}$ все больше сближается с индикатором благосостояния. Этим определяется тот факт, что при большом количестве фирм равновесие Курно становится похожим на конкурентное равновесие, в котором, как мы знаем, при некоторых условиях индикатор благосостояния достигает максимума.

Модель Курно и количество фирм в отрасли

Выше, рассматривая поведение выпуска как олигополистического рынка в целом, так и отдельных олигополистов, мы не касались вопроса положительности прибыли, и по этой причине наш анализ поведения этих характеристик нельзя считать вполне удовлетворительным. Возможно, он приемлем для краткосрочной перспективы, но в долгосрочной перспективе анализ должен быть пересмотрен. Любой олигополист сталкивающийся с отрицательной прибылью на некотором рынке при оптимальном поведении вероятнее всего будет рассматривать вопрос об уходе с этого рынка. Аналогично, любой потенциальный производитель решающий вопрос о входе в олигополистическую отрасль, оценивает возможность получения им положительной (неотрицательной) прибыли в случае его входа в отрасль. Как нетрудно догадаться, эти вопросы имеют одну и ту же природу и в простейшей модели, рассматриваемой нами далее, тесно связаны с величиной постоянных (фиксированных) издержек и количеством фирм уже вошедших и действующих в отрасли.

Рассмотрим олигопольную отрасль, в которой у всех олигополистов одинаковые функции издержек. Мы будем предполагать, что выполнены все условия Теоремы 27. Удобно представить издержки каждой фирмы как сумму постоянных издержек, $f > 0$, и переменных издержек, $\tilde{c}(y)$, где $\tilde{c}(0) = 0$:

$$c(y) = f + \tilde{c}(y).$$

Пусть $y^{м}$ максимизирует прибыль монополиста. Мы должны предположить, что постоянные издержки таковы, что монополист действуя на этом рынке, получит неотрицательную прибыль

$$\Pi(y^{м}) \geqslant 0.$$

Другими словами, постоянные издержки должны быть не слишком высоки: они не должны превышать прибыль монополиста без учета постоянных издержек:

$$f \leqslant \tilde{\Pi}(y^{м}),$$

где $\tilde{\Pi}(y) = \Pi(y) - f$. (Если это условие не выполнено, то рынок не может существовать, то есть не найдется производителей, желающих производить продукцию на этом рынке.)

Через Π_n будем, как и ранее, обозначать прибыль, получаемую отдельной фирмой в отрасли, состоящей из n фирм, а через $\tilde{\Pi}_n$ — прибыль без учета постоянных издержек. При этом $\tilde{\Pi}_1$ — прибыль монополии без учета постоянных издержек.

Как мы доказали ранее, Π_n (а, следовательно, и $\tilde{\Pi}_n$) представляет собой убывающую последовательность. При сделанных нами ранее предположениях прибыль $\tilde{\Pi}_n$ положительна (в том числе, $\tilde{\Pi}_1 > 0$) и при увеличении n стремится к 0 ($\tilde{\Pi}_n \to 0$). Читателю предлагается установить этот факт самостоятельно.

Из убывания и стремления к нулю очевидно, что при $0 < f \leqslant \tilde{\Pi}_1$ существует единственное целое количество фирм в отрасли $n(f)$ такое, что

$$\tilde{\Pi}_{n(f)} \geqslant f > \tilde{\Pi}_{n(f)+1}$$

или

$$\Pi_{n(f)} \geqslant 0 > \Pi_{n(f)+1}.$$

Отметим, что это число единственно в силу строгого убывания прибыли при росте числа олигополистов. Таким образом, для каждого f из промежутка $(0, \tilde{\Pi}_1]$ определена функция $n(f)$. Эта функция сопоставляет каждому значению постоянных издержек максимально возможное число фирм, при котором каждая из них получает неотрицательную прибыль.

Докажем, что эта функция не возрастает по f и не ограничена сверху. Пусть $f' > f''$. Тогда по определению функции $n(f)$ мы имеем, что $\tilde{\Pi}_{n(f')} \geqslant f' > f'' > \tilde{\Pi}_{n(f'')+1}$, т.е. $\tilde{\Pi}_{n(f')} > \tilde{\Pi}_{n(f'')+1}$ из убывания прибыли по n мы имеем, что $n(f'') + 1 > n(f')$ или $n(f'') \geqslant n(f')$. Неограниченность сверху следует из того факта, что $n(\tilde{\Pi}_N) = N$. Сопоставляя эти два свойства функции $n(\cdot)$, получим, что

$$\lim_{f \to 0} n(f) = \infty.$$

Таким образом, чем меньше постоянные издержки, тем больше фирм может войти в отрасль, и в пределе функционирование отрасли все более приближается к ситуации совершенной конкуренции (в силу Теоремы 27).

Мы представили количество олигополистов на рынке как функцию от постоянных издержек. Естественно также рассмотреть вопрос об оптимальном с точки зрения общества числе олигополистов.[86] Это число должно максимизировать совокупный излишек

$$W(n) = \int_0^{Y^*_n} p(x)dx - nc\left(\frac{Y^*_n}{n}\right).$$

Пусть $\hat{n}$ — оптимальное с точки зрения благосостояния количество фирм в олигополистической отрасли.

Следующие рассуждения показывают, что $n(f) > \hat{n} - 1$. По определению $\hat{n}$ мы имеем, что $W(\hat{n}) \geqslant W(\hat{n} - 1)$, или

$$\int_0^{Y^*_{\hat{n}}} p(x)dx - \hat{n}c\left(\frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}}\right) \geqslant \int_0^{Y^*_{\hat{n}-1}} p(x)dx - (\hat{n} - 1)c\left(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1}\right)$$

или

$$-c\left(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1}\right) \geqslant -\int_{Y^*_{\hat{n}-1}}^{Y^*_{\hat{n}}} p(x)dx - \hat{n}\left[c\left(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1}\right) - c\left(\frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}}\right)\right].$$

Прибавив к обеим частям $p(Y^*_{\hat{n}-1})\dfrac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1}$, получим

$$\Pi_{\hat{n}-1} \geqslant p(Y^*_{\hat{n}-1})\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1} - \int_{Y^*_{\hat{n}-1}}^{Y^*_{\hat{n}}} p(x)dx - \hat{n}\left[c\left(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1}\right) - c\left(\frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}}\right)\right).$$

Так как обратная функция спроса убывает, то

$$\int_{Y^*_{\hat{n}-1}}^{Y^*_{\hat{n}}} p(x)dx < \int_{Y^*_{\hat{n}-1}}^{Y^*_{\hat{n}}} p(Y^*_{\hat{n}-1})dx = p(Y^*_{\hat{n}-1})(Y^*_{\hat{n}} - Y^*_{\hat{n}-1})$$

---

[86] Следующий далее анализ основывается на статье Mankiw, N.G., M.D. Whinston (1986) "Free Entry and Social Inefficiency," *Rand Journal of Economics*, **17**, 48-58.

Таким образом, имеем

$$\Pi_{\hat{n}-1} > p(Y^*_{\hat{n}-1})\,(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1} - Y^*_{\hat{n}} + Y^*_{\hat{n}-1}) - \hat{n}\,[c(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1}) - c(\frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}})] =$$

$$= \hat{n}\,p(Y^*_{\hat{n}-1})\,(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1} - \frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}}) - \hat{n}\,[c(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1}) - c(\frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}})].$$

В силу выпуклости функции издержек $c(\cdot)$ имеем, что

$$c(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1}) - c(\frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}}) \leqslant c'(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1})\,(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1} - \frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}}).$$

Воспользовавшись этим неравенством, получим

$$\Pi_{\hat{n}-1} > \hat{n}\,p(Y^*_{\hat{n}-1})\,(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1} - \frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}}) - \hat{n}\,c'(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1})\,(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1} - \frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}}) =$$

$$= \hat{n}\,(p(Y^*_{\hat{n}-1}) - c'(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1}))(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1} - \frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}}).$$

Из условий первого порядка

$$\Pi_{\hat{n}-1} > -\hat{n}\,p'(Y^*_{\hat{n}-1})\,\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1}\,(\frac{Y^*_{\hat{n}-1}}{\hat{n}-1} - \frac{Y^*_{\hat{n}}}{\hat{n}}) > 0.$$

Таким образом мы получили, что

$$\Pi_{\hat{n}-1} > 0.$$

Пусть, как и выше, $n(f)$ — количество фирм в отрасли при постоянных издержках f. По определению $0 > \Pi_{n(f)+1}$.

Таким образом, $\Pi_{\hat{n}-1} > \Pi_{n(f)+1}$. В силу строгого убывания прибыли по числу фирм, имеем

$$\hat{n} - 1 < n(f) + 1$$

или

$$n(f) \geqslant \hat{n} - 1.$$

Это означает, что число фирм в отрасли, $n(f)$, не может быть меньше оптимального числа фирм, $\hat{n}$, более чем на 1 фирму. Приведенный ниже пример иллюстрирует случай, когда оптимальное с точки зрения общественного благосостояния количество фирм в отрасли больше, чем при свободном входе для модели Курно.

Пример 15 (продолжение Примера 14).

Для рассмотренного случая, как не трудно получить, прибыль каждого олигополиста равна

$$\Pi_j\,(n) = \frac{(a-c)^2}{b}\cdot\frac{1}{(n+1)^2} - F.$$

Индикатор благосостояния в зависимости от n равен

$$W(n) = \frac{(a-c)^2}{2b} - \frac{1}{2(n+1)^2}\,\frac{(a-c)^2}{b} - nF.$$

Легко проверить, что для данного примера $n(F) = \left[\frac{a-c}{\sqrt{bF}}\right] - 1$, где $[\cdot]$ – оператор взятия целой части. В случае если $a = 28$, $b = 10$, $c = 10$, $F = 10$ легко проверить что $n(F) = 0.$ Для этих значений параметров значение индикатора благосостояния при n принимающих значения от 0 до 2 равны соответственно $W(0) = 0$, $W(1) = \frac{172}{80}$, $W(2) = -\frac{56}{10}$. Откуда следует, что $\hat{n} = 1$ – точка локального максимума. Непосредственным рассмотрением графика функции $W(n)$ убеждаемся, что $\hat{n} = 1$ – будет глобальным максимумом этой функции (после $n = 2$ эта функция начинает убывать).

⇦

Задачи

1. Покажите, что в случае внутреннего равновесия

а) индекс Лернера для отдельного олигополиста,

$$\frac{p - c'_j}{p},$$

прямо пропорционален его доле (δ_j) в суммарном выпуске и обратно пропорционален эластичности спроса;

б) средневзвешенный (с весами δ_j) индекс Лернера прямо пропорционален индексу Герфиндаля и обратно пропорционален эластичности спроса.

Индекс концентрации Герфиндаля определяется как

$$H = \sum \delta_j^2.$$

в) Докажите, что при данном количестве фирм в отрасли индекс Герфиндаля минимален в симметричном равновесии.

г) Рассмотрите симметричные равновесия в «симметричной» отрасли с постоянной эластичностью спроса. Объясните, почему средний индекс Лернера обратно пропорционален количеству олигополистов.

2. Докажите, что в равновесии Курно прибыль любой фирмы ниже, чем в случае, когда эта фирма является монополистом на том же рынке. (Имеется в виду нетривиальное равновесие Курно, когда хотя бы одна другая фирма имеет ненулевой объем производства.)

3. Докажите существование равновесия в модели Курно, используя приведенные в тексте указания.

4. Докажите, что если функция спроса убывает и вогнута, а функция издержек выпукла, обе они дважды непрерывно дифференцируемы, то выполняется следующее условие (условие Хана)

$$p'(Y) + p''(Y)\, y_j < 0 \text{ и } p'(Y) - c_j''(y_j) < 0 \;\forall\, j, Y, y_j.$$

5. Докажите, что если обратная функция спроса убывает и вогнута, то отображение отклика каждого производителя не возрастает, т.е. если $Y_{-j}^1 < Y_{-j}^2$, то для любых $y_j^1 \in R_j(Y_{-j}^1)$ и $y_j^2 \in R_j(Y_{-j}^2)$ выполнено $y_j^1 \geqslant y_j^2$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что

$$\Pi_j(Y_{-j}^1, y_j^1) \geqslant \Pi_j(Y_{-j}^1, y_j^2) \text{ и } \Pi_j(Y_{-j}^2, y_j^2) \geqslant \Pi_j(Y_{-j}^2, y_j^1).$$

Предположите противное ($y_j^1 < y_j^2$) и используйте определение вогнутости функции.

6. Предположим, что обратная функция спроса $p(y)$ и функция издержек $c_j(y)$ дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условию:

$$p'(Y) + p''(Y)\, y_j < 0 \text{ и } p'(Y) - c_j''(y_j) < 0 \;\forall\, j, Y, y_j. \qquad (*)$$

Докажите что при этих предположениях существует единственное равновесие Курно, а если, кроме того, функции издержек всех производителей одинаковы, это равновесие симметрично, т.е. $y_j^* = y_i^* \;\forall\, j, i$

Указание: Рассмотрите функции двух переменных

$$T_j(Y, y_j) = p(Y) + p'(Y)\, y_j$$

Заметим, что если $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$ — равновесие Курно, то

$$T_j(Y^*, y_j^*) \leqslant 0,$$

причем

$$T_j(Y^*, y_j^*) = 0, \text{ если } y_j^* > 0,$$

где $Y^* = \sum_j y_j^*$.

(1) Покажите, что в условиях (*) функции $T_j(Y^*, y_j^*)$ монотонно убывают по обеим переменным. Обозначим это предположение (**).

(2) Пусть существуют два равновесия Курно, такие что для суммарных объемов производства выполнено $Y^1 \geqslant Y^2$. Докажите от противного, используя (**), что $y_j^1 \leqslant y_j^2 \;\forall j$. Таким образом, суммарный объем производства в двух равновесиях Курно должен совпадать. Рассмотрите случай $Y^1 = Y^2$ и докажите, что $y_j^1 = y_j^2 \;\forall j$.

(3) Докажите симметричность равновесия.

7. Пусть так же, как и в предыдущей задаче, выполнено предположение (**). Рассмотрите внутренние равновесия Курно при n и $n+1$ участниках. Покажите, что $Y_{n+1}^* > Y_n^*$ и $y_{j,n+1}^* < y_{j,n}^*$.

8. Предположим, что предельные издержки у всех производителей постоянны и выполнено предположение (**).

Покажите, что если предельные издержки одного из производителей сокращаются при неизменных предельных издержках других производителей, то их выпуск в равновесии Курно сокращается, а совокупный выпуск возрастает.

9. Предположим, что выполнено условие (*), функции издержек олигополистов одинаковы и средние издержки не убывают. Тогда благосостояние (измеряемое величиной совокупного излишка) возрастает при росте числа фирм в отрасли.

10. Покажите, что если в дуополии Курно предельные издержки производителей удовлетворяют соотношению

$$c_1'(y) > c_2'(y),$$

то в равновесии первый производит меньше, чем второй.

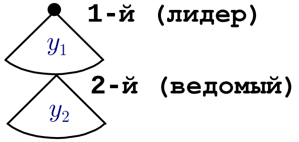
11. Пусть издержки олигополистов в модели Курно постоянны $c_j(y_j) = C_j$, а обратная функция спроса равна

$$p(y) = exp(-y).$$

Показать, что у игроков есть доминирующие стратегии, и найти их. Как будет изменяться суммарный выпуск отрасли с увеличением числа продавцов?

12. Докажите, что если постоянные издержки олигополистов равны 0, а переменные издержки одинаковы, то прибыль олигополистов положительна и при росте числа олигополистов стремится к 0.

2. Модель дуополии Штакельберга



$$\begin{pmatrix} \Pi_1 = y_1 p(y_1 + y_2) - c_1(y_1) \\ \Pi_2 = y_2 p(y_1 + y_2) - c_2(y_2) \end{pmatrix}$$

Рисунок 58. Дуополия Штакельберга

В модели дуополии, предложенной Генрихом фон Штакельбергом,[87] первый участник выбирает производимое количество, y_1, и является **лидером**. Под этим мы подразумеваем то, что второй участник (**ведомый**) рассматривает объем производства, выбранный первым участником, как данный. Другими словами, второй участник сталкивается с остаточным спросом, который получается вычитанием из исходного спроса величины y_1. Ориентируясь на этот остаточный спрос, второй участник выбирает свой объем производства, y_2 (или цену, что в данном случае одно и то же). Лидер «просчитывает» действия ведомого, определяет, какая цена устанавливается на рынке при каждом y_1, и исходя из этого максимизирует свою прибыль. В остальном модель повторяет модель Курно.

Эта модель приложима, например, к ситуации, когда в новой отрасли лидирующая фирма выбирает размер строящегося завода (мощность) и решает «работать на полную мощность». Считается, что она хорошо описывает рыночную ситуацию в случае, когда фирма-лидер, занимает значительную долю рынка. Так или иначе, ситуации, представленные в модели не столь и редки на реальных рынках. С точки зрения теории игр модель Штакельберга представляет собой динамическую игру с совершенной информацией, в которой лидер делает ход первым. Дерево игры изображено на Рис. 58.

Выпуски $(y_1^S,\ y_2^S)$, соответствующие совершенному в подыграх равновесию этой модели принято называть **равновесием Штакельберга**.

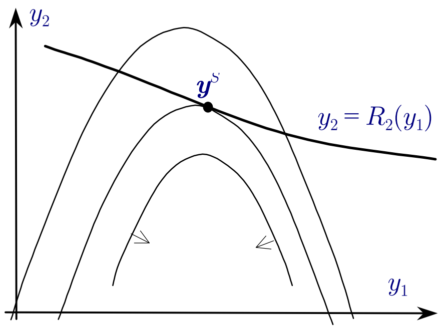


Рисунок 59

[87] Von Stackelberg, H. *Marktform und Gleichgewicht*. Wien: Springer, 1934.

Вектор выпусков не есть собственно совершенное в подыграх равновесие. По определению совершенное в подыграх равновесие — это набор стратегий, $(y_1^S,\ r_2^S(\cdot))$, где $r_2^S(\cdot)$ — равновесная стратегия ведомого игрока. (Стратегия ведомого игрока должна быть функцией $r_2(y_1)$, которая сопоставляет каждому ходу лидера некоторый отклик.)

Определение 15.

Вектор выпусков $(y_1^S,\ y_2^S)$, называется равновесием Штакельберга, если существует функция (представляющая равновесную стратегию ведомого)

$$r_2^S(\cdot)\colon\ \mathbb{R}_+ \mapsto\ \mathbb{R}_+,$$

такая, что выполнены два условия:

1) Выпуск $y_2 = r_2^S(y_1)$ максимизирует прибыль ведомого на $[0, +\infty)$ при любом выпуске лидера, $y_1 \geqslant 0$.

2) Выпуск y_1^S является решением следующей задачи максимизации прибыли лидера:

$$\Pi_1 = y_1 p(y_1 + r_2^S(y_1))\, y_1 - c_1(y_1) \to \max_{y_1 \geqslant 0}.$$

Равновесие Штакельберга находят с помощью обратной индукции. Лидер, назначая выпуск, рассчитывает отклик ведомого, $R_2(y_1)$. Отклик будет таким же, как в модели Курно. Вообще говоря, отклик может быть неоднозначным. Тогда различные функции $r_2(y_1)$, удовлетворяющие условию:

$$r_2(y_1) \in R_2(y_1)\ \forall y_1$$

могут задавать различные равновесия.

Мы будем далее предполагать, если не оговорено противное, что оптимальный отклик однозначен, т.е. $R_2(y_1)$ — функция[88]. Задача лидера в этом случае имеет вид:

$$\Pi_1 = y_1 p(y_1 + R_2(y_1))\, y_1 - c_1(y_1) \to \max_{y_1 \geqslant 0}.$$

Если решением этой задачи является y_1^S, и $y_2^S = R_2(y_1^S)$, то $(y_1^S,\ y_2^S)$ — равновесие Штакельберга.

Дуополию Штакельберга можно представить графически (см. Рис. 59). Разницу между равновесиями в моделях Курно и Штакельберга иллюстрирует Рисунок 60. Лидер выбирает точку на кривой отклика, которая бы максимизировала его прибыль. В

[88] Однозначность отклика можно, например, гарантировать, если выполнено условие Хана (см. сноску 78).

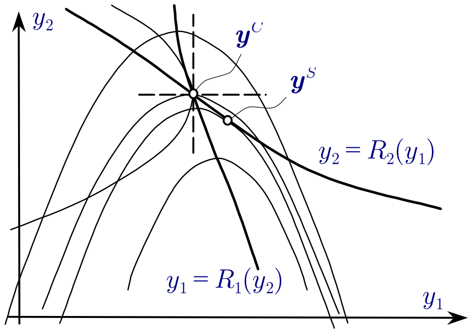


Рисунок 60

равновесии кривая равной прибыли лидера касается кривой отклика.

Существование равновесия Штакельберга

Докажем теперь теорему существования равновесия в модели Штакельберга.

Теорема 28.
Предположим, что в модели Штакельберга выполнены следующие условия:
1) функции издержек $c_j(y)$ дифференцируемы,
2) обратная функция спроса $p(y)$ непрерывна и убывает,
3) существуют $\tilde{y}_j > 0$ $j = 1, 2$ такие, что $p(y_j) < c'_j(y_j)$ при $y_j \geqslant \tilde{y}_j$.
Тогда равновесие Штакельберга (y_1^S, y_2^S) существует, причем $0 \leqslant y_j^S < \tilde{y}_j$.

Доказательство.
Доказательство этой теоремы во многом повторяет доказательство существования равновесия при монополии.

1) Докажем, что при любых ожиданиях относительно выпуска лидера ведомому не выгодно выбирать объем производства, превышающий объем $\tilde{y}_2$, в том смысле, что $\Pi_2(y_1, y_2) < \Pi_2(y_1, \tilde{y}_2)$ $\forall y_1$ при $y_2 > \tilde{y}_2$. Рассмотрим разность прибылей:

$$\Pi_2(y_1, y_2) - \Pi_2(y_1, \tilde{y}_2) = p(y_1 + y_2)\, y_2 - p(y_1 + \tilde{y}_2)\, \tilde{y}_2 - (c_2(y_2) - c_2(\tilde{y}_2)).$$

Эту разность можно преобразовать следующим образом:

$$\Pi_2(y_1, y_2) - \Pi_2(y_1, \tilde{y}_2) =$$
$$= p(y_1 + y_2)\, y_2 - p(y_1 + \tilde{y}_2)\, \tilde{y}_2 - \int_{\tilde{y}_2}^{y_2} p(y_1 + t)dt + \int_{\tilde{y}_2}^{y_2} [p(y_1 + t) - c'_2(t)]dt.$$

Поскольку $p(y)$ убывает, то $p(y_1 + y_2) < p(y_1 + t)$ при $t < y_2$ и $p(y_1 + t) \leqslant p(t)$ при $y_1 \geqslant 0$, поэтому

$$\Pi_2(y_1, y_2) - \Pi_2(y_1, \tilde{y}_2) <$$
$$< p(y_1 + y_2)\, y_2 - p(y_1 + \tilde{y}_2)\, \tilde{y}_2 - p(y_1 + y_2)(y_2 - \tilde{y}_2) + \int_{\tilde{y}_2}^{y_2} [p(t) - c'_2(t)]dt =$$
$$= (p(y_1 + y_2) - p(y_1 + \tilde{y}_2))\, \tilde{y}_2 + \int_{\tilde{y}_2}^{y_2} [p(t) - c'_2(t)]dt < 0.$$

Таким образом, прибыль ведомого при $y_2 = \tilde{y}_2$ выше, чем при выпуске любого большего количества. Тем самым, исходная задача выбора ведомого (при любом наперед заданном $y_1 \geqslant 0$) эквивалентна задаче выбора на отрезке $[0, \tilde{y}_2]$. Другими словами, отображение отклика исходной задачи совпадает с отображением отклика в задаче максимизации прибыли ведомого на отрезке $[0, \tilde{y}_2]$. Обозначим множество решений модифицированной задачи при данном y_1 через $\tilde{R}_2(y_1)$. Тем самым определено отображение отклика $\tilde{R}_2\colon \mathbb{R}_+ \mapsto [0, \tilde{y}_2]$. Мы доказали, что $\tilde{R}_2(y_1) = R_2(y_1)$ $\forall y_1$.

По Теореме 30 из Приложения (стр. 112) для любого y множество решений $\tilde{R}_2(y)$ непусто и компактно, и, кроме того, отображение $\tilde{R}_2(\cdot)$ полунепрерывно сверху. (Читателю предоставляется проверить самостоятельно, что эта теорема применима в данном случае.) В силу совпадения $\tilde{R}_2(\cdot)$ и $R_2(\cdot)$ теми же свойствами будет обладать и $R_2(\cdot)$.

2) Рассмотрим теперь следующую задачу:

$$\Pi_1(y_1, y_2) = y_1 p(y_1 + y_2)\, y_1 - c_1(y_1) \to max_{\,y_1, y_2 \geqslant 0}. \qquad (\bullet)$$
$$y_2 \in R_2(y_1).$$

Докажем, что решение этой задачи существует.

Пользуясь теми же рассуждениями, что и для функции прибыли ведомого, можно показать, что при любом наперед заданном $y_2 \geqslant 0$ прибыль лидера в точке $y_1 = \tilde{y}_1$ больше, чем во всех точках $y_1 > \tilde{y}_1$. Таким образом, множество решений задачи ($\bullet$) не изменится, если в нее дополнительно включить ограничение $y_1 \leqslant \tilde{y}_1$.

Таким образом, нам требуется, чтобы существовало решение задачи максимизации прибыли лидера по y_1 и y_2 на множестве

$$\mathcal{R} = \{(y_1, y_2) \mid y_1 \in [0, \tilde{y}_1],\, y_2 \in R_2(y_1) \subset [0, \tilde{y}_2]\}.$$

Из доказанных свойств отображения $R_2(\cdot)$ следует, что множество $\mathcal{R}$ непусто, замкнуто и ограничено. Существование решения такой задачи следует из теоремы Вейерштрасса.

3) Пусть (y_1^S, y_2^S) — некоторое решение задачи (•). Теперь выбрав любую функцию $r_2^S(y_1)$, график которой проходит через точку (y_1^S, y_2^S), и такую что

$$r_2^S(y_1) \in R_2(y_1)\ \forall y_1,$$

увидим, что выпуск y_1^S является решением задачи лидера

$$\Pi_1 = y_1 p(y_1 + r_2^S(y_1))\, y_1 - c_1(y_1) \to max_{\,y_1 \geqslant 0}.$$

Действительно, этот выпуск максимизирует цели лидера на всем допустимом множестве задачи (•), а значит — и на множестве, суженном дополнительным ограничением $y_2 \in r_2^S(y_1)$. Тем самым пара $y_1^S, r_2^S(\cdot)$ удовлетворяет определению равновесия Штакельберга. ■

Равновесие Штакельберга и равновесие Курно

Представляется интересным сравнить объемы производства в модели Курно и в модели Штакельберга. Результат сравнения для ведомого однозначен: в модели Штакельберга он производит меньше. Покажем это.

Пусть y_1^C и y_2^C — объемы производства в модели Курно.

Лидер в модели Штакельберга в предположении однозначности отклика ведомого всегда может обеспечить себе такую же прибыль, как в модели Курно, назначив $y_1 = y_1^C$, поэтому

$$p(y_1^C + y_2^C)\, y_1^C - c_1(y_1^C) \leqslant p(y_1^S + y_2^S)\, y_1^S - c_1(y_1^S).$$ [89]

Поскольку y_1^C максимизирует прибыль лидера при $y_2 = y_2^C$, то

$$p(y_1^S + y_2^C)\, y_1^S - c_1(y_1^S) \leqslant p(y_1^C + y_2^C)\, y_1^C - c_1(y_1^C).$$

Если $y_1^S > 0$, то из этих двух неравенств следует, что

$$p(y_1^S + y_2^C) \leqslant p(y_1^S + y_2^S).$$

Из убывания спроса имеем, что

$$y_2^C \geqslant y_2^S.$$

Результат сравнения между объемами производства лидера в двух ситуациях зависит от наклона кривой отклика. В случае, если $R_2(\cdot)$ убывает (на достаточно большом интервале, который должен заведомо включать, как y_2^C так и y_2^S), имеем

$$y_1^C \leqslant y_1^S.$$

Если же $R_2(\cdot)$ возрастает, то, наоборот,

$$y_1^C \geqslant y_1^S.$$

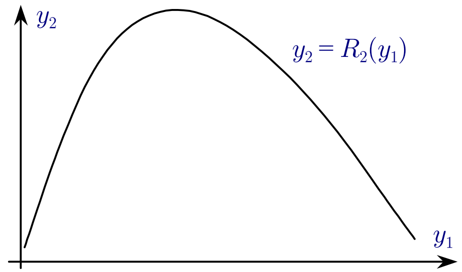


Рисунок 61

Функция $R_2(\cdot)$ убывает, например, в случае линейного спроса и постоянных предельных издержек. Пример возрастающей функции отклика построить достаточно трудно. На Рис. 61 показана кривая отклика, соответствующая обратной функции спроса $p(y) = 1/y^2$ при постоянных предельных издержках. При малых объемах производства лидера она возрастает, а при больших — убывает. Для более общего случая рассмотрим теорему.

Теорема 29.
Предположим, что выполнены следующие условия:
1) обратная функция спроса, $p(y)$, и функция издержек, $c_2(y)$, дважды дифференцируемы,
2) обратная функция спроса имеет отрицательную производную: $p'(y) < 0$, $\forall y \geqslant 0$,
3) $p'(y_1 + y_2) - c_2''(y_2) < 0$ при любых y_1 и y_2,
4) отклик $R_2(y_1)$ является дифференцируемой функцией.[90]
Тогда в тех точках y_1, где $R_2(y_1) > 0$, наклон функции отклика $R_2(y_1)$, удовлетворяет условию

$$-1 < R_2'(y_1)\ ,$$

[89] Данное неравенство получено как сравнение прибылей лидера при выборе им объемов выпуска y_1^S и y_1^C. Отметим, что при этом оптимальным откликом ведомого на y_1^S будет y_2^S, а на y_1^C – y_2^C.

[90] Однозначность и дифференцируемость отклика рассмотрены в Приложении.

то есть суммарный выпуск $R_2(y_1)+y_1$, возрастает.
Дополнительное условие[91]

$$p'(y_1+y_2)+p''(y_1+y_2)\,y_2<0\quad \forall y_1,\, y_1$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы $R_2'(y_1)<0$.

Доказательство.

При принятых предположениях докажем, что суммарный выпуск дуополии, $y_1+R_2(y_1)$, возрастает по y_1. Функция $R_2(y_1)$ при всех y_1 таких, что $R_2(y_1)>0$ удовлетворяет условию первого порядка — равенству

$$p(y_1+R_2(y_1))+p'(y_1+R_2(y_1))\cdot R_2(y_1)=c_2'(R_2(y_1)).$$

Дифференцируя это соотношение по y_1, получим

$$p'(y_1+R_2(y_1))\cdot(1+R_2'(y_1))+p''(y_1+R_2(y_1))R_2(y_1)\cdot(1+R_2'(y_1))+$$
$$+\,p'(y_1+R_2(y_1))\cdot R_2'(y_1)=c_2''(R_2(y_1))\cdot R_2'(y_1).$$

Отсюда

$$(1+R_2'(y_1))\cdot[2p'(y_1+R_2(y_1))+p''(y_1+R_2(y_1))R_2(y_1)-c_2''(R_2(y_1))]=$$
$$=p'(y_1+R_2(y_1))-c_2''(R_2(y_1)).$$

По условию второго порядка

$$2p'(y_1+R_2(y_1))+p''(y_1+R_2(y_1))\cdot R_2(y_1)-c_2''(R_2(y_1))\leqslant 0.$$

С другой стороны, по предположению

$$p'(y_1+R_2(y_1))-c_2''(R_2(y_1))<0.$$

Это гарантирует, что

$$2p'(y_1+R_2(y_1))+p''(y_1+R_2(y_1))\cdot R_2(y_1)-c_2''(R_2(y_1))\neq 0$$

Получаем, что

$$1+R_2'(y_1)=$$
$$=\frac{p'(y_1+R_2(y_1))-c_2''(R_2(y_1))}{2p'(y_1+R_2(y_1))+p''(y_1+R_2(y_1))\cdot R_2(y_1)-c_2''(R_2(y_1))},\qquad (*)$$

откуда $1+R_2'(y_1)>0$ или $R'_2(y_1)>-1$.

Докажем теперь неубывание функции отклика $R_2(y_1)$. Условие (*) можно переписать в виде

$$R_2'(y_1)=-\frac{p'(y_1+R_2(y_1))+p''(y_1+R_2(y_1))\cdot R_2(y_1)}{2p'(y_1+R_2(y_1))+p''(y_1+R_2(y_1))\cdot R_2(y_1)-c_2''(R_2(y_1))}.$$

В этой дроби знаменатель отрицателен, поэтому условие $R_2'(y_1)<0$ эквивалентно отрицательности числителя, что и требовалось. ■

[91] Это условие, в частности, следует из строгой выпуклости функции потребительского излишка. Напомним, что это одно упоминавшихся ранее условий Хана.

Пользуясь полученным ранее результатом, получим, что если $R_2(\cdot)$ убывает, то

$$y_1^C+y_2^C\leqslant y_1^S+y_2^S,$$

а если возрастает, то

$$y_1^C+y_2^C\geqslant y_1^S+y_2^S.$$

В первом случае равновесная цена в равновесии Штакельберга не

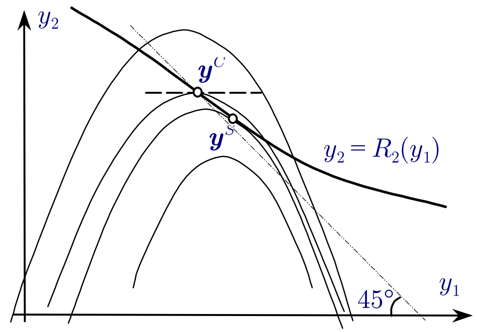


Рисунок 62

превышает равновесную цену в равновесии Курно, во втором — наоборот.

Иллюстрация полученных соотношений для случая убывающей кривой отклика представлена на Рис. 62. Из рисунка видно, что поскольку точка равновесия в модели Штакельберга лежит ниже кривой равной прибыли, проходящей через точка равновесия в модели Курно, то объем y_2^C должен быть выше y_2^S. Из-за убывания функции отклика объем y_1^C оказывается ниже y_1^S. Штрих-пунктирная линия, проходящая под углом 45° показывает расположение точек, в которых суммарный выпуск одинаков. Поскольку кривая отклика более пологая, то $y_1^C+y_2^C$ оказывается меньше $y_1^S+y_2^S$.

Можно сравнить также прибыли участников в двух ситуациях. Как уже упоминалось ранее, по очевидным причинам прибыль лидера в модели Штакельберга выше. Читателю предлагается доказать самостоятельно простой факт, что прибыль ведомого в модели Штакельберга выше в случае возрастающей функции отклика, и ниже в случае убывающей функции отклика.

Пример 16.

Пусть обратная функция спроса линейна: $p(y) = a - by$, а функции издержек дуополистов имеют вид $c_j(y_j) = cy_j$ $(j = 1{,}2)$. Функция отклика второго равна

$$R_2(y_1) = \frac{a-c-by_1}{2b}.$$

Подставив ее в прибыль лидера, получим

$$\Pi_1 = \frac{a-c}{2} y_1 - \frac{b}{2}(y_1)^2.$$

Максимум достигается при

$$y_1^S = \frac{a-c}{2b}.$$

Кроме того, в равновесии

$$y_2^S = \frac{a-c}{4b}.$$

Суммарный выпуск равен

$$y_1^S + y_2^S = \frac{3}{4}\frac{a-c}{b}$$

Это больше, чем выпуск в модели Курно, но меньше, чем выпуск при совершенной конкуренции, то есть имеется неоптимальность. ⇦

Приложение

Рассмотрим параметрическую задачу условной максимизации:

$$\begin{aligned} & f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \max\nolimits_y \\ & \boldsymbol{y} \in \beta(\boldsymbol{x}), \end{aligned} \qquad \text{(P)}$$

где $\boldsymbol{x} \in S \subset \mathbb{R}^m$, $\beta(\boldsymbol{x}) \subset \mathbb{R}^n$.

Обозначим через $m(\boldsymbol{x})$ значение целевой функции в максимуме:

$$m(\boldsymbol{x}) = \max\{f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \in \beta(\boldsymbol{x})\},$$

а через $r(\boldsymbol{x})$ — множество оптимальных решений при параметрах x:

$$r(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \beta(\boldsymbol{x}) \mid f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = m(\boldsymbol{x})\}.$$

Относительно решений этой задачи верна следующая теорема:[92]

[92] См. В. Гильденбранд, «Ядро и равновесие в большой экономике». — М.: Наука, 1986, с. 31.

Теорема 30.
Пусть отображение $\beta(\boldsymbol{x})$ компактнозначно и непрерывно, а $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — непрерывная функция. Тогда
а) функция $m(\boldsymbol{x})$ непрерывна;
б) для любого $\boldsymbol{x} \in S$ множество $r(\boldsymbol{x})$ не пусто и компактно, причем $r(\cdot)$ полунепрерывно сверху.

Условия существования и дифференцируемости функции отклика могут быть получены на основе следующей теоремы.

Теорема 31.
Рассмотрим задачу (P) с постоянным отображением $\beta(x) = \beta$. Предположим, что существует пара $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$, такая что $\bar{\boldsymbol{y}} \in r(\bar{\boldsymbol{x}})$ и $\bar{\boldsymbol{y}} \in int(\beta)$. Предположим, кроме того, что функция $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ дважды непрерывно дифференцируема и строго вогнута по $\boldsymbol{y}$ в некоторой окрестности точки $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$, и $|\nabla^2_{yy} f(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})| \neq 0$. Тогда решение задачи (P) существует и единственно при любых $\boldsymbol{x}$ из некоторой окрестности точки $\bar{\boldsymbol{x}}$, причем функция $r(\boldsymbol{x})$ непрерывно дифференцируема в этой окрестности.

Доказательство.

Поскольку $\bar{\boldsymbol{y}}$ является внутренним решением задачи (P) при $\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}}$. Это означает, что пара $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ удовлетворяет условиям первого порядка:

$$\nabla_{\boldsymbol{y}} f(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) = 0.$$

Условия теоремы гарантируют выполнение всех предположений теоремы о неявной функции относительно соотношения

$$\nabla_{\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$$

и поэтому существует удовлетворяющая этому соотношению функция $\boldsymbol{y} = \bar{r}(\boldsymbol{x})$, определенная в некоторой окрестности точки $\bar{\boldsymbol{x}}$ и непрерывно дифференцируемая в этой окрестности. Из непрерывности $\bar{r}(\boldsymbol{x})$ следует, что существует окрестность точки $\bar{\boldsymbol{x}}$, в которой $\bar{r}(\boldsymbol{x}) \in \beta$.

Поскольку $\bar{r}(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет условиям первого порядка и функция $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ строго вогнута по $\boldsymbol{y}$, то $\bar{r}(\boldsymbol{x})$ является единственным решением задачи (P) при данном $\boldsymbol{x}$. ■

Задачи

1. Две фирмы, конкурируя на рынке, выбирают объемы производства. Известно, что для этих фирм равновесный объем производства в модели Курно совпадает с равновесным объемом производства в модели Штакельберга. Каков наклон кривых отклика в этой общей точке равновесия? Пояснить графически с использованием кривых отклика и кривых равной прибыли.

2. Рассмотрим отрасль с двумя фирмами. Пусть обратная функция спроса имеет вид

$$p(Y) = \frac{1}{Y},$$

и обе фирмы имеют постоянные предельные издержки c_j ($0 < c_j < 1$). При каких условиях равновесие в модели Штакельберга совпадает с равновесием в модели Курно? Изобразите эту ситуацию на диаграмме (в том числе поведение функций отклика).

3. Двое олигополистов имеют постоянные одинаковые предельные издержки равные 2. Предполагается, что они конкурируют как в модели Штакельберга. Спрос в отрасли задан обратной функцией спроса $P(Y) = 16 - 0.5Y$. Сколько суммарной прибыли они бы выиграли, если бы сумели объединиться в картель?

4. Рассмотрим дуополию, в которой у 1-й фирмы предельные издержки нулевые, а функция издержек 2-й фирмы равна

$$c_2(y) = \alpha y^2,$$

где $\alpha > 0$ — параметр. Обратная функция спроса в отрасли равна

$$P(Y) = 1 - Y.$$

Покажите, что при $\alpha \to \infty$ равновесие Курно сходится к равновесию Штакельберга в том смысле, что

$$\frac{y_1^S(\alpha)}{y_1^C(\alpha)} \to 1, \qquad \frac{y_2^S(\alpha)}{y_2^C(\alpha)} \to 1.$$

5. Докажите Теорему 28 (стр. 109), воспользовавшись указаниями, приведенными в тексте.

6. Докажите, что прибыль ведомого в модели Штакельберга при прочих равных условиях выше, чем в модели Курно, в слу-

чае возрастающей функции отклика и ниже в случае убывающей функции отклика.

7. Два олигополиста продают свою продукцию на рынках близких благ, выбирая объемы производства. Их обратные функции спроса равны $p_1 = 2 - y_1 + y_2$ и $p_2 = 3 - y_2 + y_1$, а предельные издержки равны 1 и 2 соответственно. Найти равновесие при одновременном и при последовательном выборе объемов производства.

3. Картель и сговор

В этом параграфе мы сравним результаты некооперативного поведения фирм в отрасли в соответствии с моделью Курно с результатами кооперативного поведения. Как известно, если количество фирм в отрасли мало, то они могут заключить между собой соглашение с целью ослабления конкуренции и увеличения прибыли. Мы начнем с анализа, который показывает, что у фирм, конкурирующих по Курно, есть потенциал для взаимовыгодного соглашения, а затем перейдем рассмотрению двух вариантов таких соглашений.

Неоптимальность равновесия Курно с точки зрения олигополистов

В равновесии Курно объем производства с точки зрения олигополистов неоптимален. Другими словами, если любая из фирм (немного) снизит свой выпуск, то общая прибыль вырастет. Этого уже достаточно, чтобы показать неоптимальность, ведь прирост прибыли можно перераспределить между олигополистами так, чтобы в конечном счете ни у кого из них прибыль бы не уменьшилась. Можно, однако, доказать более сильный факт: если по крайней мере два олигополиста уменьшат свой объем производства (на достаточно малую величину), то прибыль у всех олигополистов вырастет. Т.е. в данном случае не нужно никакого перераспределения прибыли, чтобы улучшить положение всех производителей.

Предположим, что объемы производства изменились на $dy_j \leqslant 0$, причем хотя бы для двух участников неравенство здесь строгое. Как при этом изменится прибыль j-го участника? Напомним, что прибыль j-го участника равна

$$\Pi_j(y_j) = p(\sum_{i=1}^{n} y_i) \cdot y_j - c_j(y_j).$$

Беря полный дифференциал в точке равновесия Курно, получим

$$d\Pi_j = p'(\sum_{i=1}^{n} y_i^*) \cdot y_j^* \cdot (\sum_{i=1}^{n} dy_i) + p(\sum_{i=1}^{n} y_i) \cdot dy_j - c_j'(y_j^*) \cdot dy_j =$$
$$= p'(\sum_{i=1}^{n} y_i^*) \cdot y_j^* \cdot (\sum_{i \neq j} dy_i) + \Big(p'(\sum_{i=1}^{n} y_i^*) \cdot y_j^* + p(\sum_{i=1}^{n} y_i^*) - c_j'(y_j^*)\Big) \cdot dy_j.$$

Из условия первого порядка следует, что второе слагаемое равно нулю. Поскольку по крайней мере два олигополиста уменьшили свой объем производства, то $\sum_{i \neq j} dy_i < 0$. При естественных предположениях, что функция спроса строго убывает и у всех монополистов объемы производства в равновесии Курно положительны, получим, что $d\Pi_j > 0$.[93]

Проиллюстрировать ситуацию и показать, что олигополия Курно выпускает больше оптимального количества продукции (с точки зрения ее участников) для случая дуополии можно графически (Рис. 64). Поскольку, как и в любой точке любой кривой отклика, в точке равновесия Курно касательные к кривым равной прибыли перпендикулярны друг другу, то возможен сдвиг, который увеличивает прибыль обоих олигополистов (на рисунке показан стрелкой).

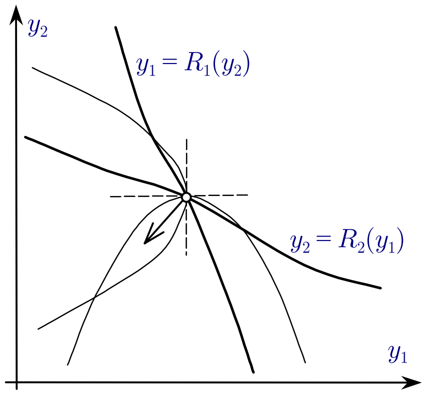


Рисунок 64

[93] Заметим, что поскольку дифференциалы прибыли всех участников отрицательны, то прибыль возрастает при достаточно небольшом (конечном) сокращении выпусков. Поэтому приведенное доказательство утверждения можно легко обобщить на случай конечных сокращений выпусков.

Сговор

Рассматривая возможности соглашений между олигополистами относительно объемов выпуска (квот на производство продукции) будем различать два случая — картель и сговор.

Если допустимо перераспределение прибыли между олигополистами, то им выгодно выбирать объемы производства, максимизирующие суммарную прибыль. Мы будем называть такое объединение **картелем**. [94]

Напротив, если такое перераспределение по каким-то причинам неосуществимо, то будем называть такой тип соглашений **сговором** о квотах выпуска.

Сначала мы рассмотрим модель сговора. Определим возможную точку сговора как точку $\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n \geqslant 0$, которая удовлетворяет двум условиям:

1) Каждый участник в точке сговора получает прибыль не меньшую, чем его прибыль в равновесии Курно:

$$\Pi_j(\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n) \geqslant \Pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*), \ \forall j.$$

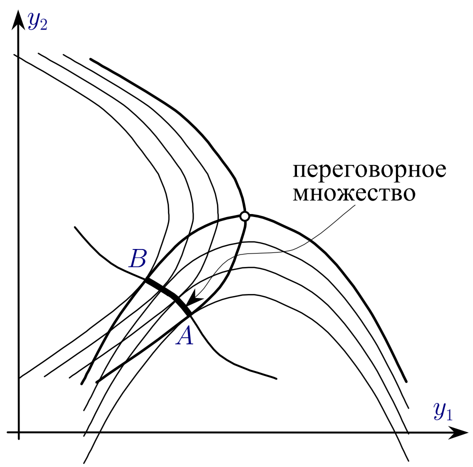


Рисунок 63

[94] В терминах кооперативной теории игр картель является точкой ядра в игре с трансферабельностью выигрышей. Имеется в виду ядро только с точки зрения целевых функций олигополистов.

2) точка сговора является эффективной (лежит на границе Парето[95] игры без перераспределения прибыли), то есть не существует другой точки $y_1, \ldots, y_n \geqslant 0$, дающей всем не меньшую прибыль, а по крайней мере одной из фирм — большую.

Как правило, таких точек может быть много (см. отрезок AB на Рис. 63). Назовем соответствующее множество **переговорным множеством**. Какая именно точка будет выбрана, зависит от процедуры переговоров и переговорной силы участников. Процедуру переговоров (торг) можно представлять как некоторую некооперативную игру, но эта игра остается за рамками модели.

Заметим также, что поскольку, вообще говоря, равновесий Курно может быть несколько, то переговорное множество зависит от того, какое из равновесий Курно участники считают за исходную точку (точку угрозы).

Как правило, сговор состоит в том, что участники договариваются о квотах выпуска для того, чтобы уменьшить суммарный выпуск и поднять рыночную цену. На Рис. 63 видно, что суммарный выпуск во всех точках переговорного множества ниже, чем в равновесии Курно: если через точку равновесия Курно провести прямую $y_1 + y_2 = y_1^* + y_2^*$, то переговорное множество будет лежать ниже этой прямой. Следующее утверждение формализует эту идею.

Теорема 32.
Пусть при сговоре все фирмы производят продукцию в положительных количествах: $\check{y}_j > 0 \ \forall j$, и обратная функция спроса убывает. Тогда суммарный выпуск при сговоре не превышает суммарный выпуск в соответствующем равновесии Курно:

$$\check{Y} \leqslant Y^*,$$

а равновесная цена при сговоре не меньше цены в соответствующем равновесии Курно:

$$p(\check{Y}) \geqslant p(Y^*).$$

Доказательство.

По определению сговора, прибыль каждого участника не ниже, чем в равновесии Курно:

$$p(\check{Y})\,\check{y}_j - c_j(\check{y}_j) \geqslant p(Y^*)\,y_j^* - c_j(y_j^*)$$

[95] Имеется в виду Парето-граница олигополии, но не экономики в целом.

С другой стороны, при выборе $y_j = y_j^*$ участник j должен получить не меньшую прибыль, чем при выборе $y_j = \check{y}_j$, если суммарный выпуск остальных такой же, как в равновесии Курно (Y_{-j}^*):

$$p(Y^*)\,y_j^* - c_j(y_j^*) \geqslant p(Y_{-j}^* + \check{y})\,\check{y}_j - c_j(\check{y}_j).$$

Суммируя эти неравенства, получим

$$p(\check{Y})\,\check{y}_j \geqslant p(Y_{-j}^* + \check{y})\,\check{y}_j.$$

Мы предположили, что $\check{y}_j > 0$, поэтому

$$p(\check{Y}) \geqslant p(Y_{-j}^* + \check{y}).$$

Из убывания функции спроса $\check{Y}_{-j} \leqslant Y_{-j}^*$. Это неравенство верно для всех j. Суммируя эти неравенства и деля на $n-1$, получаем

$$\check{Y} \leqslant Y^*.$$

■

Дифференциальная характеристика точки сговора может быть получена из задачи поиска Парето-оптимума без перераспределения прибыли.[96] Точка $\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n \geqslant 0$ Парето-оптимальна, если для любого j она является решением задачи

$$\Pi_j(y_1, \ldots, y_n) \to \max$$
$$\Pi_i(y_1, \ldots, y_n) \geqslant \Pi_i(\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n),\ i \neq j.$$
$$y_1, \ldots, y_n \geqslant 0.$$

По теореме Куна-Таккера[97] для внутреннего решения $\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n > 0$ существуют множители Лагранжа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$, причем $\lambda_j = 1$, такие что выполнены условия первого порядка:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial \Pi_i}{\partial y_k}(\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n) = 0 \ \forall k.$$

В случае двух фирм эта дифференциальная характеристика означает, что кривые равной прибыли касаются друг друга (см. Рис. 63). Дифференциальную характеристику можно переписать в виде:

$$p'(\check{Y}) \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \check{y}_i + \lambda_k [p(\check{Y}) - c_k'(\check{y}_k)] = 0 \ \ \forall k.$$

[96] Условие, что каждый участник получает прибыль не меньшую, чем в равновесии Курно здесь не учитывается.

[97] Если функции прибыли вогнуты, и выпуск $\check{y}_j > 0$ то возможно уменьшить его, увеличив тем самым прибыль прочих участников. Это означает, что выполнено условие Слейтера и теорема Куна-Таккера применима.

Поскольку $\lambda_j = 1$, то из убывания функции спроса следует, что первое слагаемое не равно нулю, и что все множители Лагранжа положительны.

Пользуясь этими соотношениями, докажем, что сговор неустойчив, если нет каких-то механизмов, принуждающих к выполнению соглашений. Конкретнее, подразумевается, что если в точке сговора любая фирма немного увеличит свой выпуск, то ее прибыль возрастет.

Теорема 33.
Пусть
1) при сговоре все фирмы производят продукцию в положительных количествах: $\check{y}_j > 0\ \forall j$,
2) обратная функция спроса убывает и дифференцируема, причем $p'(\check{Y}) < 0$;
3) функции издержек дифференцируемы,
4) функции прибыли вогнуты.
Тогда в точке сговора
$$\frac{\partial \Pi_k}{\partial y_k}(\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n) > 0\ \forall k.$$

Доказательство.
Пользуясь дифференциальной характеристикой внутренней точки сговора и положительностью всех множителей Лагранжа, получим
$$\lambda_k \frac{\partial \Pi_k}{\partial y_k}(\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n) = -\sum_{i\neq k}\lambda_i \frac{\partial \Pi_i}{\partial y_k}(\check{y}_1, \ldots, \check{y}_n) = -p'(\check{Y})\cdot\sum_{i\neq k}\lambda_i \check{y}_i > 0\ \forall k.$$
■

Картель

Рассмотрим теперь модель картеля. Поскольку фирмы могут перераспределять прибыль и целевые функции олигополистов квазилинейны по деньгам, то максимум суммарной прибыли есть Парето-оптимум олигополии. Фактически, картель действует как монополия, однако, следует несколько изменить модель, по сравнению со случаем обычной монополии, поскольку у каждой из входящих в картель фирм своя функция издержек. Суммарная прибыль равна
$$\sum_{j=1}^{n}\Pi_j = p(Y)\,Y - \sum_{j=1}^{n} c_j(y_j),$$
где $Y = y_1 + \ldots + y_n$ — суммарный объем производства. Продифференцировав по выпускам всех фирм, получим дифференциальную характеристику равновесия картеля:
$$p(Y^\kappa) + p'(Y^\kappa)Y^\kappa \leqslant c_j'(y_j^\kappa),$$
$$p(Y^\kappa) + p'(Y^\kappa)Y^\kappa = c_j'(y_j^\kappa), \text{ если } y_j^\kappa > 0.$$
Как видим, картель так распределит объемы производства между предприятиями при положительных объемах выпуска, чтобы предельные издержки были равными.[98] Так, если $c_j'(y_j) = c_j$, то совокупный выпуск отрасли совпадает с равновесием при монополии, когда предельные издержки монополиста равны
$$c = \min_j c_j.$$

Пример 17.

Пусть как и в Примере 14 обратная функция спроса линейна: $p(y) = a - by$, а функции издержек имеют вид $c_j(y_j) = cy_j$. Объем производства картеля определяется соотношением
$$p(Y^\kappa) + p'(Y^\kappa)Y^\kappa = a - bY^\kappa - bY^\kappa = c = c_j'(y_j^\kappa).$$
Таким образом, он равен
$$Y^\kappa = \frac{a-c}{2b},$$
а прибыль картеля равна
$$(a - bY^\kappa)Y^\kappa - cY^\kappa = \frac{(a-c)^2}{4b}.$$
В равновесии Курно, как мы показали в Примере 14, суммарный объем производства равен
$$Y^* = \frac{n(a-c)}{(n+1)b}$$
а суммарная прибыль, как несложно рассчитать, равна
$$\frac{n(a-c)^2}{(n+1)^2 b},$$
откуда ясна неоптимальность равновесия Курно с точки зрения производителей. Они могли бы получать больше прибыли, если бы производили меньше. ⇦

Используя ту же логику доказательства, как в Теоремах 26 и 27, можно показать, что олигополисты будут производить меньше, если объединятся в картель, чем если они будут конкурировать по Курно (здесь, как и ранее, мы предполагаем равенство функций издержек у всех олигополистов). Доказательство соот-

---

[98] Отметим, что это также означает такое распределение выпуска среди участников картеля, которое минимизирует суммарные издержки.

ветствующей теоремы оставляется читателю в качестве упражнения. Аналогичное утверждение верно и без требования равенства функций издержек, но с сильными предположениями о функции выручки.[99]

Теорема 34.
Пусть
1) равновесия в модели Курно и модели картеля существуют и все фирмы производят продукцию в положительных количествах: $y_j^\kappa > 0\ \forall j$,
2) обратная функция спроса убывает и дифференцируема,
функция выручки $p(y)y$ вогнута,
3) функции издержек $c_j(\cdot)$ дифференцируемы и выпуклы,
Тогда в точке картеля суммарный выпуск меньше, чем в равновесии Курно:
$$Y^* > Y^\kappa.$$

В общем случае ничего определенного относительно соотношения между объемом выпуска картеля и выпуском в равновесии Курно сказать нельзя. Ниже приводится пример, когда картель выпускает больший объем продукции, чем в одном из (трех) равновесий Курно.

Пример 18.
Пусть в отрасли функция обратного спроса равна
$$p(y) = 9 - y$$
и есть два производителя с одинаковыми функциями издержек
$$c(y) = \begin{cases} 6y - \frac{3}{4}y^2, & y \leqslant 4, \\ 12, & y \geqslant 4. \end{cases}$$
В этой отрасли есть 3 равновесия Курно: $(2, 2)$, $(0, 9/2)$ и $(9/2, 0)$. Максимум прибыли картеля достигается в точках $(0, 9/2)$ и $(9/2, 0)$. Видно, что в симметричном равновесии $(2, 2)$ выпуск меньше, чем у картеля. ⇦

[99] См. Elmar Wolfstetter, "Oligopoly and industrial organization," *Humboldt-Discussion Paper*, August 1995.

Заметим, что хотя в данном примере функция издержек недифференцируема, ее легко модифицировать, сгладив в окрестности точки $y = 4$. По-видимому, основная причина полученного результата состоит в том, что в этом примере имеет место возрастающая отдача.

Ясно, что так же как и рассмотренный ранее сговор, картель является неустойчивым, если нет способа гарантировать выполнение соглашения между фирмами.

Теорема 35.
Пусть
1) в картеле все фирмы производят продукцию в положительных количествах: $y_j^\kappa > 0\ \forall j$,
2) обратная функция спроса убывает и дифференцируема,
3) функции издержек дифференцируемы.
Тогда в точке картеля
$$\frac{\partial \Pi_j}{\partial y_j}(y_1^\kappa, \ldots, y_n^\kappa) > 0\ \forall j,$$
т.е. каждая фирма может повысить свою прибыль, увеличив свой выпуск.

Доказательство.
Производная функции прибыли j-го участника по своему выпуску равна
$$\frac{\partial \Pi_j}{\partial y_j} = p(Y) + p'(Y)\, y_j - c'_j(y_j).$$
Учитывая дифференциальную характеристику точки $(y_1^\kappa, \ldots, y_n^\kappa)$,
$$p(Y^\kappa) + p'(Y^\kappa)Y^\kappa = c_j'(y_j^\kappa),$$
имеем
$$\frac{\partial \Pi_j}{\partial y_j}(y_1^\kappa, \ldots, y_n^\kappa) = -p'(Y^\kappa)(Y^\kappa - y_j^\kappa) > 0.$$
Таким образом, если достигнуто соглашение о квотах выпуска ($y_j = y_j^\kappa$), максимизирующих суммарную прибыль, то каждой фирме выгодно (по крайней мере локально) производить больше своей квоты. ■

Задачи

1. Докажите, что если во внутреннем равновесии Курно один из олигополистов немного уменьшит объем производства, то суммарная прибыль возрастет.

2. Сформулируйте и докажите теорему о существовании равновесия в случае картеля. (Подсказка: воспользуйтесь аналогичной теоремой в главе о монополии. Пусть существуют $\tilde{y}_j > 0$ $j = 1, ..., n$ такие, что $p(y_j) < c_j'(y_j)$ при $y_j \geqslant \tilde{y}_j$. Докажите, что при любых выбранных выпусках всех производителей, кроме j-го, картелю не выгодно j-му производителю назначать выпуск больше $\tilde{y}_j$, поскольку суммарная прибыль тогда будет строго меньше, чем при выпуске $y_j = \tilde{y}_j$. При этом удобно рассматривать выбор суммарного объема производства, Y, при фиксированном Y_{-j}, при ограничении $Y \geqslant Y_{-j}$.)

3. Докажите аналог Теоремы 27 для модели картеля с одинаковыми функциями издержек.

4. Покажите, что если в дуополии предельные издержки производителей удовлетворяют соотношению

$$c_1'(y) > c_2'(y),$$

то при объединении в картель первый производит меньше, чем второй.

5. Рассмотрите дуопольную отрасль. Пусть обратная функция спроса имеет вид

$$p(Y) = \frac{4}{1+Y},$$

а функции издержек у обоих производителей линейны:

$$c_j(y_j) = y_j.$$

Показать, что в равновесии Курно участники будут выпускать в сумме больше, чем при объединении в картель, и получать меньшую общую прибыль.

6. Двое олигополистов имеют постоянные одинаковые предельные издержки, равные 1, и конкурируют как в модели Курно. Спрос в отрасли задается обратной функцией спроса $p(Y) = 5 - 2Y$. Сколько суммарной прибыли они бы выиграли, если бы сумели объединиться в картель?

7. Пусть на олигополистическом рынке функционируют три олигополиста с функциями издержек $c_1(y_1) = \frac{y_1^2}{2}$, $c_2(y_2) = \frac{y_2^2}{4}$ и $c_3(y_3) = \frac{y_3^2}{6}$. Обратная функция спроса на продукцию олигополистов имеет вид $p(Y) = 1 - Y$. Найдите равновесие Курно и покажите, что это равновесие не оптимально, подобрав такие изменения выпусков олигополистов, чтобы прибыль каждого выросла. Покажите, что картельное соглашение между этими участниками неустойчиво, то есть каждый участник нарушив его получит большую прибыль.

8. Докажите Теорему 34.

4. Модель Бертрана

Модель Курно часто критиковали за то, что ее посылки (решение об объемах производства, а не о ценах) плохо согласуются с каждодневными наблюдениями.

Некоторые ранние критики этой модели говорили, что эту реалистичную картину убывания олигополистической власти (или рыночной власти) олигополистов модель Курно дает по ложным причинам, т.к. естественным состоянием олигополистической отрасли является состояние **ценовой конкуренции**. На реальных олигополистических рынках производители в основном конкурируют, используя в качестве инструментов цены, по которым они продают свою продукцию. Исходя из этого, естественной альтернативой модели Курно для описания конкуренции на олигополистическом рынке должна быть модель описывающая состояние и динамику рынка в терминах ценовой конкуренции. Такая модель была предложена Жозе́фом Бертраном, в ней производители принимают (одновременно) решения о ценах продаж.[100]

В **модели Бертрана** предполагается, что олигополисты производят однородную продукцию с постоянными предельными издержками, одинаковыми для всех производителей. Стратегиями

---

[100] Bertrand, J. (1883). “Theorie mathematique de la richesse sociale”. *Journal de Savants*, **67**, 499-508.

участников являются назначаемые цены p_j. Поскольку при ценах ниже предельных издержек любой производитель несет убытки при любом положительном объеме продаж, естественно предполагать, что выбираемые им цены p_j удовлетворяют ограничению $p_j \geqslant c$.

Когда речь идет о ценовой конкуренции, то удобно бывает рассматривать функцию спроса на продукцию отдельной фирмы, которая в данном случае зависит как от собственной цены, p_j, так и от цен, назначенных другими, p_{-j}:

$$y_j = D_j(p_j, p_{-j}), p_j \geqslant c.$$

При этом предполагается (что представляется естественным при анализе рынков однородной продукции), что:

1) Если цена, назначенная фирмой, выше цены любого другого участника, то фирма столкнется с нулевым спросом и не сможет продать свою продукцию: $y_j = 0$ (происходит полное переключение спроса).

2) Группа из k фирм, назначившая минимальную цену (p_{min}), обслужит весь спрос и разделит рынок поровну[101]

$$y_j = \frac{D(p_{min})}{k},$$

где $D(\cdot)$ — функция спроса. В том числе, если такая фирма одна, то $y_j = D(p_{min})$.

3) Предельные издержки всех олигополистов одинаковы и не зависят от объема производства:

$$c_j'(y) = c, \forall j, \forall y \geqslant 0.$$

Как и ранее, считаем фиксированные издержки уже сделанными и невозвратимыми (это отражено дифференцируемостью c в нуле).

Используя вышеприведенные предположения, получим характеристики равновесия для олигополистического рынка, соответствующие модели (гипотезам) Бертрана.

[101] Нижеприведенный результат, остается справедлив при любой схеме разделения рынка с одним лишь ограничением: спрос на продукцию каждой из этих фирм не равен нулю.

Теорема 36.
Состояние, в котором хотя бы два олигополиста установят цены на уровне предельных издержек ($p_j = c$),[102] является равновесием Нэша в модели Бертрана.
Если функция спроса $D(p)$ не возрастает, непрерывна в окрестности c, и $D(c) > 0$, тогда других равновесий нет.

Доказательство.
Проверим, что описанное выше состояние является равновесием. Рассмотрим решение какого-либо олигополиста.

Докажем, что равновесие не может установиться ни в какой другой точке. Предположим, что в равновесии у всех производителей $p_j > c$. Рассмотрим, хотя бы одного из тех олигополистов, кто обслуживал не весь рынок (а такие найдутся). Найдется $\hat{p} \in [c, p_{min}]$, такое, что если он понизит цену до этой величины, то есть оставляя цену выше предельных издержек c, но ниже p_{min}, то он сразу же получит весь объем спроса, скачкообразно увеличив объем. У него прибыль в результате вырастет (объем окажется положителен при некоторой цене $\hat{p} \geqslant c$, при наших предположениях). Таким образом это не равновесие. Следовательно, в равновесии хотя бы один из олигополистов установит цену, равную предельным издержкам.

Докажем теперь, что в равновесии по крайней мере два олигополиста установят цену на уровне предельных издержек. Пусть это не так. Тогда тот, кто установил $p_j = c$, может увеличить свою прибыль, немного повысив цену, так, чтобы ему все еще доставался весь спрос. Итак, иных равновесий, кроме названных в начале параграфа, быть не может. ■

Мы видим, что в равновесии Бертрана цена, по которой продается продукция, равна предельным издержкам, что соответствует ситуации конкурентного равновесия. Как следует из этого, присутствие по крайней мере двух производителей достаточно для того, чтобы отрасль функционировала в режиме совершенной конкуренции и равновесие было Парето-оптимальным. Таким образом, если верить модели, монопольная власть – редкий феномен и встречается только в ситуации, когда есть всего один производитель продукции. По-видимому, этот вывод не согласу-

[102] По существу, это конкурентное равновесие. Назначившие большую цену выпускают ноль.

ется с действительностью. Кроме того, крайне интенсивная ценовая конкуренция приводящая олигополистический рынок к ситуации равновесия эквивалентного равновесию совершенной конкуренции в целом -- также представляется не слишком реалистичной. Поэтому выводы, следующие из анализа вышеприведенной модели, получили название **парадокса Бертрана**.

В силу этого парадокса попытку Бертрана переосмыслить концепцию олигополистического равновесия трудно признать полностью удавшейся. Поэтому были предприняты серьезные попытки модифицировать модель Бертрана так, чтобы выводы из нее более соответствовали реальными наблюдениям, т.е. с тем, что монопольная власть на рынке не исчезала бы при наличии всего двух конкурентов в отрасли.

Заметим, что наиболее существенными недостатками модели Бертрана являются:

❅ В модели Бертрана предполагается, что производится и продается однородная продукция. Поэтому возникает жесткость олигополистической конкуренции.

❅ Вторoе специфическое свойство модели Бертрана — это предположение об отсутствии ограничений на объемы производства, или в более слабом виде: специфическое предположение о независимости предельных издержек любого производителя от объемов производства. Как только мы вводим предположение о зависимости предельных издержек от объемов производства, то мы не получаем изящный результат о том, что единственное состояние равновесия — это равновесие, при котором цены равны предельным издержкам.

❅ Модель Бертрана в классической постановке, имеет статический характер. Принятие во внимание некоторых стратегических соображений, связанных с конкуренцией в различные интервалы времени (точнее с нетривиальными последовательностями ходов конкурентов), приводит к ослаблению выводов о жесткости конкуренции в модели Бертрана.

Для преодоления этих недостатков рассмотрим ниже следующие модификации традиционной модели Бертрана:

1. Продуктовая дифференциация (ослабляющая ценовую конкуренцию).

2. Нелинейность издержек, делающая для олигополиста невыгодным производить продукцию в объеме спроса, с которым он сталкивается.

3. Динамические модели, принимающие во внимание многоходовые соображения производителей.

Продуктовая дифференциация и ценовая конкуренция

Мы рассмотрели модели олигополии, в которых фирмы производили один и тот же товар. Теперь рассмотрим более распространенный случай, когда продукция фирм не вполне взаимозаменяема, т.е. случай так называемых **дифференцированных благ**.[103] Это означает, что производители действуют на взаимосвязанных рынках близких продуктов, которые различаются хотя бы по упаковке и потребитель способен покупать их по разным ценам p_j. В этой модели следует ввести отдельную функцию спроса на продукцию каждой фирмы $y_j = D_j(p_j, \boldsymbol{p}_{-j})$, которая зависит от собственной цены p_j и от цен конкурентов $\boldsymbol{p}_{-j}$. Естественно предположить, что эластичность спроса по собственной цене отрицательна ($\varepsilon_{jj} < 0$), а по ценам конкурентов положительна ($\varepsilon_{ij} = \frac{dD_i}{dp_j}\frac{p_j}{y_i} > 0$ при $i \neq j$, т.е. блага взаимозаменяемые)[104]. Предположим по-прежнему, что каждый потребитель имеет функцию издержек вида $c(y) = c\,y$.

Доказательство *существования* равновесия в этой модели в целом сходно с доказательством существования равновесия в модели Курно и читателю предлагается сформулировать и доказать этот результат самостоятельно в Задаче 2 (стр. 127).

Отличие рассматриваемой модели от классической модели Бертрана заключается в том, что спрос переключается к понижающему цену конкуренту не с бесконечной эластичностью. Поскольку участники не учитывают, как их действия влияют на других, то их поведение соответствует модели простой монополии, и *дифференциальная характеристика* внутреннего равновесия имеет такой же вид:

$$D_j(p_j, \boldsymbol{p}_{-j}) + \frac{dD_j}{dp_j}(p_j, \boldsymbol{p}_{-j})\, p_j = \frac{dD_j}{dp_j}(p_j, \boldsymbol{p}_{-j})\, c$$

или

---

[103] Chemberlin, E.H. (1933) *The Theory of Monopolistic Competition*.

[104] Эта же модель подходит и когда фирмы производят не взаимозаменяемые (субституты), а взаимодополняющие (комплементы) блага.

$$\left(1-\frac{1}{|\varepsilon_{jj}|}\right)p_j = c.$$

Из этих условий следует, что в рассматриваемой модели равновесные цены превышают предельные издержки, несмотря на то, что, как и в обычной модели Бертрана, предельные издержки предполагаются равными между собой и постоянными.

С другой стороны, при росте эластичности индивидуального спроса достающегося каждой фирме, равновесие в данной модели приближается к равновесию в модели Бертрана, и в пределе они совпадают. Таким образом, модель Бертрана можно рассматривать как крайний случай рассмотренной модели.

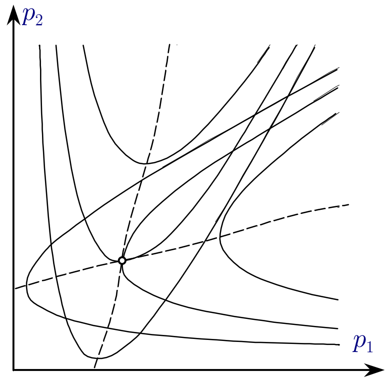


Рисунок 65

Дуополию такого вида можно изобразить на диаграмме, аналогичной Рис. 57 для дуополии Курно. Только по осям должны стоять не объемы производства, а цены, и кривые равной прибыли будут развернуты в противоположную сторону. Равновесием будет точка пересечения кривых отклика (см. Рис. 65). Вообще, аналогия с моделью Курно очень близкая, отличие в более сложной, чем в модели Курно, зависимости прибылей от действий конкурентов.

Если бы каждая фирма немного повысила свою цену, то общая прибыль возросла бы. Поэтому равновесие при монополистической конкуренции не оптимально с точки зрения олигополистов. Они могли бы объединиться в картель, и такой картель по сути являлся бы дискриминирующей монополией. В отличие от рассмотренного ранее случая перекрестные эластичности не равны нулю, поэтому максимум прибыли достигается при выполнении условий

$$D_j(\boldsymbol{p}) + \sum_{i=1}^{n}\frac{dD_i}{dp_j}(\boldsymbol{p})\,(p_i - c) = 0.$$

или, в терминах эластичностей

$$p_j\left(1-\frac{1}{|\varepsilon_{jj}|}\right) - \sum_{i\neq j}(p_i - c)\frac{\varepsilon_{ij}}{|\varepsilon_{jj}|}\frac{D_i(\boldsymbol{p})}{D_j(\boldsymbol{p})} = c.$$

Из сравнения дифференциальных характеристик очевидно (при естественных предположениях) несовпадение некооперативного равновесия и картельного решения. Установить, больше ли все цены картеля тех цен, которые установятся при некооперативном поведении — нетривиальная задача.

Пример 19.

В ситуации ценовой конкуренции двух производителей (например, Кока-колы и Пепси-колы) спрос на товар первого равен

$$y_1(p_1, p_2) = \frac{p_2^{\beta}}{p_1^{\alpha+1}},$$

спрос на товар второго

$$y_2(p_1, p_2) = \frac{p_1^{\beta}}{p_2^{\alpha+1}},$$

затраты обоих линейны $c_j(y_j) = cy_j$ ($\alpha, \beta, c > 0$, $\beta < \alpha$). Эти функции спроса характеризуются постоянными эластичностями:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -(\alpha+1).$$

Подставив эти эластичности в условия первого порядка равновесия, получим решение

$$p_1 = p_2 = \frac{(\alpha+1)\,c}{\alpha}.$$

Видим, что в данном примере предприятия имеют доминирующие стратегии — назначить цену на уровне $(\alpha+1)\,c/\alpha$ вне зависимости от выбора конкурента. При этом равновесные объемы производства будут равны

$$y_1 = y_2 = \left(\frac{(\alpha+1)\,c}{\alpha}\right)^{\alpha+1-\beta}.$$

Функции отклика, соответствующие доминирующим стратегиям, на рисунке будут выглядеть как прямые, параллельные осям.

Если предприятия объединятся в картель, то, учитывая, что $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \beta$, из дифференциальной характеристики равновесия картеля найдем, что этот картель установил бы более высокие цены

$$p_j = \frac{(\alpha+1-\beta)\,c}{\alpha-\beta},$$

при более низких объемах производства

$$y_1 = y_2 = \left(\frac{\alpha-\beta}{(\alpha+1-\beta)\,c}\right)^{\alpha+1-\beta}. \quad ⇦$$

Модель Бертрана при возрастающих предельных издержках

Рассмотрим теперь, что произойдет, если мы откажемся от предположения о постоянстве предельных издержек при анализе ценовой конкуренции. Будем исходить из стандартного предположения об убывающей отдаче от масштаба, то есть предполагать, что предельные издержки возрастают и положительны. Кроме того, для упрощения будем предполагать, что предельные издержки возрастают неограниченно. Аналог равновесия Бертрана для случая растущих предельных издержек был бы таков: продукция продавалась бы всеми фирмами по одной и той же цене, и цена равнялась бы предельным издержкам. Мы покажем здесь однако, что при сделанных предположениях о функциях издержек описанное состояние не может соответствовать равновесию в модели ценовой конкуренции.

Обсуждение гипотез модели

Согласно предположениям Бертрана, если некоторая фирма устанавливает самую низкую цену, то все желают купить у нее. Эффективный спрос, с которым она сталкивается, совпадает с совокупным спросом. В модели Бертрана, если фирма установит цену ниже, чем цены конкурентов, и выше, чем предельные издержки, то в ее интересах и возможностях *полностью* удовлетворить спрос при данной цене. В случае же растущих предельных издержек фирма с минимальной ценой не обязательно удовлетворяет весь рыночный спрос.

Как известно, если фирма j с возрастающими предельными издержками сталкивается с фиксированной ценой p_j ($p_j \geqslant c_j'(0)$) за производимую ею продукцию, то ей выгодно выбрать такой объем производства y_j, чтобы предельные издержки были равны цене:

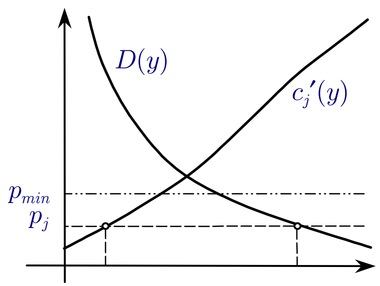


Рисунок 66

$$c_j'(y_j) = p_j.$$

Таким образом, если фирма установит цену ниже, чем цены конкурентов, то ей может оказаться невыгодным производить продукцию в количестве, равном емкости рынка при данной цене. Такая ситуация изображена на Рис. 66, где через p_{min} обозначена минимальная из цен конкурентов. Если не предполагать, что олигополист, устанавливая цену, обязуется продать по данной цене любое количество блага, на которое будет предъявлен спрос, то помимо решения о выборе *цены* следует также рассмотреть вопрос о выборе производимого *количества* блага. В этом состоит принципиальное отличие от стандартной модели Бертрана, в которой выбор количества не рассматривается, поскольку в рамках этой модели всегда выгодно производить столько, сколько можно продать.

С точки зрения теории игр можно рассматривать модель Бертрана как редуцированную игру. Исходная игра при этом является динамической, и в ней олигополисты сначала выбирают цены, а затем количества, причем фирма с минимальной ценой осуществляет выбор первой, поскольку потребители в первую очередь обращаются к ней. В случае постоянных предельных издержек можно было ограничится анализом редуцированной игры, в рассматриваемом же случае приходится анализировать полную динамическую игру.

В рассматриваемой нами модели, если участник, назначивший наименьшую цену, сочтет невыгодным полностью удовлетворять весь предъявляемый при этой цене спрос, то на рынке останется неудовлетворенный (остаточный) спрос. Величина его зависит от того, какие потребители приобретут продукцию производителя, назначившего наименьшую цену, т.е. от выбранной этим производителем **схемы рационирования**.[105] Данную проблему можно назвать *проблемой рационирования*. Процесс рационирования может осуществляться разными способами. Очевидно, что равновесие, в общем случае, должно зависеть от схемы рационирования. В то же время, на прибыль олигополиста назначившего наименьшую цену, не влияет то, какую схему он будет использовать, хотя выбранная им схема определяет величину остаточного спроса и, тем самым, величину прибыли других олигополистов.

[105] Сам термин «рационирование» не очень удачен. Здесь скорее имеется в виду структура распределения проданного количества блага между потребителями — какое количество потребит в конечном итоге каждый потребитель.

В этом параграфе мы не рассматриваем подробно характеристики равновесия в данной ситуации. Наша цель здесь продемонстрировать, что вне зависимости от схемы рационирования ценообразование по предельным издержкам не может быть равновесием.

Для упрощения мы будем проводить анализ для случая двух фирм. При большем количестве фирм выводы не изменятся, но рассуждения станут более сложными. Предположим, что первая фирма установила более низкую цену ($p_1 < p_2$) и продала y_1 единиц блага. При этом вторая фирма сталкивается с неким остаточным спросом, который мы обозначим через D_2. Этот остаточный спрос зависит как от количества блага, проданного первой фирмой, так и от назначенных цен: $D_2 = D_2(p_2, y_1, p_1)$.

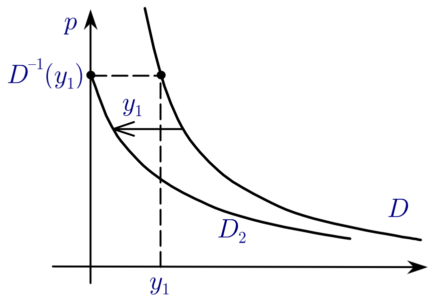


Рисунок 68

Конкретный вид функции D_2 определяется предполагаемой схемой рационирования.

Будем считать, что функция остаточного спроса $D_2(p_2, y_1, p_1)$ определена при всех неотрицательных значениях p_1, p_2 и y_1 (а не только при $p_1 < p_2$). Естественными требованиями к функции остаточного спроса являются ее невозрастание по p_2 [106] и условие

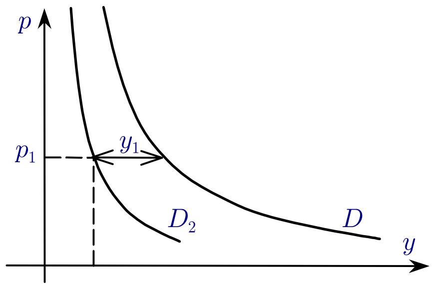


Рисунок 67

$$D_2(p, y_1, p) = D(p) - y_1.$$

Ниже приводится описание двух наиболее простых и естественных вариантов рационирования — пропорционального и эффективного рационирования.

[106] Это требование довольно естественно, если предположить невозрастание функции спроса $D(p)$ по p.

При **пропорциональном рационировании** остаточный спрос при каждой цене составляет одну и ту же долю исходного спроса:

$$D_2(p_2, y_1, p_1) = \frac{D(p_1) - y_1}{D(p_1)} D(p_2).$$

Такое рационирование может быть результатом того, что все потребители с одинаковой вероятностью попадают в число тех, кто смог купить товар у первой фирмы. При этом дополнительно предполагается, либо что предпочтения у всех одинаковые, либо что благо неделимое, и все потребители потребляют не более единицы. Потребителей должно быть «достаточно много».[107] Кроме того, следует учитывать, что такая схема рационирования возможна только в том случае, если потребители по каким-либо причинам не перепродают друг другу товары (отсутствует арбитраж)[108].

Рис. 67 иллюстрирует случай такого «справедливого» рационирования. График остаточного спроса получается из графика исходного спроса пропорциональным сжатием по горизонтали в направлении оси.

При **эффективном рационировании** продукцию по более низким ценам покупают те, кто более высоко ее ценит. В этом случае остаточный спрос получается параллельным сдвигом кривой спроса на величину y_1. Эту схему легко проиллюстрировать в ситуации, когда каждый потребитель хотел бы купить единицу блага. Тогда, если у нас есть 15 покупателей, а первая фирма производит только 5 единиц, то эти 5 единиц покупают те 5 из них, которые ценят данное благо выше, чем каждый из остальных десяти потребителей.

Хотя описанное ранее пропорциональное рационирование кажется на первый взгляд более правдоподобным, однако эффективное рационирование тоже можно обосновать. Этот способ рационирования хорошо отражает положение дел в ситуации, когда без издержек можно перепродать благо (возможен арбитраж). Тогда, если это благо случайно купил потребитель, который ценит его ниже p_2, он перепродаст ее тем, кому оно не досталась, но кто готов предложить за нее более высокую цену. Таким обра-

[107] Строго говоря, должен быть усредненным спросом бесконечного множества (континуума) потребителей.

[108] При наличии арбитража зависимость остаточного спроса от выпуска производителя в общем случае не может описываться вышеприведенной формулой.

зом, при наличии арбитража (без дополнительных затрат на сделки) любой другой способ рационирования должен в конечном итоге свестись к эффективному рационированию.

Как несложно понять, при таком способе рационирования

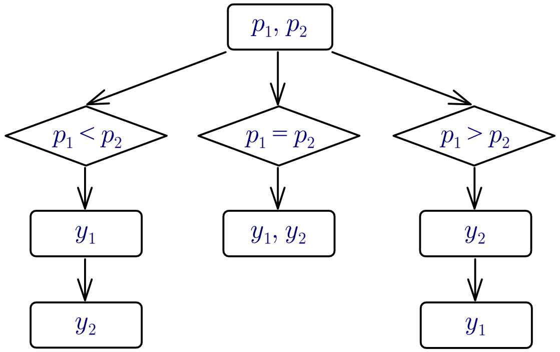


Рисунок 69

остаточный спрос с которым сталкивается вторая фирма, будет равен (при $D(p_2) \geqslant y_1$)

$$D_2(p_2, y_1, p_1) = D(p_2) - y_1$$

Из совокупного спроса $D(p_2)$ мы вычитаем то количество, которое продала первая фирма, и получаем остаточный спрос, с которым сталкивается вторая фирма. Эта формула подходит только если второй назначит такую цену, что $D(p_2) \geqslant y_1$. Если же $D(p_2) < y_1$, то величина остаточного спроса окажется равной нулю, поскольку по предположению те потребители, которые ценят товар выше $D^{-1}(y_1)$, уже приобрели товар. Таким образом, остаточная функция спроса имеет следующий вид:

$$D_2(p_2) = \begin{cases} D(p_2) - y_1, & \text{если } p_2 \leqslant D^{-1}(y_1), \\ 0, & \text{если } p_2 \geqslant D^{-1}(y_1). \end{cases}$$

Нахождение остаточного спроса при эффективном рационировании иллюстрирует Рис. 68. Остаточный спрос получается из общего спроса параллельным горизонтальным сдвигом на величину y_1.

С точки зрения благосостояния эффективное рационирование — это такое рационирование, при котором среди всех возможных вариантов рационирования (распределения между потребителями количества y_1) благосостояние совокупности потребителей максимально (отсюда сам термин).

Модель

В случае двух производителей, имеющих возрастающие предельные издержки, получаем модель, последовательность ходов в которой можно описать следующим образом:

1) Участники одновременно выбирают цены, p_1 и p_2.

2) Если один из участников, например первый, назначает более низкую цену ($p_1 < p_2$), то этот участник выбирает объем производства, y_1. Другой участник тогда сталкивается с остаточным спросом, соответствующим имеющейся схеме рационирования. Учитывая этот остаточный спрос, он выбирает объем производства y_2. Если же выбранные цены совпадают ($p_1 = p_2 = p$), то участники одновременно выбирают объемы производства, y_1 и y_2. При этом если суммарный объем производства оказался превышающим спрос при данной цене ($y_1 + y_2 > D(p)$), то спрос распределяется поровну между участниками.

Схема игры представлена на Рис. 69. Это не полное дерево игры, а только условное описание последовательности ходов.

Стратегией каждого участника является описание его действий в зависимости от предыстории игры. В данном случае стратегией j-го участника является набор

$$(p_j, \mathcal{Y}_j^{<}(p_j, p_{-j}), \mathcal{Y}_j^{=}(p_j, p_{-j}), \mathcal{Y}_j^{>}(p_j, p_{-j}, y_{-j})),$$

где первая компонента — выбранная цена, а остальные представляют собой функции (не обязательно оптимального) отклика на предшествующие действия свои и партнера. Здесь $\mathcal{Y}_j^{<}$ обозначает количество, которое выбирает первая фирма, если ее цена оказывается ниже цены конкурента, $\mathcal{Y}_j^{>}$ — если ниже, $\mathcal{Y}_j^{=}$ — в случае совпадения цен.

Как обычно, в качестве концепции решения мы рассматриваем совершенное в подыграх равновесие, то есть такую пару стратегий, которая порождает равновесие Нэша в каждой подыгре. Выигрыш участника определяется некоторой функцией Π_j, которая зависит от четырех аргументов — цен и объемов, выбранных участниками в ходе игры. Мы не будем приводить функцию $\Pi_j(p_1, p_2, y_1, y_2)$ в явном виде; ее несложно построить по описанию модели.

С целью упрощения анализа модели ее удобно редуцировать, заменив $\mathcal{Y}_j^{<}(\cdot)$, $\mathcal{Y}_j^{=}(\cdot)$ и $\mathcal{Y}_j^{>}(\cdot)$ на соответствующие функции оптимального отклика, которые можно обозначить через $R_j^{<}(\cdot)$, $R_j^{=}(\cdot)$ и $R_j^{>}(\cdot)$. Эти функции показывают объем производства, который производителю выгодно выбрать при данной предыстории игры.

Редуцированная модель будет статической игрой, в которой участники выбирают только цены p_1 и p_2.

Сравнение с равновесием Бертрана

Рассмотрим вектор цен и выпусков $(\bar p,\ \bar p,\ \bar y_1,\ \bar y_2)$, такой что предельные издержки у обоих олигополистов равны цене:

$$c_1'(\bar y_1) = \bar p \quad \text{и} \quad c_2'(\bar y_2) = \bar p,$$

а суммарное производство полностью удовлетворяет спрос при этих ценах:

$$D(\bar p) = \bar y_1 + \bar y_2.$$

Этот исход естественно считать аналогом равновесия Бертрана.

Мы хотим показать, что набор стратегий $(\bar p,\ \bar p)$ не может соответствовать равновесию в редуцированной модели. Причина этого заключается в том, что каждый производитель заинтересован увеличить цену, уменьшив объем продаж. Сокращение прибыли от уменьшения объема продаж в первом приближении перекрывается эффектом увеличения цены.

Графическая иллюстрация этих рассуждений приведена на Рис. 70. Прибыль второй фирмы равна площади между кривой ее предельных издержек и ценой (плюс постоянные издержки $c_2(0)$). Если вторая фирма немного повысит свою цену с $\bar p$ до p_2, то ее прибыль, с одной стороны, вырастет за счет этого на величину прямоугольника A, а, с другой стороны, упадет за счет сокращения объема продаж на величину треугольника B. При малом изменении цены первый эффект превышает второй, что и видно из графика.

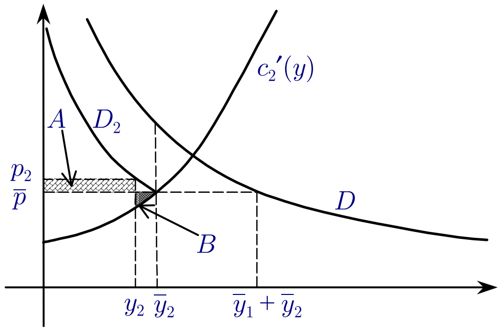


Рисунок 70

Теперь докажем более формально, что стратегии $(\bar p, \bar p, \bar y_1, \bar y_2)$ не может соответствовать состоянию равновесия при ценовой конкуренции. Пусть второй производитель ожидает, что первый производитель назначил цену $\bar p$. Нам достаточно показать, что в этом случае второму выгодно назначить цену p_2 выше $\bar p$.

Обозначим тот объем производства, который второй олигополист выберет в том случае, если будут назначены цены $(\bar p, p_2)$, где $p_2 \geqslant \bar p$, через $\bar R_2(p_2)$, т.е.

$$\bar R_2(p_2) = R_2^{>}(\bar p,\ p_2,\ R_1^{<}(\bar p,\ p_2)) \ \text{при}\ p_2 > \bar p$$

и

$$\bar R_2(\bar p) = R_2^{=}(\bar p,\ \bar p),$$

где $R_j^{<}(\cdot)$, $R_j^{=}(\cdot)$ и $R_j^{>}(\cdot)$ — введенные выше функции оптимального отклика. Мы не будем полностью анализировать, какой вид имеют функции отклика (читатель может проделать такой анализ самостоятельно). Нам потребуется только несколько фактов относительно этих функций. При данной цене p_j, если нет ограничений на сбыт продукции, j-му производителю выгодно выбрать такой объем производства y_j, чтобы предельные издержки были равны цене:

$$c_j'(y_j) = p_j.$$

Отсюда следует, что $R_1^{<}(\bar p,\ p_2)) = \bar y_1$ и $R_2^{=}(\bar p,\ \bar p) = \bar R_2(\bar p) = \bar y_2$.

Если первый производитель продает $\bar y_1$ по цене $\bar p$, то при $p_2 > \bar p$ второму производителю не удается продать столько, сколько он бы хотел, поэтому ему выгодно выбрать выпуск в точности на уровне остаточного спроса. (Докажите это.) Таким образом, при $p_2 > \bar p$

$$\bar R_2(p_2) = R_2^{>}(\bar p,\ p_2,\ \bar y_1) = D_2(p_2,\ \bar y_1,\ \bar p).$$

Если выполнено естественное предположение о функции остаточного спроса:

$$D_2(\bar p,\ \bar y_1,\ \bar p) = D(\bar p) - \bar y_1,$$

то $D_2(\bar p,\ \bar y_1,\ \bar p) = \bar y_2 = \bar R_2(\bar p)$.

Таким образом, при всех $p_2 \geqslant \bar p$ выполнено

$$\bar R_2(p_2) = D_2(p_2,\ \bar y_1,\ \bar p).$$

Если предполагать, что исходная функция остаточного спроса, $D_2(\cdot)$, дифференцируема по p_2 (по крайней мере, при $p_2 \geqslant \bar p$), то $\bar R_2(p_2)$ также дифференцируема.

При $y_2 = \bar R_2(p_2)$ прибыль второго производителя будет равна

$$\Pi_2(p_2) = \bar R_2(p_2)\, p_2 - c_2(\bar R_2(p_2)),\ \ p_2 \geqslant \bar p.$$

Для доказательства утверждения достаточно показать, что производная прибыли в точке $p_2 = \bar p$ положительна. Действительно, при $p_2 \geqslant \bar p$

$$\Pi_2'(p_2) = \bar R_2(p_2) + [p_2 - c_2'(\bar R_2(p_2))] \cdot \bar R_2'(p_2).$$

При $p_2 = \bar p$, учитывая, что $\bar R_2(\bar p) = \bar y_2$, получим

$$\Pi_2'(\overline{p}) = \overline{y}_2 + [\overline{p} - c_2'(\overline{y}_2)] \cdot \overline{R}_2'(\overline{p}).$$

Поскольку по определению $\overline{p} = c_2'(\overline{y}_2)$, то

$$\Pi_2'(\overline{p}) = \overline{y}_2.$$

Таким образом, при $\overline{y}_2 > 0$ выполнено $\Pi_2'(\overline{p}) > 0$.

Мы не задаемся здесь достаточно сложным вопросом об условиях существования равновесия. Однако ясно, что если в ценовой конкуренции и существует равновесие, то продажи не осуществляются по ценам, равным предельным издержкам. Таким образом, анализ показывает, что как только мы изменяем предположение об одинаковости и постоянстве предельных издержек, то получаем, что вывод модели Бертрана неверен.

Динамический вариант модели Бертрана (повторяющиеся взаимодействия)

Наиболее простой динамический вариант модели Бертрана — две фирмы с постоянными и одинаковыми предельными издержками c, участвующие в ценовой конкуренции в течение (бесконечного) числа периодов времени. Каждая фирма максимизирует приведенную прибыль,

$$\Pi_j = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \cdot \Pi_{jt},$$

где Π_{jt} — прибыль фирмы i в период t, а $\delta-$ дисконтирующий множитель.

В этой динамической игре Бертрана стратегия фирмы j определяет цену p_{jt}, которую взимает фирма в период t как функцию от всей «предыстории» ценовой конкуренции $H_{t-1} = \{\overline{p}_{1\tau}, \overline{p}_{2\tau}\}_{\tau=1}^{t-1}$.

Общий интерес представляют стратегии следующего вида

$$\overline{p}_{j\tau} = \begin{cases} p^{M}, & \text{если } \overline{p}_{i\tau} = \overline{p}^{M} \text{ для всех } i, \tau, 1 \leqslant \tau \leqslant t-1 \\ c & \text{в противном случае} \end{cases}$$

где p^{M} — монопольная цена. Согласно этой стратегии каждая фирма в период 1 назначает монопольную цену за свою продукцию. Затем, в каждый последующий период она назначает цену p^{M}, если во все предыдущие периоды обе фирмы назначали цену p^{M}, и цену, равную ее предельным издержкам, в противном случае. Заметим, что если обе фирмы, используют указанные стратегии, то в результате они взимают в каждый период монопольно высокие цены p^{M}.

Можно рассматривать назначение монопольной цены как неявное соглашение между олигополистами. В этих терминах каждая из фирм придерживается соглашения, если в предшествующие периоды обе фирмы не нарушали его, и нарушает соглашение, если другая фирма (или она сама) в прошлом нарушила соглашение.

При некоторых предположениях о дисконтирующих множителях указанные стратегии составляют равновесие. Заметим, что этот результат верен только для бесконечной игры. В бесконечной игре единственным равновесием будет такой набор стратегий, согласно которому каждая фирма в каждом из периодов назначает цену на уровне предельных издержек. Таким образом, в конечной игре описанный Бертраном исход реализуется в каждом из периодов. Действительно, используя обратную индукцию, рассмотрим последний период. Поскольку выигрыши в нем не зависят от действий игроков в предыдущие периоды, то фактически соответствующая игра представляет собой обычную модель Бертрана. Продолжая эти рассуждения, мы получим равновесие Бертрана в каждом из периодов.

Теорема 37.
Пусть функция спроса является непрерывной и строго убывает Указанные выше стратегии составляют совершенное в подыграх равновесие рассматриваемой динамической модели Бертрана тогда и только тогда, когда $\delta \geqslant 1/2$.

Доказательство.

Докажем прежде всего, что указанные стратегии составляют равновесие Нэша. Для этого нужно доказать, что ни одному из игроков не выгодно отклоняться от своей стратегии, если другой игрок придерживается своей стратегии.

Если оба игрока будут придерживаться своих равновесных стратегий, то прибыль каждого из них за один период составит

$$\frac{1}{2}\Pi^{M} = \frac{1}{2}(p^{M} - c)D(p^{M})$$

Совокупная прибыль за все периоды будет в этом случае равна

$$\Pi_j = \frac{1}{2}\Pi^{M} \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} = \frac{1}{2}\frac{\Pi^{M}}{1-\delta}.$$

Предположим, что один из игроков в первом периоде назначил цену отличную от монопольной:

$$p < p^{м}.$$

(Если игрок в первом периоде назначит цену выше монопольной, то его общая прибыль будет равна нулю, поэтому ему не выгодно назначать такую цену.)

Этот игрок в первом периоде получит весь спрос целиком и его прибыль составит

$$(p - c)D(p).$$

Во все последующие периоды его прибыль будет нулевая, поскольку другой игрок, придерживаясь своей стратегии, будет наказывать его за отклонение от соглашения: будет держать цену на уровне предельных издержек. Отклонение от стратегии в первом периоде будет выгодным, если

$$(p - c)D(p) > \frac{1}{2}\frac{\Pi^{м}}{1 - \delta}.$$

При непрерывной кривой спроса игрок может сделать прибыль $(p - c)D(p)$ сколь угодно близкой к монопольной прибыли $\Pi^{м} = (p^{м} - c)D(p^{м})$. Таким образом, чтобы рассматриваемый набор стратегий мог быть равновесным, требуется чтобы

$$1 \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \delta}$$

или

$$\delta \geqslant \frac{1}{2}.$$

Мы доказали, что в первом периоде при $\delta \geqslant 1/2$ игроку нет смысла отклоняться от своей стратегии.

Выгодно ли ему делать это в последующие периоды? Нет, поскольку ситуация будет той же — прибыли останутся теми же с точностью до возрастающего линейного преобразования (считая дисконтирование и прибыль в периоды до нарушения соглашения).

Таким образом, доказано, что рассматриваемый набор стратегий является равновесием Нэша. Нам осталось доказать, что он будет равновесием Нэша в каждой подыгре. Для этого достаточно понять, что с точностью до возрастающего линейного преобразования выигрышей каждая подыгра повторяет исходную игру. ■

Таким образом, доказано, что в рассмотренной бесконечной повторяющейся игре существует Парето-оптимальное (с точки

зрения олигополистов) равновесие. Фактически же это равновесие не будет единственным. Можно придумать бесконечно много различных пар стратегий, составляющих совершенное в подыграх равновесие, и среди этих равновесий есть не Парето-оптимальные.

Задачи

1. Найдите равновесие в модели Бертрана в случае неодинаковых (но постоянных) предельных издержек.

2. Сформулируйте и докажите существование равновесия в модели с дифференцированными продуктами. (Предположите, что для каждого из олигополистов вне зависимости от цен остальных олигополистов существует цена выше которой спрос равен нулю. Остальные условия сходны с условиями использованными при доказательстве существования в модели Курно. Воспользуйтесь теоремой Нэша.)

3. На рынке действуют две одинаковые фирмы. Спрос на продукцию j-й фирмы зависит от собственной цены p_j и цены конкурента p_{-j}:

$$y_j = \alpha^2 - \alpha p_j + (\alpha - 1)p_{-j} \quad (\alpha > 1).$$

Предельные издержки равны 1. Рассчитать равновесие при ценовой конкуренции фирм. Сравнить с картелем.

4. Пусть есть две фирмы, выпускающих два разных, но связанных в потреблении товара, выбирают цены $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$ которые влияют на объемы их спроса. Функции спроса заданы уравнениями:

$$y_1(p_1, p_2) = 6 - 2p_1 + p_2,$$
$$y_2(p_1, p_2) = 10 - 3p_2 + p_1.$$

Найти равновесные цены, если издержки у обеих фирм нулевые.

5. Модель олигополии с ценовым лидерством

В модели **олигополии с ценовым лидерством** лидер (фирма с номером 1) назначает цену p, а остальные ($j = 2, ..., n$) выбирают выпуск, считая цену фиксированной. С точки зрения теории игр, модель представляет собой динамическую игру с почти совершенной информацией, состоящую из двух этапов. В определенном смысле, модель олигополии с ценовым лидерством находится в том же отношении к модели Бертрана что и модель Штакельберга к модели Курно. Ее анализ фактически повторяет анализ модели Штакельберга и ниже будет приведен в упрощенном и схематичном виде.

Опишем способ нахождения равновесия с помощью обратной индукции. Сначала следует рассмотреть второй этап игры. На втором этапе участники, отличные от лидера, одновременно выбирают свои объемы производства. Таким образом формируются отклики $R_j(p)$, которые являются решением соответствующих задач:

$$py_j - c_j(y_j) \to \max_{y_j \geqslant 0}.$$

(Мы будем предполагать, что отклики однозначны, и $R_j(p)$ являются функциями, определенными при всех неотрицательных ценах.) Эти задачи, очевидно, совпадают с задачами фирм при совершенной конкуренции, а функции отклика $R_j(p)$ являются соответствующими функциями предложения. При соответствующих предположениях функции отклика удовлетворяют условиям первого порядка:

$$c_j'(R_j(p)) = p,$$

то есть функции $R_j(p)$ являются обратными к функциям предельных издержек $c_j'(y_j)$[109]. Обычно предполагают, что функции издержек характеризуются убывающей отдачей, так что функции предельных издержек возрастают и поэтому являются обратимыми.

В свою очередь, лидер выбирает цену, ориентируясь на функции отклика. Для каждого уровня цены, выбранной лидером, можно определить остаточный спрос:

$$D_1(p) = D(p) - \sum_{j=2}^{n} R_j(p).$$

Фактически, лидера можно рассматривать как монополиста, сталкивающегося с функцией спроса $D_1(p)$. Таким образом, лидер решает задачу

$$\Pi_1 = D_1(p)p - c_1(D_1(p)) \to \max_p.$$

На Рис. 71 дана иллюстрация равновесия олигополии с ценовым лидерством для случая $n = 4$.

[109] Предполагается, что уравнение имеет решение при всех $p \geqslant 0$.

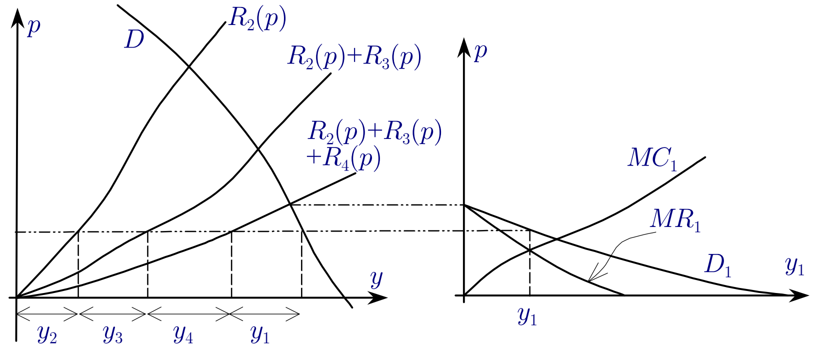


Рисунок 71

Задачи

1. Сформулируйте и докажите теорему существования равновесия в модели ценового лидерства. (*Подсказка*: В качестве образца возьмите доказательство существования равновесия в модели Штакельберга.)

2. Пусть в дуопольной отрасли, в которой фирмы конкурируют в соответствии с моделью ценового лидерства, функция издержек лидера и ведомого равны $c_1(y_1) = c\,y_1$ и $c_2(y_2) = y_2^2$ соответственно, а функция спроса равна $D(p) = a - bp$. Показать, что суммарный выпуск будет больше, чем в равновесии Курно, но меньше, чем Парето-оптимальный. Показать равновесие графически.

3. Двое олигополистов конкурируют по типу модели ценового лидерства. Лидер имеет нулевые предельные издержки, а ведомый имеет квадратичную функцию издержек: $c_2(y_2) = y_2^2/2$. Спрос в отрасли описывается функцией $D(p) = 8 - p$. Сколько суммарной прибыли выиграли бы олигополисты, если бы сумели объединиться в одну фирму (картель)?

Использованная литература

- Friedman, J.W. *Oligopoly and the Theory of Games*, North-Holland, 1979.
- Fudenberg, D., and J. Tirole, *Game Theory*, MIT Press, 1991.
- Gibbons, R. *Game Theory for Applied Economists*, Princeton University Press, 1992.
- *Handbook of Industrial Organization*, Vol. 1, North-Holland, 1992.
- *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. 2,4, North-Holland, 1982.
- Kreps, D. M. *A Course in Microeconomic Theory*, Harvester Wheatsheaf, 1990.
- Mas-Colell, A., M. Whinston, and J. Green. *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, 1995.
- Tirole, J. *The Theory of Industrial Organization*, MIT Press, 1994.
- Varian, H. *Microeconomic Analysis*, 3rd ed., Norton, 1992.
- Wolfstetter, E. "Oligopoly and industrial organization," *Humboldt Discussion Paper*, August 1995.

Предметный указатель

К

Л

М

Н

О

П

Р

С

Т

У

Ф

Ц

Ч

Ш

Э