

Министерство образования Российской Федерации
Воронежский государственный университет



**КОМПЬЮТЕРНЫЙ
ПРАКТИКУМ**

**ЭКОНОМЕТРИКА
СЛОЖНЫХ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ
ПРОЦЕССОВ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
для студентов, обучающихся
по специальностям
060200 «Экономика труда»,
060600 «Мировая экономика»,
061800 «Математические методы
в экономике»

Воронеж – 2004

Утверждено научно-методическим советом
экономического факультета,
протокол № 1 от 29.01.2004г.

Составители: Давнис В.В.,
Тинякова В.И.,
Мокшина С.И.,
Воищева О.С.,
Щекунских С.С.

Учебное пособие подготовлено на кафедре информационных технологий и математических методов в экономике экономического факультета Воронежского государственного университета. Рекомендуется для студентов 3 курса дневного и вечернего отделений экономического факультета, а также магистров первого года обучения.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Компьютерное моделирование экономических процессов становится не только обязательным, но и наиболее востребованным элементом подготовки современного экономиста. Данное пособие целиком посвящено этому вопросу. Главным образом оно ориентировано на формирование у студентов навыков практического выполнения достаточно сложного комплекса расчетов по построению эконометрических моделей и проведению с ними вычислительных экспериментов.

В практикум включены задания по темам продвинутого курса эконометрики, изучение которых предусматривается во втором семестре годового курса или магистерскими программами. В начале каждой темы приводится сводка необходимых для проведения расчетов формул. За сводкой формул следуют примеры решения типовых задач. Заданиями предусматривается не только проведение расчетов необходимых для построения эконометрических моделей, но и содержательная интерпретация результатов моделирования. Для проверки знаний и закрепления навыков в пособии предусмотрены задания для самостоятельной работы.

Решения задач практически по всем темам, кроме одной («Модели бинарного выбора»), выполнены в Microsoft Excel. Однако это не исключает возможность выполнения этих же заданий в любом статистическом (STATISTIKA, SPSS, SAS) или эконометрическом (EViews, STATA) пакетах.

Ориентация авторов на Excel обусловлена следующими моментами. Во-первых, это очень мощный, достаточно универсальный табличный процессор, включающий в себя надстройку «Пакет анализа» и библиотеку из множества функций. Кроме того, он является тем самым программным продуктом, в котором современный специалист проводит основную массу своих расчетов. Во-вторых, Excel предоставляет студентам возможность «прочувствовать» все детали и тонкости изучаемых методов, что естественным образом повышает уровень усвояемости учебного материала.

1. МУЛЬТИКОЛЛИНЕАРНОСТЬ

1.1. Расчетные формулы

i. 1.1.1. Ридж-оценки вектора коэффициентов регрессии

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + a\mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y},$$

где $a \in [\underline{a}; \bar{a}]$ (как правило, $\underline{a} = 0,1$; $\bar{a} = 0,4$).

1.1.2. Стандартная ошибка $S_{\hat{b}_k}$ k -ой ридж-оценки коэффициента регрессии, равная корню квадратному из соответствующего диагонального элемента ковариационной матрицы векторной оценки

$$S_{\hat{b}} = \hat{s} \sqrt{(\mathbf{X}'\mathbf{X} + a\mathbf{I})^{-1}},$$

где $\hat{s}^2 = \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n - m - 1}$ рассчитывается по остаткам $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{b}}$.

1.2. Решение типовых задач

Задание 1.2.1. Руководство одного из крупнейших коммерческих банков ОАО «Александрит» ищет пути уменьшения расходов, связанных с основным видом деятельности – размещением вкладов физических лиц. С этой целью было решено проанализировать, в какой мере среднеквартальное число клиентов (y) определяется величиной затрат на рекламу (x_1) и суммой расходов на связи с общественностью (x_2). Данные об этих показателях за последние 20 кварталов представлены в табл. 1.2.1.

Таблица 1.2.1

| t | y | x_1 | x_2 | t | y | x_1 | x_2 |
|-----|---------|--------|---------|-----|---------|--------|---------|
| 1 | 21,324 | 11,670 | 42,012 | 11 | 114,123 | 63,330 | 227,988 |
| 2 | 27,765 | 15,000 | 54,000 | 12 | 123,759 | 68,330 | 245,988 |
| 3 | 30,954 | 16,670 | 60,012 | 13 | 138,355 | 76,680 | 276,048 |
| 4 | 45,125 | 25,000 | 90,000 | 14 | 138,124 | 76,680 | 276,048 |
| 5 | 58,123 | 32,220 | 115,992 | 15 | 141,786 | 78,330 | 281,988 |
| 6 | 60,473 | 33,330 | 119,988 | 16 | 135,668 | 75,000 | 270,000 |
| 7 | 69,965 | 38,330 | 137,988 | 17 | 146,771 | 81,120 | 292,032 |
| 8 | 75,456 | 41,670 | 150,012 | 18 | 149,768 | 82,780 | 298,008 |
| 9 | 92,667 | 51,110 | 183,996 | 19 | 158,234 | 87,780 | 316,008 |
| 10 | 105,457 | 58,330 | 209,988 | 20 | 167,463 | 92,770 | 333,972 |

Решение с помощью табличного процессора Excel

1. Ввод исходных данных.
2. Построение регрессионного уравнения с использованием «Пакета анализа» (рис. 1.2.1).

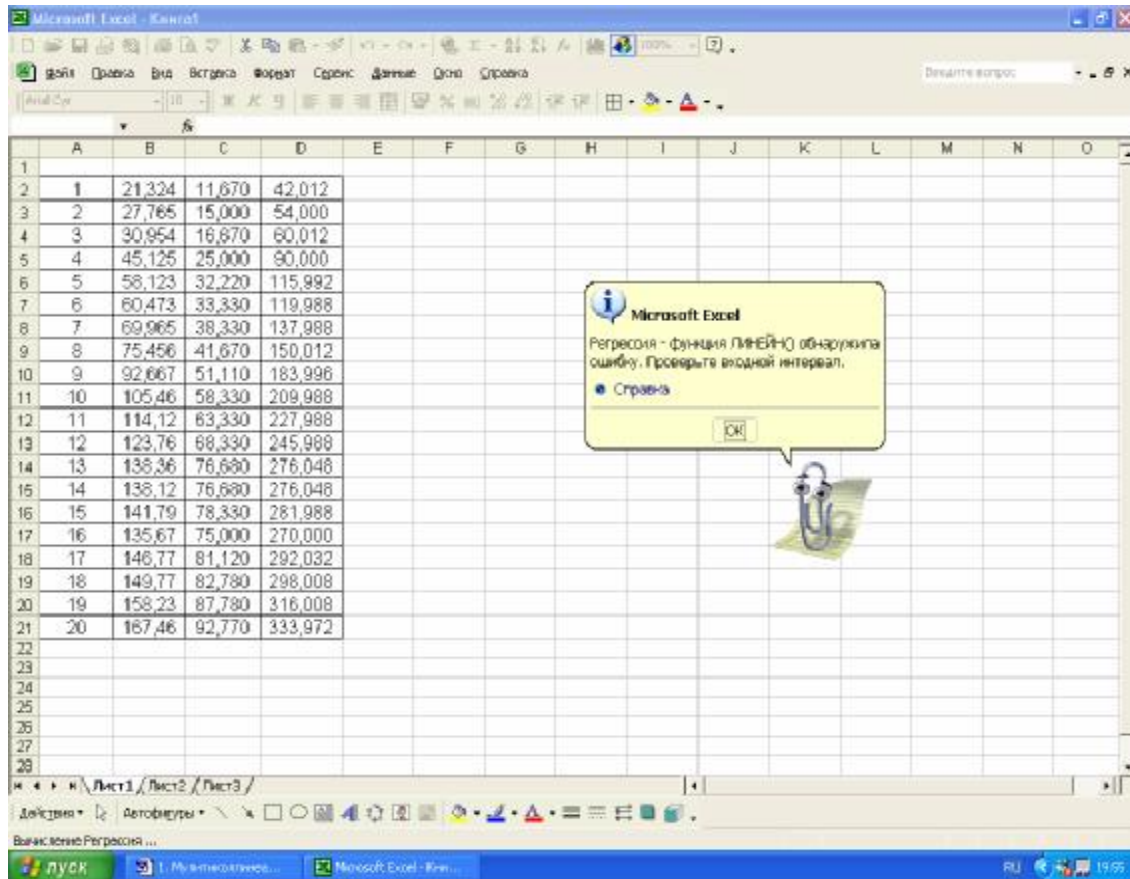


Рис. 1.2.1.

3. Полученный результат позволяет выдвинуть гипотезу о наличии эффекта мультиколлинеарности.
 - 3.1. Формирование матрицы $(X'X)$ с помощью функций **ТРАНСП** и **МУМНОЖ**

| | |
|----------|----------|
| 74577,79 | 268480 |
| 268480 | 966528,2 |

- 3.2. Вычисление определителя матрицы $(X'X)$ с помощью функции **МОПР** и по формуле

$$\Delta = 74577,79 \cdot 966528,2 - 268480 \cdot 268480 = 0.$$

Равенство определителя нулю говорит о наличии явления мультиколлинеарности в строгом смысле. Следовательно, необходимо исключить один из факторов и перестроить модель заново.

4. Построение регрессионной модели с единственным фактором – расходами на связи с общественностью (см. Вывод итогов 1.1).

ВЫВОД ИТОГОВ 1.1

| <i>Регрессионная статистика</i> | |
|---------------------------------|----------|
| Множественный R | 0,999982 |
| R-квадрат | 0,999964 |
| Нормированный R-квадрат | 0,999962 |
| Стандартная ошибка | 0,293376 |
| Наблюдения | 20 |

| <i>Дисперсионный анализ</i> | | | | | | |
|-----------------------------|-----------|-----------|-----------|----------|---------------------|--|
| | <i>df</i> | <i>SS</i> | <i>MS</i> | <i>F</i> | <i>Значимость F</i> | |
| Регрессия | 1 | 43402,52 | 43402,52 | 504271,3 | 1,74E-41 | |
| Остаток | 18 | 1,549256 | 0,08607 | | | |
| Итого | 19 | 43404,07 | | | | |

| | <i>Коэффициенты</i> | <i>Стандартная ошибка</i> | <i>t-статистика</i> | <i>P-значение</i> | <i>Нижние 95%</i> | <i>Верхние 95%</i> |
|----------------|---------------------|---------------------------|---------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| Y-пересечение | 0,537742 | 0,154752 | 3,47486 | 0,002703 | 0,21262 | 0,862864 |
| Переменная X 1 | 0,499892 | 0,000704 | 710,1206 | 1,74E-41 | 0,498413 | 0,501371 |

Таким образом, построенная модель имеет вид

$$\hat{y}_t = 0,5377 + 0,4999 x_{1t}.$$

Высокий коэффициент корреляции свидетельствует о существенной взаимосвязи моделируемого показателя с фактором. Сравнение расчетного значения F -критерия с табличным $F_{0,95}(1, 19) = 4,38$ позволяет сделать вывод об адекватности построенной модели. Сравнение расчетных значений t -статистик с табличным $t_{0,95}(19) = 2,093$ говорит о значимости включенного в модель фактора x_1

Задание 1.2.2. Известно, что стоимость выпуска газеты в значительной степени определяется величиной типографских расходов. Для того,

чтобы иметь возможность воздействовать на эту стоимость, издатели наиболее популярных газет решили изучить факторы, определяющие сумму годовых затрат на печать газет, и оценить степень их влияния. С этой целью для 20 городов России были собраны данные о годовых расходах на печать (y , млн. руб.), объемах розничной продажи газеты в городе (млн. руб.) и количества семей в городе. Заметим, что для факторов были взяты их логарифмы (x_1 и x_2 , соответственно) с целью уменьшения разброса данных, а следовательно, и упрощения их обработки. Все эти данные представлены в табл. 1.2.2. Постройте модель множественной регрессии, отражающую зависимость среднегодовых расходов на издание газеты от соответствующих факторов.

Таблица 1.2.2

| № п.п. | y | x_1 | x_2 | № п.п. | y | x_1 | x_2 |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1. | 21,452 | 2,1371 | 1,0682 | 11. | 20,055 | 2,1473 | 1,0746 |
| 2. | 16,935 | 1,8620 | 0,9315 | 12. | 21,535 | 2,3686 | 1,1847 |
| 3. | 18,150 | 1,9946 | 0,9974 | 13. | 24,352 | 2,6759 | 1,3378 |
| 4. | 19,950 | 2,1912 | 1,0968 | 14. | 19,550 | 2,1483 | 1,0747 |
| 5. | 19,350 | 2,1265 | 1,0639 | 15. | 14,150 | 1,5547 | 0,7754 |
| 6. | 17,350 | 1,9065 | 0,9531 | 16. | 14,550 | 1,5982 | 0,7998 |
| 7. | 25,150 | 2,7656 | 1,3819 | 17. | 16,550 | 1,8184 | 0,9099 |
| 8. | 15,371 | 1,6863 | 0,8438 | 18. | 16,950 | 1,8624 | 0,9317 |
| 9. | 13,957 | 1,5329 | 0,7662 | 19. | 26,381 | 2,8951 | 1,4472 |
| 10. | 27,150 | 2,9837 | 1,4914 | 20. | 16,580 | 1,8189 | 0,9098 |

Решение с помощью табличного процессора Excel

1. Ввод исходных данных.
2. Построение регрессионного уравнения с использованием «Пакета анализа» (см. Вывод итогов 1.2) и анализ полученных результатов.

Анализ вывода итогов 1.2 свидетельствует о том, что полученные стандартные ошибки значительно больше самих расчетных коэффициентов. Коэффициенты при факторах x_1 и x_2 незначимы, так как для них P -значение больше 0,05. В то же время сравнение расчетного значения F -критерия с табличным $F_{0,95}(2, 17) = 3,59$ позволяет сделать вывод об адекватности рассматриваемой модели. Коэффициенты корреляции (см. табл. 1.2.3) говорят о существенной взаимосвязи модели-

руемого показателя с факторами. Одной из причин противоречивости результатов модели является тесная взаимосвязь между факторами. Все эти факты говорят о том, что изучаемая модель требует более детального анализа.

Таблица 1.2.3

| | | | |
|-----------------------|-------------|-----------------------|-----------------------|
| | <i>y</i> | <i>x</i> ₁ | <i>x</i> ₂ |
| <i>y</i> | 1 | 0,993536978 | 0,993500936 |
| <i>x</i> ₁ | 0,993536978 | 1 | 0,999994612 |
| <i>x</i> ₂ | 0,993500936 | 0,999994612 | 1 |

ВЫВОД ИТОГОВ 1.2

| <i>Регрессионная статистика</i> | |
|---------------------------------|---------|
| Множественный R | 0,99358 |
| R-квадрат | 0,98720 |
| Нормированный R-квадрат | 0,98570 |
| Стандартная ошибка | 0,48029 |
| Наблюдения | 20 |

| <i>Дисперсионный анализ</i> | | | | | |
|-----------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------------------|
| | <i>df</i> | <i>SS</i> | <i>MS</i> | <i>F</i> | <i>Значимость F</i> |
| Регрессия | 2 | 302,52769 | 151,26385 | 655,72475 | 0,00000 |
| Остаток | 17 | 3,92159 | 0,23068 | | |
| Итого | 19 | 306,44928 | | | |

| | <i>Коэффициенты</i> | <i>Стандартная ошибка</i> | <i>t-статистика</i> | <i>P-значение</i> | <i>Нижние 95%</i> | <i>Верхние 95%</i> |
|----------------|---------------------|---------------------------|---------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| Y-пересечение | 0,12398 | 0,55176 | 0,22469 | 0,82490 | -1,04014 | 1,28810 |
| Переменная X 1 | 35,26429 | 76,72580 | 0,45961 | 0,65162 | -126,61323 | 197,14181 |
| Переменная X 2 | -52,31648 | 153,53595 | -0,34074 | 0,73747 | -376,24947 | 271,61650 |

3. Проверка условия невырожденности матрицы ($X'X$).

3.1. Формирование матрицы ($X'X$) с помощью функций **ТРАНСП** и **МУМНОЖ**.

| | |
|----------|----------|
| 92,14842 | 46,07888 |
| 46,07888 | 23,04179 |

3.2. Вычисление определителя матрицы ($X'X$) с помощью функции **МОПР**.

$$\Delta = 0,000939286.$$

Близость определителя к нулю, а также проведенный выше анализ позволяют сделать вывод о наличии частичной мультиколлинеарности.

4. Устранение эффекта мультиколлинеарности с помощью ридж-оценки.

4.1. Включение в модель дополнительной переменной x_0 , принимающей единственное значение, равное 1.

4.2. Расчет коэффициентов регрессии с использованием матричных функций Excel.

4.2.1. Формирование матрицы, обратной к матрице системы нормальных уравнений $(X'X + aI)^{-1}$ с помощью функций **ТРАНСП**, **МУМНОЖ** и **МОБР** при $a \in [0,1; 0,4]$.

При $a = 0,1$

| | | |
|----------|----------|----------|
| 1,268975 | 0,124448 | -1,40753 |
| 0,124448 | 10,05558 | -20,1794 |
| -1,40753 | -20,1794 | 41,5964 |

При $a = 0,2$

| | | |
|----------|----------|----------|
| 1,268965 | 0,117394 | -1,39341 |
| 0,117394 | 5,055277 | -10,1733 |
| -1,39341 | -10,1733 | 21,57345 |

При $a = 0,3$

| | | |
|----------|----------|----------|
| 1,268962 | 0,115042 | -1,38871 |
| 0,115042 | 3,388073 | -6,83709 |
| -1,38871 | -6,83709 | 14,89738 |

При $a = 0,35$

| | | |
|----------|----------|----------|
| 1,268961 | 0,11437 | -1,38736 |
| 0,11437 | 2,911689 | -5,88381 |
| -1,38736 | -5,88381 | 12,98978 |

При $a = 0,4$

| | | |
|----------|----------|----------|
| 1,26896 | 0,113866 | -1,38635 |
| 0,113866 | 2,554389 | -5,16882 |
| -1,38635 | -5,16882 | 11,55902 |

4.2.2. Получение вектора оценок коэффициентов регрессии путем умножения обратной матрицы на матрицы $(X'X + aI)^{-1}$ и $X'y$ при различных значениях a . Оформление результатов в виде табл. 1.2.4.

Таблица 1.2.4

| | $a = 0,1$ | $a = 0,2$ | $a = 0,3$ | $a = 0,35$ | $a = 0,4$ |
|-------------|-----------|-----------|-----------|------------|-----------|
| \hat{b}_0 | 0,100097 | 0,100092 | 0,100091 | 0,10009 | 0,10009 |
| \hat{b}_1 | 18,33722 | 18,3339 | 18,33279 | 18,33248 | 18,33224 |
| \hat{b}_2 | -18,4439 | -18,4373 | -18,4351 | -18,4345 | -18,4340 |

5. Расчет стандартных ошибок коэффициентов регрессии.

5.1. Вычисление остаточной дисперсии при различных значениях a и оформление результатов расчетов в виде табл. 1.2.5.

Таблица 1.2.5

| <i>Квадраты отклонений расчетных от фактических значений</i> | | | | |
|---|------------|------------|------------|------------|
| $a = 0,1$ | $a = 0,2$ | $a = 0,3$ | $a = 0,35$ | $a = 0,4$ |
| 3,4792082 | 3,4792200 | 3,4792239 | 3,4792250 | 3,4792258 |
| 0,0165009 | 0,0165014 | 0,0165016 | 0,0165017 | 0,0165017 |
| 0,0167740 | 0,0167739 | 0,0167739 | 0,0167739 | 0,0167739 |
| 0,0102582 | 0,0102597 | 0,0102602 | 0,0102603 | 0,0102604 |
| 0,0148038 | 0,0148047 | 0,0148049 | 0,0148050 | 0,0148051 |
| 0,0171801 | 0,0171795 | 0,0171793 | 0,0171792 | 0,0171792 |
| 0,0309093 | 0,0309073 | 0,0309066 | 0,0309064 | 0,0309063 |
| 0,0077689 | 0,0077694 | 0,0077695 | 0,0077696 | 0,0077696 |
| 0,0145113 | 0,0145104 | 0,0145101 | 0,0145100 | 0,0145100 |
| 0,0241942 | 0,0241935 | 0,0241933 | 0,0241932 | 0,0241931 |
| 0,1594127 | 0,1594083 | 0,1594069 | 0,1594065 | 0,1594061 |
| 0,0219283 | 0,0219290 | 0,0219292 | 0,0219292 | 0,0219293 |
| 0,0202607 | 0,0202605 | 0,0202604 | 0,0202604 | 0,0202603 |
| 0,0149396 | 0,0149403 | 0,0149405 | 0,0149406 | 0,0149406 |
| 0,0248156 | 0,0248109 | 0,0248094 | 0,0248089 | 0,0248086 |
| 0,0110599 | 0,0110605 | 0,0110607 | 0,0110608 | 0,0110608 |
| 0,0126209 | 0,0126216 | 0,0126218 | 0,0126219 | 0,0126220 |
| 0,0137129 | 0,0137134 | 0,0137135 | 0,0137136 | 0,0137136 |
| 0,0132457 | 0,0132453 | 0,0132452 | 0,0132451 | 0,0132451 |
| 0,0087153 | 0,0087154 | 0,0087155 | 0,0087155 | 0,0087155 |
| <i>Сумма квадратов отклонений расчетных от фактических значений</i> | | | | |
| 3,9328205 | 3,9328249 | 3,9328264 | 3,9328268 | 3,9328271 |
| <i>Остаточная дисперсия</i> | | | | |
| 0,23134238 | 0,23134264 | 0,23134273 | 0,23134275 | 0,23134277 |

5.2. Получение стандартных ошибок в виде корня квадратного из произведения диагональных элементов обратной матрицы на остаточную дисперсию при различных значениях a . Оформление результатов расчетов в виде табл. 1.2.6.

Таблица 1.2.6

| | $a = 0,1$ | $a = 0,2$ | $a = 0,3$ | $a = 0,35$ | $a = 0,4$ |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|------------|-----------|
| $S_{\hat{b}_0}$ | 0,541819 | 0,541817 | 0,541817 | 0,541816 | 0,541816 |
| $S_{\hat{b}_1}$ | 1,525216 | 1,081435 | 0,885328 | 0,82073 | 0,768726 |
| $S_{\hat{b}_2}$ | 3,102098 | 2,234023 | 1,856449 | 1,73352 | 1,635267 |

Таким образом, наименьшая стандартная ошибка получена при $a = 0,4$. Следовательно, построенная модель может быть записана в виде

$$y = 0,10009 + 18,33224 x_1 - 18,434 x_2.$$

6. Проверка значимости полученных коэффициентов регрессии

$$t_{\hat{b}_0} = \frac{\hat{b}_0}{S_{\hat{b}_0}} = \frac{0,10009}{0,541816} = 0,18473; \quad t_{\hat{b}_1} = \frac{\hat{b}_1}{S_{\hat{b}_1}} = \frac{18,33224}{0,768726} = 23,8475;$$

$$t_{\hat{b}_2} = \frac{\hat{b}_2}{S_{\hat{b}_2}} = \frac{-18,43400}{1,635267} = -11,2728.$$

Сравнение расчетных значений t -статистик с табличным $t_{0,95}(17) = 2,110$ свидетельствует о значимости включенных в модель факторов x_1 и x_2 . Таким образом, построенную модель можно использовать для целей анализа и прогнозирования.

1.3. Задания для самостоятельной работы

Задание 1.3.1. Владельцы интернет-аукциона «Э-Слава» составляют бизнес-план своей деятельности на следующие два месяца. Их прежде всего интересует вопрос, каким образом можно увеличить объем реализации в натуральном выражении. В ходе исследования было выявлено, что на количество совершаемых в среднем за месяц покупок (y) влияют такие факторы, как затраты на баннерную рекламу (тыс. руб., x_1), расходы на мероприятия, осуществляемые с целью привлечения интернет-пользователей на сайт аукциона (тыс. руб., x_2), и число зарегистрированных пользователей сайта (x_3). Поэтому было решено построить модель множественной рег

рессии, отражающую зависимость количества покупок от указанных факторов. Данные об этих показателях за последние 20 месяцев представлены в табл. 1.3.1.

Таблица 1.3.1

| t | y | x_1 | x_2 | x_3 | t | y | x_1 | x_2 | x_3 |
|-----|-----|-------|-------|-------|-----|-----|-------|-------|-------|
| 1 | 535 | 8,39 | 30,31 | 985 | 11 | 561 | 6,58 | 23,78 | 772 |
| 2 | 515 | 6,83 | 24,68 | 802 | 12 | 388 | 4,48 | 16,17 | 525 |
| 3 | 382 | 5,54 | 20,00 | 650 | 13 | 630 | 7,41 | 26,76 | 869 |
| 4 | 721 | 8,47 | 30,59 | 994 | 14 | 769 | 8,55 | 30,88 | 1003 |
| 5 | 276 | 6,13 | 22,13 | 719 | 15 | 470 | 5,52 | 19,95 | 648 |
| 6 | 513 | 5,77 | 20,85 | 677 | 16 | 511 | 6,01 | 21,7 | 705 |
| 7 | 664 | 7,80 | 28,18 | 915 | 17 | 549 | 6,19 | 22,36 | 726 |
| 8 | 409 | 4,80 | 17,35 | 563 | 18 | 531 | 8,85 | 31,96 | 1038 |
| 9 | 537 | 5,42 | 19,57 | 636 | 19 | 499 | 7,21 | 26,05 | 846 |
| 10 | 794 | 9,31 | 33,62 | 1092 | 20 | 503 | 5,99 | 21,65 | 703 |

Задание 1.3.2. Фирма «Ваше очарование» довольно успешно осуществляет торговлю косметическими товарами на российском рынке. Ее успех определяется, в частности, человеческим фактором. С целью изучения его влияния на среднеквартальный объем продаж (млн. руб., y) через такие показатели, как фонд оплаты труда (млн. руб., x_1) и численность работников фирмы (чел., x_2), была сформирована табл. 1.3.2. В этой таблице приведены данные по этим показателям за последние 18 кварталов. Постройте двухфакторную регрессионную модель, отражающую зависимость объема продаж от указанных факторов.

Таблица 1.3.2

| t | y | x_1 | x_2 | t | y | x_1 | x_2 |
|-----|-------|-------|-------|-----|-------|-------|-------|
| 1 | 39832 | 3975 | 1986 | 10 | 43671 | 4344 | 2171 |
| 2 | 33527 | 3337 | 1668 | 11 | 39518 | 3895 | 1946 |
| 3 | 36181 | 3586 | 1792 | 12 | 47639 | 4941 | 2469 |
| 4 | 42873 | 4065 | 2031 | 13 | 39518 | 3895 | 1946 |
| 5 | 28279 | 2859 | 1429 | 14 | 29376 | 2919 | 1458 |
| 6 | 52256 | 5001 | 2499 | 15 | 28215 | 2809 | 1404 |
| 7 | 36425 | 3611 | 1805 | 16 | 33193 | 3298 | 1648 |
| 8 | 27734 | 2760 | 1379 | 17 | 33927 | 3377 | 1688 |
| 9 | 54547 | 5419 | 2708 | 18 | 57736 | 5250 | 2624 |

2. АВТОКОРРЕЛИРОВАННОСТЬ ОСТАТКОВ

2.1. Расчетные формулы

2.1.1. Критерий Дарбина – Уотсона

$$\bar{d} = \frac{\hat{\mathbf{e}}' \mathbf{A} \hat{\mathbf{e}}}{\hat{\mathbf{e}}' \hat{\mathbf{e}}},$$

где
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \mathbf{L} & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1.2. Коэффициент автокорреляции

$$\hat{r} = \frac{\sum \hat{e}_t \hat{e}_{t-1}}{\sum \hat{e}_{t-1}^2}.$$

2.1.3. Преобразование исходных данных для устранения автокорреляции в остатках

$$\mathbf{y}^* = \hat{\mathbf{P}} \mathbf{y}, \quad \mathbf{X}^* = \hat{\mathbf{P}} \mathbf{X},$$

где $\hat{\mathbf{P}}$ такое, что $\hat{\mathbf{P}}' \hat{\mathbf{P}} = \hat{\Sigma}_0^{-1}$. Матрица $\hat{\mathbf{P}}$ представляет собой корень квадратный из матрицы, обратной к ковариационной матрице остатков $\hat{\Sigma}_0^{-1}$, и имеет вид

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \hat{r}^2} & 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 & 0 \\ -\hat{r} & 1 & 0 & \mathbf{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{r} & 1 & \mathbf{L} & 0 & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{L} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & -\hat{r} & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2. Решение типовой задачи

Задание 2.2.1. Руководству крупной компании «ПластКо», производящей различные товары из пластмассы, в том числе и чайные кружки, с помощью конфиденциальных источников удалось получить информацию о

некоторых показателях работы конкурирующей фирмы. Часть этой информации представлена в табл. 2.2.1.

Таблица 2.2.1

| t | y | x_1 | x_2 | t | y | x_1 | x_2 |
|-----|-------|-------|-------|-----|-------|-------|-------|
| 1 | 42,08 | 14,53 | 16,74 | 11 | 52,47 | 20,77 | 19,33 |
| 2 | 41,49 | 15,30 | 16,81 | 12 | 50,68 | 21,17 | 17,04 |
| 3 | 39,06 | 15,92 | 19,50 | 13 | 51,64 | 21,34 | 16,74 |
| 4 | 45,09 | 17,41 | 22,12 | 14 | 56,19 | 22,91 | 19,81 |
| 5 | 51,67 | 18,37 | 22,34 | 15 | 66,22 | 22,96 | 31,92 |
| 6 | 51,18 | 18,83 | 17,47 | 16 | 63,23 | 23,69 | 26,31 |
| 7 | 54,78 | 18,84 | 20,24 | 17 | 68,96 | 24,82 | 25,93 |
| 8 | 60,33 | 19,71 | 20,37 | 18 | 64,26 | 25,54 | 21,96 |
| 9 | 49,76 | 20,01 | 12,71 | 19 | 63,75 | 25,63 | 24,05 |
| 10 | 55,46 | 20,26 | 22,98 | 20 | 69,68 | 28,73 | 25,66 |

В этой таблице через t обозначено время (месяц), y – стоимость одной пластмассовой кружки для чая (руб.), x_1 – стоимость материальных ресурсов, израсходованных на производство одной кружки (руб.), x_2 – стоимость рабочей силы (заработной платы), затраченной на производство одной кружки (руб.). Кроме того, известно, что эта фирма-конкурент ведет работу по снижению себестоимости выпускаемой продукции, и величины ее затрат на материальные и человеческие ресурсы, необходимые для производства одной кружки, в следующем месяце, скорее всего, составят по 20 руб. Совет директоров компании решил поручить своему консультанту по экономическим вопросам построить модель, отражающую зависимость стоимости кружки от соответствующих факторов, с целью получения возможности прогнозировать цены, по которым конкурирующая фирма сможет отпускать кружки оптовым покупателям.

Решение с помощью табличного процессора Excel

1. Ввод исходных данных с включением в модель дополнительной переменной x_0 , принимающей единственное значение, равное 1.
2. Нахождение параметров регрессии МНК с использованием матричных функций Excel.
 - 2.1. Оценка вектора коэффициентов регрессии $\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ с помощью функций **ТРАНСП**, **МУМНОЖ** и **МОБР**.

2.1.1. Формирование обратной матрицы к матрице системы нормальных уравнений $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$

| | | |
|---------|---------|---------|
| 1,9071 | -0,0603 | -0,0286 |
| -0,0603 | 0,0055 | -0,0026 |
| -0,0286 | -0,0026 | 0,0039 |

2.1.2. Получение вектора оценок коэффициентов регрессии

| |
|--------|
| 3,8470 |
| 1,8108 |
| 0,6343 |

2.2. Расчет остатков $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$.

2.2.1. Нахождение вектора расчетных значений $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\mathbf{b}}$ с помощью функции **МУМНОЖ**.

2.2.2. Вычисление разностей $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$ и оформление промежуточных результатов в виде табл. 2.2.2.

Таблица 2.2.2

| t | y | \hat{y} | \hat{e} | t | y | \hat{y} | \hat{e} |
|-----|-------|-----------|-----------|-----|-------|-----------|-----------|
| 1 | 42,08 | 40,77 | 1,31 | 11 | 52,47 | 53,72 | -1,25 |
| 2 | 41,49 | 42,21 | -0,73 | 12 | 50,68 | 52,99 | -2,31 |
| 3 | 39,06 | 45,04 | -5,99 | 13 | 51,64 | 53,11 | -1,46 |
| 4 | 45,09 | 49,40 | -4,31 | 14 | 56,19 | 57,90 | -1,71 |
| 5 | 51,67 | 51,28 | 0,39 | 15 | 66,22 | 65,67 | 0,55 |
| 6 | 51,18 | 49,02 | 2,16 | 16 | 63,23 | 63,43 | -0,21 |
| 7 | 54,78 | 50,80 | 3,98 | 17 | 68,96 | 65,24 | 3,73 |
| 8 | 60,33 | 52,46 | 7,88 | 18 | 64,26 | 64,02 | 0,24 |
| 9 | 49,76 | 48,14 | 1,61 | 19 | 63,75 | 65,51 | -1,76 |
| 10 | 55,46 | 55,11 | 0,35 | 20 | 69,68 | 72,15 | -2,46 |

2.3. Нахождение оценки ковариационной матрицы $\hat{\Sigma}$ для вектора $\hat{\mathbf{b}}$ по формуле $\hat{\Sigma} = \hat{\mathbf{S}}^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$.

2.3.1. Нахождение произведения векторов $\hat{\mathbf{e}}'\mathbf{e}$ с помощью функций **ТРАНСП** и **МУМНОЖ**

$$\hat{\mathbf{e}}'\mathbf{e} = 177,3741.$$

2.3.2. Вычисление величины $\hat{\mathbf{S}}^2 = (\hat{\mathbf{e}}'\mathbf{e}) / (n - m - 1)$

$$\hat{\mathbf{S}}^2 = 177,3741 / 17 = 10,4348.$$

2.3.3. Нахождение $\hat{\Sigma}$ как произведения $\hat{\mathbf{S}}^2$ и обратной матрицы $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$

| | | |
|---------|---------|---------|
| 19,8979 | -0,6292 | -0,2983 |
| -0,6292 | 0,0574 | -0,0270 |
| -0,2983 | -0,0270 | 0,0410 |

3. Проверка гипотезы о наличии автокорреляции в остатках с использованием критерия Дарбина – Уотсона.

3.1. Вычисление фактического значения критерия Дарбина – Уотсона с использованием матричных операций Excel

$$\bar{d} = \frac{\hat{\mathbf{e}}' \mathbf{A} \hat{\mathbf{e}}}{\hat{\mathbf{e}}' \hat{\mathbf{e}}} = \frac{165,78}{177,37} = 0,9346 ,$$

3.2. Формулирование гипотез:

H_0 – в остатках нет автокорреляции;

H_1 – в остатках есть положительная автокорреляция;

H_1^* – в остатках есть отрицательная автокорреляция.

3.3. Определение по таблицам значений критерия Дарбина – Уотсона критических значений $d_L^* = 1,100$ и $d_U^* = 1,537$ для $n = 20$, $m = 3$ при вероятности ошибки $\alpha = 0,05$.

3.4. Сравнение фактического и критических значений критерия $\bar{d} < d_L^*$ свидетельствует о том, что с вероятностью 95% можно отклонить нуль-гипотезу и сделать вывод о наличии положительной автокорреляции.

Наличие автокорреляции означает, что $e_t = r e_{t-1} + d_t$, т.е. не выполняются предположения классического регрессионного анализа, и, следовательно, можно найти более эффективную оценку, чем $\hat{\mathbf{b}}$. Кроме того, вычисленная в п.2.3 ковариационная матрица $\hat{\Sigma}$ является смещенной оценкой ковариационной матрицы $\hat{\mathbf{b}}$, и ее нельзя использовать для получения стандартных ошибок оценок коэффициентов регрессии.

4. Преобразование исходных данных с целью устранению автокорреляции в остатках.

4.1. Оценка параметра r авторегрессии первого порядка

$$e_t = r e_{t-1} + d_t .$$

4.1.1. Вычисление $e_t e_{t-1}$ и e_t^2 . Оформление результатов расчетов в виде табл. 2.2.3

Таблица 2.2.3

| t | e_t | $e_t e_{t-1}$ | e_t^2 | t | e_t | $e_t e_{t-1}$ | e_t^2 |
|-----|-------|---------------|---------|-----|--------|---------------|---------|
| 1 | 1,31 | | 1,72 | 11 | -1,25 | -0,44 | 1,56 |
| 2 | -0,73 | -0,95 | 0,53 | 12 | -2,31 | 2,89 | 5,35 |
| 3 | -5,99 | 4,35 | 35,83 | 13 | -1,46 | 3,39 | 2,14 |
| 4 | -4,31 | 25,81 | 18,60 | 14 | -1,71 | 2,50 | 2,92 |
| 5 | 0,39 | -1,68 | 0,15 | 15 | 0,55 | -0,94 | 0,30 |
| 6 | 2,16 | 0,84 | 4,67 | 16 | -0,21 | -0,11 | 0,04 |
| 7 | 3,98 | 8,59 | 15,83 | 17 | 3,73 | -0,77 | 13,89 |
| 8 | 7,88 | 31,34 | 62,05 | 18 | 0,24 | 0,88 | 0,06 |
| 9 | 1,61 | 12,71 | 2,60 | 19 | -1,76 | -0,41 | 3,09 |
| 10 | 0,35 | 0,57 | 0,12 | 20 | -2,46 | 4,33 | 6,07 |
| | | | | | Сумма: | 92,91 | 177,37 |

4.1.2. Вычисление коэффициента автокорреляции

$$\hat{r} = \frac{\sum \hat{e}_t \hat{e}_{t-1}}{\sum \hat{e}_{t-1}^2} = 0,54.$$

4.2. Преобразование исходных данных по формулам

$$\mathbf{y}^* = \hat{\mathbf{P}}\mathbf{y}, \quad \mathbf{x}_0^* = \hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_1^* = \hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}_1 \text{ и } \mathbf{x}_2^* = \hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}_2.$$

$$\mathbf{y}: y_1^* = (1 - \hat{r}^2)^{1/2} y_1 = (1 - 0,29)^{1/2} 42,08 = 35,37,$$

$$y_2^* = y_2 - \hat{r} y_1 = 41,49 - 0,54 \cdot 42,08 = 18,68,$$

$$y_3^* = y_3 - \hat{r} y_2 = 39,06 - 0,54 \cdot 41,49 = 16,58.$$

.....

$$\mathbf{x}_0: x_{01}^* = (1 - \hat{r}^2)^{1/2} x_{01} = (1 - 0,29)^{1/2} 1,00 = 0,84,$$

$$x_{02}^* = x_{02} - \hat{r} x_{01} = 1,00 - 0,54 \cdot 1,00 = 0,46,$$

$$x_{03}^* = x_{03} - \hat{r} x_{02} = 1,00 - 0,54 \cdot 1,00 = 0,46.$$

.....

$$\mathbf{x}_1: x_{11}^* = (1 - \hat{r}^2)^{1/2} x_{11} = (1 - 0,29)^{1/2} 14,53 = 12,21,$$

$$x_{12}^* = x_{12} - \hat{r} x_{11} = 15,30 - 0,54 \cdot 14,53 = 7,47,$$

$$x_{13}^* = x_{13} - \hat{r} x_{12} = 15,92 - 0,54 \cdot 15,30 = 7,63.$$

.....

$$\mathbf{x}_2: x_{21}^* = (1 - \hat{r}^2)^{1/2} x_{21} = (1 - 0,29)^{1/2} 16,74 = 14,07,$$

$$x_{22}^* = x_{22} - \hat{r} x_{21} = 16,81 - 0,54 \cdot 16,74 = 7,74,$$

$$x_{23}^* = x_{23} - \hat{r} x_{22} = 19,50 - 0,54 \cdot 16,81 = 10,39.$$

Оформление результатов расчетов в виде табл. 2.2.4

Таблица 2.2.4

| t | y | x_0 | x_1 | x_2 | t | y | x_0 | x_1 | x_2 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-----|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 35,37 | 0,84 | 12,21 | 14,07 | 11 | 22,41 | 0,46 | 9,79 | 6,88 |
| 2 | 18,68 | 0,46 | 7,43 | 7,74 | 12 | 22,24 | 0,46 | 9,91 | 6,57 |
| 3 | 16,58 | 0,46 | 7,63 | 10,39 | 13 | 24,18 | 0,46 | 9,87 | 7,51 |
| 4 | 23,93 | 0,46 | 8,78 | 11,55 | 14 | 28,20 | 0,46 | 11,35 | 10,74 |
| 5 | 27,24 | 0,46 | 8,94 | 10,35 | 15 | 35,77 | 0,46 | 10,55 | 21,19 |
| 6 | 23,18 | 0,46 | 8,88 | 5,36 | 16 | 27,35 | 0,46 | 11,25 | 9,01 |
| 7 | 27,04 | 0,46 | 8,64 | 10,77 | 17 | 34,70 | 0,46 | 11,98 | 11,67 |
| 8 | 30,65 | 0,46 | 9,50 | 9,40 | 18 | 26,89 | 0,46 | 12,09 | 7,91 |
| 9 | 17,06 | 0,46 | 9,33 | 1,67 | 19 | 28,93 | 0,46 | 11,79 | 12,15 |
| 10 | 28,50 | 0,46 | 9,42 | 16,09 | 20 | 35,14 | 0,46 | 14,84 | 12,63 |

5. Нахождение параметров регрессии $\mathbf{y}^* = \mathbf{X}^* \mathbf{b} + \mathbf{e}^*$ с помощью обычного МНК, что эквивалентно применению обобщенного МНК к исходным данным с использованием матричных функций Excel (аналогично п. 2).

5.1. Оценка вектора коэффициентов регрессии $\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}'^* \mathbf{X}^*)^{-1} \mathbf{X}'^* \mathbf{y}$.

| |
|--------|
| 4,0352 |
| 1,6725 |
| 0,7593 |

5.2. Нахождение ковариационной матрицы $\hat{\Sigma} = \hat{\mathbf{S}}^2 (\mathbf{X}'^* \mathbf{X}^*)^{-1}$ для $\hat{\mathbf{b}}$

| | | |
|-------|-------|-------|
| 37,57 | -1,51 | -0,21 |
| -1,51 | 0,09 | -0,01 |
| -0,21 | -0,01 | 0,02 |

6. Получение прогнозного значения y , задаваемого $\mathbf{x}'_{T+1} = (1, 20, 20)$.

6.1. Нахождение прогнозной оценки обобщенным МНК, игнорируя тот факт, что e_{T+1} коррелированно с предыдущим значением в выборочном периоде

$$\hat{y}_{T+1}^* = \mathbf{x}'_{T+1} \hat{\mathbf{b}} = 58,69.$$

6.2. Нахождение прогнозной оценки обобщенным МНК с учетом того, что e_{T+1} коррелированно с предыдущим значением в выборочном периоде

$$\hat{y}_{T+1} = \mathbf{x}'_{T+1} \hat{\mathbf{b}} + \hat{r} \left(y_T - \mathbf{x}'_T \hat{\mathbf{b}} \right) = 52,69 + 0,54(69,68 - 71,58) = 51,66.$$

2.3. Задания для самостоятельной работы

Задание 2.3.1. ОАО «Молоко Хавы» производит молочную продукцию, которую реализует не только в Воронежской области, но и за ее пределами, в частности в Липецкой области. Однако если рынок молочной продукции Воронежской области практически освоен и объем продаж на нем относительно постоянен, то ситуация в Липецкой области нуждается в более тщательном анализе, поскольку поставки в эту область начались совсем недавно. С целью проведения такого анализа были собраны данные о суточной выработке молока и ежедневных объемах продаж в Липецкой области за последний месяц. Эти данные представлены в табл. 2.3.1.

Таблица 2.3.1

| День | Объем продаж молока, л. | Выработка молока, л. | День | Объем продаж молока, л. | Выработка молока, л. |
|------|-------------------------|----------------------|------|-------------------------|----------------------|
| 1 | 414 | 4039 | 16 | 4313 | 7522 |
| 2 | 782 | 4358 | 17 | 4279 | 7401 |
| 3 | 1096 | 4660 | 18 | 4430 | 7425 |
| 4 | 1388 | 4818 | 19 | 4420 | 7437 |
| 5 | 1673 | 5161 | 20 | 4623 | 7834 |
| 6 | 1880 | 5392 | 21 | 5303 | 8272 |
| 7 | 2149 | 5497 | 22 | 5532 | 8670 |
| 8 | 2385 | 5677 | 23 | 5826 | 8991 |
| 9 | 2688 | 6080 | 24 | 5819 | 9223 |
| 10 | 3287 | 6407 | 25 | 6164 | 9558 |
| 11 | 3106 | 6257 | 26 | 6287 | 9682 |
| 12 | 3180 | 6366 | 27 | 6428 | 9706 |
| 13 | 3466 | 6776 | 28 | 6261 | 9544 |
| 14 | 3680 | 7080 | 29 | 6294 | 9435 |
| 15 | 4125 | 7399 | 30 | 6434 | 9567 |

Требуется: 1) построить уравнение регрессии, отражающее зависимость ежедневных объемов продаж в Липецкой области от суточной выработки молока; 2) для построенного уравнения вычислить остатки и проверить гипотезу о наличии автокорреляции в остатках с помощью критерия Дарбина – Уотсона; 3) в случае подтверждения гипотезы устранить автокоррелированность остатков путем соответствующего преобразования данных; 4) получить с помощью построенной модели прогнозную оценку объемов продаж молока в Липецкой области при планируемой суточной выработке молока 9650 литров.

Задание 2.3.2. В табл. 2.3.2 представлены данные об общих объемах выпускаемой продукции ОАО ХК «Мебель Черноземья» в период с 2000 по 2003 г., а также об объемах продаж в филиалах ХК.

Таблица 2.3.2

| Месяц | Объемы продаж в филиалах (млн. руб.) | Общий объем выпускаемой продукции (млн. руб.) | Месяц | Объемы продаж в филиалах (млн. руб.) | Общий объем выпускаемой продукции (млн. руб.) |
|-------|--------------------------------------|---|-------|--------------------------------------|---|
| 2000 | | | 2002 | | |
| 1 | 5 | 17 | 1 | 30 | 61 |
| 2 | 6 | 14 | 2 | 31 | 62 |
| 3 | 12 | 27 | 3 | 30 | 62 |
| 4 | 7 | 21 | 4 | 29 | 54 |
| 5 | 9 | 24 | 5 | 28 | 56 |
| 6 | 9 | 23 | 6 | 29 | 61 |
| 7 | 12 | 35 | 7 | 33 | 72 |
| 8 | 13 | 37 | 8 | 39 | 83 |
| 9 | 13 | 36 | 9 | 41 | 92 |
| 10 | 13 | 42 | 10 | 42 | 90 |
| 11 | 18 | 44 | 11 | 43 | 98 |
| 12 | 33 | 70 | 12 | 49 | 102 |
| 2001 | | | 2003 | | |
| 1 | 20 | 45 | 1 | 41 | 69 |
| 2 | 20 | 46 | 2 | 31 | 57 |
| 3 | 22 | 49 | 3 | 29 | 58 |
| 4 | 19 | 37 | 4 | 34 | 63 |
| 5 | 14 | 36 | 5 | 32 | 57 |
| 6 | 21 | 44 | 6 | 31 | 54 |
| 7 | 31 | 59 | 7 | 38 | 73 |
| 8 | 25 | 62 | 8 | 45 | 84 |
| 9 | 26 | 62 | 9 | 45 | 85 |
| 10 | 31 | 75 | 10 | 46 | 89 |
| 11 | 28 | 66 | 11 | 44 | 87 |
| 12 | 35 | 74 | 12 | 59 | 109 |

Предполагая существование линейной зависимости объемов продаж в филиалах от общего объема выпускаемой продукции, постройте обычным МНК линейное уравнение регрессии. Для построенного уравнения вычислите остатки и, используя критерий Дарбина – Уотсона, проверьте гипотезу о наличии автокорреляции в остатках. При наличии автокорреляции в остатках оцените параметры регрессии обобщенным МНК. Убедитесь в устранении автокоррелированности вновь полученных остатков, для чего снова примените критерий Дарбина–Уотсона. Рассчитайте прогнозное зна-

чение объемов продаж в филиалах при общем объеме выпуска продукции 110 млн. руб.

Задание 2.3.3.

Данные, представленные в табл. 2.3.3, отражают доходы населения (x) и расходы на покупку валюты (y) за период с 2001 по 2003г. Очевидно, что существует взаимосвязь между этими двумя показателями. Оцените степень этой взаимосвязи, построив соответствующее линейное уравнение регрессии. Для построенного уравнения вычислите остатки и, используя критерий Дарбина – Уотсона в матричной форме, проверьте гипотезу о наличии автокорреляции в остатках. В случае подтверждения этой гипотезы оцените параметры регрессии обобщенным МНК.

Таблица 2.3.3

| t | x | y | t | x | y | t | x | y |
|------|-------|-------|------|-------|-------|------|-------|-------|
| 2001 | | | 2002 | | | 2003 | | |
| 1 | 166,2 | 14,28 | 1 | 215,0 | 15,48 | 1 | 290,2 | 21,25 |
| 2 | 186,0 | 15,66 | 2 | 261,3 | 19,92 | 2 | 337,5 | 23,42 |
| 3 | 197,9 | 16,49 | 3 | 286,5 | 21,15 | 3 | 376,1 | 25,26 |
| 4 | 220,5 | 17,72 | 4 | 291,5 | 21,16 | 4 | 395,4 | 26,13 |
| 5 | 212,5 | 17,46 | 5 | 284,5 | 21,03 | 5 | 372,1 | 25,09 |
| 6 | 226,5 | 18,18 | 6 | 315,1 | 22,45 | 6 | 428,2 | 27,67 |
| 7 | 226,6 | 18,23 | 7 | 308,1 | 22,12 | 7 | 424,9 | 27,57 |
| 8 | 239,1 | 18,84 | 8 | 322,7 | 23,00 | 8 | 437,2 | 28,36 |
| 9 | 239,8 | 18,98 | 9 | 331,5 | 23,16 | 9 | 436,1 | 28,29 |
| 10 | 250,8 | 19,56 | 10 | 325,5 | 22,95 | 10 | 438,6 | 28,32 |
| 11 | 257,0 | 19,46 | 11 | 348,5 | 23,96 | 11 | 448,3 | 28,9 |
| 12 | 354,9 | 23,25 | 12 | 452,3 | 28,85 | 12 | 580,6 | 35,45 |

3. ARCH МОДЕЛИ

3.1. Расчетные формулы

3.1.1. ARCH модель в простейшем случае

$$y_t = \mathbf{x}_t \mathbf{b} + e_t,$$

где $e_t = u_t (a_0 + a_1 e_{t-1})^{\frac{1}{2}}$, $u_t \sim N(0,1)$.

3.1.2. Четырехэтапная процедура построения ARCH модели:

1) оценка параметров уравнения регрессии обычным МНК

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y} \text{ и вычисление остатков } \mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{b}};$$

2) построение с помощью МНК зависимости

$$s_t^2 = a_0 + a_1 e_{t-1}^2,$$

тестирование ARCH-эффектов по критерию TR^2 ;

3) вычисление расчетных значений дисперсии остатков

$$h_t = a_0 + a_1 e_{t-1}^2,$$

формирование

$$g_t = (e_t^2 / h_t - 1), \quad z_{t1} = 1/h_t, \quad z_{t2} = e_{t-1}^2 / h_t,$$

ввод обозначений

$$\mathbf{g} = [g_t]_2^T, \quad \mathbf{Z} = [z_{t1}, z_{t2}]_2^T,$$

вычисление поправочных коэффициентов

$$\mathbf{d}_a = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}'\mathbf{g},$$

корректировка коэффициентов

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \mathbf{d}_a, \quad \text{где } \mathbf{a} = (a_0, a_1)';$$

4) пересчет h_t по формуле $h_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 e_{t-1}^2, \quad t = 2, \dots, T,$

вычисление

$$r_t = \sqrt{\frac{1}{h_t} + 2 \left(\frac{\hat{a}_1 e_t}{h_{t+1}} \right)^2}, \quad s_t = \frac{1}{h_t} - \left(\frac{\hat{a}_1}{h_{t+1}} \right) \left(\frac{e_{t+1}^2}{h_{t+1}} - 1 \right),$$

формирование $\mathbf{v} = [e_t s_t / r_t]_2^{T-1}, \quad \mathbf{W} = [r_t \mathbf{x}_t]_2^{t-1},$

вычисление поправочных коэффициентов

$$\mathbf{d}_b = (\mathbf{W}'\mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}'\mathbf{v} \quad \text{и}$$

получение $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \mathbf{d}_b.$

3.1.3. Для тестирования ARCH-эффектов используется критерий TR^2 , где T - объем выборки и R^2 - коэффициент детерминации соответствующей модели для дисперсии. Если расчетное значение $TR^2 > \chi^2(p^*, V)$, где p^* - заданный уровень доверительной вероятности и V - число степеней свободы,

то гипотеза о присутствии ARCH-эффектов принимается, в противном случае – отвергается.

3.2. Решение типовой задачи

Задание 3.2.1. Господин А.В. Мудрин, владеющий 527 акциями компании «Юкос», собирается их продать в ближайшие дни. С целью определения примерной цены, по которой могут купить его акции, он собрал данные, представленные в табл. 3.2.1. По этим данным А.В. Мудрин решил построить авторегрессионную модель, отражающую динамику курса акции во времени, с помощью которой он сможет получить прогнозную оценку курса акций на следующие два дня.

Таблица 3.2.1

| Дата | Курс акции, USD | Дата | Курс акции, USD | Дата | Курс акции, USD | Дата | Курс акции, USD |
|----------|-----------------|----------|-----------------|----------|-----------------|----------|-----------------|
| 01.07.03 | 13,82 | 28.07.03 | 11,30 | 22.08.03 | 14,25 | 18.09.03 | 14,62 |
| 02.07.03 | 14,00 | 29.07.03 | 11,20 | 25.08.03 | 14,30 | 19.09.03 | 14,55 |
| 03.07.03 | 13,70 | 30.07.03 | 11,15 | 26.08.03 | 14,33 | 22.09.03 | 14,30 |
| 04.07.03 | 13,50 | 31.07.03 | 11,15 | 27.08.03 | 13,95 | 23.09.03 | 14,50 |
| 07.07.03 | 13,50 | 01.08.03 | 11,55 | 28.08.03 | 13,90 | 24.09.03 | 14,92 |
| 08.07.03 | 13,80 | 04.08.03 | 11,60 | 29.08.03 | 14,00 | 25.09.03 | 14,90 |
| 09.07.03 | 13,95 | 05.08.03 | 11,92 | 01.09.03 | 14,10 | 26.09.03 | 14,60 |
| 10.07.03 | 12,80 | 06.08.03 | 12,30 | 02.09.03 | 14,71 | 29.09.03 | 14,45 |
| 11.07.03 | 12,00 | 07.08.03 | 12,75 | 03.09.03 | 14,95 | 30.09.03 | 14,92 |
| 14.07.03 | 11,60 | 08.08.03 | 12,60 | 04.09.03 | 14,40 | 01.10.03 | 14,75 |
| 15.07.03 | 12,05 | 11.08.03 | 12,50 | 05.09.03 | 14,40 | 02.10.03 | 15,00 |
| 16.07.03 | 11,96 | 12.08.03 | 12,99 | 08.09.03 | 14,30 | 03.10.03 | 15,60 |
| 17.07.03 | 10,70 | 13.08.03 | 13,35 | 09.09.03 | 14,28 | 06.10.03 | 15,30 |
| 18.07.03 | 10,77 | 14.08.03 | 13,50 | 10.09.03 | 14,18 | 07.10.03 | 15,55 |
| 21.07.03 | 10,88 | 15.08.03 | 13,62 | 11.09.03 | 14,75 | 08.10.03 | 15,82 |
| 22.07.03 | 11,20 | 18.08.03 | 13,75 | 12.09.03 | 14,60 | 09.10.03 | 16,25 |
| 23.07.03 | 11,20 | 19.08.03 | 14,90 | 15.09.03 | 14,85 | 10.10.03 | 15,65 |
| 24.07.03 | 11,05 | 20.08.03 | 14,50 | 16.09.03 | 14,80 | 13.10.03 | 15,65 |
| 25.07.03 | 11,25 | 21.08.03 | 14,25 | 17.09.03 | 15,02 | 14.10.03 | 15,62 |
| | | | | | | 15.10.03 | 15,75 |

Решение с помощью табличного процессора Excel

1. Ввод исходных данных и оформление в удобном для расчетов виде.
2. Определение порядка авторегрессионной модели

2.1. Формирование двух векторов: 1) вектора (размером 76×1), элементы которого y_{t-1} ; 2) вектора (размером 75×1), элементом которого y_{t-2} . Оформление результатов в виде табл. 3.2.2.

Таблица 3.2.2

| t | y_t | y_{t-1} | y_{t-2} | t | y_t | y_{t-1} | y_{t-2} |
|-----|-------|-----------|-----------|-----|-------|-----------|-----------|
| 1 | 14,00 | 13,82 | | 39 | 14,30 | 14,25 | 14,25 |
| 2 | 13,70 | 14,00 | 13,82 | 40 | 14,33 | 14,30 | 14,25 |
| 3 | 13,50 | 13,70 | 14,00 | 41 | 13,95 | 14,33 | 14,30 |
| 4 | 13,50 | 13,50 | 13,70 | 42 | 13,90 | 13,95 | 14,33 |
| 5 | 13,80 | 13,50 | 13,50 | 43 | 14,00 | 13,90 | 13,95 |
| 6 | 13,95 | 13,80 | 13,50 | 44 | 14,10 | 14,00 | 13,90 |
| 7 | 12,80 | 13,95 | 13,80 | 45 | 14,71 | 14,10 | 14,00 |
| 8 | 12,00 | 12,80 | 13,95 | 46 | 14,95 | 14,71 | 14,10 |
| 9 | 11,60 | 12,00 | 12,80 | 47 | 14,40 | 14,95 | 14,71 |
| 10 | 12,05 | 11,60 | 12,00 | 48 | 14,40 | 14,40 | 14,95 |
| 11 | 11,96 | 12,05 | 11,60 | 49 | 14,30 | 14,40 | 14,40 |
| 12 | 10,70 | 11,96 | 12,05 | 50 | 14,28 | 14,30 | 14,40 |
| 13 | 10,77 | 10,70 | 11,96 | 51 | 14,18 | 14,28 | 14,30 |
| 14 | 10,88 | 10,77 | 10,70 | 52 | 14,75 | 14,18 | 14,28 |
| 15 | 11,20 | 10,88 | 10,77 | 53 | 14,60 | 14,75 | 14,18 |
| 16 | 11,20 | 11,20 | 10,88 | 54 | 14,85 | 14,60 | 14,75 |
| 17 | 11,05 | 11,20 | 11,20 | 55 | 14,80 | 14,85 | 14,60 |
| 18 | 11,25 | 11,05 | 11,20 | 56 | 15,02 | 14,80 | 14,85 |
| 19 | 11,30 | 11,25 | 11,05 | 57 | 14,62 | 15,02 | 14,80 |
| 20 | 11,20 | 11,30 | 11,25 | 58 | 14,55 | 14,62 | 15,02 |
| 21 | 11,15 | 11,20 | 11,30 | 59 | 14,30 | 14,55 | 14,62 |
| 22 | 11,15 | 11,15 | 11,20 | 60 | 14,50 | 14,30 | 14,55 |
| 23 | 11,55 | 11,15 | 11,15 | 62 | 14,92 | 14,50 | 14,30 |
| 24 | 11,60 | 11,55 | 11,15 | 62 | 14,90 | 14,92 | 14,50 |
| 25 | 11,92 | 11,60 | 11,55 | 63 | 14,60 | 14,90 | 14,92 |
| 26 | 12,30 | 11,92 | 11,60 | 64 | 14,45 | 14,60 | 14,90 |
| 27 | 12,75 | 12,30 | 11,92 | 65 | 14,92 | 14,45 | 14,60 |
| 28 | 12,60 | 12,75 | 12,30 | 66 | 14,75 | 14,92 | 14,45 |
| 29 | 12,50 | 12,60 | 12,75 | 67 | 15,00 | 14,75 | 14,92 |
| 30 | 12,99 | 12,50 | 12,60 | 68 | 15,60 | 15,00 | 14,75 |
| 31 | 13,35 | 12,99 | 12,50 | 69 | 15,30 | 15,60 | 15,00 |
| 32 | 13,50 | 13,35 | 12,99 | 70 | 15,55 | 15,30 | 15,60 |
| 33 | 13,62 | 13,50 | 13,35 | 71 | 15,82 | 15,55 | 15,30 |
| 34 | 13,75 | 13,62 | 13,50 | 72 | 16,25 | 15,82 | 15,55 |
| 35 | 14,90 | 13,75 | 13,62 | 73 | 15,65 | 16,25 | 15,82 |
| 36 | 14,50 | 14,90 | 13,75 | 74 | 15,65 | 15,65 | 16,25 |
| 37 | 14,25 | 14,50 | 14,90 | 75 | 15,62 | 15,65 | 15,65 |
| 38 | 14,25 | 14,25 | 14,50 | 76 | 15,75 | 15,62 | 15,65 |

2.2. Построение с помощью «Пакета анализа» авторегрессионной модели первого порядка $y_t = b_0 + b_1 y_{t-1} + e_t$ (см. Вывод итогов 2.1).

ВЫВОД ИТОГОВ 2.1

| <i>Регрессионная статистика</i> | | | | | |
|---------------------------------|--|----------|--|--|--|
| Множественный R | | 0,969239 | | | |
| R-квадрат | | 0,939424 | | | |
| Нормированный R-квадрат | | 0,938606 | | | |
| Стандартная ошибка | | 0,373152 | | | |
| Наблюдения | | 76 | | | |

| <i>Дисперсионный анализ</i> | | | | | |
|-----------------------------|-----------|-----------|-----------|----------|---------------------|
| | <i>df</i> | <i>SS</i> | <i>MS</i> | <i>F</i> | <i>Значимость F</i> |
| Регрессия | 1 | 159,7957 | 159,7957 | 1147,609 | 8,4E-47 |
| Остаток | 74 | 10,30393 | 0,139242 | | |
| Итого | 75 | 170,0997 | | | |

| | <i>Коэффициенты</i> | <i>Стандартная ошибка</i> | <i>t-статистика</i> | <i>P-значение</i> | <i>Нижние 95%</i> | <i>Верхние 95%</i> |
|----------------|---------------------|---------------------------|---------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| Y-пересечение | 0,269471 | 0,397355 | 0,678161 | 0,499785 | -0,52228 | 1,061219 |
| Переменная X 1 | 0,982088 | 0,02899 | 33,87637 | 8,4E-47 | 0,924324 | 1,039853 |

Таким образом, построенная модель имеет вид

$$\hat{y}_t = 0,269 + 0,982 y_{t-1}.$$

Расчетное значение t-статистики свидетельствует о значимости коэффициента \hat{b}_1 .

2.3. Построение с помощью «Пакета анализа» авторегрессионной модели второго порядка $y_t = b_0 + b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + e_t$ (см. Вывод итогов 2.2).

Таким образом, построенная модель имеет вид

$$\hat{y}_t = 0,318 + 1,064 y_{t-1} - 0,086 y_{t-2}.$$

Расчетные значения t-статистик свидетельствуют о значимости коэффициента \hat{b}_1 и незначимости коэффициента \hat{b}_2 , который, по сути, является частным коэффициентом автокорреляции второго порядка. Незначимость этого коэффициента позволяет сделать вывод, что исходные данные описываются авторегрессией первого порядка.

ВЫВОД ИТОГОВ 2.2

| <i>Регрессионная статистика</i> | |
|---------------------------------|----------|
| Множественный R | 0,969518 |
| R-квадрат | 0,939965 |
| Нормированный R-квадрат | 0,938298 |
| Стандартная ошибка | 0,37647 |
| Наблюдения | 75 |

| <i>Дисперсионный анализ</i> | | | | | |
|-----------------------------|-----------|-----------|-----------|----------|---------------------|
| | <i>df</i> | <i>SS</i> | <i>MS</i> | <i>F</i> | <i>Значимость F</i> |
| Регрессия | 2 | 159,7725 | 79,88625 | 563,6533 | 1,05E-44 |
| Остаток | 72 | 10,20452 | 0,141729 | | |
| Итого | 74 | 169,977 | | | |

| | <i>Коэффициенты</i> | <i>Стандартная ошибка</i> | <i>t-статистика</i> | <i>P-значение</i> | <i>Нижние 95%</i> | <i>Верхние 95%</i> |
|----------------|---------------------|---------------------------|---------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| Y-пересечение | 0,3185 | 0,406484 | 0,78355 | 0,435874 | -0,49181 | 1,12881 |
| Переменная X 1 | 1,064107 | 0,117398 | 9,064117 | 1,59E-13 | 0,830079 | 1,298135 |
| Переменная X 2 | -0,08592 | 0,118837 | -0,72303 | 0,472002 | -0,32282 | 0,150974 |

3. Расчет остатков авторегрессионного уравнения первого порядка и оформление результатов расчетов в виде табл. 2.2.3.

Таблица 2.2.3

| <i>t</i> | <i>y_t</i> | <i>ŷ_t</i> | <i>e_t²</i> | <i>t</i> | <i>y_t</i> | <i>ŷ_t</i> | <i>e_t²</i> |
|----------|----------------------|----------------------|----------------------------------|----------|----------------------|----------------------|----------------------------------|
| 1 | 14,00 | 13,8419 | 0,0250 | 39 | 14,30 | 14,2642 | 0,0013 |
| 2 | 13,70 | 14,0187 | 0,1016 | 40 | 14,33 | 14,3133 | 0,0003 |
| 3 | 13,50 | 13,7241 | 0,0502 | 41 | 13,95 | 14,3428 | 0,1543 |
| 4 | 13,50 | 13,5277 | 0,0008 | 42 | 13,90 | 13,9696 | 0,0048 |
| 5 | 13,80 | 13,5277 | 0,0742 | 43 | 14,00 | 13,9205 | 0,0063 |
| 6 | 13,95 | 13,8223 | 0,0163 | 44 | 14,10 | 14,0187 | 0,0066 |
| 7 | 12,80 | 13,9696 | 1,3680 | 45 | 14,71 | 14,1169 | 0,3517 |
| 8 | 12,00 | 12,8402 | 0,7059 | 46 | 14,95 | 14,7160 | 0,0548 |
| 9 | 11,60 | 12,0545 | 0,2066 | 47 | 14,40 | 14,9517 | 0,3044 |
| 10 | 12,05 | 11,6617 | 0,1508 | 48 | 14,40 | 14,4115 | 0,0001 |
| 11 | 11,96 | 12,1036 | 0,0206 | 49 | 14,30 | 14,4115 | 0,0124 |
| 12 | 10,70 | 12,0152 | 1,7299 | 50 | 14,28 | 14,3133 | 0,0011 |
| 13 | 10,77 | 10,7778 | 0,0001 | 51 | 14,18 | 14,2937 | 0,0129 |
| 14 | 10,88 | 10,8466 | 0,0011 | 52 | 14,75 | 14,1955 | 0,3075 |
| 15 | 11,20 | 10,9546 | 0,0602 | 53 | 14,60 | 14,7553 | 0,0241 |
| 16 | 11,20 | 11,2689 | 0,0047 | 54 | 14,85 | 14,6080 | 0,0586 |
| 17 | 11,05 | 11,2689 | 0,0479 | 55 | 14,80 | 14,8535 | 0,0029 |
| 18 | 11,25 | 11,1215 | 0,0165 | 56 | 15,02 | 14,8044 | 0,0465 |
| 19 | 11,30 | 11,3180 | 0,0003 | 57 | 14,62 | 15,0204 | 0,1604 |
| 20 | 11,20 | 11,3671 | 0,0279 | 58 | 14,55 | 14,6276 | 0,0060 |
| 21 | 11,15 | 11,2689 | 0,0141 | 59 | 14,30 | 14,5589 | 0,0670 |

Продолжение табл. 2.2.3

| t | y_t | \hat{y}_t | e_t^2 | t | y_t | \hat{y}_t | e_t^2 |
|-----|-------|-------------|---------|-----|-------|-------------|---------|
| 22 | 11,15 | 11,2198 | 0,0049 | 60 | 14,50 | 14,3133 | 0,0348 |
| 23 | 11,55 | 11,2198 | 0,1091 | 62 | 14,92 | 14,5098 | 0,1683 |
| 24 | 11,60 | 11,6126 | 0,0002 | 62 | 14,90 | 14,9222 | 0,0005 |
| 25 | 11,92 | 11,6617 | 0,0667 | 63 | 14,60 | 14,9026 | 0,0916 |
| 26 | 12,30 | 11,9760 | 0,1050 | 64 | 14,45 | 14,6080 | 0,0250 |
| 27 | 12,75 | 12,3492 | 0,1607 | 65 | 14,92 | 14,4606 | 0,2110 |
| 28 | 12,60 | 12,7911 | 0,0365 | 66 | 14,75 | 14,9222 | 0,0297 |
| 29 | 12,50 | 12,6438 | 0,0207 | 67 | 15,00 | 14,7553 | 0,0599 |
| 30 | 12,99 | 12,5456 | 0,1975 | 68 | 15,60 | 15,0008 | 0,3590 |
| 31 | 13,35 | 13,0268 | 0,1045 | 69 | 15,30 | 15,5900 | 0,0841 |
| 32 | 13,50 | 13,3804 | 0,0143 | 70 | 15,55 | 15,2954 | 0,0648 |
| 33 | 13,62 | 13,5277 | 0,0085 | 71 | 15,82 | 15,5409 | 0,0779 |
| 34 | 13,75 | 13,645 | 0,0109 | 72 | 16,25 | 15,8061 | 0,1970 |
| 35 | 14,90 | 13,7732 | 1,2697 | 73 | 15,65 | 16,2284 | 0,3346 |
| 36 | 14,50 | 14,9026 | 0,1621 | 74 | 15,65 | 15,6392 | 0,0001 |
| 37 | 14,25 | 14,5098 | 0,0675 | 75 | 15,62 | 15,6392 | 0,0004 |
| 38 | 14,25 | 14,2642 | 0,0002 | 76 | 15,75 | 15,6097 | 0,0197 |

4. Вычисление дисперсий по формуле $S_t^2 = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t e_i^2$ и оформление результатов расчетов в виде табл. 2.2.4.

Таблица 2.2.4

| y_t | S_t^2 | y_t | S_t^2 | y_t | S_t^2 | y_t | S_t^2 |
|-------|---------|-------|---------|-------|---------|-------|---------|
| 13,70 | 0,0633 | 11,15 | 0,2201 | 14,33 | 0,1741 | 14,30 | 0,1448 |
| 13,50 | 0,0589 | 11,15 | 0,2103 | 13,95 | 0,1736 | 14,50 | 0,1430 |
| 13,50 | 0,0444 | 11,55 | 0,2059 | 13,90 | 0,1696 | 14,92 | 0,1434 |
| 13,80 | 0,0503 | 11,60 | 0,1974 | 14,00 | 0,1658 | 14,90 | 0,1411 |
| 13,95 | 0,0447 | 11,92 | 0,1921 | 14,10 | 0,1622 | 14,60 | 0,1403 |
| 12,80 | 0,2337 | 12,30 | 0,1888 | 14,71 | 0,1664 | 14,45 | 0,1385 |
| 12,00 | 0,2927 | 12,75 | 0,1877 | 14,95 | 0,1640 | 14,92 | 0,1396 |
| 11,60 | 0,2832 | 12,60 | 0,1823 | 14,40 | 0,1669 | 14,75 | 0,1380 |
| 12,05 | 0,2699 | 12,50 | 0,1768 | 14,40 | 0,1635 | 15,00 | 0,1368 |
| 11,96 | 0,2473 | 12,99 | 0,1775 | 14,30 | 0,1604 | 15,60 | 0,1401 |
| 10,70 | 0,3708 | 13,35 | 0,1751 | 14,28 | 0,1572 | 15,30 | 0,1393 |
| 10,77 | 0,3423 | 13,50 | 0,1701 | 14,18 | 0,1544 | 15,55 | 0,1382 |
| 10,88 | 0,3179 | 13,62 | 0,1652 | 14,75 | 0,1573 | 15,82 | 0,1374 |
| 11,20 | 0,3007 | 13,75 | 0,1607 | 14,60 | 0,1548 | 16,25 | 0,1382 |
| 11,20 | 0,2822 | 14,90 | 0,1923 | 14,85 | 0,1530 | 15,65 | 0,1409 |
| 11,05 | 0,2685 | 14,50 | 0,1915 | 14,80 | 0,1503 | 15,65 | 0,1390 |
| 11,25 | 0,2545 | 14,25 | 0,1881 | 15,02 | 0,1484 | 15,62 | 0,1371 |
| 11,30 | 0,2411 | 14,25 | 0,1832 | 14,62 | 0,1486 | 15,75 | 0,1356 |
| 11,20 | 0,2304 | 14,30 | 0,1785 | 14,55 | 0,1462 | | |

5. Построение с помощью «Пакета анализа» регрессионного уравнения $s_t^2 = a_0 + a_1 e_{t-1}^2$ (см. Вывод итогов 2.3).

ВЫВОД ИТОГОВ 2.3

| <i>Регрессионная статистика</i> | | | | | |
|---------------------------------|--|----------|--|--|--|
| Множественный | | | | | |
| R | | 0,336649 | | | |
| R-квадрат | | 0,113333 | | | |
| Нормированный | | | | | |
| R-квадрат | | 0,101187 | | | |
| Стандартная | | | | | |
| ошибка | | 0,059354 | | | |
| Наблюдения | | 75 | | | |

| <i>Дисперсионный анализ</i> | | | | | | |
|-----------------------------|-----------|-----------|-----------|----------|-------------------|--|
| | <i>df</i> | <i>SS</i> | <i>MS</i> | <i>F</i> | <i>Значимость</i> | |
| | | | | | <i>F</i> | |
| Регрессия | 1 | 0,032872 | 0,032872 | 9,330783 | 0,003145 | |
| Остаток | 73 | 0,257173 | 0,003523 | | | |
| Итого | 74 | 0,290045 | | | | |

| | <i>Коэффициенты</i> | <i>Стандартная ошибка</i> | <i>t-статистика</i> | <i>P-значение</i> | <i>Нижние 95%</i> | <i>Верхние 95%</i> |
|----------------|---------------------|---------------------------|---------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| Y-пересечение | 0,167468 | 0,007555 | 22,16555 | 3,79E-34 | 0,15241 | 0,182525 |
| Переменная X 1 | 0,070833 | 0,023189 | 3,054633 | 0,003145 | 0,024618 | 0,117048 |

Таким образом, построенная модель имеет вид

$$\hat{s}_t^2 = 0,167 + 0,071e_{t-1}^2.$$

Расчетные значения t-статистик свидетельствуют о значимости полученных коэффициентов регрессии.

6. Тестирование ARCH-модели на значимость с помощью TR^2 -критерия

$$TR^2 = 75 \cdot 0,113 = 8,50.$$

Сравнение полученного значения критерия с табличным значением распределения $c_{0,95}^2(1) = 3,84$ свидетельствует о присутствии ARCH-эффекта.

7. Вычисление расчетных значений \hat{s}_t^2 для $t = \overline{2}, T$. Оформление результатов в виде табл. 5.

8. Формирование новых переменных для $t = \overline{2}, T$:

$$1) g_t = (e_t^2 / \hat{s}_t^2 - 1); \quad 2) z_{t0} = 1 / \hat{s}_t^2; \quad 3) z_{t1} = e_{t-1}^2 / \hat{s}_t^2.$$

Оформление результатов расчетов в виде табл. 2.2.5.

Таблица 2.2.5

| \hat{S}_t^2 | g_t | z_{t0} | z_{t1} | \hat{S}_t^2 | g_t | z_{t0} | z_{t1} |
|---------------|---------|----------|----------|---------------|---------|----------|----------|
| 0,1692 | -0,3998 | 5,9089 | 0,1476 | 0,1676 | -0,9983 | 5,9681 | 0,0076 |
| 0,1747 | -0,7125 | 5,7253 | 0,5816 | 0,1675 | -0,0788 | 5,9706 | 0,0017 |
| 0,1710 | -0,9955 | 5,8471 | 0,2936 | 0,1784 | -0,9728 | 5,6055 | 0,8649 |
| 0,1675 | -0,5573 | 5,9694 | 0,0046 | 0,1678 | -0,9623 | 5,9591 | 0,0289 |
| 0,1727 | -0,9056 | 5,7897 | 0,4294 | 0,1679 | -0,9606 | 5,9554 | 0,0376 |
| 0,1686 | 7,1126 | 5,9304 | 0,0967 | 0,1679 | 1,0945 | 5,9547 | 0,0394 |
| 0,2644 | 1,6703 | 3,7826 | 5,1746 | 0,1924 | -0,7154 | 5,1980 | 1,8284 |
| 0,2175 | -0,0500 | 4,5983 | 3,2461 | 0,1713 | 0,7763 | 5,8361 | 0,3196 |
| 0,1821 | -0,1720 | 5,4914 | 1,1345 | 0,1890 | -0,9993 | 5,2903 | 1,6102 |
| 0,1781 | -0,8842 | 5,6133 | 0,8464 | 0,1675 | -0,9257 | 5,9710 | 0,0008 |
| 0,1689 | 9,2403 | 5,9196 | 0,1221 | 0,1683 | -0,9934 | 5,9400 | 0,0739 |
| 0,2900 | -0,9998 | 3,4483 | 5,9651 | 0,1675 | -0,9229 | 5,9685 | 0,0066 |
| 0,1675 | -0,9933 | 5,9711 | 0,0004 | 0,1684 | 0,8261 | 5,9388 | 0,0768 |
| 0,1675 | -0,6406 | 5,9685 | 0,0067 | 0,1892 | -0,8726 | 5,2841 | 1,6248 |
| 0,1717 | -0,9724 | 5,8230 | 0,3507 | 0,1692 | -0,6537 | 5,9110 | 0,1425 |
| 0,1678 | -0,7145 | 5,9593 | 0,0283 | 0,1716 | -0,9833 | 5,8269 | 0,3414 |
| 0,1709 | -0,9034 | 5,8527 | 0,2803 | 0,1677 | -0,7227 | 5,9641 | 0,0171 |
| 0,1686 | -0,9981 | 5,9299 | 0,0978 | 0,1708 | -0,0610 | 5,8561 | 0,2723 |
| 0,1675 | -0,8333 | 5,9705 | 0,0019 | 0,1788 | -0,9663 | 5,5920 | 0,8967 |
| 0,1694 | -0,9166 | 5,9016 | 0,1647 | 0,1679 | -0,6009 | 5,9561 | 0,0359 |
| 0,1685 | -0,9711 | 5,9358 | 0,0839 | 0,1722 | -0,7977 | 5,8067 | 0,3891 |
| 0,1678 | -0,3501 | 5,9590 | 0,0290 | 0,1699 | -0,0096 | 5,8846 | 0,2050 |
| 0,1752 | -0,9991 | 5,7080 | 0,6225 | 0,1794 | -0,9972 | 5,5745 | 0,9382 |
| 0,1675 | -0,6016 | 5,9709 | 0,0009 | 0,1675 | -0,4534 | 5,9701 | 0,0030 |
| 0,1722 | -0,3902 | 5,8074 | 0,3875 | 0,1740 | -0,8566 | 5,7487 | 0,5263 |
| 0,1749 | -0,0814 | 5,7174 | 0,6003 | 0,1692 | 0,2468 | 5,9089 | 0,1474 |
| 0,1788 | -0,7958 | 5,5913 | 0,8984 | 0,1824 | -0,8374 | 5,4820 | 1,1567 |
| 0,1701 | -0,8784 | 5,8805 | 0,2147 | 0,1696 | -0,6468 | 5,8973 | 0,1749 |
| 0,1689 | 0,1692 | 5,9195 | 0,1224 | 0,1717 | 1,0910 | 5,8238 | 0,3488 |
| 0,1815 | -0,4243 | 5,5109 | 1,0885 | 0,1929 | -0,5639 | 5,1840 | 1,8613 |
| 0,1749 | -0,9181 | 5,7186 | 0,5974 | 0,1734 | -0,6263 | 5,7661 | 0,4851 |
| 0,1685 | -0,9494 | 5,9354 | 0,0850 | 0,1721 | -0,5474 | 5,8120 | 0,3767 |
| 0,1681 | -0,9350 | 5,9498 | 0,0507 | 0,1730 | 0,1391 | 5,7809 | 0,4502 |
| 0,1682 | 6,5470 | 5,9439 | 0,0649 | 0,1814 | 0,8440 | 5,5119 | 1,0861 |
| 0,2574 | -0,3703 | 3,8849 | 4,9327 | 0,1912 | -0,9994 | 5,2311 | 1,7501 |
| 0,1789 | -0,6230 | 5,5882 | 0,9057 | 0,1675 | -0,9978 | 5,9710 | 0,0007 |
| 0,1722 | -0,9988 | 5,8056 | 0,3917 | 0,1675 | -0,8825 | 5,9704 | 0,0022 |
| 0,1675 | -0,9924 | 5,9708 | 0,0012 | | | | |

9. Построение регрессионного уравнения $g_t = d_0 z_{t0} + d_1 z_{t1}$ с нулевым свободным членом (см. Вывод итогов 2.4), коэффициенты которого являются поправочными коэффициентами уравнения дисперсии.

ВЫВОД ИТОГОВ 2.4

| Регрессионная статистика | |
|--------------------------|----------|
| Множественный R | 0,028703 |
| R-квадрат | 0,000824 |
| Нормированный R-квадрат | -0,02656 |
| Стандартная ошибка | 1,742834 |
| Наблюдения | 75 |

| Дисперсионный анализ | | | | | |
|----------------------|-----------|-----------|-----------|----------|---------------------|
| | <i>df</i> | <i>SS</i> | <i>MS</i> | <i>F</i> | Значимость <i>F</i> |
| Регрессия | 2 | 0,18283 | 0,091415 | 0,030096 | 0,970365 |
| Остаток | 73 | 221,7354 | 3,037471 | | |
| Итого | 75 | 221,9182 | | | |

| | Коэффициенты | Стандартная ошибка | <i>t</i> -статистика | <i>P</i> -значение | Нижние 95% | Верхние 95% |
|----------------|--------------|--------------------|----------------------|--------------------|------------|-------------|
| Y-пересечение | 0 | #Н/Д | #Н/Д | #Н/Д | #Н/Д | #Н/Д |
| Переменная X 1 | -0,03274 | 0,038801 | -0,84389 | 0,401487 | -0,11007 | 0,044587 |
| Переменная X 2 | -0,0577 | 0,171192 | -0,33704 | 0,737051 | -0,39889 | 0,283487 |

Таким образом, построенная модель имеет вид

$$\hat{g}_t = -0,033z_{t0} - 0,058z_{t1}.$$

10. Корректировка коэффициентов уравнения дисперсии

$$\hat{a}_0 = \hat{a}_0 + \hat{d}_0 = 0,167 - 0,033 = 0,134,$$

$$\hat{a}_1 = \hat{a}_1 + \hat{d}_1 = 0,071 - 0,058 = 0,013.$$

11. Расчет уточненных значений \hat{S}_t^2 по уравнению

$$\hat{S}_t^2 = 0,134 + 0,013e_{t-1}^2.$$

Оформление результатов расчетов в виде табл. 2.2.6.

12. Формирование новых переменных для $t = \overline{2, T-1}$:

$$1) r_t = \left(\frac{1}{\hat{S}_t^2} + 2 \left(\frac{\hat{a}_1 e_t}{\hat{S}_{t+1}^2} \right)^2 \right)^{1/2}; \quad 2) s_t = \frac{1}{\hat{S}_t^2} - \left(\frac{\hat{a}_1}{\hat{S}_{t+1}^2} \right) \left(\frac{e_{t+1}^2}{\hat{S}_{t+1}^2} - 1 \right);$$

$$3) v_t = \frac{e_t s_t}{r_t}; \quad 4) w_{t0} = 1 \cdot r_t \text{ и } w_{t1} = r_t y_t.$$

Оформление результатов расчетов в виде табл. 2.2.6.

Таблица 2.2.6

| r_t | s_t | v_t | w_{t0} | w_{t1} | r_t | s_t | v_t | w_{t0} | w_{t1} |
|--------|--------|---------|----------|----------|--------|--------|---------|----------|----------|
| 2,4310 | 5,9624 | -0,7817 | 2,4310 | 34,0347 | 2,4435 | 6,0490 | 0,0885 | 2,4435 | 34,8202 |
| 2,3929 | 5,8018 | -0,5433 | 2,3929 | 32,7826 | 2,4430 | 5,9742 | 0,0408 | 2,4430 | 34,9344 |
| 2,4181 | 5,8908 | -0,0674 | 2,4181 | 32,6441 | 2,4438 | 6,0422 | -0,9712 | 2,4438 | 35,0200 |
| 2,4434 | 6,0382 | 0,6730 | 2,4434 | 32,9860 | 2,3676 | 5,6808 | -0,1670 | 2,3676 | 33,0281 |
| 2,4062 | 5,2357 | 0,2779 | 2,4062 | 33,2058 | 2,4411 | 6,0342 | 0,1965 | 2,4411 | 33,9318 |
| 2,4366 | 5,8474 | -2,8068 | 2,4366 | 33,9909 | 2,4404 | 5,8698 | 0,1955 | 2,4404 | 34,1653 |
| 1,9462 | 3,7857 | -1,6343 | 1,9462 | 24,9117 | 2,4409 | 6,0035 | 1,4587 | 2,4409 | 34,4165 |
| 2,1449 | 4,6107 | -0,9771 | 2,1449 | 25,7384 | 2,2800 | 5,1385 | 0,5274 | 2,2800 | 33,5395 |
| 2,3437 | 5,5566 | 0,9206 | 2,3437 | 27,1873 | 2,4164 | 5,9056 | -1,3483 | 2,4164 | 36,1254 |
| 2,3693 | 4,8949 | -0,2967 | 2,3693 | 28,5500 | 2,3001 | 5,3628 | -0,0269 | 2,3001 | 33,1208 |
| 2,4345 | 5,9649 | -3,2226 | 2,4345 | 29,1165 | 2,4436 | 6,0485 | -0,2761 | 2,4436 | 35,1876 |
| 1,8570 | 3,5262 | -0,0148 | 1,8570 | 19,8694 | 2,4372 | 6,0124 | -0,0822 | 2,4372 | 34,8523 |
| 2,4436 | 6,0214 | 0,0824 | 2,4436 | 26,3175 | 2,4431 | 5,9041 | -0,2748 | 2,4431 | 34,8872 |
| 2,4432 | 6,0428 | 0,6070 | 2,4432 | 26,5819 | 2,4376 | 5,9994 | 1,3648 | 2,4376 | 34,5649 |
| 2,4131 | 5,8789 | -0,1678 | 2,4131 | 27,0267 | 2,2988 | 5,3348 | -0,3604 | 2,2988 | 33,9069 |
| 2,4413 | 6,0288 | -0,5405 | 2,4413 | 27,3425 | 2,4314 | 5,9863 | 0,5959 | 2,4314 | 35,4984 |
| 2,4193 | 5,9305 | 0,3149 | 2,4193 | 26,7331 | 2,4139 | 5,8835 | -0,1304 | 2,4139 | 35,8465 |
| 2,4351 | 5,9953 | -0,0442 | 2,4351 | 27,3954 | 2,4423 | 5,9688 | 0,5270 | 2,4423 | 36,1454 |
| 2,4435 | 6,0415 | -0,4131 | 2,4435 | 27,6118 | 2,4203 | 5,9271 | -0,9806 | 2,4203 | 36,3530 |
| 2,4294 | 5,9773 | -0,2925 | 2,4294 | 27,2088 | 2,3648 | 5,6390 | -0,1851 | 2,3648 | 34,5728 |
| 2,4364 | 5,9632 | -0,1707 | 2,4364 | 27,1655 | 2,4407 | 6,0170 | -0,6382 | 2,4407 | 35,5119 |
| 2,4414 | 6,0339 | 0,8162 | 2,4414 | 27,2212 | 2,4098 | 5,8075 | 0,4499 | 2,4098 | 34,4602 |
| 2,3891 | 5,7552 | -0,0303 | 2,3891 | 27,5946 | 2,4262 | 5,9576 | 1,0074 | 2,4262 | 35,1797 |
| 2,4437 | 6,0007 | 0,6343 | 2,4437 | 28,3469 | 2,3610 | 5,6100 | -0,0528 | 2,3610 | 35,2266 |
| 2,4101 | 5,8135 | 0,7816 | 2,4101 | 28,7284 | 2,4436 | 6,0347 | -0,7473 | 2,4436 | 36,4094 |
| 2,3915 | 5,7758 | 0,9681 | 2,3915 | 29,4151 | 2,3977 | 5,7295 | -0,3775 | 2,3977 | 35,0064 |
| 2,3647 | 5,6592 | -0,4573 | 2,3647 | 30,1498 | 2,4313 | 5,9692 | 1,1278 | 2,4313 | 35,1320 |
| 2,4250 | 5,8673 | -0,3479 | 2,4250 | 30,5552 | 2,3415 | 5,5321 | -0,4069 | 2,3415 | 34,9345 |
| 2,4334 | 5,9502 | 1,0867 | 2,4334 | 30,4179 | 2,4286 | 5,8139 | 0,5859 | 2,4286 | 35,8216 |
| 2,3478 | 5,5799 | 0,7681 | 2,3478 | 30,4977 | 2,4139 | 5,8622 | 1,4551 | 2,4139 | 36,2091 |
| 2,3914 | 5,7926 | 0,2898 | 2,3914 | 31,9252 | 2,2771 | 5,2315 | -0,6664 | 2,2771 | 35,5221 |
| 2,4363 | 6,0084 | 0,2277 | 2,4363 | 32,8898 | 2,4014 | 5,8079 | 0,6157 | 2,4014 | 36,7419 |
| 2,4393 | 5,4388 | 0,2330 | 2,4393 | 33,2227 | 2,4110 | 5,8014 | 0,6715 | 2,4110 | 37,4909 |
| 2,4394 | 5,9627 | 2,7544 | 2,4394 | 33,5412 | 2,4048 | 5,7198 | 1,0558 | 2,4048 | 38,0436 |
| 1,9715 | 3,9306 | -0,8027 | 1,9715 | 29,3748 | 2,3484 | 5,5806 | -1,3745 | 2,3484 | 38,1619 |
| 2,3641 | 5,6644 | -0,6224 | 2,3641 | 34,2795 | 2,2872 | 5,3093 | 0,0252 | 2,2872 | 35,7940 |
| 2,4095 | 5,8834 | -0,0347 | 2,4095 | 34,3352 | 2,4436 | 6,0402 | -0,0473 | 2,4436 | 38,2418 |

13. Построение с помощью «Пакета анализа» регрессионного уравнения $v_t = c_0 w_{t0} + c_1 w_{t1}$ с нулевым свободным членом (см. Вывод итогов 2.5), параметры которого являются корректировочными коэффициентами исходной (авторегрессионной модели первого порядка) модели.

ВЫВОД ИТОГОВ 2.5

| <i>Регрессионная статистика</i> | |
|---------------------------------|----------|
| Множественный R | 0,015045 |
| R-квадрат | 0,000226 |
| Нормированный R-квадрат | -0,02755 |
| Стандартная ошибка | 0,900989 |
| Наблюдения | 74 |

| <i>Дисперсионный анализ</i> | | | | | |
|-----------------------------|-----------|-----------|-----------|----------|---------------------|
| | <i>df</i> | <i>SS</i> | <i>MS</i> | <i>F</i> | <i>Значимость F</i> |
| Регрессия | 2 | 0,013232 | 0,006616 | 0,00815 | 0,991884 |
| Остаток | 72 | 58,44825 | 0,811781 | | |
| Итого | 74 | 58,46149 | | | |

| | <i>Коэффициенты</i> | <i>Стандартная ошибка</i> | <i>t-статистика</i> | <i>P-значение</i> | <i>Нижние 95%</i> | <i>Верхние 95%</i> |
|----------------|---------------------|---------------------------|---------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| У-пересечение | 0 | #Н/Д | #Н/Д | #Н/Д | #Н/Д | #Н/Д |
| Переменная X 1 | 0,04081 | 0,408756 | 0,099839 | 0,92075 | -0,77403 | 0,855649 |
| Переменная X 2 | -0,00271 | 0,029878 | -0,0907 | 0,927984 | -0,06227 | 0,056851 |

Таким образом, построенная модель с корректировочными коэффициентами имеет вид

$$v_t = 0,041w_{t0} - 0,003w_{t1}.$$

14.Корректировка коэффициентов построенного уравнения

$$\hat{b}_0 = \hat{b}_0 + \hat{c}_0 = 0,269 + 0,041 = 0,310 ,$$

$$\hat{b}_1 = \hat{b}_1 + \hat{c}_1 = 0,982 - 0,003 = 0,979 .$$

15. Выполнение п. 3-6. Тестирование скорректированной модели на наличие ARCH-эффекта с помощью TR^2 -критерия

$$TR^2 = 75 \cdot 0,011 = 0,828.$$

Сравнение полученного значения критерия с табличным значением распределения $c_{0,95}^2(1) = 3,84$ свидетельствует об отсутствии ARCH-эффекта. Следовательно, модель $y_t = 0,310 + 0,979 y_{t-1}$ пригодна для целей прогнозирования.

16. Прогноз курса акций на 16.10.03 и 17.10.03

$$\hat{y}_{t+1} = 0,310 + 0,979 \cdot 15,75 = 15,73;$$

$$\hat{y}_{t+2} = 0,310 + 0,979 \cdot 15,73 = 15,71.$$

3.3. Задания для самостоятельной работы

Задание 3.3.1. По данным табл. 3.3.1, отражающей динамику величины средней базовой ставки банковского процента в США, постройте авторегрессионную модель, предварительно установив ее порядок. Проведите расчеты, необходимые для тестирования ARCH-эффектов. Если наличие таких эффектов подтвердится, то скорректируйте коэффициенты авторегрессионной модели, применив четырехэтапную процедуру построения ARCH модели.

Таблица 3.3.1

| Дата | Ставка, % | Дата | Ставка, % | Дата | Ставка, % | Дата | Ставка, % | Дата | Ставка, % |
|----------|--------------|----------|--------------|----------|--------------|----------|--------------|----------|--------------|
| 01.11.80 | 16,06 | 01.11.86 | 7,50 | 01.11.83 | 11,00 | 01.11.89 | 10,50 | 01.11.92 | 6,00 |
| 01.12.80 | 20,35 | 01.12.86 | 7,50 | 01.12.83 | 11,00 | 01.12.89 | 10,50 | 01.12.92 | 6,00 |
| 01.01.81 | 20,16 | 01.01.87 | 7,50 | 01.01.84 | 11,00 | 01.01.90 | 10,11 | 01.01.93 | 6,00 |
| 01.02.81 | 19,43 | 01.02.87 | 7,50 | 01.02.84 | 11,00 | 01.02.90 | 10,00 | 01.02.93 | 6,00 |
| 01.03.81 | 18,05 | 01.03.87 | 7,50 | 01.03.84 | 11,21 | 01.03.90 | 10,00 | 01.03.93 | 6,00 |
| 01.04.81 | 17,15 | 01.04.87 | 7,75 | 01.04.84 | 11,93 | 01.04.90 | 10,00 | 01.04.93 | 6,00 |
| 01.05.81 | 19,61 | 01.05.87 | 8,14 | 01.05.84 | 12,39 | 01.05.90 | 10,00 | 01.05.93 | 6,00 |
| 01.06.81 | 20,03 | 01.06.87 | 8,25 | 01.06.84 | 12,60 | 01.06.90 | 10,00 | 01.06.93 | 6,00 |
| 01.07.81 | 20,39 | 01.07.87 | 8,25 | 01.07.84 | 13,00 | 01.07.90 | 10,00 | 01.07.93 | 6,00 |
| 01.08.81 | 20,50 | 01.08.87 | 8,25 | 01.08.84 | 13,00 | 01.08.90 | 10,00 | 01.08.93 | 6,00 |
| 01.09.81 | 20,08 | 01.09.87 | 8,70 | 01.09.84 | 12,97 | 01.09.90 | 10,00 | 01.09.93 | 6,00 |
| 01.10.81 | 18,50 | 01.10.87 | 9,07 | 01.10.84 | 12,58 | 01.10.90 | 10,00 | 01.10.93 | 6,00 |
| 01.11.81 | 16,84 | 01.11.87 | 8,78 | 01.11.84 | 11,77 | 01.11.90 | 10,00 | 01.11.93 | 6,00 |
| 01.12.81 | 15,75 | 01.12.87 | 8,75 | 01.12.84 | 11,06 | 01.12.90 | 10,00 | 01.12.93 | 6,00 |
| 01.01.82 | 15,75 | 01.01.88 | 8,75 | 01.01.85 | 10,61 | 01.01.91 | 9,52 | 01.01.94 | 6,00 |
| 01.02.82 | 16,56 | 01.02.88 | 8,51 | 01.02.85 | 10,50 | 01.02.91 | 9,05 | 01.02.94 | 6,00 |
| 01.03.82 | 16,50 | 01.03.88 | 8,50 | 01.03.85 | 10,50 | 01.03.91 | 9,00 | 01.03.94 | 6,06 |
| 01.04.82 | 16,50 | 01.04.88 | 8,50 | 01.04.85 | 10,50 | 01.04.91 | 9,00 | 01.04.94 | 6,45 |
| 01.05.82 | 16,50 | 01.05.88 | 8,84 | 01.05.85 | 10,31 | 01.05.91 | 8,50 | 01.05.94 | 6,99 |
| 01.06.82 | 16,50 | 01.06.88 | 9,00 | 01.06.85 | 9,78 | 01.06.91 | 8,50 | 01.06.94 | 7,25 |
| 01.07.82 | 16,26 | 01.07.88 | 9,29 | 01.07.85 | 9,50 | 01.07.91 | 8,50 | 01.07.94 | 7,25 |
| 01.08.82 | 14,39 | 01.08.88 | 9,84 | 01.08.85 | 9,50 | 01.08.91 | 8,50 | 01.08.94 | 7,51 |
| 01.09.82 | 13,50 | 01.09.88 | 10,00 | 01.09.85 | 9,50 | 01.09.91 | 8,20 | 01.09.94 | 7,75 |
| 01.10.82 | 12,52 | 01.10.88 | 10,00 | 01.10.85 | 9,50 | 01.10.91 | 8,00 | 01.10.94 | 7,75 |
| 01.11.82 | 11,85 | 01.11.88 | 10,05 | 01.11.85 | 9,50 | 01.11.91 | 7,58 | 01.11.94 | 8,15 |
| 01.12.82 | 11,50 | 01.12.88 | 10,50 | 01.12.85 | 9,50 | 01.12.91 | 7,21 | 01.12.94 | 8,50 |
| 01.01.83 | 11,16 | 01.01.89 | 10,50 | 01.01.86 | 9,50 | 01.01.92 | 6,50 | 01.01.95 | 8,50 |
| 01.02.83 | 10,98 | 01.02.89 | 10,93 | 01.02.86 | 9,50 | 01.02.92 | 6,50 | 01.02.95 | 9,00 |
| 01.03.83 | 10,50 | 01.03.89 | 11,50 | 01.03.86 | 9,10 | 01.03.92 | 6,50 | 01.03.95 | 9,00 |
| 01.04.83 | 10,50 | 01.04.89 | 11,50 | 01.04.86 | 8,83 | 01.04.92 | 6,50 | 01.04.95 | 9,00 |
| 01.05.83 | 10,50 | 01.05.89 | 11,50 | 01.05.86 | 8,50 | 01.05.92 | 6,50 | 01.05.95 | 9,00 |
| 01.06.83 | 10,50 | 01.06.89 | 11,07 | 01.06.86 | 8,50 | 01.06.92 | 6,50 | 01.06.95 | 9,00 |
| 01.07.83 | 10,50 | 01.07.89 | 10,98 | 01.07.86 | 8,16 | 01.07.92 | 6,02 | 01.07.95 | 8,80 |
| 01.08.83 | 10,89 | 01.08.89 | 10,50 | 01.08.86 | 7,90 | 01.08.92 | 6,00 | 01.08.95 | 8,75 |
| 01.09.83 | 11,00 | 01.09.89 | 10,50 | 01.09.86 | 7,50 | 01.09.92 | 6,00 | 01.09.95 | 8,75 |
| 01.10.83 | 11,00 | 01.10.89 | 10,50 | 01.10.86 | 7,50 | 01.10.92 | 6,00 | 01.10.95 | 8,75 |

Задание 3.3.2. Один из акционеров ОАО «Клеопатра», осуществляющей производство натуральных эссенций и масел для разнообразной парфюмерной продукции, в связи с некоторым затруднением в материальном положении желает продать свои 2187 акций в следующем месяце. Для того чтобы определить примерную рыночную стоимость одной акции, он решил получить прогнозную оценку дивидендов на акцию в интересующем его периоде. С этой целью акционер сформировал табл. 3.3.2. Постройте модель, наилучшим образом отражающую динамику величины дивидендов, и осуществите требуемые прогнозные расчеты.

Таблица 3.3.2

| Дата | Дивиденды на акцию, евро | Дата | Дивиденды на акцию, евро | Дата | Дивиденды на акцию, евро | Дата | Дивиденды на акцию, евро |
|----------|--------------------------|----------|--------------------------|----------|--------------------------|----------|--------------------------|
| 01.01.98 | 7,30 | 01.07.99 | 9,79 | 01.01.01 | 11,23 | 01.07.02 | 13,44 |
| 01.02.98 | 7,63 | 01.08.99 | 9,77 | 01.02.01 | 12,29 | 01.08.02 | 13,51 |
| 01.03.98 | 7,65 | 01.09.99 | 9,89 | 01.03.01 | 11,53 | 01.09.02 | 13,63 |
| 01.04.98 | 7,97 | 01.10.99 | 10,00 | 01.04.01 | 12,58 | 01.10.02 | 13,70 |
| 01.05.98 | 8,00 | 01.11.99 | 10,24 | 01.05.01 | 10,82 | 01.11.02 | 13,61 |
| 01.06.98 | 8,23 | 01.12.99 | 10,24 | 01.06.01 | 11,41 | 01.12.02 | 13,72 |
| 01.07.98 | 8,19 | 01.01.00 | 10,35 | 01.07.01 | 10,91 | 01.01.03 | 13,98 |
| 01.08.98 | 8,35 | 01.02.00 | 10,43 | 01.08.01 | 12,02 | 01.02.03 | 14,03 |
| 01.09.98 | 8,53 | 01.03.00 | 10,75 | 01.09.01 | 12,41 | 01.03.03 | 13,99 |
| 01.10.98 | 7,90 | 01.04.00 | 10,77 | 01.10.01 | 12,56 | 01.04.03 | 13,88 |
| 01.11.98 | 8,25 | 01.05.00 | 11,02 | 01.11.01 | 12,33 | 01.05.03 | 14,41 |
| 01.12.98 | 7,69 | 01.06.00 | 10,85 | 01.12.01 | 13,14 | 01.06.03 | 15,02 |
| 01.01.99 | 7,66 | 01.07.00 | 11,18 | 01.01.02 | 12,49 | 01.07.03 | 14,59 |
| 01.02.99 | 8,38 | 01.08.00 | 9,98 | 01.02.02 | 12,20 | 01.08.03 | 13,33 |
| 01.03.99 | 8,63 | 01.09.00 | 11,62 | 01.03.02 | 12,50 | 01.09.03 | 15,08 |
| 01.04.99 | 7,72 | 01.10.00 | 12,00 | 01.04.02 | 13,39 | 01.10.03 | 15,31 |
| 01.05.99 | 9,00 | 01.11.00 | 11,73 | 01.05.02 | 11,90 | 01.11.03 | 14,85 |
| 01.06.99 | 9,24 | 01.12.00 | 11,48 | 01.06.02 | 13,24 | 01.12.03 | 15,97 |

4. МОДЕЛИ ДЛЯ ПАНЕЛЬНЫХ ДАННЫХ

4.1. Расчетные формулы

4.1.1. Модель с фиксированными эффектами

$$y_i = \mathbf{i}a_i + \mathbf{X}_i\mathbf{b} + e_i.$$

4.1.2. F -статистика, используемая для проверки значимости групповых эффектов

$$F(n-1, nT - n - K) = \frac{(R_u^2 - R_p^2)/(n-1)}{(1 - R_u^2)/(nT - n - K)},$$

где n - число панелей, T - число наблюдений в сбалансированной панели, K - число факторов в модели.

4.1.3. МНК-оценки \mathbf{b} для разделенной регрессии

$$\hat{\mathbf{b}} = [\mathbf{X}'\mathbf{M}_d\mathbf{X}]^{-1}[\mathbf{X}'\mathbf{M}_d\mathbf{y}],$$

где $\mathbf{M}_d = \mathbf{I} - \mathbf{D}(\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1}\mathbf{D}'$,

\mathbf{D} - матрица, элементы которой являются фиктивными переменными.

4.1.4. Коэффициенты фиктивных переменных

$$\mathbf{a} = [\mathbf{D}'\mathbf{D}]^{-1}\mathbf{D}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{b}}).$$

4.1.5. Оценка ковариационной матрицы для $\hat{\mathbf{b}}$

$$Est.Var[\mathbf{b}] = s^2[\mathbf{X}'\mathbf{M}_d\mathbf{X}]^{-1},$$

$$\text{где } s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (y_{it} - a_i - \mathbf{x}'_{it}\hat{\mathbf{b}})^2}{nT - n - K}.$$

4.1.6. Дисперсия для индивидуальных эффектов

$$Var[a_i] = \frac{S^2}{T} + \bar{\mathbf{x}}'_i Var[\hat{\mathbf{b}}] \bar{\mathbf{x}}_{i\bullet}.$$

4.1.7. Преобразование данных i -го блока \mathbf{y}_i и \mathbf{X}_i для применения обобщенного МНК

$$\Omega^{-1/2}\mathbf{y}_i = \frac{1}{S_e} \begin{bmatrix} y_{i1} - q \bar{y}_i \\ y_{i2} - q \bar{y}_i \\ \mathbf{M} \\ y_{iT} - q \bar{y}_i \end{bmatrix},$$

$$\text{где } q = 1 - \frac{S_e}{\sqrt{TS_u^2 + S_e^2}}.$$

4.1.8. Остаточная дисперсия модели с фиксированными эффектами

$$\hat{S}_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (e_{it} - \bar{e}_{i\bullet})^2}{nT - n - K}.$$

4.1.9. Дисперсия, характеризующая вариацию наблюдений, относящихся к различным панелям

$$\hat{S}_u^2 = \hat{S}_{**}^2 - \frac{\hat{S}_e^2}{T},$$

где $\hat{S}_{**}^2 = \frac{\mathbf{e}'_{**}\mathbf{e}_{**}}{n-K}$, $e_{**i} = \bar{y}_{i\cdot} - \hat{a} - \hat{\mathbf{b}}'\bar{\mathbf{x}}_{i\cdot}$.

4.1.10. Статистика хи-квадрат теста, основанного на критерии Вальда

$$W = c^2[K] = \left[\hat{\mathbf{b}} - \hat{\mathbf{b}} \right]' \hat{\Sigma}^{-1} \left[\hat{\mathbf{b}} - \hat{\mathbf{b}} \right],$$

где $\hat{\mathbf{b}}$ - оценка обычного МНК, $\hat{\mathbf{b}}$ - оценка обобщенного МНК, $\hat{\Sigma}^{-1}$ - ковариационная матрица оценок коэффициентов модели случайных эффектов, исключая константу.

4.2. Решение типовой задачи

Таблица 4.2.1

| № п.п. | у | x_1 | x_2 | № п.п. | у | x_1 | x_2 |
|----------------------|--------|-------|-------|---------------------|--------|-------|-------|
| Орловская область | | | | Воронежская область | | | |
| 1 | 20,76 | 0,24 | 10,23 | 15 | 65,01 | 0,94 | 10,36 |
| 2 | 28,09 | 0,31 | 10,89 | 16 | 69,05 | 1,21 | 11,36 |
| 3 | 32,95 | 0,55 | 10,28 | 17 | 73,13 | 1,29 | 8,89 |
| 4 | 38,15 | 0,67 | 10,32 | 18 | 81,18 | 1,49 | 7,55 |
| 5 | 46,78 | 0,83 | 10,85 | 19 | 89,24 | 1,67 | 7,81 |
| 6 | 55,31 | 0,98 | 11,38 | 20 | 97,30 | 1,84 | 8,08 |
| 7 | 60,92 | 1,14 | 11,91 | 21 | 115,36 | 2,02 | 11,84 |
| Белгородская область | | | | Липецкая область | | | |
| 8 | 41,08 | 0,45 | 1,45 | 22 | 91,26 | 1,12 | 10,72 |
| 9 | 56,29 | 0,78 | 2,02 | 23 | 99,84 | 1,29 | 11,27 |
| 10 | 68,51 | 0,98 | 3,77 | 24 | 108,55 | 1,49 | 13,02 |
| 11 | 82,72 | 1,24 | 5,52 | 25 | 117,17 | 1,67 | 13,41 |
| 12 | 96,43 | 1,49 | 7,51 | 26 | 125,81 | 1,85 | 13,62 |
| 13 | 110,15 | 1,74 | 9,04 | 27 | 134,46 | 2,04 | 14,34 |
| 14 | 123,86 | 1,99 | 12,01 | 28 | 143,10 | 2,22 | 14,85 |

Задание 4.2.1. Учредитель крупнейшей сети недорогих супермаркетов «Пятерочка», как и любой предприниматель, заинтересован в росте доходов от своего бизнеса. Очевидно, что доход напрямую зависит от величины товарооборота. С целью изыскания путей увеличения годового товарооборота (млн. руб., у), он поручил специалистам компании изучить фак

торы, влияющие на этот показатель, в четырех регионах России. В ходе исследования было выявлено, что такими факторами являются торговая площадь (тыс. кв. м., x_1) и среднее число посетителей в день (тыс. чел., x_2), и сформирована табл. 4.2.1. По представленным в этой таблице панельным данным было решено построить регрессионную модель, отражающую зависимость товарооборота от соответствующих факторов.

Решение с помощью табличного процессора Excel

1. Ввод исходных данных и оформление их в виде, удобном для проведения расчетов.
2. Построение регрессионной модели с фиксированными эффектами.
 - 2.1. Построение модели с использованием фиктивных переменных.
 - 2.1.1. Формирование фиктивных переменных и оформление результатов в виде табл. 4.2.2.

Таблица 4.2.2

| № п.п. | y | i_1 | i_2 | i_3 | i_4 | x_1 | x_2 |
|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 20,76 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0,24 | 10,23 |
| 2 | 28,09 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0,31 | 10,89 |
| 3 | 32,95 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0,55 | 10,28 |
| 4 | 38,15 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0,67 | 10,32 |
| 5 | 46,78 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0,83 | 10,85 |
| 6 | 55,31 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0,98 | 11,38 |
| 7 | 60,92 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1,14 | 11,91 |
| 8 | 41,08 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0,45 | 1,45 |
| 9 | 56,29 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0,78 | 2,02 |
| 10 | 68,51 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0,98 | 3,77 |
| 11 | 82,72 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1,24 | 5,52 |
| 12 | 96,43 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1,49 | 7,51 |
| 13 | 110,15 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1,74 | 9,04 |
| 14 | 123,86 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1,99 | 12,01 |
| 15 | 65,01 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0,94 | 10,36 |
| 16 | 69,05 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1,21 | 11,36 |
| 17 | 73,13 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1,29 | 8,89 |
| 18 | 81,18 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1,49 | 7,55 |
| 19 | 89,24 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1,67 | 7,81 |
| 20 | 97,30 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1,84 | 8,08 |
| 21 | 115,36 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2,02 | 11,84 |
| 22 | 91,26 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1,12 | 10,72 |
| 23 | 99,84 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1,29 | 11,27 |
| 24 | 108,55 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1,49 | 13,02 |
| 25 | 117,17 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1,67 | 13,41 |
| 26 | 125,81 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1,85 | 13,62 |
| 27 | 134,46 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2,04 | 14,34 |
| 28 | 143,10 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2,22 | 14,85 |

2.1.2. Построение по данным табл. 4.2.2 регрессионного уравнения (без свободного члена) с использованием «Пакета анализа» (см. Вывод итогов 4.1).

ВЫВОД ИТОГОВ 4.1

| <i>Регрессионная статистика</i> | |
|---------------------------------|----------|
| Множественный R | 0,998463 |
| R-квадрат | 0,996929 |
| Нормированный R-квадрат | 0,950777 |
| Стандартная ошибка | 2,090854 |
| Наблюдения | 28 |

| <i>Дисперсионный анализ</i> | | | | | |
|-----------------------------|-----------|-----------|-----------|----------|---------------------|
| | <i>df</i> | <i>SS</i> | <i>MS</i> | <i>F</i> | <i>Значимость F</i> |
| Регрессия | 6 | 31222,94 | 5203,824 | 1190,352 | 1,82E-25 |
| Остаток | 22 | 96,17671 | 4,371669 | | |
| Итого | 28 | 31319,12 | | | |

| | <i>Коэффициенты</i> | <i>Стандартная ошибка</i> | <i>t-статистика</i> | <i>P-значение</i> | <i>Нижние 95%</i> | <i>Верхние 95%</i> |
|----------------|---------------------|---------------------------|---------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| Y-пересечение | 0 | #Н/Д | #Н/Д | #Н/Д | #Н/Д | #Н/Д |
| Переменная X 1 | -5,30202 | 2,446452 | -2,16723 | 0,041316 | -10,3757 | -0,22839 |
| Переменная X 2 | 20,10911 | 1,512595 | 13,29444 | 5,43E-12 | 16,97217 | 23,24604 |
| Переменная X 3 | 5,288617 | 1,966483 | 2,689378 | 0,013394 | 1,210376 | 9,366858 |
| Переменная X 4 | 25,06542 | 2,569854 | 9,753633 | 1,9E-09 | 19,73586 | 30,39497 |
| Переменная X 5 | 43,27474 | 1,453606 | 29,77061 | 2,86E-19 | 40,26014 | 46,28933 |
| Переменная X 6 | 1,526726 | 0,268973 | 5,676137 | 1,04E-05 | 0,96891 | 2,084541 |

2.1.3. Построение по данным табл. 4.2.1 регрессионного уравнения (со свободным членом) $y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + e$ с использованием «Пакета анализа» (см. Вывод итогов 4.2).

2.1.4. Проверка гипотезы об отсутствии фиксированных групповых эффектов с помощью F -статистики

$$F(3, 22) = \frac{0,9969(4 - 1)}{0,9136(4 \cdot 7 - 4 - 2)} = 198,88.$$

Сравнение расчетного значения F -статистики с табличным $F_{0,95}(3, 22) = 3,05$ позволяет отвергнуть указанную гипотезу.

Следовательно, построенная модель

$$\hat{y} = -5,30i_1 + 20,11i_2 + 5,29i_3 + 25,05i_4 + 43,27x_1 + 1,53x_2, (*)$$

2.2.1.2. Вычисление $[\mathbf{X}'\mathbf{M}_d\mathbf{X}]^{-1}$ с учетом диагональной структуры матрицы \mathbf{M}_d

| | |
|---------|---------|
| 0,4833 | -0,0641 |
| -0,0641 | 0,0165 |

2.2.1.3. Вычисление $[\mathbf{X}'\mathbf{M}_d\mathbf{y}]$ с учетом диагональной матрицы \mathbf{M}_d

| |
|----------|
| 209,4182 |
| 903,6705 |

2.2.1.4. Вычисление $\hat{\mathbf{b}}$

| |
|---------|
| 43,2747 |
| 1,5267 |

2.2.2. Расчет оценок коэффициентов переменных по формуле $\mathbf{a} = [\mathbf{D}'\mathbf{D}]^{-1}\mathbf{D}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{b}})$.

2.2.2.1. Вычисление $[\mathbf{D}'\mathbf{D}]^{-1}$

| | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| 0,1428 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0,1428 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0,1428 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0,1428 |

2.2.2.2. Вычисление $(\mathbf{X}\hat{\mathbf{b}})$ и $(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{b}})$. Оформление результатов в виде табл. 4.2.3.

Таблица 4.2.3

| № п.п. | y | $(\mathbf{X}\hat{\mathbf{b}})$ | $(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{b}})$ | № п.п. | y | $(\mathbf{X}\hat{\mathbf{b}})$ | $(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{b}})$ |
|--------|--------|--------------------------------|---|--------|--------|--------------------------------|---|
| 1 | 20,76 | 26,00 | -5,24 | 15 | 65,01 | 56,50 | 8,51 |
| 2 | 28,09 | 30,04 | -1,95 | 16 | 69,05 | 69,71 | -0,66 |
| 3 | 32,95 | 39,50 | -6,55 | 17 | 73,13 | 69,40 | 3,73 |
| 4 | 38,15 | 44,75 | -6,60 | 18 | 81,18 | 76,01 | 5,17 |
| 5 | 46,78 | 52,48 | -5,70 | 19 | 89,24 | 84,19 | 5,05 |
| 6 | 55,31 | 59,78 | -4,47 | 20 | 97,3 | 91,96 | 5,34 |
| 7 | 60,92 | 67,52 | -6,60 | 21 | 115,36 | 105,49 | 9,87 |
| 8 | 41,08 | 21,69 | 19,39 | 22 | 91,26 | 64,83 | 26,43 |
| 9 | 56,29 | 36,84 | 19,45 | 23 | 99,84 | 73,03 | 26,81 |
| 10 | 68,51 | 48,16 | 20,35 | 24 | 108,55 | 84,36 | 24,19 |
| 11 | 82,72 | 62,09 | 20,63 | 25 | 117,17 | 92,74 | 24,43 |
| 12 | 96,43 | 75,95 | 20,48 | 26 | 125,81 | 100,85 | 24,96 |
| 13 | 110,15 | 89,10 | 21,05 | 27 | 134,46 | 110,17 | 24,29 |
| 14 | 123,86 | 104,45 | 19,41 | 28 | 143,1 | 118,74 | 24,36 |

2.2.2.3. Вычисление $D'(y - X\hat{b})$

| |
|----------|
| -37,1142 |
| 140,7637 |
| 37,02032 |
| 175,4579 |

2.2.2.4. Вычисление a

| |
|---------|
| -5,3020 |
| 20,1091 |
| 5,2886 |
| 25,0654 |

2.2.3. Расчет стандартных ошибок коэффициентов модели по формуле $Est.Var[b] = s^2[X'M_d X]^{-1}$

2.2.3.1. Вычисление \hat{y} по построенному регрессионному уравнению (*), s^2 и оформление результатов расчетов в виде табл. 4.2.4.

Таблица 4.2.4

| № п.п. | y | \hat{y} | № п.п. | y | \hat{y} |
|----------------------------|--------|-----------|--------|--------|-----------|
| 1 | 20,70 | 0,00 | 15 | 61,78 | 10,41 |
| 2 | 24,74 | 11,23 | 16 | 74,99 | 35,34 |
| 3 | 34,19 | 1,55 | 17 | 74,69 | 2,42 |
| 4 | 39,45 | 1,68 | 18 | 81,29 | 0,01 |
| 5 | 47,18 | 0,16 | 19 | 89,48 | 0,06 |
| 6 | 54,48 | 0,69 | 20 | 97,25 | 0,00 |
| 7 | 62,21 | 1,68 | 21 | 110,78 | 20,98 |
| 8 | 41,80 | 0,51 | 22 | 89,90 | 1,85 |
| 9 | 56,95 | 0,43 | 23 | 98,10 | 3,04 |
| 10 | 68,27 | 0,06 | 24 | 109,42 | 0,76 |
| 11 | 82,20 | 0,27 | 25 | 117,81 | 0,41 |
| 12 | 96,05 | 0,14 | 26 | 125,92 | 0,01 |
| 13 | 109,21 | 0,89 | 27 | 135,24 | 0,61 |
| 14 | 124,56 | 0,49 | 28 | 143,81 | 0,50 |
| Сумма квадратов отклонений | | | | | 96,17671 |
| Остаточная дисперсия | | | | | 4,371669 |

2.2.3.2. Вычисление $Est.Var[b]$

| |
|--------|
| 1,4536 |
| 0,2689 |

2.2.4. Расчет стандартных ошибок оценок коэффициентов фиктивных

переменных по формуле $Var[a_i] = \frac{S^2}{T} + \bar{x}'_i \cdot Var[\hat{b}] \bar{x}_{i\cdot}$.

2.2.4.1. Вычисление $\bar{x}_{i\cdot}$

| | Орловская область | Белгородская область | Воронежская область | Липецкая область |
|--------------------|-------------------|----------------------|---------------------|------------------|
| $\bar{x}_{1\cdot}$ | 0,6743 | 1,2386 | 1,4943 | 1,6686 |
| $\bar{x}_{2\cdot}$ | 10,8371 | 5,9029 | 9,4129 | 13,0329 |

2.2.4.2. Вычисление \hat{S}^2

$$\hat{S}^2 = \sqrt{4,3716} = 2,0908.$$

2.2.4.3. Вычисление $Var[a_i]$

| |
|--------|
| 2,4465 |
| 1,5126 |
| 1,9665 |
| 2,5699 |

3. Построение регрессионной модели со случайными эффектами.

3.1. Вычисление средних значений $\bar{y}_{i\cdot}$ для каждой панели данных.

3.2. Расчет квадратов отклонений $(\bar{y}_{i\cdot} - \hat{a} - \hat{b}'\bar{x}_{i\cdot})^2$ и оформление результатов расчетов в виде табл. 4.2.5

Таблица 4.2.5

| $\bar{y}_{i\cdot}$ | $\bar{x}_{1\cdot}$ | $\bar{x}_{2\cdot}$ | $a + b'\bar{x}_{i\cdot}$ | $(\bar{y}_{i\cdot} - a - b'\bar{x}_{i\cdot})^2$ |
|----------------------------|--------------------|--------------------|--------------------------|---|
| 40,4229 | 0,6743 | 10,8371 | 47,1698 | 45,5213 |
| 82,7200 | 1,2386 | 5,9029 | 77,7750 | 24,4533 |
| 84,3243 | 1,4943 | 9,4129 | 94,0451 | 94,4945 |
| 117,1700 | 1,6686 | 13,0329 | 105,6473 | 132,7736 |
| Сумма квадратов отклонений | | | | 297,2428 |

3.3. Вычисление \hat{S}_u^2

$$\hat{S}_u^2 = 297,2428 - \frac{4,3716}{7} = 296,6183.$$

3.4. Расчет \hat{q}

$$\hat{q} = 1 - \left(\frac{4,3716}{7 \cdot 296,6183 + 4,3716} \right)^{0,5} = 0,9541.$$

3.4. Преобразование данных i -го блока y_i исходных данных по формуле

$$\Omega^{-1/2} y_i = \frac{1}{s_e} \begin{bmatrix} y_{i1} - q \bar{y}_i \\ y_{i2} - q \bar{y}_i \\ \mathbf{M} \\ y_{iT} - q \bar{y}_i \end{bmatrix}$$

и аналогично для X_i . Оформление результатов расчетов в виде табл. 4.2.6.

Таблица 4.2.6.

| № п.п. | y^* | x_1^* | x_2^* | № п.п. | y^* | x_1^* | x_2^* |
|--------|---------|---------|---------|--------|---------|---------|---------|
| 1 | -4,0740 | -0,0923 | -0,0253 | 15 | -3,5339 | -0,1111 | 0,3153 |
| 2 | -2,3972 | -0,0763 | 0,1257 | 16 | -2,6098 | -0,0494 | 0,5441 |
| 3 | -1,2855 | -0,0214 | -0,0138 | 17 | -1,6765 | -0,0311 | -0,0209 |
| 4 | -0,0961 | 0,0061 | -0,0047 | 18 | 0,1649 | 0,0147 | -0,3274 |
| 5 | 1,8780 | 0,0427 | 0,1166 | 19 | 2,0086 | 0,0559 | -0,2680 |
| 6 | 3,8292 | 0,0770 | 0,2378 | 20 | 3,8523 | 0,0947 | -0,2062 |
| 7 | 5,1125 | 0,1136 | 0,3590 | 21 | 7,9834 | 0,1359 | 0,6539 |
| 8 | -8,6576 | -0,1674 | -0,9567 | 22 | -4,6983 | -0,1080 | -0,3924 |
| 9 | -5,1784 | -0,0919 | -0,8263 | 23 | -2,7356 | -0,0691 | -0,2666 |
| 10 | -2,3831 | -0,0462 | -0,4260 | 24 | -0,7433 | -0,0234 | 0,1337 |
| 11 | 0,8673 | 0,0133 | -0,0257 | 25 | 1,2285 | 0,0178 | 0,2229 |
| 12 | 4,0034 | 0,0705 | 0,4295 | 26 | 3,2049 | 0,0590 | 0,2710 |
| 13 | 7,1418 | 0,1277 | 0,7795 | 27 | 5,1835 | 0,1025 | 0,4357 |
| 14 | 10,2779 | 0,1849 | 1,4589 | 28 | 7,1599 | 0,1436 | 0,5523 |

3.5. Построение по данным табл. 4.2.6 регрессионного уравнения с помощью «Пакета анализа» (см. Вывод итогов 4.3).

4. Проверка наличия случайных эффектов с помощью теста Хаусмена.

4.1. Формирование векторов $(x_1^* - \bar{x}_1^*)$, $(x_2^* - \bar{x}_2^*)$ и оформление результатов расчетов в виде табл. 4.2.7.

4.2. Нахождение матрицы $\hat{\Sigma}^{-1} = \left(\mathbf{X}^{**'} \mathbf{X}^{**} \right)^{-1}$ по данным табл. 4.2.7.

| | |
|---------|---------|
| 9,1818 | -1,2150 |
| -1,2150 | 0,3140 |

4.3. Вычисление матрицы $s^{2*} \left(\mathbf{X}^{**'} \mathbf{X}^{**} \right)^{-1}$, где s^{2*} - остаточная дисперсия по преобразованным данным ($s^{2*} = 0,2191$)

| | |
|---------|---------|
| 2,0114 | -0,2662 |
| -0,2662 | 0,0688 |

ВЫВОД ИТОГОВ 4.3

| <i>Регрессионная статистика</i> | |
|---------------------------------|----------|
| Множественный R | 0,995042 |
| R-квадрат | 0,990109 |
| Нормированный R-квадрат | 0,989318 |
| Стандартная ошибка | 0,468049 |
| Наблюдения | 28 |

Дисперсионный анализ

| | <i>df</i> | <i>SS</i> | <i>MS</i> | <i>F</i> | <i>Значимость F</i> |
|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|---------------------|
| Регрессия | 2 | 548,2222 | 274,1111 | 1251,252 | 8,72E-26 |
| Остаток | 25 | 5,476736 | 0,219069 | | |
| Итого | 27 | 553,699 | | | |

| | <i>Коэффициенты</i> | <i>Стандартная ошибка</i> | <i>t-статистика</i> | <i>P-значение</i> | <i>Нижние 95%</i> | <i>Верхние 95%</i> |
|----------------|---------------------|---------------------------|---------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| Y-пересечение | 0,118466 | 0,090433 | 1,309978 | 0,202113 | -0,06779 | 0,304717 |
| Переменная X 1 | 43,37632 | 1,418254 | 30,58432 | 2,5E-21 | 40,45537 | 46,29726 |
| Переменная X 2 | 1,512727 | 0,262271 | 5,767808 | 5,19E-06 | 0,972571 | 2,052884 |

Таблица 4.2.7

| № п.п. | $(x_1^* - \bar{x}_1^*)$ | $(x_2^* - \bar{x}_2^*)$ | № п.п. | $(x_1^* - \bar{x}_1^*)$ | $(x_2^* - \bar{x}_2^*)$ |
|--------|-------------------------|-------------------------|--------|-------------------------|-------------------------|
| 1 | -0,1056 | -0,1280 | 15 | -0,1244 | 0,2126 |
| 2 | -0,0896 | 0,0230 | 16 | -0,0627 | 0,4414 |
| 3 | -0,0347 | -0,1165 | 17 | -0,0444 | -0,1236 |
| 4 | -0,0072 | -0,1074 | 18 | 0,0014 | -0,4301 |
| 5 | 0,0294 | 0,0139 | 19 | 0,0426 | -0,3707 |
| 6 | 0,0637 | 0,1351 | 20 | 0,0814 | -0,3089 |
| 7 | 0,1003 | 0,2563 | 21 | 0,1226 | 0,5512 |
| 8 | -0,1807 | -1,0594 | 22 | -0,1213 | -0,4951 |
| 9 | -0,1052 | -0,9290 | 23 | -0,0824 | -0,3693 |
| 10 | -0,0595 | -0,5287 | 24 | -0,0367 | 0,0310 |
| 11 | 0,0000 | -0,1284 | 25 | 0,0045 | 0,1202 |
| 12 | 0,0572 | 0,3268 | 26 | 0,0457 | 0,1682 |
| 13 | 0,1144 | 0,6768 | 27 | 0,0892 | 0,3329 |
| 14 | 0,1716 | 1,3562 | 28 | 0,1303 | 0,4496 |

4.4. Определение вектора $\left[\hat{\mathbf{b}} - \hat{\hat{\mathbf{b}}} \right]$, где $\hat{\mathbf{b}}$ - вектор оценок параметров уравнения регрессии, построенного по исходным данным

(без свободного члена), $\hat{\mathbf{b}}$ - вектор оценок параметров уравнения регрессии, построенного по преобразованным данным (без свободного члена). Оформление результатов в виде табл. 4.2.8.

Таблица 4.2.8

| $\hat{\mathbf{b}}$ | $\hat{\mathbf{b}}$ | $[\hat{\mathbf{b}} - \hat{\mathbf{b}}]$ |
|--------------------|--------------------|---|
| 57,8908 | 43,3763 | 14,5145 |
| 0,4178 | 1,5127 | -1,0949 |

4.5. Расчет критерия Вальда

$$W = c^2[2] = [\hat{\mathbf{b}} - \hat{\mathbf{b}}]' \hat{\Sigma}^{-1} [\hat{\mathbf{b}} - \hat{\mathbf{b}}] = 432,29.$$

Сравнение расчетного значения $c^2[2] = 432,29$ с табличным $c_{0,95}^2[2] = 5,99$ позволяет отвергнуть нулевую гипотезу об отсутствии случайных эффектов, порождаемых структурой панельных данных, и принять альтернативную гипотезу, в соответствии с которой в модели необходимо учитывать случайные эффекты, а для нахождения параметров этой модели применять обобщенный МНК.

5. Выбор наилучшей модели (с фиксированными или случайными эффектами) по остаточной дисперсии.

5.1. Получение расчетных значений \hat{y}_{it}^*

$$\hat{y}_{it}^* = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_{1it}^* + \hat{b}_2 x_{2it}^* = 0,1185 + 43,3763 x_{1it}^* + 1,5127 x_{2it}^*,$$

$$\hat{y}_{it} = \hat{y}_{it}^* \hat{\mathcal{S}}_e + \hat{\mathbf{q}} \bar{y}_i = 4,3717 \hat{y}_{it}^* + 0,9542 \bar{y}_i.$$

5.2. Расчет остаточной дисперсии. (Заметим, что число степеней свободы для модели случайных эффектов равно 26, а для модели с фиксированными эффектами – 22).

Оформление результатов вычислений в виде табл. 4.2.9.

Со статистической точки зрения модель со случайными эффектами лучше, поскольку обладает меньшей остаточной дисперсией.

Таблица 4.2.9

| № п.п. | y | \hat{y} | $(y - \hat{y})^2$ | \hat{y} | $(y - \hat{y})^2$ |
|---|--------|-----------|-------------------|-----------|-------------------|
| 1 | 20,76 | 21,4238 | 0,4406 | 20,7023 | 0,0033 |
| 2 | 28,09 | 25,4586 | 6,9245 | 24,7392 | 11,2279 |
| 3 | 32,95 | 34,9461 | 3,9844 | 34,1938 | 1,5471 |
| 4 | 38,15 | 40,2118 | 4,2509 | 39,4479 | 1,6844 |
| 5 | 46,78 | 47,9537 | 1,3776 | 47,1810 | 0,1608 |
| 6 | 55,31 | 55,2619 | 0,0023 | 54,4814 | 0,6867 |
| 7 | 60,92 | 63,0039 | 4,3425 | 62,2145 | 1,6757 |
| 8 | 41,08 | 41,3768 | 0,0881 | 41,7965 | 0,5134 |
| 9 | 56,29 | 56,5533 | 0,0693 | 56,9474 | 0,4322 |
| 10 | 68,51 | 67,8758 | 0,4022 | 68,2741 | 0,0556 |
| 11 | 82,72 | 81,8009 | 0,8447 | 82,1973 | 0,2732 |
| 12 | 96,43 | 95,6553 | 0,6001 | 96,0542 | 0,1412 |
| 13 | 110,15 | 108,8139 | 1,7852 | 109,2087 | 0,8860 |
| 14 | 123,86 | 124,1508 | 0,0845 | 124,5618 | 0,4925 |
| 15 | 65,01 | 61,9906 | 9,1169 | 61,7837 | 10,4087 |
| 16 | 69,05 | 75,2149 | 38,0061 | 74,9946 | 35,3389 |
| 17 | 73,13 | 74,9486 | 3,3072 | 74,6856 | 2,4199 |
| 18 | 81,18 | 81,5968 | 0,1737 | 81,2948 | 0,0132 |
| 19 | 89,24 | 89,7978 | 0,3112 | 89,4812 | 0,0582 |
| 20 | 97,3 | 97,5802 | 0,0785 | 97,2501 | 0,0025 |
| 21 | 115,36 | 111,0758 | 18,3541 | 110,7800 | 20,9763 |
| 22 | 91,26 | 89,2446 | 4,0617 | 89,8996 | 1,8506 |
| 23 | 99,84 | 97,4506 | 5,7092 | 98,0960 | 3,0415 |
| 24 | 108,55 | 108,7731 | 0,0498 | 109,4227 | 0,7617 |
| 25 | 117,17 | 117,1708 | 0,0000 | 117,8076 | 0,4066 |
| 26 | 125,81 | 125,2963 | 0,2639 | 125,9177 | 0,0116 |
| 27 | 134,46 | 134,6269 | 0,0279 | 135,2391 | 0,6070 |
| 28 | 143,1 | 143,2062 | 0,0113 | 143,8072 | 0,5001 |
| <i>Сумма квадратов отклонений расчетных от фактических значений</i> | | | | | |
| | | | 104,6686 | | 96,17671 |
| <i>Остаточная дисперсия</i> | | | | | |
| | | | 4,0257 | | 4,3717 |

4.3. Задание для самостоятельной работы

Задание 4.3.1. Отделу труда и заработной платы завода ОАО «Тяжмехпресс» было поручено провести исследование факторов, существенно влияющих на среднемесячный размер оплаты труда, выплачиваемой рабочим этого предприятия (y , руб.). В результате исследования удалось выяснить, что такими факторами являются: 1) процент перевыполнения месячного плана (x_1); 2) разряд рабочего (x_2). На основании этого результата

по данным четырех цехов была сформирована табл. 4.3.1. Выполните следующие задания: 1) постройте модель с фиксированными эффектами: а) с помощью фиктивных переменных; б) с использованием процедуры раздельного оценивания коэффициентов; 2) постройте модель со случайными эффектами; 3) выберите из построенных моделей наиболее подходящую для аналитических целей.

Таблица 4.3.1

| № п.п. | У | x_1 | x_2 | № п.п. | У | x_1 | x_2 |
|-------------------|------|-------|-------|----------------------|------|-------|-------|
| <i>Первый цех</i> | | | | <i>Третий цех</i> | | | |
| 1 | 2170 | 26,4 | 6 | 21 | 2520 | 13,4 | 10 |
| 2 | 1000 | 17,3 | 3 | 22 | 4190 | 29,7 | 10 |
| 3 | 3350 | 23,8 | 8 | 23 | 3130 | 21,6 | 6 |
| 4 | 2200 | 17,6 | 5 | 24 | 2780 | 25,1 | 7 |
| 5 | 1760 | 26,2 | 5 | 25 | 1320 | 14,1 | 2 |
| 6 | 1610 | 21,1 | 1 | 26 | 2790 | 24,1 | 6 |
| 7 | 1900 | 17,5 | 3 | 27 | 3330 | 10,5 | 9 |
| 8 | 1810 | 22,9 | 5 | 28 | 2050 | 22,1 | 2 |
| 9 | 1490 | 22,9 | 4 | 29 | 1670 | 17,0 | 2 |
| 10 | 2320 | 14,9 | 7 | 30 | 2070 | 20,5 | 2 |
| <i>Второй цех</i> | | | | <i>Четвертый цех</i> | | | |
| 11 | 2180 | 19,6 | 3 | 31 | 1530 | 14,2 | 4 |
| 12 | 2100 | 22,8 | 2 | 32 | 2590 | 18,0 | 10 |
| 13 | 3380 | 27,8 | 6 | 33 | 2190 | 29,9 | 2 |
| 14 | 1800 | 14,0 | 4 | 34 | 1550 | 14,1 | 5 |
| 15 | 1220 | 11,4 | 2 | 35 | 1670 | 18,4 | 6 |
| 16 | 3000 | 16,0 | 9 | 36 | 2610 | 20,1 | 8 |
| 17 | 2170 | 28,8 | 1 | 37 | 3480 | 27,6 | 9 |
| 18 | 2490 | 16,8 | 5 | 38 | 2260 | 27,4 | 5 |
| 19 | 2190 | 11,8 | 6 | 39 | 2900 | 28,5 | 8 |
| 20 | 2360 | 18,6 | 5 | 40 | 3710 | 28,6 | 9 |

5. МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЛАГОВ

5.1. Расчетные формулы

5.1.1. Модель с конечным числом лагов

$$y_t = a_0 + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + \mathbf{L} + b_l x_{t-l} + e_t$$

и с бесконечным числом лагов

$$y_t = a_0 + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + \mathbf{L} + e_t,$$

где b_0 - краткосрочный мультипликатор;

$$\sum_j b_j - \text{долгосрочный мультипликатор.}$$

5.1.2. Замена лаговых переменных одной интегрированной

$$z_t = x_t + I x_{t-1} + I^2 x_{t-2} + I^3 x_{t-3} + \mathbf{L} + I^p x_{t-p}$$

и преобразование исходной модели в уравнение вида

$$y_t = a_0 + b_0 z_t + e_t.$$

5.1.3. Уравнение, полученное в результате преобразования Койка,

$$y_t = (1 - I)a_0 + b_0 x_t + I y_{t-1} + v_t,$$

где $v_t = e_t - I e_{t-1}$ - скользящая средняя.

5.1.4. Модель с распределенными лагами, согласно методу Алмон, может быть представлена в виде регрессионной модели

$$y_t = a_0 + c_0 z_0 + c_1 z_1 + c_2 z_2 + \mathbf{L} + c_k z_k + e_t,$$

$$\text{где } z_0 = \sum_{j=0}^l x_{t-j}, \quad z_1 = \sum_{j=1}^l j x_{t-j}, \quad z_2 = \sum_{j=1}^l j^2 x_{t-j}, \dots, \quad z_k = \sum_{j=1}^l j^k x_{t-j}.$$

5.1.5. Каждый из коэффициентов исходной лаговой модели вычисляется следующим образом:

$$b_0 = c_0$$

$$b_1 = c_0 + c_1 + c_2 + \mathbf{L} + c_k$$

$$b_2 = c_0 + 2c_1 + 4c_2 + \mathbf{L} + 2^k c_k$$

$$b_3 = c_0 + 3c_1 + 9c_2 + \mathbf{L} + 3^k c_k$$

$$\mathbf{L} \mathbf{L}$$

$$b_l = c_0 + l c_1 + l^2 c_2 + \mathbf{L} + l^k c_k.$$

5.2. Решение типовых задач

Задание 5.2.1. Компания «Автоматика», как и любая другая компания, желающая добиться успеха в мире современного бизнеса, с целью увеличения своей прибыли периодически проводит маркетинговые исследования, ориентированные на выявление изменений в предпочтениях потребителей, а также анализ динамики рыночной конъюнктуры. Данные, отражающие зависимость прибыли компании от расходов на маркетинговые исследования, представлены в табл. 5.2.1. Руководство этой компании

заинтересовано в получении ответа вопрос: какой эффект дает дополнительное вложение в маркетинговые исследования одной тысячи рублей и каков средний лаг, существующий между вложением средств в маркетинговые исследования и получением прибыли от этих вложений.

Таблица 5.2.1

| Период | Прибыль компании, тыс. руб. | Расходы на маркетинговые исследования, тыс. руб. | Период | Прибыль компании, тыс. руб. | Расходы на маркетинговые исследования, тыс. руб. |
|--------|-----------------------------|--|--------|-----------------------------|--|
| 1 | 988 | 60 | 11 | 1281 | 78 |
| 2 | 1035 | 66 | 12 | 1253 | 67 |
| 3 | 1089 | 73 | 13 | 1302 | 74 |
| 4 | 1082 | 67 | 14 | 1382 | 94 |
| 5 | 1073 | 54 | 15 | 1426 | 93 |
| 6 | 1126 | 65 | 16 | 1468 | 91 |
| 7 | 1177 | 75 | 17 | 1513 | 93 |
| 8 | 1234 | 83 | 18 | 1593 | 96 |
| 9 | 1265 | 83 | 19 | 1612 | 98 |
| 10 | 1258 | 74 | 20 | 1628 | 93 |

Решение с помощью табличного процессора Excel

1. Ввод исходных данных.
2. Преобразование исходных данных x_t в новые переменные z_{0t} , z_{1t} и z_{2t} по следующим формулам:

$$z_{0t} = x_t + x_{t-1} + x_{t-3} + x_{t-4};$$

$$z_{1t} = x_{t-1} + 2x_{t-2} + 3x_{t-3} + 4x_{t-4};$$

$$z_{2t} = x_{t-1} + 4x_{t-2} + 9x_{t-3} + 16x_{t-4};$$

и оформление результатов в виде табл. 5.2.2.

3. Расчет параметров линейной регрессии \hat{a} , \hat{c}_0 , \hat{c}_1 , \hat{c}_2 по преобразованным данным с помощью пакета «Анализ данных» (см. Вывод итогов 5.1).

Таким образом, построенная по преобразованным данным модель записывается в следующем виде:

$$\hat{y}_t = 31,6184 + 5,9333z_{0t} - 3,1978z_{1t} + 0,6317z_{2t}.$$

4. Расчет оценок коэффициентов регрессии \hat{a} , \hat{b}_0 , \hat{b}_1 , \hat{b}_2 исходной модели.

Таблица 5.2.2

| у | z_0 | z_1 | z_2 |
|------|-------|-------|-------|
| 988 | | | |
| 1035 | | | |
| 1089 | | | |
| 1082 | | | |
| 1073 | 320 | 651 | 1913 |
| 1126 | 325 | 671 | 2035 |
| 1177 | 334 | 666 | 2052 |
| 1234 | 344 | 635 | 1893 |
| 1265 | 360 | 644 | 1832 |
| 1258 | 380 | 734 | 2130 |
| 1281 | 393 | 789 | 2353 |
| 1253 | 385 | 807 | 2449 |
| 1302 | 376 | 777 | 2373 |
| 1382 | 387 | 738 | 2228 |
| 1426 | 406 | 755 | 2241 |
| 1468 | 419 | 771 | 2207 |
| 1513 | 445 | 855 | 2493 |
| 1593 | 467 | 930 | 2798 |
| 1612 | 471 | 927 | 2775 |
| 1628 | 471 | 933 | 2775 |

ВЫВОД ИТОГОВ 5.1

Регрессионная статистика

| | |
|-------------------------|----------|
| Множественный R | 0,992168 |
| R-квадрат | 0,984398 |
| Нормированный R-квадрат | 0,980498 |
| Стандартная ошибка | 24,31472 |
| Наблюдения | 16 |

Дисперсионный анализ

| | <i>df</i> | <i>SS</i> | <i>MS</i> | <i>F</i> | <i>Значимость F</i> |
|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|---------------------|
| Регрессия | 3 | 447623,5 | 149207,8 | 252,3789 | 4,2E-11 |
| Остаток | 12 | 7094,468 | 591,2057 | | |
| Итого | 15 | 454717,9 | | | |

| | <i>Коэффициенты</i> | <i>Стандартная ошибка</i> | <i>t-статистика</i> | <i>P-значение</i> | <i>Нижние 95%</i> | <i>Верхние 95%</i> |
|----------------|---------------------|---------------------------|---------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| У-пересечение | 31,6184 | 49,35158 | 0,640676 | 0,533777 | -75,9095 | 139,1463 |
| Переменная X 1 | 5,933285 | 0,532509 | 11,14213 | 1,1E-07 | 4,773047 | 7,093522 |
| Переменная X 2 | -3,19784 | 0,757169 | -4,22341 | 0,001182 | -4,84757 | -1,54811 |
| Переменная X 3 | 0,63166 | 0,184014 | 3,43267 | 0,004961 | 0,230728 | 1,032593 |

$$\hat{a} = 31,6184;$$

$$\hat{b}_0 = \hat{c}_0 = 5,9333;$$

$$\hat{b}_1 = \hat{c}_0 + \hat{c}_1 + \hat{c}_2 = 5,9333 - 3,1978 + 0,6317 = 3,3671;$$

$$\hat{b}_2 = \hat{c}_0 + 2\hat{c}_1 + 4\hat{c}_2 = 5,9333 - 2 \cdot 3,1978 + 4 \cdot 0,6317 = 2,0642;$$

$$\hat{b}_3 = \hat{c}_0 + 3\hat{c}_1 + 9\hat{c}_2 = 5,9333 - 3 \cdot 3,1978 + 9 \cdot 0,6317 = 2,0247;$$

$$\hat{b}_4 = \hat{c}_0 + 4\hat{c}_1 + 16\hat{c}_2 = 5,9333 - 4 \cdot 3,1978 + 16 \cdot 0,6317 = 3,2485.$$

Следовательно, модель с распределенным лагом имеет вид

$$\hat{y}_t = 31,6184 + 5,9333x_t + 3,3671x_{t-1} + 2,0642x_{t-2} + 2,0247x_{t-3} + 3,2485x_{t-4}.$$

5. Расчет долгосрочного мультипликатора

$$b = 5,9333 + 3,3671 + 2,0642 + 2,0247 + 3,2485 = 16,6379.$$

Мультипликатор показывает, что увеличение средств на проведение маркетинговых исследований на 1 тыс. руб. в настоящий момент времени через 4 периода приведет к увеличению прибыли на 16637 руб.

6. Расчет относительных коэффициентов регрессии

$$b_0 = \hat{b}_0 / b = 5,9333 / 16,6379 = 0,3566;$$

$$b_1 = \hat{b}_1 / b = 3,3671 / 16,6379 = 0,2024;$$

$$b_2 = \hat{b}_2 / b = 2,0642 / 16,6379 = 0,1241;$$

$$b_3 = \hat{b}_3 / b = 2,0247 / 16,6379 = 0,1217;$$

$$b_4 = \hat{b}_4 / b = 3,2485 / 16,6379 = 0,1952.$$

7. Расчет среднего лага

$$T = 0 \cdot 0,3566 + 1 \cdot 0,2024 + 2 \cdot 0,1241 + 3 \cdot 0,1217 + 4 \cdot 0,1952 = 1,5966.$$

Таким образом, в среднем увеличении затрат на маркетинговые исследования приведет к увеличению прибыли компании через 1,6 периода.

Задание 5.2.2. Администрация области проводит комплексное исследование социально-экономической ситуации в регионе с целью выработки обоснованной политики его развития. Одной из поставленных задач исследования является определение среднего срока воздействия инфляции на реальные доходы населения. Для проведения необходимых для решения этой задачи расчетов была сформирована табл. 5.2.3. Специалисты выдвигают

нули гипотезу о том, что годовой уровень инфляции оказывает воздействие на реальные доходы населения с бесконечным временным лагом, который имеет геометрическую структуру.

Таблица 5.2.3

| Год | Уровень инфляции, % | Реальные доходы населения, млн. руб. | Год | Уровень инфляции, % | Реальные доходы населения, млн. руб. |
|-----|---------------------|--------------------------------------|-----|---------------------|--------------------------------------|
| 1 | 13,9 | 1704 | 11 | 10,6 | 2198 |
| 2 | 12,6 | 1749 | 12 | 9,6 | 2297 |
| 3 | 11,8 | 1821 | 13 | 8,5 | 2407 |
| 4 | 13,3 | 1870 | 14 | 9,2 | 2468 |
| 5 | 13,2 | 1869 | 15 | 8,8 | 2455 |
| 6 | 12,0 | 1927 | 16 | 7,4 | 2498 |
| 7 | 10,4 | 2020 | 17 | 6,8 | 2444 |
| 8 | 8,7 | 2125 | 18 | 6,5 | 2472 |
| 9 | 10,8 | 2111 | 19 | 5,9 | 2692 |
| 10 | 11,8 | 2094 | | | |

Решение с помощью табличного процессора Excel

1. Ввод исходных данных.
2. Формирование вектора y_{t-1} и оформление результатов в виде табл. 5.2.4.

Таблица 5.2.4

| t | x_t | y_{t-1} | y_t | t | x_t | y_{t-1} | y_t |
|-----|-------|-----------|-------|-----|-------|-----------|-------|
| 2 | 12,6 | 1704 | 1749 | 11 | 10,6 | 2094 | 2198 |
| 3 | 11,8 | 1749 | 1821 | 12 | 9,6 | 2198 | 2297 |
| 4 | 13,3 | 1821 | 1870 | 13 | 8,5 | 2297 | 2407 |
| 5 | 13,2 | 1870 | 1869 | 14 | 9,2 | 2407 | 2468 |
| 6 | 12,0 | 1869 | 1927 | 15 | 8,8 | 2468 | 2455 |
| 7 | 10,4 | 1927 | 2020 | 16 | 7,4 | 2455 | 2498 |
| 8 | 8,7 | 2020 | 2125 | 17 | 6,8 | 2498 | 2444 |
| 9 | 10,8 | 2125 | 2111 | 18 | 6,5 | 2444 | 2472 |
| 10 | 11,8 | 2111 | 2094 | 19 | 5,9 | 2472 | 2692 |

3. Расчет параметров модели двухфакторной линейной авторегрессии

$$y_t = (1 - I)a + b_0x_t + I y_{t-1} + v_t$$

по данным табл. 5.2.4 с помощью пакета «Анализ данных» (см. Вывод итогов 5.2).

Таким образом, уравнение, полученное в результате преобразования Койка, имеет вид

$$y_t = 885,76 - 31,94x_t + 0,76y_{t-1} + v_t.$$

ВЫВОД ИТОГОВ 5.2

| <i>Регрессионная статистика</i> | |
|---------------------------------|----------|
| Множественный R | 0,981887 |
| R-квадрат | 0,964102 |
| Нормированный R-квадрат | 0,959315 |
| Стандартная ошибка | 56,84734 |
| Наблюдения | 18 |

| <i>Дисперсионный анализ</i> | | | | | |
|-----------------------------|-----------|-----------|-----------|----------|---------------------|
| | <i>df</i> | <i>SS</i> | <i>MS</i> | <i>F</i> | <i>Значимость F</i> |
| Регрессия | 2 | 1301856 | 650928 | 201,4247 | 1,46E-11 |
| Остаток | 15 | 48474,3 | 3231,62 | | |
| Итого | 17 | 1350330 | | | |

| | <i>Коэффициенты</i> | <i>Стандартная ошибка</i> | <i>t-статистика</i> | <i>P-значение</i> | <i>Нижние 95%</i> | <i>Верхние 95%</i> |
|----------------|---------------------|---------------------------|---------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| Y-пересечение | 885,7605 | 340,4847 | 2,601469 | 0,02004 | 160,0341 | 1611,487 |
| Переменная X 1 | -31,9375 | 12,53875 | -2,5471 | 0,022326 | -58,6632 | -5,21172 |
| Переменная X 2 | 0,759298 | 0,105577 | 7,191857 | 3,11E-06 | 0,534265 | 0,984331 |

4. Вычисление параметров исходной модели

$$y_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + \mathbf{K} + e_t.$$

$$\hat{a} = \frac{885,76}{1 - I} = \frac{885,76}{1 - 0,76} = 3679,90; \quad \hat{b}_0 = -31,94;$$

$$\hat{b}_1 = \hat{b}_0 I = -31,94 \cdot 0,76 = -24,25;$$

$$\hat{b}_2 = \hat{b}_0 I^2 - 31,94 \cdot 0,76^2 = -18,41 \text{ и т.д.}$$

Таким образом, модель с бесконечным числом лаговых переменных в рассматриваемом случае записывается следующим образом:

$$y_t = 3679,90 - 31,94x_t - 24,25x_{t-1} - 18,41x_{t-2} - \mathbf{K} - e_t$$

5. Расчет среднего лага модели

$$T = \frac{I}{1 - I} = \frac{0,76}{1 - 0,76} = 3,15.$$

Следовательно, очередной рост цен в среднем оказывает инфляционное воздействие на реальные доходы населения в течение отрезка времени, равного 3,15 года.

5.3. Задания для самостоятельной работы

Задание 5.3.1. Совет директоров крупной компании «Эксклюзив», имеющей возможности для увеличения степени компьютеризации управ

ления производством, для реализации своих стратегических планов желал бы иметь представление о том, на сколько и когда могут снизиться производственные затраты (y , тыс. руб.) при росте степени компьютеризации (x , %) на 1% в текущем периоде. Очевидно, что для ответа на этот вопрос целесообразно воспользоваться регрессионной моделью с распределенными лагами. Постройте такого рода модель с лагом, равным четырем, в предположении, что структура лага описывается полиномом третьей степени. Данные для построения модели представлены в табл. 5.3.1.

Таблица 5.3.1

| Год | y | x | Год | y | x |
|-----|-----|------|-----|-----|------|
| 1 | 542 | 53,5 | 11 | 419 | 70,1 |
| 2 | 537 | 59,1 | 12 | 421 | 60,0 |
| 3 | 531 | 65,7 | 13 | 411 | 66,6 |
| 4 | 504 | 60,3 | 14 | 392 | 84,2 |
| 5 | 489 | 48,6 | 15 | 375 | 82,8 |
| 6 | 475 | 57,8 | 16 | 357 | 81,7 |
| 7 | 460 | 66,7 | 17 | 360 | 83,2 |
| 8 | 434 | 73,8 | 18 | 363 | 85,9 |
| 9 | 417 | 74,4 | 19 | 345 | 87,7 |
| 10 | 427 | 66,0 | 20 | 329 | 82,7 |

Задание 5.3.2.

Таблица 5.3.2

| Год | y | x | Год | y | x |
|-----|---------|------|-----|---------|------|
| 1 | 2160,57 | 0,54 | 11 | 1794,86 | 1,17 |
| 2 | 2141,29 | 0,59 | 12 | 1809,43 | 1,31 |
| 3 | 2118,86 | 0,65 | 13 | 1821,43 | 1,20 |
| 4 | 2094,86 | 0,72 | 14 | 1731,43 | 0,96 |
| 5 | 2141,14 | 0,75 | 15 | 1651,71 | 1,15 |
| 6 | 2104,29 | 0,82 | 16 | 1602,00 | 1,33 |
| 7 | 2115,43 | 0,97 | 17 | 1602,86 | 1,47 |
| 8 | 2063,14 | 1,02 | 18 | 1560,86 | 1,47 |
| 9 | 1968,86 | 0,94 | 19 | 1499,14 | 1,31 |
| 10 | 1882,43 | 1,06 | 20 | 1460,57 | 1,40 |

Департамент экономического развития городской администрации проводит мониторинг социально-экономического развития региона. В частности, исследуется проблема взаимосвязи среднемесячной реальной заработной платы (y , руб.) и уровня регистрируемой безработицы (x , %). Рассчитайте по данным табл. 5.3.2 средний срок воздействия первого из

указанного фактора на другой, предварительно построив для этого модель распределенных лагов.

6. РЕКУРРЕНТНЫЙ МНК

6.1. Расчетные формулы

6.1.1. Рекуррентная формула пересчета коэффициентов регрессии

$$\hat{\mathbf{b}}_n = \hat{\mathbf{b}}_{n-1} + \frac{\mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{x}'_n}{\mathbf{x}_n \mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{x}'_n + 1} [\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n \hat{\mathbf{b}}_{n-1}],$$

где $\mathbf{C}_n^{-1} = (\mathbf{X}'_n \mathbf{X}_n)^{-1}$.

6.1.2. Формула Шермана-Моррисона для рекуррентного обращения матриц

$$(\mathbf{C}_{n-1} + \mathbf{x}'_n \mathbf{x}_n)^{-1} = \mathbf{C}_{n-1}^{-1} - \frac{\mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{x}'_n \mathbf{x}_n \mathbf{C}_{n-1}^{-1}}{\mathbf{x}_n \mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{x}'_n + 1}.$$

6.2. Решение типовой задачи

Задание 6.2.1. Агентство «Земной дар», занимающееся куплей-продажей земельных участков, постоянно осуществляет мониторинг цен на эти участки. Для выработки стратегии, которой необходимо придерживаться, руководство агентства решило выяснить механизм формирования цен на земельные участки. В ходе исследования было выявлено, что цена (USD, y), главным образом, зависит от таких факторов как площадь участка (сотки, x_1), доля площади участка, занимаемая лесом, (x_2) а также расстояния от участка до железнодорожного вокзала (км., x_3). Для того чтобы получить количественные оценки влияния этих факторов на уровень цен, было решено использовать регрессионный анализ. Данные о цене и факторах, влияющих на ее величину, представлены в табл. 6.2.1. Таблица продолжает пополняться данными по мере совершения очередной сделки. Поэтому модель, отражающую зависимость цены от соответствующих факторов, приходилось все время пересчитывать. Для того чтобы не тратить на это время, руководству агентства посоветовали воспользоваться рекуррентным МНК. Убедитесь в том, что рекуррентный метод приводит к тем же самым результатам, которые получаются при использовании обычного МНК.

Таблица 6.2.1

| № п.п. | у | x_1 | x_2 | x_3 | № п.п. | у | x_1 | x_2 | x_3 |
|--------|------|-------|-------|-------|--------|------|-------|-------|-------|
| 1. | 5556 | 36,0 | 1 | 12,1 | 16. | 4537 | 38,0 | 1 | 18,0 |
| 2. | 5236 | 38,2 | 1 | 12,1 | 17. | 3700 | 5,0 | 0 | 17,2 |
| 3. | 5952 | 21,0 | 1 | 12,0 | 18. | 2020 | 5,0 | 1 | 34,2 |
| 4. | 7000 | 40,0 | 0 | 16,0 | 19. | 5000 | 3,5 | 0 | 11,1 |
| 5. | 3750 | 40,0 | 0 | 15,5 | 20. | 4764 | 23,7 | 0 | 14,2 |
| 6. | 7000 | 20,0 | 0 | 13,7 | 21. | 8071 | 23,7 | 1 | 14,2 |
| 7. | 5952 | 21,0 | 0 | 14,5 | 22. | 3500 | 20,0 | 1 | 11,1 |
| 8. | 2009 | 65,0 | 0 | 16,1 | 23. | 8156 | 5,0 | 1 | 14,7 |
| 9. | 2583 | 60,0 | 1 | 15,2 | 24. | 4764 | 30,0 | 0 | 12,1 |
| 10. | 2449 | 56,0 | 0 | 15,5 | 25. | 9568 | 3,8 | 1 | 14,8 |
| 11. | 2500 | 40,0 | 0,5 | 15,2 | 26. | 9873 | 7,9 | 1 | 14,8 |
| 12. | 3000 | 13,0 | 0 | 15,5 | 27. | 5175 | 40,0 | 0,25 | 14,2 |
| 13. | 3704 | 27,0 | 0 | 13,5 | 28. | 3977 | 8,8 | 0 | 11,4 |
| 14. | 3500 | 10,0 | 0 | 15,5 | 29. | 5500 | 10,0 | 0,2 | 18,5 |
| 15. | 3500 | 20,0 | 0 | 17,5 | 30. | 7500 | 8,0 | 0 | 16,5 |

Решение с помощью табличного процессора Excel

1. Ввод исходных данных.
2. Формирование дополнительной переменной x_0 , принимающей единственное значение, равное 1.
3. Построение модели с помощью матричного МНК для $n = \overline{1, 29}$, используя для этого следующие функции Excel: **ТРАНСП**, **МОБР**, **МУМНОЖ**.

- 3.1. Вычисление матрицы, обратной к матрице системы нормальных уравнений $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$

| | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| 0,65373 | -0,00407 | -0,03724 | -0,03300 |
| -0,00407 | 0,00012 | 0,00013 | 0,00007 |
| -0,03724 | 0,00013 | 0,15789 | -0,00205 |
| -0,03300 | 0,00007 | -0,00205 | 0,00212 |

- 3.2. Расчет правой части системы нормальных уравнений $(\mathbf{X}'\mathbf{y})$

| |
|------------|
| 142296,00 |
| 3174480,40 |
| 68695,75 |
| 2090740,40 |

- 3.3. Получение вектора оценок коэффициентов $\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y}$

| |
|----------|
| 8540,298 |
| -52,865 |
| 1677,008 |
| -196,950 |

4. Пересчет модели в связи с появлением нового наблюдения

$$y_{30} = 7500 \text{ и } \mathbf{x}_{30} = (1; 8; 0; 16,5).$$

4.1. Пересчет модели с помощью обычного МНК

4.1.1. Вычисление матрицы, обратной к матрице системы нормальных уравнений

| | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| 0,64839 | -0,00393 | -0,03236 | -0,03317 |
| -0,00393 | 0,00012 | 0,00001 | 0,00007 |
| -0,03236 | 0,00001 | 0,15343 | -0,00190 |
| -0,03317 | 0,00007 | -0,00190 | 0,00211 |

4.1.2. Расчет правой части системы нормальных уравнений

| |
|------------|
| 149796,00 |
| 3234480,40 |
| 68695,75 |
| 2214490,40 |

4.1.3. Получение вектора оценок коэффициентов модели

| |
|----------|
| 8723,473 |
| -57,701 |
| 1509,564 |
| -191,009 |

4.2. Пересчет модели с помощью рекуррентного МНК

4.2.1. Вычисление вектора корректирующих коэффициентов

$$(\mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{x}'_{n+1})$$

| |
|----------|
| 0,07665 |
| -0,00202 |
| -0,07007 |
| 0,00249 |

4.2.2. Расчет величины нормирующего коэффициента

$$(\mathbf{x}_{n+1} \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{x}'_{n+1} + 1)$$

| |
|---------|
| 1,10148 |
|---------|

4.2.3. Нормировка корректирующих коэффициентов

$$\frac{(\mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{x}'_{n+1})}{(\mathbf{x}_{n+1} \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{x}'_{n+1} + 1)}$$

| |
|----------|
| 0,06959 |
| -0,00184 |
| -0,06361 |
| 0,00226 |

4.2.4. Вычисление прогнозной ошибки, возникающей вследствие использования нескорректированной модели

$$(y_{n+1} - \hat{\mathbf{b}}_n \mathbf{x}_{n+1})$$

| |
|----------|
| 2632,297 |
|----------|

4.2.5. Корректировка коэффициентов модели

$$\hat{\mathbf{b}}_{n+1} = \hat{\mathbf{b}}_n + \frac{(\mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{x}'_{n+1})}{(\mathbf{x}_{n+1} \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{x}'_{n+1} + 1)} (y_{n+1} - \hat{\mathbf{b}}_n \mathbf{x}_{n+1})$$

| |
|----------|
| 8723,473 |
|----------|

| |
|---------|
| -57,701 |
|---------|

| |
|----------|
| 1509,564 |
|----------|

| |
|----------|
| -191,009 |
|----------|

5. Сравнение полученных результатов

Вывод: коэффициенты регрессионной модели, полученные с помощью обычного и рекуррентного МНК, идентичны.

6.3. Задания для самостоятельной работы

Задание 6.3.1. Группа бизнесменов планирует создать сеть баз для зимнего отдыха в горах Северного Кавказа. Одной из важных проблем, которую им необходимо решить для реализации этого проекта, является определение оптимальной стоимости одного дня пребывания на каждой базе отдыха. Очевидно, что стоимость должна устанавливаться в зависимости от целого ряда факторов. Для того чтобы принять наиболее обоснованное решение, было проведено исследование, в ходе которого удалось собрать информацию о 25 уже существующих горнолыжных лагерях. Кроме того, было выявлено, что стоимость (руб., y) обычно складывается под влиянием следующих факторов: общей площади территории лагеря (x_1), количества жилых помещений (x_2), наличия сауны (x_3), наличия плавательного бассейна (x_4), наличия канатных подъемников (x_5) и наличия дополнительных мест проведения досуга (бара, кафе, дискотеки, бильярда и др.) (x_6). Данные о стоимости одного дня пребывания в лагере и соответствующих факторах представлены в табл. 6.3.1. Исследование еще не закончилось, поэтому таблица продолжает пополняться новыми данными. Не

давно стали известны данные еще о двух лагерях: 1) $y_{26} = 985$, $\mathbf{x}_{26} = (27; 125; 1; 0; 1; 3)$; 2) $y_{27} = 875$, $\mathbf{x}_{27} = (30; 120; 0; 0; 1; 2)$. Постройте модель, отражающую зависимость стоимости от соответствующих факторов, 1) обычным МНК для $n = \overline{1, 27}$; 2) обычным МНК для $n = \overline{1, 25}$ с пересчетом коэффициентов модели по формулам рекуррентного МНК в связи с появлением новых наблюдений. Сравните полученные результаты.

Таблица 6.3.1

| Лагерь | y | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 |
|--------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 700 | 40 | 32 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 2 | 850 | 20 | 47 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 3 | 900 | 45 | 18 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 800 | 110 | 32 | 1 | 0 | 1 | 3 |
| 5 | 800 | 30 | 54 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 6 | 700 | 50 | 30 | 1 | 0 | 1 | 3 |
| 7 | 775 | 35 | 30 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 8 | 800 | 18 | 40 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 9 | 850 | 23 | 60 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 850 | 9 | 60 | 1 | 0 | 1 | 3 |
| 11 | 900 | 52 | 50 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 12 | 700 | 25 | 21 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 13 | 900 | 250 | 30 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 14 | 850 | 140 | 70 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 15 | 900 | 120 | 80 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 16 | 750 | 60 | 50 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 17 | 850 | 120 | 35 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 18 | 900 | 173 | 25 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 19 | 800 | 100 | 75 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 20 | 950 | 134 | 35 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 21 | 750 | 114 | 120 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 22 | 750 | 2 | 17 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 23 | 750 | 32 | 15 | 0 | 1 | 0 | 3 |
| 24 | 900 | 25 | 30 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 25 | 750 | 66 | 100 | 1 | 0 | 1 | 2 |

Задания 6.3.2. Руководство фирмы «Доступное чтение», осуществляющей продажу художественной и научной литературы через ряд магазинов Воронежской области, решило начать освоение рынка электронной коммерции. У фирмы уже есть свой сайт, который пока имеет только рекламный характер; торговля через него не осуществляется. С целью выработки стратегии успешного осуществления интернет-бизнеса было решено провести маркетинговое исследование, ориентированное на изучение фак

торов, наиболее существенным образом влияющих на объем продаж книг Интернет-магазинами. В результате исследования было выявлено, что объем продаж (руб.) зависит от затрат на поддержание сайта (руб.), средней цены продаваемой книги (руб.), категории литературы (художественная – 0, научная – 1), наличия обложки и аннотации книги на сайте (нет – 0, есть – 1). Для построения модели, отражающей указанную зависимость, было использовано 1500 наблюдений. Это маркетинговое исследование еще не закончилось, и для того чтобы постоянно не пересчитывать модель по такому большому числу наблюдений, аналитики решили пользоваться рекуррентным МНК. Текущая обратная матрица имеет вид

| | | | |
|------------|------------|------------|------------|
| 0,0000005 | -0,0000024 | -0,0007783 | -0,0003367 |
| -0,0000024 | 0,0000195 | 0,0029822 | 0,0004840 |
| -0,0007783 | 0,0029822 | 1,5809786 | 0,5299996 |
| -0,0003367 | 0,0004840 | 0,5299996 | 0,5860256 |

а текущие коэффициенты модели равны

| |
|------------|
| 11900,0022 |
| 0,9804 |
| 0,8068 |
| 0,6550 |
| 0,8421 |

Пересчитайте эти коэффициенты в связи с появлением следующих новых наблюдений

| Интернет-магазин | у | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 11 | 14543 | 2543 | 185 | 1 | 0 |
| 12 | 13884 | 1967 | 70 | 0 | 0 |

7. МНОГОФАКТОРНЫЕ АДАПТИВНЫЕ МОДЕЛИ

7.1. Расчетные формулы

7.1.1. Многофакторная регрессионная модель с адаптивным механизмом в виде рекуррентных формул

$$\hat{y}_t = \mathbf{x}_t \hat{\mathbf{B}}(t-1, \mathbf{a});$$

$$\hat{\mathbf{B}}(t, \mathbf{a}) = \hat{\mathbf{B}}(t-1, \mathbf{a}) + \frac{\mathbf{C}_{t-1}^{-1} \mathbf{x}'_t}{\mathbf{x}_t \mathbf{C}_{t-1}^{-1} \mathbf{x}'_t + \mathbf{a}} [y_t - \hat{y}_t];$$

$$\mathbf{C}_t^{-1} = \frac{1}{a} \left[\mathbf{C}_{t-1}^{-1} - \frac{\mathbf{C}_{t-1}^{-1} \mathbf{x}'_t \mathbf{x}_t \mathbf{C}_{t-1}^{-1}}{\mathbf{x}_t \mathbf{C}_{t-1}^{-1} \mathbf{x}'_t + a} \right]$$

где $\hat{\mathbf{V}}(0, \mathbf{a})$, \mathbf{C}_0^{-1} - начальные значения, определяемые по методу наименьших квадратов.

7.1.2. Критерии настройки параметра адаптации

$$S_t^1(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{t-t} \sum_{k=1}^t |y_{j+k} - \hat{y}_{j+k}|,$$

$$S_t^2(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{t-t} \max_{1 \leq k \leq t} |y_{j+k} - \hat{y}_{j+k}|,$$

$$S_t^3(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{t-t} \max_{1 \leq k \leq t} \frac{|y_{j+k} - \hat{y}_{j+k}|}{|y_{j+k}|},$$

где $\hat{y}_{j+k} = \mathbf{x}_{j+k} \hat{\mathbf{V}}(j, \mathbf{a})$; $j = 1, 2, \mathbf{K}, t-t$; $k = 0, 1, \mathbf{K}, t$.

7.1.3. Дисперсионное отношение Фишера для адаптивных регрессионных моделей

$$F_p = \frac{N - m - 1}{m} \cdot \frac{\sum (\hat{y}_i - \tilde{y}_i)^2}{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2},$$

где \tilde{y}_i - экспоненциально взвешенное среднее значение;

\hat{y}_i - расчетные значения адаптивной модели.

7.2. Решение типовых задач

Таблица 7.2.1

| Год | Месяц | Средняя цена 1 кг. говядины, у.е. | | Среднемесячная заработная плата, у.е. |
|------|----------|-----------------------------------|-----------|---------------------------------------|
| T | t | y_t | y_{t-1} | x_t |
| 2001 | сентябрь | 1,2 | 1,1 | 6,1 |
| | октябрь | 1,5 | 1,2 | 7,2 |
| | ноябрь | 1,5 | 1,5 | 11,2 |
| | декабрь | 2,3 | 1,5 | 11,6 |
| 2002 | январь | 3,4 | 2,3 | 13,9 |
| | февраль | 4,3 | 3,4 | 17,7 |
| | март | 4,5 | 4,3 | 22,1 |
| | апрель | 5,8 | 4,5 | 25,7 |
| | май | 7,2 | 5,8 | 35,5 |
| | июнь | 8,9 | 7,2 | 45,4 |

Задание 7.2.1. По данным табл. 7.2.1 необходимо построить адаптивную регрессионную модель для прогнозирования цены говядины y_t на следующий период в зависимости от уровня средней заработной платы x_t и цены говядины в предшествующий момент времени y_{t-1} . Результаты прогнозирования по адаптивной модели следует сравнить с результатами прогнозирования по статической модели.

Решение с помощью табличного процессора Excel

1. Ввод исходных данных табл. 7.2.1.
2. Выбор начальных значений для построения адаптивной регрессионной модели \mathbf{C}_0^{-1} и \mathbf{B}_0 по первым восьми наблюдениям с помощью матричных функций ТРАНСП, МУМНОЖ, МОБР

2.1. Вычисление \mathbf{C}_0

$$\mathbf{C}_0 = \mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 8,00 & 115,50 & 19,80 \\ 115,50 & 2004,45 & 352,38 \\ 19,80 & 352,38 & 62,74 \end{bmatrix},$$

и \mathbf{C}_0^{-1}

$$\mathbf{C}_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0,9775 & -0,1658 & 0,6230 \\ -0,1658 & 0,0677 & -0,3277 \\ 0,6230 & -0,3277 & 1,6597 \end{bmatrix}.$$

2.2. Нахождение вектора

$$\mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 24,50 \\ 433,48 \\ 76,71 \end{bmatrix}.$$

2.3. Расчет начальных значений вектора оценок коэффициентов

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -0,1527 \\ 0,1301 \\ 0,5399 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, для начальных значений регрессионная модель записывается в следующем виде:

$$y_t = -0,1527 + 0,1301x_t + 0,5399y_{t-1}.$$

3. Адаптивная корректировка коэффициентов регрессии

3.1. Определение с помощью построенного уравнения регрессии расчетного значения \hat{y}_8

$$\hat{y}_8 = 5,6216$$

3.2. Вычисление прогнозной оценки \hat{y}_9

$$\hat{y}_9 = 7,5025.$$

3.3. Расчет

$$\mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{x}'_9 = \begin{bmatrix} -1,4079 \\ 0,3940 \\ -1,6792 \end{bmatrix}$$

3.4. Вычисление $\mathbf{x}_9 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{x}'_9 + \mathbf{a}$, выбрав в качестве сглаживающего параметра величину $\mathbf{a} = 0,35$

$$\mathbf{x}_9 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{x}'_9 + \mathbf{a} = 2,9443.$$

3.5. Получение корректирующего вектора

$$\frac{\mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{x}'_9}{\mathbf{x}_9 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{x}'_9 + \mathbf{a}} = \begin{bmatrix} -0,4404 \\ 0,1140 \\ -0,4698 \end{bmatrix}.$$

3.6. Расчет прогнозной ошибки для вновь поступившего наблюдения

$$y_9 - \mathbf{x}_9 \mathbf{B}_0 = 7,2 - 7,5988 = -0,3988$$

и умножение на эту ошибку корректирующего вектора

$$\frac{\mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{x}'_9}{\mathbf{x}_9 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{x}'_9 + \mathbf{a}} [y_9 - \mathbf{x}_9 \mathbf{B}_0] = \begin{bmatrix} 0,1756 \\ -0,0455 \\ 0,1873 \end{bmatrix}.$$

3.7. Получение скорректированного по вновь поступившему наблюдению вектора коэффициентов регрессионной модели

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0 + \frac{\mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{x}'_9}{\mathbf{x}_9 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{x}'_9 + \mathbf{a}} [y_9 - \mathbf{x}_9 \mathbf{B}_0] = \begin{bmatrix} 0,0229 \\ 0,0847 \\ 0,7273 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, регрессионная модель с обновленными коэффициентами имеет вид

$$y_t = 0,0229 + 0,0847x_t + 0,7273y_{t-1}.$$

4. Сравнение результатов прогнозирования по адаптивной и статической моделям.

Прогнозные расчеты по статической модели \hat{y}_{10} и по адаптивной \hat{y}_{10}^c дают следующие результаты:

$$\hat{y}_{10} = 9,8584 ; \quad \hat{y}_{10}^c = 9,1384 .$$

Соответственно ошибки прогнозирования равны

$$y_{10} - \hat{y}_{10} = -0,9584 ; \quad y_{10} - \hat{y}_{10}^c = -0,2384 .$$

Следовательно, в рассматриваемом примере краткосрочный прогноз с помощью адаптивной модели более точен.

Задание 7.2.2. Проверить адекватность построенной в предыдущем задании многофакторной адаптивной модели, используя для этого критерий (7.1.3).

Решение с помощью табличного процессора Excel

1. Вычисление дисперсионного отношения Фишера по первым восьми наблюдениям.

$$F_p = \frac{N - m - 1}{m} \frac{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{19,0581}{1,0806} \approx 44,0903.$$

Сравнение расчетного значения F -критерия с табличным $F_{2;5;0,95} = 5,79$ позволяет сделать вывод об адекватности построенной модели.

2. Расчет дисперсионного отношения Фишера после добавления девятого наблюдения. Оформление расчетов в виде табл. 7.2.2.

Для упрощения расчетов модифицированного критерия имеет смысл, учитывая логику построения регрессионных уравнений и последовательность проверки их адекватности, к имеющимся суммам квадратов отклонений числителя и знаменателя дисперсионного отношения Фишера первой модели добавить квадраты отклонений, полученные для скорректированной модели. К сумме, стоящей в знаменателе, добавляется квадрат отклонения расчетного значения от фактического

$$(y_9 - \hat{y}_9)^2 = (7,2 - 7,2474)^2 = (-0,0474)^2 .$$

Расчетное значение здесь определено по скорректированной модели.

К сумме, стоящей в числителе, добавляется квадрат отклонения среднего значения от расчетного

$$(\hat{y}_9 - \tilde{y})^2 = (7,2474 - 4,5106)^2 = (2,7368)^2,$$

при вычислении которого использовано экспоненциальное среднее

$$\tilde{y} = \bar{y} + a(y_9 - \bar{y}) = 3,0625 + 0,35(7,2 - 3,0625) = 4,5106.$$

После внесения этих изменений, окончательно получаем

$$F_p = \frac{N - m - 1}{m} \frac{\sum (\hat{y}_i - \tilde{y})^2}{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2} = \frac{6}{2} \cdot \frac{26,5481}{1,0828} \approx 73,5488.$$

Сравнение полученного значения с табличным $F_{2;6;0,95} = 5,14$ позволяет сделать вывод о том, что после корректировки модель остается адекватной.

Таблица 7.2.2

| № п.п. | y | \hat{y} | $(y - \hat{y})$ | $(y - \hat{y})^2$ | $(y - \bar{y})$ | $(y - \bar{y})^2$ |
|--------|-----|-----------|-----------------|-------------------|-----------------|-------------------|
| 1 | 1,2 | 1,1654 | -0,0346 | 0,0012 | -1,8274 | 3,3395 |
| 2 | 1,5 | 1,5678 | 0,0678 | 0,0046 | -1,6303 | 2,6579 |
| 3 | 1,5 | 0,8853 | -0,6147 | 0,3779 | -0,9478 | 0,8982 |
| 4 | 2,3 | 2,433 | 0,133 | 0,0177 | -0,8957 | 0,8023 |
| 5 | 3,4 | 3,9019 | 0,5019 | 0,2519 | -0,1644 | 0,027 |
| 6 | 4,3 | 4,6135 | 0,3135 | 0,0983 | 0,924 | 0,8538 |
| 7 | 4,5 | 3,9549 | 0,5451 | 0,2971 | 1,9826 | 3,9306 |
| 8 | 5,8 | 5,9783 | 0,1783 | 0,0318 | 2,559 | 6,5488 |
| Суммы | | | | 1,0806 | | 19,0581 |
| 9 | 7,2 | 7,1531 | -0,0469 | 0,0022 | 2,7368 | 7,49 |
| Суммы | | | | 1,0828 | | 26,5481 |

7.3. Задания для самостоятельной работы

Задание 7.3.1. По данным табл. 7.3.1 построить многофакторную адаптивную модель для прогнозирования дохода на акцию компании «Пинпод» (y , руб.) в зависимости от объема продаж (x_1 , руб.) и чистой прибыли (x_2 , руб.). Начальные значения для ее построения получить с помощью МНК по первым четырем наблюдениям. Последние два наблюдения использовать для настройки параметра a . Рассчитать прогнозные значения дохода на акцию на 2000-2001гг. Сравнить прогнозные расчеты, по

лученные с помощью адаптивной модели и с помощью обычной регрессии.

Таблица 7.3.1

| Год | y | x_1 | x_2 |
|------|-------|-------|-------|
| 1994 | 8005 | 4437 | 0,75 |
| 1995 | 15209 | 6592 | 0,79 |
| 1996 | 27642 | 9566 | 0,82 |
| 1997 | 56943 | 12979 | 0,87 |
| 1998 | 69265 | 21565 | 1,27 |
| 1999 | 73134 | 2845 | 1,62 |

Задание 7.3.2. По данным табл. 7.3.2 построить многофакторную адаптивную модель для прогнозирования валовой выручки от продаж (y , руб.) в зависимости от расходов на рекламу (x_1 , руб.) и персонал (x_2 , руб.). Определить начальные значения с помощью МНК по первым пяти наблюдениям. Осуществить настройку параметра адаптации, используя для этого последние два наблюдения. Оценить адекватность построенной адаптивной модели по модифицированному критерию Фишера. В случае, если модель адекватна, осуществить прогнозные расчеты на следующие два периода.

Таблица 7.2.3

| год | y | x_1 | x_2 |
|------|----------|---------|----------|
| 1994 | 29191925 | 1110577 | 7634465 |
| 1995 | 34209290 | 1144408 | 10482865 |
| 1996 | 43775216 | 1732440 | 12429585 |
| 1997 | 52150998 | 1832064 | 15544310 |
| 1998 | 62816819 | 1916779 | 18332890 |
| 1999 | 75439535 | 1974583 | 21197454 |
| 2000 | 90387247 | 2015704 | 24144711 |

8. МОДЕЛИ БИНАРНОГО ВЫБОРА

8.1. Решение типовой задачи

Задание 8.1.1. Фирма «Бэст-Перспектива» заключила договор с ОАО «Центртелеком», предметом которого является оказание услуг связи, в том числе и обеспечение доступа в Интернет. С целью увеличения интеллектуального потенциала фирмы руководство решило расширить круг своих со

трудников, обладающих правом бесплатного доступа. Выбор таких сотрудников было решено осуществлять с учетом ряда факторов, тем или иным образом характеризующих претендентов с точки зрения наиболее эффективного использования Интернет-ресурсов. В связи с этим возник вопрос: «Кому из претендентов на бесплатный доступ предоставить такую возможность в первую очередь?» Для того, чтобы получить обоснованный ответ на этот вопрос, руководство «Бэст-Перспективы» поручило экономико-аналитическому отделу разработать модель, позволяющую по каждому претенденту рассчитать прогнозную оценку целесообразности предоставления ему права бесплатного доступа к ресурсам Интернета. В основу построения такой модели была положена идея применения бинарной переменной

$$y = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ если сотрудник, обладающий правом бесплатного доступа к} \\ \text{интернет – ресурсам, по оценке экспертной группы эффективно} \\ \text{пользуется этим правом} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{array} \right\},$$

зависящей от некоторых анкетных данных, а также результатов тестирования, характеризующих навыки использования Интернет.

Построение модели руководство фирмы предложило провести по пяти факторам: возраст, стаж профессиональной деятельности, заработная плата, число случаев поступления полезной для фирмы информации от сотрудника, результат тестирования (в баллах) на предмет оценки навыков работы в Интернет. Значения этих показателей, а также значения бинарной переменной представлены в табл. 8.8.1.

Имеются следующие претенденты на право бесплатного доступа:

- 1) возраст – 27 лет, стаж – 3 года, заработная плата – 3200 руб., количество случаев нахождения полезной для фирмы информации – 9 раз, тест – 15 баллов;
- 2) возраст – 44 года, стаж – 12 лет, заработная плата – 5600 руб., количество случаев нахождения полезной для фирмы информации – 2 раза, тест – 5 баллов;

- 3) возраст – 35 лет, стаж – 10 лет, заработная плата – 4100 руб., количество случаев нахождения полезной для фирмы информации – 4 раза, тест – 7 баллов;
- 4) возраст – 39 лет, стаж – 13 лет, заработная плата – 7500 руб., количество случаев нахождения полезной для фирмы информации – 11 раз, тест – 15 баллов.

Используя построенную прогнозную модель, определить среди имеющихся претендентов тех, кому в первую очередь следует предоставить право бесплатного доступа к ресурсам Интернета.

Решение с помощью пакета STATISTICA.

1. Подготовка данных для проведения расчетов с учетом группировки по интервалам, приведенным в табл. 8.1.2. В результате группировки исходный массив данных будет иметь вид табл. 3 (где q - частота появления соответствующего наблюдения в выборочной совокупности).

2. Ввод данных табл. 8.1.3. Для этого необходимо загрузить пакет STATISTICA и создать чистую таблицу, установив ее размеры (27 строк и 7 столбцов) с помощью кнопок «Переменные» (столбцы) и «Случаи» (строки).

3. Открыть меню «Статистика», в нем выбрать «Дополнительные линейные и нелинейные модели» — «Нелинейная оценка» — «Логистическая регрессия».

4. В открывшемся окне установить с помощью стрелочки опцию «Коды и числа» и выбрать в качестве независимых переменных «Переменные 2-6», в качестве зависимой переменной – «Переменную 1» и в качестве переменной, содержащей частоту появления каждого из наблюдаемых событий – «Переменную 7» и щелкнуть на кнопке «ОК».

5. На появившейся панели «Оценивание модели» в окне «Метод оценивания», используя стрелку, выбрать квазиньютоновский метод и, не изменяя параметров итерационного процесса, щелкнуть на кнопке «ОК».

6. Для просмотра параметров модели в открывшемся окне «Результаты» необходимо выбрать пункт «Обзор: оценки параметров». Полученные результаты представлены в табл. 8.1.4.

Таблица 8.8.1

| № п.п. | Бинарная переменная | Возраст претендента, лет | Стаж работы, лет | Заработная плата, тыс. руб. | Количество случаев нахождения полезной информации | Результаты тестирования, балл | № п.п. | Бинарная переменная | Возраст претендента, лет | Стаж работы, лет | Заработная плата, тыс. руб. | Количество случаев нахождения полезной информации | Результаты тестирования, баллы |
|--------|---------------------|--------------------------|------------------|-----------------------------|---|-------------------------------|--------|---------------------|--------------------------|------------------|-----------------------------|---|--------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 1. | 0 | 22 | 1 | 2,5 | 2 | 6 | 26. | 0 | 52 | 17 | 9,7 | 2 | 1 |
| 2. | 0 | 24 | 1 | 3 | 3 | 8 | 27. | 0 | 54 | 12 | 8,9 | 3 | 4 |
| 3. | 1 | 25 | 1 | 2,1 | 1 | 7 | 28. | 1 | 18 | 1 | 3,4 | 4 | 11 |
| 4. | 1 | 27 | 4 | 4,6 | 8 | 11 | 29. | 0 | 19 | 1 | 3,7 | 5 | 12 |
| 5. | 1 | 28 | 3 | 5,9 | 9 | 13 | 30. | 1 | 20 | 1 | 2,9 | 6 | 13 |
| 6. | 0 | 21 | 1 | 3,3 | 5 | 14 | 31. | 0 | 19 | 1 | 3,8 | 5 | 15 |
| 7. | 1 | 22 | 1 | 3,2 | 9 | 15 | 32. | 0 | 20 | 1 | 4,3 | 1 | 8 |
| 8. | 0 | 29 | 5 | 6 | 1 | 13 | 33. | 1 | 28 | 2 | 6,9 | 9 | 14 |
| 9. | 1 | 26 | 4 | 2,7 | 8 | 11 | 34. | 0 | 27 | 4 | 6,5 | 5 | 12 |
| 10. | 0 | 27 | 6 | 3,8 | 0 | 3 | 35. | 0 | 43 | 8 | 9,2 | 2 | 9 |
| 11. | 1 | 28 | 4 | 4,2 | 9 | 11 | 36. | 1 | 44 | 13 | 10,3 | 11 | 13 |
| 12. | 0 | 29 | 3 | 6,7 | 5 | 13 | 37. | 0 | 56 | 12 | 10,8 | 2 | 4 |
| 13. | 1 | 29 | 9 | 6,5 | 10 | 14 | 38. | 1 | 54 | 14 | 9,4 | 12 | 13 |
| 14. | 1 | 30 | 4 | 3,4 | 9 | 13 | 39. | 0 | 44 | 11 | 9,8 | 2 | 6 |
| 15. | 1 | 41 | 7 | 7,2 | 7 | 15 | 40. | 1 | 28 | 4 | 6,0 | 8 | 12 |
| 16. | 0 | 32 | 8 | 7,9 | 4 | 7 | 41. | 0 | 19 | 1 | 3,4 | 2 | 7 |
| 17. | 1 | 46 | 9 | 6,4 | 9 | 12 | 42. | 0 | 20 | 1 | 4,3 | 5 | 11 |
| 18. | 1 | 34 | 3 | 6,3 | 8 | 13 | 43. | 0 | 19 | 1 | 4,9 | 5 | 12 |
| 19. | 0 | 33 | 3 | 6,1 | 1 | 9 | 44. | 1 | 21 | 1 | 3,2 | 6 | 13 |
| 20. | 1 | 47 | 9 | 9,7 | 5 | 13 | 45. | 0 | 45 | 12 | 12,4 | 2 | 4 |
| 21. | 0 | 37 | 2 | 6,4 | 3 | 7 | 46. | 0 | 19 | 1 | 3,1 | 4 | 13 |
| 22. | 0 | 38 | 5 | 10,5 | 2 | 8 | 47. | 0 | 48 | 13 | 12,7 | 2 | 5 |
| 23. | 0 | 49 | 13 | 12,3 | 3 | 3 | 48. | 1 | 20 | 1 | 3,5 | 4 | 13 |
| 24. | 1 | 46 | 7 | 10,1 | 5 | 14 | 49. | 0 | 58 | 18 | 9,9 | 2 | 2 |
| 25. | 1 | 48 | 8 | 7,9 | 8 | 15 | 50. | 0 | 49 | 12 | 11,8 | 3 | 3 |

Продолжение таблицы 8.8.1

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|-----|---|----|----|------|----|----|------|---|----|----|-----|----|----|
| 51. | 0 | 57 | 18 | 10,2 | 2 | 2 | 76. | 1 | 26 | 8 | 5,4 | 11 | 15 |
| 52. | 0 | 28 | 4 | 6,7 | 1 | 11 | 77. | 0 | 39 | 5 | 7,6 | 2 | 7 |
| 53. | 0 | 52 | 14 | 9,9 | 2 | 2 | 78. | 0 | 32 | 9 | 5,5 | 5 | 8 |
| 54. | 0 | 45 | 15 | 13,1 | 3 | 4 | 79. | 1 | 33 | 4 | 5,4 | 7 | 11 |
| 55. | 0 | 53 | 16 | 9,1 | 1 | 4 | 80. | 1 | 23 | 1 | 2,8 | 8 | 13 |
| 56. | 0 | 54 | 20 | 9,7 | 1 | 5 | 81. | 0 | 36 | 3 | 6,5 | 2 | 9 |
| 57. | 0 | 30 | 4 | 6,8 | 3 | 12 | 82. | 0 | 35 | 9 | 6,9 | 5 | 8 |
| 58. | 0 | 46 | 12 | 12,2 | 2 | 1 | 83. | 1 | 23 | 1 | 3,2 | 9 | 11 |
| 59. | 0 | 28 | 4 | 3,9 | 0 | 2 | 84. | 1 | 34 | 3 | 6,1 | 8 | 12 |
| 60. | 0 | 44 | 14 | 12,5 | 1 | 2 | 85. | 0 | 35 | 8 | 5,9 | 5 | 9 |
| 61. | 0 | 22 | 1 | 2,8 | 3 | 7 | 86. | 0 | 38 | 2 | 7,8 | 3 | 10 |
| 62. | 0 | 29 | 4 | 3,4 | 0 | 2 | 87. | 0 | 32 | 9 | 7,3 | 5 | 8 |
| 63. | 0 | 23 | 1 | 4,9 | 4 | 15 | 88. | 0 | 33 | 2 | 6,4 | 3 | 10 |
| 64. | 1 | 26 | 8 | 6,7 | 12 | 15 | 89. | 1 | 34 | 3 | 6,5 | 8 | 11 |
| 65. | 1 | 27 | 9 | 6,6 | 11 | 13 | 90. | 0 | 35 | 10 | 7,9 | 5 | 10 |
| 66. | 0 | 39 | 4 | 8,9 | 2 | 8 | 91. | 0 | 33 | 2 | 7,8 | 1 | 9 |
| 67. | 1 | 27 | 7 | 5,5 | 11 | 11 | 92. | 1 | 24 | 1 | 3,0 | 8 | 11 |
| 68. | 0 | 26 | 6 | 5,7 | 2 | 11 | 93. | 1 | 34 | 4 | 6,0 | 9 | 13 |
| 69. | 1 | 28 | 9 | 6,1 | 12 | 12 | 94. | 0 | 33 | 3 | 5,4 | 2 | 10 |
| 70. | 1 | 28 | 8 | 7,3 | 10 | 13 | 95. | 1 | 22 | 1 | 2,9 | 7 | 13 |
| 71. | 0 | 40 | 4 | 9,2 | 2 | 7 | 96. | 1 | 32 | 5 | 6,4 | 8 | 15 |
| 72. | 1 | 28 | 10 | 7,9 | 10 | 11 | 97. | 0 | 33 | 6 | 5,7 | 2 | 7 |
| 73. | 1 | 22 | 1 | 2,5 | 8 | 12 | 98. | 1 | 23 | 1 | 3,6 | 9 | 15 |
| 74. | 1 | 26 | 9 | 6,8 | 11 | 15 | 99. | 1 | 31 | 4 | 6,0 | 8 | 13 |
| 75. | 0 | 40 | 5 | 6,0 | 2 | 9 | 100. | 0 | 33 | 4 | 6,1 | 3 | 10 |

Таблица 8.1.2

| ВОЗРАСТ | | СТАЖ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ | | ЗАРАБОТНАЯ ПЛАТА | | КОЛИЧЕСТВО СЛУЧАЕВ ПОСТУПЛЕНИЯ ПОЛЕЗНОЙ ИНФОРМАЦИИ ОТ СОТРУДНИКА | | РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕСТИРОВАНИЯ (МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ - 15) | |
|--------------------|---------|------------------------------------|---------|--------------------|---------|--|---------|--|---------|
| Границы интервалов | Медиана | Границы интервалов | Медиана | Границы интервалов | Медиана | Границы интервалов | Медиана | Границы интервалов | Медиана |
| До 21 года | 19 | До 1 года | 1 | 2-5тыс | 3 | Не приносил | 0 | Ни одного | 0 |
| 21-25 | 23 | 2-6 | 4 | 5-8тыс | 6 | 1-3 | 2 | 1-5 | 3 |
| 26-30 | 28 | 7-11 | 9 | 8-11 | 9 | 4-6 | 5 | 6-10 | 8 |
| 31-35 | 33 | 12-16 | 14 | От 11 и более | 12 | 7-9 | 8 | 11-15 | 13 |
| 36-40 | 38 | 17-21 | 19 | | | 10-12 | 11 | | |
| 41-50 | 45 | Больше 21 | 24 | | | Больше 12 | 14 | | |
| Старше 50 | 55 | | | | | | | | |

Таблица 8.1.3

| № п.п. | у | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | q |
|--------|---|-------|-------|-------|-------|-------|---|
| 1. | 0 | 23 | 1 | 3 | 2 | 8 | 3 |
| 2. | 1 | 23 | 1 | 3 | 2 | 8 | 1 |
| 3. | 0 | 23 | 1 | 3 | 5 | 13 | 2 |
| 4. | 1 | 23 | 1 | 3 | 8 | 13 | 7 |
| 5. | 0 | 28 | 4 | 6 | 2 | 13 | 4 |
| 6. | 0 | 28 | 4 | 3 | 0 | 3 | 3 |
| 7. | 1 | 28 | 9 | 6 | 11 | 13 | 9 |
| 8. | 1 | 28 | 4 | 3 | 8 | 13 | 4 |
| 9. | 0 | 33 | 9 | 6 | 5 | 8 | 6 |
| 10. | 1 | 33 | 4 | 6 | 8 | 13 | 7 |
| 11. | 0 | 33 | 4 | 6 | 2 | 8 | 6 |
| 12. | 0 | 38 | 4 | 6 | 2 | 8 | 5 |
| 13. | 0 | 38 | 4 | 9 | 2 | 8 | 3 |
| 14. | 0 | 45 | 14 | 12 | 2 | 3 | 7 |
| 15. | 1 | 45 | 9 | 9 | 5 | 13 | 2 |
| 16. | 1 | 45 | 9 | 6 | 8 | 13 | 3 |
| 17. | 0 | 55 | 19 | 9 | 2 | 3 | 4 |
| 18. | 0 | 55 | 14 | 9 | 2 | 3 | 3 |
| 19. | 1 | 19 | 1 | 3 | 5 | 13 | 4 |
| 20. | 0 | 19 | 1 | 3 | 5 | 13 | 5 |
| 21. | 0 | 19 | 1 | 3 | 2 | 8 | 2 |
| 22. | 1 | 28 | 4 | 6 | 8 | 13 | 3 |
| 23. | 0 | 28 | 4 | 6 | 5 | 13 | 2 |
| 24. | 0 | 45 | 9 | 9 | 2 | 8 | 2 |
| 25. | 1 | 45 | 14 | 9 | 11 | 13 | 1 |
| 26. | 0 | 55 | 14 | 9 | 2 | 3 | 1 |
| 27. | 1 | 55 | 14 | 9 | 11 | 13 | 1 |

Таблица 8.1.4

| | | | | | | |
|-----------------------------|--|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| N=27 | Model: Logistic regression (logit) N of 0's:58 1's:42 Dep. var: Var1 Loss: Max likelihood Final loss: 15,847791601 Chi?(5)=104,36 p=0,0000 | | | | | |
| | Const.B0 | Var2 | Var3 | Var4 | Var5 | Var6 |
| Estimate | -13,2000 | 0,27 | -0,521844 | -0,315524 | 1 | 0,150857 |
| Odds ratio (unit ch) | 0,0000 | 1,32 | 0,593425 | 0,729407 | 4 | 1,162831 |
| Odds ratio (range) | | 19876,47 | 0,000083 | 0,058442 | 3704998 | 4,520271 |

Аналитическое представление построенной логит-модели можно записать следующим образом:

$$P(y_i = 1 / \tilde{x}_i) = (1 + e^{13,2 - 0,27\tilde{x}_{1i} + 0,521844\tilde{x}_{2i} + 0,315524\tilde{x}_{3i} - \tilde{x}_{4i} - 0,150857\tilde{x}_{5i}})^{-1}. (*)$$

7. Для оценки прогнозных возможностей построенной модели выполнить пункт «Наблюдённые, предсказанные значения, остатки». Полученные результаты приведены в табл. 8.1.5.

Таблица 8.1.5

| № п.п. | Наблюденные значения | Предсказанные значения | Остатки | № п.п. | Наблюденные значения | Предсказанные значения | Остатки |
|--------|----------------------|------------------------|----------|--------|----------------------|------------------------|----------|
| 1. | 0 | 0,01227 | -0,01227 | 14. | 0 | 0,000164 | -0,00016 |
| 2. | 1 | 0,01227 | 0,98773 | 15. | 1 | 0,615739 | 0,384261 |
| 3. | 0 | 0,620354 | -0,62035 | 16. | 1 | 0,996101 | 0,003899 |
| 4. | 1 | 0,990206 | 0,009794 | 17. | 0 | 0,000485 | -0,00049 |
| 5. | 0 | 0,008397 | -0,0084 | 18. | 0 | 0,006548 | -0,00655 |
| 6. | 0 | 0,000308 | -0,00031 | 19. | 1 | 0,352368 | 0,647632 |
| 7. | 1 | 0,99327 | 0,00673 | 20. | 0 | 0,352368 | -0,35237 |
| 8. | 1 | 0,98817 | 0,01183 | 21. | 0 | 0,004119 | -0,00412 |
| 9. | 0 | 0,0669 | -0,0669 | 22. | 1 | 0,970073 | 0,029927 |
| 10. | 1 | 0,992257 | 0,007743 | 23. | 0 | 0,343795 | -0,3438 |
| 11. | 0 | 0,015502 | -0,0155 | 24. | 0 | 0,012035 | -0,01204 |
| 12. | 0 | 0,058606 | -0,05861 | 25. | 1 | 0,99779 | 0,00221 |
| 13. | 0 | 0,023589 | -0,02359 | 26. | 0 | 0,006548 | -0,00655 |
| | | | | 27. | 1 | 0,999858 | 0,000142 |

При сравнении первого и второго столбцов этой таблицы можно сделать следующий вывод: с достаточным уровнем надежности не удалось предсказать поведение для случаев, описываемых 2, 3 и 19 наблюдениями. Но в 93 случаях из 100 удалось точно предсказать стратегию поведения фирмы в отношении сотрудников (предоставлять или нет право бесплатно-

го доступа к ресурсам Интернет). Надежность модели также подтверждается расчетным значением хи-квадрат (104,36), которое значительно боль

ше теоретического значения (32,67), и почти нулевой вероятностью не отвергнуть нулевую гипотезу.

8. Получение значений коэффициентов абсолютного роста по каждой переменной. Для этого необходимо выражение (*), описывающее полученную логит-зависимость, продифференцировать по \tilde{x}_k и вычислить значения производной в каждом наблюдении $\tilde{\mathbf{x}}_i$

$$\frac{\partial P(y_i = 1 / \tilde{\mathbf{x}}_i)}{\partial \tilde{x}_k} = (1 + e^{-\tilde{\mathbf{x}}_i b})^{-1} (1 + e^{\tilde{\mathbf{x}}_i b})^{-1} b_k.$$

Результаты расчетов представлены в табл.8.1.6.

Таблица 8.1.6

| № п.п. | Коэффициенты абсолютного роста | | | | |
|-----------|--------------------------------|----------|----------|---------|---------|
| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
| 1. | 0,00140 | -0,00271 | -0,00164 | 0,00518 | 0,00078 |
| 2. | 0,00140 | -0,00271 | -0,00164 | 0,00518 | 0,00078 |
| 3. | 0,04034 | -0,07797 | -0,04714 | 0,14940 | 0,02254 |
| 4. | 0,04020 | -0,07770 | -0,04698 | 0,14889 | 0,02246 |
| 5. | 0,00093 | -0,00181 | -0,00109 | 0,00346 | 0,00052 |
| 6. | 0,00007 | -0,00014 | -0,00008 | 0,00027 | 0,00004 |
| 7. | 0,05922 | -0,11446 | -0,06921 | 0,21934 | 0,03309 |
| 8. | 0,04577 | -0,08847 | -0,05349 | 0,16953 | 0,02557 |
| 9. | 0,00248 | -0,00479 | -0,00289 | 0,00917 | 0,00138 |
| 10. | 0,03549 | -0,06860 | -0,04148 | 0,13145 | 0,01983 |
| 11. | 0,00169 | -0,00326 | -0,00197 | 0,00624 | 0,00094 |
| 12. | 0,00627 | -0,01213 | -0,00733 | 0,02324 | 0,00351 |
| 13. | 0,00251 | -0,00485 | -0,00293 | 0,00929 | 0,00140 |
| 14. | 0,00002 | -0,00003 | -0,00002 | 0,00006 | 0,00001 |
| 15. | 0,03711 | -0,07172 | -0,04336 | 0,13744 | 0,02073 |
| 16. | 0,02197 | -0,04247 | -0,02568 | 0,08138 | 0,01228 |
| 17. | 0,00005 | -0,00009 | -0,00006 | 0,00017 | 0,00003 |
| 18. | 0,00064 | -0,00123 | -0,00075 | 0,00236 | 0,00036 |
| 19. | 0,01772 | -0,03425 | -0,02071 | 0,06563 | 0,00990 |
| 20. | 0,01772 | -0,03425 | -0,02071 | 0,06563 | 0,00990 |
| 21. | 0,00048 | -0,00093 | -0,00056 | 0,00177 | 0,00027 |
| 22. | 0,06558 | -0,12675 | -0,07664 | 0,24289 | 0,03664 |
| 23. | 0,01651 | -0,03190 | -0,01929 | 0,06113 | 0,00922 |
| 24. | 0,00123 | -0,00238 | -0,00144 | 0,00457 | 0,00069 |
| 25. | 0,03368 | -0,06510 | -0,03936 | 0,12475 | 0,01882 |
| 26. | 0,00064 | -0,00123 | -0,00075 | 0,00236 | 0,00036 |
| 27. | 0,00303 | -0,00586 | -0,00355 | 0,01124 | 0,00170 |

Анализ коэффициентов абсолютного роста показывает, что второй и третий факторы (стаж профессиональной деятельности и заработная плата)

имеют отрицательные коэффициенты абсолютного роста, а остальные – положительные. Это свидетельствует о том, что при увеличении значений таких факторов, как стаж и зарплата, вероятность предоставления бесплатного доступа в Интернет снижается, при увеличении таких факторов как возраст, результаты тестирования, количество случаев нахождения полезной для фирмы информации – вероятность возрастает.

9. Использование построенной модели для выбора среди имеющихся претендентов тех, кому в первую очередь следует предоставить право бесплатного доступа к ресурсам Интернета:

- 1) $(1 + e^{13,2-0,27\cdot27+0,521844\cdot3+0,315524\cdot3,2-9-0,150857\cdot15})^{-1} = 0,941$;
- 2) $(1 + e^{13,2-0,27\cdot44+0,521844\cdot12+0,315524\cdot5,6-2-0,150857\cdot5})^{-1} = 0,001$;
- 3) $(1 + e^{13,2-0,27\cdot35+0,521844\cdot10+0,315524\cdot4,1-4-0,150857\cdot7})^{-1} = 0,0054$;
- 4) $(1 + e^{13,2-0,27\cdot39+0,521844\cdot13+0,315524\cdot7,5-11-0,150857\cdot15})^{-1} = 0,808$.

Следовательно, первому и четвертому претендентам целесообразно предоставить право бесплатного доступа, а второму и третьему – нет.

8.2. Задание для самостоятельной работы

Задание 8.2. Ежегодно НИИ «Интеллектуальный бизнес-успех», занимающийся, в частности, проблемами макро- и микро моделирования, обеспечивает своим сотрудникам, специализирующимся в этой области, стажировки в англоязычные страны. При отборе претендентов на поездку учитываются такие факторы, как: 1) знание английского языка (претенденты сдают тест, максимальное число баллов по которому можно получить - 50); 2) стаж профессиональной деятельности; 3) ученая степень (для ее обозначения используется следующая кодировка: 00 – без степени, 01 – кандидат наук, 10 – доктор наук); 4) количество публикаций по указанной проблематике. В настоящее время руководству НИИ снова предстоит решить, кого из сотрудников отправить на стажировку. Для того чтобы выбор претендента осуществлялся исключительно на научной основе, а также для того, чтобы иметь возможность предвидеть, что даст организации ста-

жировка того или иного претендента, аналитику НИИ было поручено построить модель, позволяющую реализовать эти цели. Сложность поставленной задачи потребовало использования не совсем традиционного под

хода. В качестве основы построения модели было решено использовать бинарную переменную

$$y = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ стажер вернулся с дипломом} \\ 0, \text{ стажер вернулся с сертификатом} \end{array} \right\},$$

поскольку сертификат свидетельствует о том, что сотрудник всего лишь прослушал курс по макро- и микромоделированию, а диплом – сотрудник не только прослушал курс, но и сдал квалификационный экзамен. Очевидно, что диплом, полученный стажером, положительным образом сказывается не только на его собственной карьере, но на имидже НИИ, а также увеличивает «интеллект» организации. Становится понятным желание руководства отбор провести таким образом, чтобы максимально возможное число претендентов вернулось с дипломами. Данные для построения модели представлены в табл. 8.2.1. В текущий момент руководству необходимо выяснить, кого из претендентов следует отправить на стажировку в первую очередь. Потенциальные стажеры обладают следующими характеристиками:

1) результаты тестирования – 27 баллов, стаж профессиональной деятельности – 3 года, кандидат наук, количество публикаций – 21;

2) результаты тестирования – 48 баллов, стаж профессиональной деятельности – 12 лет, без степени, количество публикаций – 10;

3) результаты тестирования – 32 балла, стаж профессиональной деятельности – 25 лет, доктор наук, количество публикаций – 98;

Таблица 8.2.1

| № п.п. | Бинарная переменная | Результаты тестирования, балл | Стаж работы, лет | Ученая степень | Количество публикаций | № п.п. | Бинарная переменная | Результаты тестирования, балл | Стаж работы, лет | Ученая степень | Количество публикаций |
|--------|---------------------|-------------------------------|------------------|----------------|-----------------------|--------|---------------------|-------------------------------|------------------|----------------|-----------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1. | 1 | 39 | 7 | кандидат | 15 | 26. | 0 | 12 | 4 | кандидат | 9 |
| 2. | 0 | 7 | 2 | кандидат | 7 | 27. | 1 | 21 | 14 | кандидат | 18 |
| 3. | 0 | 27 | 4 | без степени | 2 | 28. | 0 | 31 | 3 | без степени | 3 |
| 4. | 0 | 29 | 5 | без степени | 1 | 29. | 0 | 4 | 20 | кандидат | 13 |
| 5. | 0 | 34 | 4 | без степени | 3 | 30. | 0 | 34 | 3 | без степени | 3 |
| 6. | 1 | 18 | 11 | кандидат | 18 | 31. | 0 | 12 | 8 | кандидат | 6 |
| 7. | 1 | 21 | 13 | кандидат | 17 | 32. | 0 | 8 | 4 | кандидат | 7 |
| 8. | 1 | 40 | 9 | кандидат | 13 | 33. | 0 | 3 | 17 | кандидат | 13 |
| 9. | 1 | 28 | 11 | без степени | 6 | 34. | 0 | 10 | 7 | кандидат | 5 |
| 10. | 1 | 24 | 11 | кандидат | 16 | 35. | 1 | 26 | 11 | кандидат | 16 |
| 11. | 0 | 12 | 5 | без степени | 9 | 36. | 1 | 30 | 21 | кандидат | 13 |
| 12. | 1 | 25 | 13 | кандидат | 20 | 37. | 0 | 36 | 2 | без степени | 1 |
| 13. | 1 | 20 | 18 | доктор | 43 | 38. | 0 | 19 | 7 | без степени | 7 |
| 14. | 1 | 30 | 15 | без степени | 5 | 39. | 0 | 36 | 5 | без степени | 3 |
| 15. | 0 | 18 | 7 | без степени | 3 | 40. | 1 | 46 | 19 | кандидат | 37 |
| 16. | 1 | 18 | 11 | кандидат | 16 | 41. | 0 | 13 | 1 | кандидат | 7 |
| 17. | 1 | 39 | 18 | кандидат | 30 | 42. | 1 | 36 | 14 | кандидат | 26 |
| 18. | 1 | 24 | 15 | кандидат | 19 | 43. | 0 | 21 | 10 | без степени | 9 |
| 19. | 0 | 4 | 16 | без степени | 5 | 44. | 1 | 20 | 11 | кандидат | 19 |
| 20. | 1 | 46 | 15 | доктор | 45 | 45. | 0 | 36 | 4 | без степени | 3 |
| 21. | 0 | 9 | 5 | кандидат | 8 | 46. | 0 | 14 | 8 | без степени | 3 |
| 22. | 1 | 16 | 11 | кандидат | 17 | 47. | 0 | 31 | 4 | без степени | 2 |
| 23. | 1 | 24 | 7 | кандидат | 14 | 48. | 0 | 7 | 5 | без степени | 6 |
| 24. | 0 | 20 | 9 | без степени | 7 | 49. | 0 | 33 | 3 | без степени | 1 |
| 25. | 0 | 3 | 18 | без степени | 4 | 50. | 0 | 14 | 1 | кандидат | 8 |

Продолжение таблицы 8.2.1

| № п.п. | Бинарная переменная | Результаты тестирования, балл | Стаж работы, лет | Ученая степень | Количество публикаций | № п.п. | Бинарная переменная | Результаты тестирования, балл | Стаж работы, лет | Ученая степень | Количество публикаций |
|--------|---------------------|-------------------------------|------------------|----------------|-----------------------|--------|---------------------|-------------------------------|------------------|----------------|-----------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 51. | 1 | 27 | 11 | без степени | 4 | 76. | 0 | 3 | 16 | кандидат | 13 |
| 52. | 0 | 16 | 7 | без степени | 7 | 77. | 1 | 38 | 16 | кандидат | 30 |
| 53. | 0 | 21 | 7 | без степени | 2 | 78. | 0 | 2 | 20 | кандидат | 15 |
| 54. | 1 | 36 | 14 | без степени | 6 | 79. | 0 | 3 | 16 | без степени | 4 |
| 55. | 0 | 21 | 6 | без степени | 9 | 80. | 0 | 4 | 19 | кандидат | 14 |
| 56. | 1 | 41 | 17 | кандидат | 31 | 81. | 0 | 9 | 7 | кандидат | 4 |
| 57. | 0 | 25 | 7 | без степени | 8 | 82. | 0 | 9 | 8 | кандидат | 4 |
| 58. | 1 | 33 | 12 | без степени | 5 | 83. | 0 | 11 | 6 | кандидат | 6 |
| 59. | 0 | 19 | 9 | без степени | 8 | 84. | 0 | 5 | 18 | кандидат | 14 |
| 60. | 0 | 13 | 1 | без степени | 8 | 85. | 0 | 4 | 17 | без степени | 5 |
| 61. | 0 | 14 | 4 | без степени | 7 | 86. | 0 | 4 | 16 | без степени | 6 |
| 62. | 1 | 28 | 13 | кандидат | 21 | 87. | 0 | 2 | 17 | кандидат | 13 |
| 63. | 1 | 29 | 13 | без степени | 6 | 88. | 0 | 2 | 16 | без степени | 4 |
| 64. | 1 | 27 | 21 | кандидат | 13 | 89. | 1 | 16 | 9 | кандидат | 13 |
| 65. | 1 | 29 | 23 | кандидат | 14 | 90. | 0 | 3 | 19 | кандидат | 15 |
| 66. | 1 | 31 | 21 | кандидат | 15 | 91. | 0 | 12 | 7 | без степени | 3 |
| 67. | 0 | 27 | 5 | без степени | 3 | 92. | 0 | 13 | 7 | без степени | 3 |
| 68. | 0 | 29 | 4 | без степени | 2 | 93. | 0 | 3 | 16 | кандидат | 14 |
| 69. | 0 | 27 | 3 | без степени | 2 | 94. | 1 | 19 | 8 | кандидат | 14 |
| 70. | 0 | 33 | 5 | без степени | 3 | 95. | 1 | 18 | 8 | кандидат | 15 |
| 71. | 1 | 31 | 15 | кандидат | 28 | 96. | 0 | 5 | 16 | кандидат | 13 |
| 72. | 1 | 36 | 11 | кандидат | 21 | 97. | 1 | 16 | 6 | кандидат | 13 |
| 73. | 0 | 36 | 2 | без степени | 1 | 98. | 0 | 4 | 20 | кандидат | 15 |
| 74. | 0 | 31 | 4 | без степени | 2 | 99. | 1 | 17 | 7 | кандидат | 13 |
| 75. | 0 | 34 | 3 | без степени | 3 | 100. | 0 | 3 | 18 | кандидат | 15 |

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Двусторонние квантили распределения Стьюдента $t_a(n)$
 (n – число степеней свободы, a - доверительный интервал)

| | 0,20 | 0,40 | 0,50 | 0,60 | 0,80 | 0,90 | 0,95 | 0,98 | 0,99 |
|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 0,325 | 0,727 | 1,000 | 1,376 | 3,078 | 6,314 | 12,706 | 31,821 | 63,657 |
| 2 | 0,289 | 0,617 | 0,816 | 1,061 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | |
| 3 | 0,277 | 0,584 | 0,765 | 0,978 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 |
| 4 | 0,271 | 0,569 | 0,741 | 0,941 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 |
| 5 | 0,267 | 0,559 | 0,727 | 0,920 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 |
| 6 | 0,265 | 0,553 | 0,718 | 0,906 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 |
| 7 | 0,263 | 0,549 | 0,711 | 0,896 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 |
| 8 | 0,262 | 0,546 | 0,706 | 0,889 | 1,397 | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 |
| 9 | 0,261 | 0,543 | 0,703 | 0,883 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 |
| 10 | 0,260 | 0,542 | 0,700 | 0,879 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 |
| 11 | 0,260 | 0,540 | 0,697 | 0,876 | 1,363 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 |
| 12 | 0,259 | 0,539 | 0,695 | 0,873 | 1,356 | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 |
| 13 | 0,259 | 0,538 | 0,694 | 0,870 | 1,350 | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 |
| 14 | 0,258 | 0,537 | 0,692 | 0,868 | 1,345 | 1,761 | 2,145 | 2,624 | 2,977 |
| 15 | 0,258 | 0,536 | 0,691 | 0,866 | 1,341 | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 |
| 16 | 0,258 | 0,535 | 0,690 | 0,865 | 1,337 | 1,746 | 2,120 | 2,583 | 2,291 |
| 17 | 0,257 | 0,534 | 0,689 | 0,863 | 1,333 | 1,740 | 2,110 | 2,567 | 2,898 |
| 18 | 0,257 | 0,534 | 0,688 | 0,862 | 1,330 | 1,734 | 2,101 | 2,552 | 2,878 |
| 19 | 0,257 | 0,533 | 0,688 | 0,861 | 1,328 | 1,729 | 2,093 | 2,539 | 2,861 |
| 20 | 0,257 | 0,533 | 0,687 | 0,860 | 1,325 | 1,725 | 2,086 | 2,528 | 2,845 |
| 21 | 0,257 | 0,532 | 0,686 | 0,859 | 1,323 | 1,721 | 2,080 | 2,518 | 2,831 |
| 22 | 0,256 | 0,532 | 0,686 | 0,858 | 1,321 | 1,717 | 2,074 | 2,508 | 2,819 |
| 23 | 0,256 | 0,532 | 0,685 | 0,858 | 1,319 | 1,714 | 2,069 | 2,500 | 2,807 |
| 24 | 0,256 | 0,531 | 0,685 | 0,857 | 1,318 | 1,711 | 2,064 | 2,492 | 2,797 |
| 25 | 0,256 | 0,531 | 0,684 | 0,856 | 1,316 | 1,708 | 2,060 | 2,485 | 2,787 |
| 26 | 0,256 | 0,531 | 0,684 | 0,856 | 1,315 | 1,706 | 2,056 | 2,479 | 2,779 |
| 27 | 0,256 | 0,531 | 0,684 | 0,855 | 1,314 | 1,703 | 2,052 | 2,473 | 2,771 |
| 28 | 0,256 | 0,530 | 0,683 | 0,855 | 1,313 | 1,701 | 2,048 | 3,467 | 2,763 |
| 29 | 0,256 | 0,530 | 0,683 | 0,854 | 1,311 | 1,699 | 2,045 | 2,462 | 2,756 |
| 30 | 0,256 | 0,530 | 0,683 | 0,854 | 1,310 | 1,697 | 2,042 | 2,457 | 2,750 |
| 40 | 0,255 | 0,529 | 0,681 | 0,851 | 1,303 | 1,684 | 2,021 | 2,423 | 2,704 |
| 60 | 0,254 | 0,527 | 0,679 | 0,848 | 1,296 | 1,671 | 2,000 | 2,390 | 2,660 |
| 100 | 0,254 | 0,526 | 0,677 | 0,845 | 1,290 | 1,660 | 1,984 | 2,364 | 2,626 |
| 200 | 0,254 | 0,525 | 0,676 | 0,843 | 1,286 | 1,652 | 1,972 | 2,345 | 2,601 |
| ∞ | 0,253 | 0,524 | 0,675 | 0,842 | 1,282 | 1,645 | 1,96 | 2,326 | 2,576 |

Пример. Пусть t - случайная величина, распределенная по закону Стьюдента с пятью степенями свободы.

$t_{0,95}(5) = 2,571$, т.е. $P(-2,571 < t < 2,571) = 0,95$ (см. пятая строка, третий столбец).

Квантили распределения $\chi^2(n)$
 (n – число степеней свободы, α - доверительный интервал)

| | 0,005 | 0,010 | 0,025 | 0,050 | 0,100 | 0,900 | 0,950 | 0,975 | 0,990 | 0,995 |
|------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1 | 0,000039 | 0,00016 | 0,00098 | 0,0039 | 0,0158 | 2,71 | 3,84 | 5,02 | 6,63 | 7,88 |
| 2 | 0,0100 | 0,0201 | 0,0506 | 0,1026 | 0,2107 | 4,61 | 5,99 | 7,38 | 9,21 | 10,60 |
| 3 | 0,0717 | 0,115 | 0,216 | 0,352 | 0,584 | 6,25 | 7,81 | 9,35 | 11,34 | 12,84 |
| 4 | 0,207 | 0,297 | 0,484 | 0,711 | 1,064 | 7,78 | 9,49 | 11,14 | 13,28 | 14,86 |
| 5 | 0,412 | 0,554 | 0,831 | 1,15 | 1,61 | 9,24 | 11,07 | 12,83 | 15,09 | 16,75 |
| 6 | 0,676 | 0,872 | 1,24 | 1,64 | 2,20 | 10,64 | 12,59 | 14,45 | 16,81 | 18,55 |
| 7 | 0,989 | 1,24 | 1,69 | 2,17 | 2,83 | 12,02 | 14,07 | 16,01 | 18,48 | 20,28 |
| 8 | 1,34 | 1,65 | 2,18 | 2,73 | 3,49 | 13,36 | 15,51 | 17,53 | 20,09 | 21,96 |
| 9 | 1,73 | 2,09 | 2,70 | 3,33 | 4,17 | 14,68 | 16,92 | 19,02 | 21,67 | 23,59 |
| 10 | 2,16 | 2,56 | 3,25 | 3,94 | 4,87 | 15,99 | 18,31 | 20,48 | 23,21 | 25,19 |
| 11 | 2,60 | 3,05 | 3,82 | 4,57 | 5,58 | 17,28 | 19,68 | 21,92 | 24,73 | 26,76 |
| 12 | 3,07 | 3,57 | 4,40 | 5,23 | 6,30 | 18,55 | 21,03 | 23,34 | 26,22 | 28,30 |
| 13 | 3,57 | 4,11 | 5,01 | 5,89 | 7,04 | 19,81 | 22,36 | 24,74 | 27,69 | 29,82 |
| 14 | 4,07 | 4,66 | 5,63 | 6,57 | 7,79 | 21,06 | 23,68 | 26,12 | 29,14 | 31,32 |
| 15 | 4,60 | 5,23 | 6,26 | 7,26 | 8,55 | 22,31 | 25,00 | 27,49 | 30,58 | 32,80 |
| 16 | 5,14 | 5,81 | 6,91 | 7,96 | 9,31 | 23,54 | 26,30 | 28,85 | 32,00 | 34,27 |
| 18 | 6,26 | 7,01 | 8,23 | 9,39 | 10,86 | 25,99 | 28,87 | 31,53 | 34,81 | 37,16 |
| 20 | 7,43 | 8,26 | 9,59 | 10,85 | 12,44 | 28,41 | 31,41 | 34,17 | 37,57 | 40,00 |
| 24 | 9,89 | 10,86 | 12,40 | 13,85 | 15,66 | 33,20 | 36,42 | 39,36 | 42,98 | 45,56 |
| 30 | 13,79 | 14,95 | 16,79 | 18,49 | 20,60 | 40,26 | 43,77 | 46,98 | 50,89 | 53,67 |
| 40 | 20,71 | 22,16 | 24,43 | 26,51 | 29,05 | 51,81 | 55,76 | 59,34 | 63,69 | 66,77 |
| 60 | 35,53 | 37,48 | 40,48 | 43,19 | 46,46 | 74,40 | 79,08 | 83,30 | 88,38 | 91,95 |
| 80 | 51,17 | 53,54 | 57,15 | 60,39 | 64,28 | 96,58 | 101,88 | 106,63 | 112,33 | 116,32 |
| 100 | 67,33 | 70,06 | 74,22 | 77,93 | 82,36 | 118,5 | 124,34 | 129,56 | 135,81 | 140,17 |
| 120 | 83,85 | 86,92 | 91,58 | 95,7 | 100,62 | 140,23 | 146,57 | 152,21 | 158,95 | 163,64 |

Пример. Пусть χ^2 - случайная величина, распределенная по закону χ^2 с пятью степенями свободы. $\chi^2_{0,95}(5) = 11,07$, т.е. $P(\chi^2 < 11,07) = 0,95$ (см. пятая строка, седьмой столбец).

Таблица 4

95% -ные квантили распределения Фишера
 (k_1 - число степеней свободы числителя,
 k_2 - число степеней свободы знаменателя)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| 1 | 161 | 200 | 216 | 225 | 230 | 234 | 237 | 239 | 241 | 242 |
| 2 | 18,5 | 19,0 | 19,2 | 19,2 | 19,3 | 19,3 | 19,4 | 19,4 | 19,4 | 19,4 |
| 3 | 10,13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,89 | 8,85 | 8,81 | 8,79 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,09 | 6,04 | 6,00 | 5,96 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,88 | 4,82 | 4,77 | 4,74 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,21 | 4,15 | 4,10 | 4,06 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,79 | 3,73 | 3,68 | 3,64 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,50 | 3,44 | 3,39 | 3,35 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3,29 | 3,23 | 3,18 | 3,14 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,14 | 3,07 | 3,02 | 2,98 |
| 11 | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 3,01 | 2,95 | 2,90 | 2,85 |
| 12 | 4,75 | 3,89 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,91 | 2,85 | 2,80 | 2,75 |
| 13 | 4,67 | 3,81 | 3,41 | 3,18 | 3,03 | 2,92 | 2,83 | 2,77 | 2,71 | 2,67 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,76 | 2,70 | 2,65 | 2,60 |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 | 2,71 | 2,64 | 2,59 | 2,54 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,66 | 2,59 | 2,54 | 2,49 |
| 17 | 4,45 | 3,59 | 3,20 | 2,96 | 2,81 | 2,70 | 2,61 | 2,55 | 2,49 | 2,45 |
| 18 | 4,41 | 3,55 | 3,16 | 2,93 | 2,77 | 2,66 | 2,58 | 2,51 | 2,46 | 2,41 |
| 19 | 4,38 | 3,52 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,63 | 2,54 | 2,48 | 2,42 | 2,38 |
| 20 | 4,35 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,71 | 2,60 | 2,51 | 2,45 | 2,39 | 2,35 |
| 21 | 4,32 | 3,47 | 3,07 | 2,84 | 2,68 | 2,57 | 2,49 | 2,42 | 2,37 | 2,32 |
| 22 | 4,30 | 3,44 | 3,05 | 2,82 | 2,66 | 2,55 | 2,46 | 2,40 | 2,34 | 2,3 |
| 23 | 4,28 | 3,42 | 3,03 | 2,80 | 2,64 | 2,53 | 2,44 | 2,37 | 2,32 | 2,27 |
| 24 | 4,26 | 3,40 | 3,01 | 2,78 | 2,62 | 2,51 | 2,42 | 2,36 | 2,30 | 2,25 |
| 25 | 4,24 | 3,39 | 2,99 | 2,76 | 2,60 | 2,49 | 2,40 | 2,34 | 2,28 | 2,24 |
| 30 | 4,17 | 3,32 | 2,92 | 2,69 | 2,53 | 2,42 | 2,33 | 2,27 | 2,21 | 2,16 |
| 40 | 4,08 | 3,23 | 2,84 | 2,61 | 2,45 | 2,34 | 2,25 | 2,18 | 2,12 | 2,08 |
| 60 | 4,00 | 3,15 | 2,76 | 2,53 | 2,37 | 2,25 | 2,17 | 2,10 | 2,04 | 1,99 |
| 120 | 3,92 | 3,07 | 2,68 | 2,45 | 2,29 | 2,18 | 2,09 | 2,02 | 1,96 | 1,91 |
| ∞ | 3,84 | 3,00 | 2,60 | 2,37 | 2,21 | 2,10 | 2,01 | 1,94 | 1,88 | 1,83 |

Таблица 4(окончание)

95% -ные квантили распределения Фишера

 $(k_1$ - число степеней свободы числителя, k_2 - число степеней свободы знаменателя)

| | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
|------------|------|------|------|------|------|------|------|------|----------|
| 1 | 244 | 246 | 248 | 249 | 250 | 251 | 252 | 253 | 254 |
| 2 | 19,4 | 19,4 | 19,4 | 19,4 | 19,5 | 19,5 | 19,5 | 19,5 | 19,5 |
| 3 | 8,74 | 8,70 | 8,66 | 8,64 | 8,62 | 8,59 | 8,57 | 8,55 | 8,53 |
| 4 | 5,91 | 5,86 | 5,8 | 5,77 | 5,75 | 5,72 | 5,69 | 5,66 | 5,63 |
| 5 | 4,68 | 4,62 | 4,56 | 4,53 | 4,50 | 4,46 | 4,43 | 4,40 | 4,37 |
| 6 | 4,00 | 3,94 | 3,87 | 3,84 | 3,81 | 3,77 | 3,74 | 3,70 | 3,67 |
| 7 | 3,57 | 3,51 | 3,44 | 3,41 | 3,38 | 3,34 | 3,30 | 3,27 | 3,23 |
| 8 | 3,28 | 3,22 | 3,15 | 3,12 | 3,08 | 3,04 | 3,01 | 2,97 | 2,93 |
| 9 | 3,07 | 3,01 | 2,94 | 2,90 | 2,86 | 2,83 | 2,79 | 2,75 | 2,71 |
| 10 | 2,91 | 2,85 | 2,77 | 2,74 | 2,70 | 2,66 | 2,62 | 2,58 | 2,54 |
| 11 | 2,79 | 2,72 | 2,65 | 2,61 | 2,57 | 2,53 | 2,49 | 2,45 | 2,40 |
| 12 | 2,69 | 2,62 | 2,54 | 2,51 | 2,47 | 2,43 | 2,38 | 2,34 | 2,30 |
| 13 | 2,60 | 2,53 | 2,46 | 2,42 | 2,38 | 2,34 | 2,3 | 2,25 | 2,21 |
| 14 | 2,53 | 2,46 | 2,39 | 2,35 | 2,31 | 2,27 | 2,22 | 2,18 | 2,13 |
| 15 | 2,48 | 2,40 | 2,33 | 2,29 | 2,25 | 2,20 | 2,16 | 2,11 | 2,07 |
| 16 | 2,42 | 2,35 | 2,28 | 2,24 | 2,19 | 2,15 | 2,11 | 2,06 | 2,01 |
| 17 | 2,38 | 2,31 | 2,23 | 2,19 | 2,15 | 2,10 | 2,06 | 2,01 | 1,96 |
| 18 | 2,34 | 2,27 | 2,19 | 2,15 | 2,11 | 2,06 | 2,02 | 1,97 | 1,92 |
| 19 | 2,31 | 2,23 | 2,16 | 2,11 | 2,07 | 2,03 | 1,98 | 1,93 | 1,88 |
| 20 | 2,28 | 2,20 | 2,12 | 2,08 | 2,04 | 1,99 | 1,95 | 1,90 | 1,84 |
| 21 | 2,25 | 2,18 | 2,10 | 2,05 | 2,01 | 1,96 | 1,92 | 1,87 | 1,81 |
| 22 | 2,23 | 2,15 | 2,07 | 2,03 | 1,98 | 1,94 | 1,89 | 1,84 | 1,78 |
| 23 | 2,20 | 2,13 | 2,05 | 2,01 | 1,96 | 1,91 | 1,86 | 1,81 | 1,76 |
| 24 | 2,18 | 2,11 | 2,03 | 1,98 | 1,94 | 1,89 | 1,84 | 1,79 | 1,73 |
| 25 | 2,16 | 2,09 | 2,01 | 1,96 | 1,92 | 1,87 | 1,82 | 1,77 | 1,71 |
| 30 | 2,09 | 2,01 | 1,93 | 1,89 | 1,84 | 1,79 | 1,74 | 1,68 | 1,62 |
| 40 | 2,00 | 1,92 | 1,84 | 1,79 | 1,74 | 1,69 | 1,64 | 1,58 | 1,51 |
| 60 | 1,92 | 1,84 | 1,75 | 1,70 | 1,65 | 1,59 | 1,53 | 1,47 | 1,39 |
| 120 | 1,83 | 1,75 | 1,66 | 1,61 | 1,55 | 1,50 | 1,43 | 1,35 | 1,25 |
| ∞ | 1,75 | 1,67 | 1,57 | 1,52 | 1,46 | 1,39 | 1,32 | 1,22 | 1,00 |

Пример. Пусть F - случайная величина, распределенная по закону Фишера $F(3, 5)$. $F_{0,95}(3, 5) = 5,41$, т.е. $P(F < 5,41) = 0,95$ (см. пятая строка, третий столбец).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература:

1. Магнус Я.Р. Эконометрика. Начальный курс / Я.Р. Магнус, П.К. Катъшев, А.А. Пересецкий. – М.: Дело, 2000. – 400 с.

2. Прикладная статистика. Основы эконометрика: Учебник для вузов: В 2 т. – 2-е изд., испр. - Т.2: Айвазян С.А. Основы эконометрики / С.А. Айвазян. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 432 с.

Дополнительная литература:

1. Green W.H. Econometric analysis / W.H. Greene. – 4th ed. Prentice-Hall, Inc., 2000. – 1004 p.

2. Maddala G.S. Introduction to econometrics / G.S. Maddala. – 3rd ed. John Wiley&Sons, Ltd., 2001. – 636 p.

Электронные ресурсы:

1. Электронный каталог научной библиотеки Воронежского государственного университета <http://www.lib.vsu.ru/>

2. Социальные и гуманитарные науки. Экономика: Библиографическая база данных. 1986-2002гг. / ИНИОН РАН. – М.: 2003. – (CD-ROM).

О Г Л А В Л Е Н И Е

| | |
|---|----|
| Предисловие | 3 |
| 1. Мультиколлинеарность | 4 |
| 2. Автокоррелированность остатков | 10 |
| 3. АРНС модели | 22 |
| 4. Модели для панельных данных | 34 |
| 5. Модели распределенных лагов | 47 |
| 6. Рекуррентный МНК | 55 |
| 7. Многофакторные адаптивные модели | 60 |
| 8. Модели бинарного выбора | 66 |
| Приложение | 78 |
| Список литературы | 82 |

Рецензент: Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования Воронежского государственного университета В.А. Костин

Составители: Давнис Валерий Владимирович
Тинякова Виктория Ивановна
Мокшина Светлана Ивановна
Воищева Ольга Станиславовна
Щекунских Светлана Станиславовна

Редактор Бунина Т.Д.